Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa de Doutorado em Matemática em Associação

Ampla UFPA-UFAM

# Imersões ppmc em espaços hiperbólicos e imersões plurimínimas em espaços produto

Kelly Alves Marães de Almeida

Manaus-AM

Junho/2017

# Imersões ppmc em espaços hiperbólicos e imersões plurimínimas em espaços produto

por

Kelly Alves Marães de Almeida

sob orientação do

Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuy

e coorientação do

Professor Dr. Gudlaugur Thorbergsson

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM

Junho/2017

# Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).


A447i Almeida, Kelly Alves Marães de
Imersões PPMC em espaços hiperbólicos e imersões plurimínimas em espaços produto / Kelly Alves Marães de Almeida. 2017
52 f.: 31 cm.

Orientador: Renato de Azevedo Tribuzy
Coorientador: Gudlaugur Thorbergsson
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Imersão plurimínima. 2. Imersão ppmc. 3. Variedades Kähler. 4. Pluri-curvatura média paralela. I. Tribuzy, Renato de Azevedo II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Kelly Alves Marães de Almeida

# Imersões ppmc em espaços hiperbólicos e imersões plurimínimas em espaços produto

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 30 de junho de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Ernani de Souza Ribeiro Junior (Membro)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Juliana F.R. de Miranda

Profª. Drª. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (Membro)
Universidade Federal do Ceará - UFC

João Lucas Marques Barbosa

Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa (Membro externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Inês Silva de Oliveira Padilha

Profª. Drª. Inês Silva de Oliveira Padilha (Membro externo)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

*Dedico este trabalho ao meu esposo Marcelo, ao meu filho Marcelo Filipe e à minha mãe Maria das Graças.*

# Agradecimentos

Sou profundamente grata a Deus por cada momento vivido durante a realização deste doutorado, no qual aprendi não apenas matemática, mas preciosas lições para toda vida.

Agradeço ao querido professor Dr. Renato Tribuzy pelo apoio em todos os momentos, especialmente nos mais difíceis, pela confiança desde sempre, e pela orientação na elaboração deste trabalho.

Ao meu esposo Marcelo e ao meu filho Marcelo Filipe pelo companheirismo e compreensão em todos os momentos.

À minha mãe, Graça, que sempre incentivou-me em meus estudos.

À minha tia Darcyr, por cuidar do meu filho enquanto eu estudava.

Aos amigos Ponciano e Kelly Karina com os quais dividi a sala, as ideias, as tristezas, os desesperos e as muitas alegrias.

À minha companheira de estudo nos primeiros anos do doutorado, Juliana, pelas trocas de ideias e pelo seu incentivo.

À Rose, por dividir a sala e pela disposição em ouvir-me sempre.

Aos demais colegas do doutorado, egressos ou não, por todas as contribuições.

Ao professor Dr. Cícero Mota por todo apoio durante o curso e pela ajuda com os relatórios da UEA.

Ao professor Dr. Nazareno Gomes pelas aulas, pelas dicas, pelas palavras de ânimo sempre na hora certa.

Aos professores Drs. José Kennedy, Júlio Rodriguez, Victor Ayala, Stephan Ehbauer, Marcus Marrocos e Fernando Vera, pelos ensinamentos nas disciplinas.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da UFAM por todo apoio e incentivo.

À Universidade do Estado Amazonas pela liberação, e, em particular, aos meus colegas do Colegiado de Matemática pela confiança.

Aos queridos irmãos da IPICN e demais amigos pelas orações.

À FAPEAM pelo apoio financeiro.

Ao CNPq pela bolsa de doutorado sanduíche.

E finalmente, ao Professor Dr. Gudlaugur Thorbergsson, que recebeu a mim e a minha família com muita hospitalidade em Colônia, na Alemanha, durante o doutorado sanduíche, externo minha profunda gratidão pela sua dedicada orientação e pelos ensinamentos. Agradeço também ao Instituto de Matemática da Universidade de Colônia pelo espaço cedido para realização das atividades, à sra Jenkins (secretária do Professor Thorbergsson na ocasião) e toda equipe do International Office pela assistência prestada desde antes da viagem à Alemanha.

# Resumo

Neste trabalho provamos que variedades Kähler imersas mínima ou pluriminimante no espaço produto $E^n(c) \times \mathbb{R}$, onde $E^n(c)$ é um espaço de curvatura seccional constante $c \neq 0$, são superfícies. Enquanto as imersas pluriminimamente em $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ admitem um aberto denso folheado por subvariedades holomorfas ou anti-holomorfas de $\mathbb{C}P^n$. Além disso, para variedades Kähler compactas com primeira classe de Chern positiva, provamos que as imersões pluríminimas em $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ são holomorfas em $\mathbb{C}P^n$. Estudamos também imersões ppmc semi-isotrópica de variedades Kähler no espaço hiperbólico e concluímos que, ou elas são decomponíveis no espaço de Lorentz, ou são provenientes de imersões ppmc no $\mathbb{R}^n$, ou são imersões de superfícies com curvatura média paralela. Como consequência, verificamos que imersões ppmc de variedades Kähler com primeira classe de Chern positiva no espaço hiperbólico ou são decomponíveis no espaço de Lorentz, ou são provenientes de imersões ppmc no $\mathbb{R}^n$.

**Palavras-chave:** Imersão plurimínima, imersão ppmc, variedades Kähler, Pluri-curvatura média paralela.

# Abstract

Let $E^n(c)$ be a space of constant sectional curvature $c \neq 0$. We prove that minimal or pluriminimal Kähler submanifolds in $E^n(c) \times \mathbb{R}$ are surfaces. For a pluriminimal immersed submanifold into $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, there exists a dense open subset that it admits a foliation by holomorphics (or antiholomorphics) submanifolds of $\mathbb{C}P^n$. We investigate pluriminimal immersions of compact Kähler manifolds with first Chern class positive into $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$. In this case, it is holomorphic (antiholoforphic) in the first factor. In addition, for a half isotropic ppmc immersion of Kähler manifolds into hyperbolic space we have that either it is decomposable in Lorentz space, or it comes from ppmc immersion of $\mathbb{R}^n$ or it is immersion of surfaces with parallel mean curvature. We also prove that ppmc immersion of compact Kähler manifolds with positive first Chern class into hyperbolic space either it is decomposable in Lorentz space, or it comes from ppmc immersion of $\mathbb{R}^n$.

**Keywords:** pluriminimal immersion, ppmc immersion, Kähler manifolds, parallel plurimean curvature.

# Sumário

# Introdução

Uma variedade Kähler é uma variedade complexa hermitiana cuja estrutura complexa é paralela. Essa noção foi introduzida pelo matemático alemão Erich Kähler em seu artigo *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik* (Uma métrica hermitiana notável) [21]. Desde então muitas pesquisas foram desenvolvidas com tais variedades. O estudo de variedades Kähler imersas isometricamente no $\mathbb{R}^n$ ou em outros espaços, por exemplo, tem sido tema de pesquisa de vários matemáticos [3], [5], [6], [7],[15], [16], [18], [19], [17], [26], [27], [29] e [30].

Uma classe importante de tais imersões isométricas são as mínimas, ou seja, aquelas em que o vetor curvatura média $H$ é identicamente nulo. Estas porém, são vistas como caso particular das imersões cuja segunda forma fundamental $\alpha$ satisfaz

$$\alpha(X, JY) = \alpha(JX, Y),$$

as quais são chamadas imersões pluriminimas, outrora conhecidas como circulares.

O estudo de imersões de variedades Kähler nos conduzem a uma decomposição da segunda forma fundamental em tipos da seguinte forma: considerando que o fibrado complexificado de uma variedade Kähler $M$ se decompõe na soma direta de dois subfibrados, que são exatamente os autofibrados $T'$ e $T''$ respectivamente associados aos autovalores $i$ e $-i$ da estrutura quase complexa $J$, a segunda forma fundamental $\alpha$ se decompõe em

$$\alpha^{(2,0)} = \alpha|_{T' \times T'}, \qquad \alpha^{(1,1)}|_{T' \otimes T''} \quad \text{e} \quad \alpha^{(2,0)} = \alpha|_{T'' \times T''}.$$

A componente $\alpha^{(1,1)}$ é chamada pluri-curvatura média, pois para qualquer curva complexa $C \subset M$, temos $\alpha^{(1,1)} = \langle , \rangle \eta$, onde $\eta$ é o vetor curvatura média da superfície $f|_C$, onde $f$ é a imersão de $M$, conforme [3]. Se a pluri-curvatura média é nula, temos uma imersão plurimínima.

Dajczer e Gromoll provaram em [5], que as únicas subvariedades plurimínimas em um espaço de curvatura seccional constante diferente de zero são superfícies. Em [6] os autores mostraram que variedades Kähler mínimas em $\mathbb{R}^n$ são plurimínimas e em $\mathbb{H}^n$ são superfícies. De modo um pouco mais geral que $\mathbb{R}^n$, vemos em [16], que imersões em espaços localmente simétricos de tipo não compacto, mínima é equivalente a pluríminima. Além disso, os autores também mostraram que mínimas (plurimínimas) em variedades Rimannianas negativamente $\frac{1}{4}-$pinched (positivamente $\frac{1}{4}-$pinched) são superfícies.

Imersões holomorfas e anti-holomorfas constituem exemplos de variedades plurimínimas. Mas sob quais condições imersões plurmínimas são holomorfas (ou anti-holomorfas)? Em [7], Dajczer e Thorbergsson mostraram que plurimínimas em $\mathbb{C}P^n$ são holomorfas ou anti-holomorfas se a dimensão de $M$ é maior que 1. Ferreira, Rigoli e Tribuzy mostraram em [16] resultado semelhante para as Grassmmannianas complexas $G_p(\mathbb{C}^n)$ impondo que a dimensão de $M$ seja maior que $(p-1)(n-p-1)+1$.

Nosso interesse foi estudar imersões mínimas e plurimínimas de variedades Kähler nos espaços produtos $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ e $E^n(c) \times \mathbb{R}$, onde $E^n(c)$ é um espaço forma de curvatura seccional constante $c \neq 0$.

Utilizando a equação de Gauss e a expressão da curvatura de $E^n(c) \times \mathbb{R}$, mostramos que se $c < 0$ e a imersão é mínima, então $M$ é uma superfície. O mesmo acontece quando a imersão é plurimínima, inclusive quando $c > 0$. Assim obtivemos os seguintes teoremas.

**Teorema 1.** *Sejam $M$ uma variedade Kähler, de dimensão complexa $m$, e $E^n(c)\times\mathbb{R}$ uma variedade produto, onde $E^n(c)$ é um espaço de curvatura constante $c<0$. Se $f: M \longrightarrow E^n(c)\times\mathbb{R}$ é uma imersão isométrica mínima, então $m=1$.*

e

**Teorema 2.** *Sejam $M$ uma variedade Kähler, de dimensão complexa $m$, e $E^n(c)\times\mathbb{R}$ uma variedade produto, onde $E^n(c)$ é um espaço de curvatura constante $c\neq 0$. Se $f: M \longrightarrow E^n(c)\times\mathbb{R}$ é uma imersão isométrica plurimínima, então $m=1$.*

Quando a pluri-curvatura média é produto da métrica pelo vetor curvatura média dizemos que $P$ é totalmente umbílico, em que $P=\alpha^{(1,1)}|_{TM\times TM}$. Imersões com estas propriedades foram estudadas por Ferreira e Tribuzy em [18]. Eles mostraram que em espaços de curvatura seccional constante $c$, $M$ é superfície para $c>0$, e quando $c\leq 0$, $M$ é superfície ou satisfaz $|H|^2=\sqrt{-c}$. Em $\mathbb{C}P^n$, imersões com $P$ totalmente umbílico são, ou imersões de superfícies ou imersões holomorfas ou anti-holomorfas.

Mostramos resultados semelhantes para imersões em $E^n(c)\times\mathbb{R}$.

**Proposição 1.** *Seja $f: M^m \longrightarrow E^n(c)\times\mathbb{R}$ uma imersão isométrica com $P$ totalmente umbílico.*
*i) Se $c<0$, então $m=1$ ou $\|H\|=\sqrt{\frac{c}{m}(\|T\|^2-m)}$;*
*ii) Se $c>0$, então $m=1$.*

Para imersões em $\mathbb{C}P^n\times\mathbb{R}$ tomamos a distribuição horizontal $\mathcal{D}$ e mostramos que, quando a imersão é plurimínima, ela é integrável e satisfaz a condição de holomorfia ou anti-holomorfia para dimensão maior que 2.

**Lema 1.** *Para $m>2$ a distrubuição $\mathcal{D}$ satisfaz $\widetilde{J}|_{\mathcal{D}}=\pm J$.*

$J$ e $\widetilde{J}$ são as estruturas quase complexas de $M$ e $\mathbb{C}P^n$, respectivamente.

**Lema 2.** *A distribuição $\mathcal{D}$ é integrável.*

Com isso conseguimos obter uma folheação de $M$ por subvariedades holomorfas ou anti-holomorfas de $\mathbb{C}P^n$.

**Teorema 3.** *Seja $M$ uma variedade Kähler de dimensão complexa $m > 2$ e $f : M \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica plurimínima. Então $M$ é folheada por subvariedades holomorfas ou antiholomorfas de $\mathbb{C}P^n$.*

Verificamos ainda que quando o vetor normal unitário e paralelo $\xi$ de $\mathbb{R}$ é tangente a $M$ em todo ponto, a distribuição $\mathcal{D}$ bem como a distribuição ortogonal a ela são paralelas, e assim usando o teorema da decomposição de De Rham concluímos que:

**Proposição 2.** *Seja $M$ uma variedade Kähler de dimensão complexa $m > 2$ e $f : M \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, tal que $\xi \in TM$. Então $M$ é um produto $M_1 \times M_2$ onde $M_2$ é uma superfície.*

Definindo em $M$ a forma quadrática $Q(X,Y) = \langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle$, verificamos que sua parte $(2,0)$ é holomorfa. Assim, supondo que $M$ seja compacta e tenha primeira classe de Chern positiva, usamos um resultado de Kobayashi e Wu [23] para concluir que $Q$ é nula e conseguimos então o lema:

**Lema 3.** *Se $M$ é compacta com primeira classe de Chern positiva, então $\xi$ é ortogonal a $TM$.*

Do lema acima e do fato da distribuição satisfazer a condição de holomorfia decorre o seguinte teorema.

**Teorema 4.** *Seja $M^m$ uma variedade Kähler, de dimensão complexa $m > 1$, compacta com primeira classe de Chern positiva e $f : M \longrightarrow \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica plurimínima. Então $M$ é holomorfa ou antiholoforma em $\mathbb{C}P^n$.*

Outra classe interessante de imersões de variedades Kähler, são aquelas em que a pluri-curvatura média é paralela. A estas chamamos de imersões ppmc e tem sido amplamente estudadas por Escheburg, Ferreira e Tribuzy [3], [9], [10], [11], [12] e [19].

Uma imersão ppmc é dita semi-isotrópica se satizfaz

$$\left\langle \alpha^{(2,0)}, \alpha^{(2,0)} \right\rangle = 0 \text{ e } \left\langle \alpha^{(2,0)}, \eta \right\rangle = 0$$

para todo campo paralelo $\eta \in N^0 = span\{\alpha(X, \overline{Y}); X, Y \in T'\}$. Estudamos tais imersões no espaço hiperbólico e obtivemos o seguinte resultado:

**Teorema 5.** *Seja $M$ uma variedade Kähler e $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^n$ uma imersão ppmc semi-isotrópica. Então uma das condições ocorre:*
*i) $f$ é decomponível no espaço de Lorentz;*
*ii) $f$ é obtida a partir de uma imersão ppmc do $\mathbb{R}^n$ como nos Exemplos 2.3 e 2.5;*
*iii) $M$ é uma superfície de curvatura média paralela.*

Os exemplos mencionados no item ii) do teorema são casos em que $f(M)$ está em uma esfera geodésica ou em uma horoesfera, as quais são subvariedades umbílicas de $\mathbb{H}^n$ e podem ser obtidas pela interseção das esferas e dos hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ com o espaço hiperbólico considerado como o semi-espaço superior de $\mathbb{R}^n$ com métrica conforme a métrica euclidiana. Usando a hipótese de semi-isotropia, obtivemos o paralelismo do operador de forma na direção do vetor curvatura média $A_H$. Admitindo autovalores distintos para $A_H$, usamos o teorema de decomposição de De Rham para decompor a variedade $M$ e aplicando o lema de Moore para espaço de Lorentz concluímos o item i), que significa que $i \circ f$ é um produto de imersões ($i$ é a inclusão de $\mathbb{H}^n$ no espaço de Lorentz). Admitindo que exista um único autovalor para $A_H$, o qual deve ser não nulo, $M$ será imersa minimamente em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^n$ com curvatura seccional constante igual a $\|H\|^2 - 1$. Então sob análise da curvatura média $\|H\|$ obtivemos os itens ii) e iii).

Em [9] os autores estudaram imersão ppmc de uma variedade Kähler compacta com primeira classe de Chern positiva e codimensão menor que ou igual a 4 e obtiveram uma caracterização para o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^2$ e para a quádrica $Q^3$. Considerando o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ e sem restringir a codimensão obtivemos, como corolário do teorema anterior, o seguinte resultado:

**Corolário 1.** *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^n$ uma imersão ppmc de uma variedade Kähler compacta com primeira classe de Chern positiva. Então uma das condições ocorre:*
*i) $f$ é decomponível no espaço de Lorentz;*
*ii) $\|H\| > 1$ e $f$ é obtida a partir de uma imersão ppmc do $\mathbb{R}^n$ como no Exemplo 2.3;*

Usando um resultado de Kobayashi e Wu, em [23], o qual afirma que uma variedade Kähler compacta com primeira classe de Chern positiva não admite p-formas, $p \geq 1$, holomorfas não nulas, concluímos que a imersão é semi-isotrópica e portanto podemos usar o teorema anterior, excluindo apenas os casos em que a variedade imersa não pode ser compacta, os quais foram observados na demonstração do mesmo.

# Capítulo 1

# Imersões de Variedades Kähler e a Pluri-curvatura média

## 1.1 Estruturas quase complexas

Seja $V$ um espaço vetorial complexo de dimensão complexa $m$. Pela operação restrição do corpo de escalares $\mathbb{C}$ para $\mathbb{R}$ podemos vê-lo como espaço vetorial real o qual denotaremos por $V_{\mathbb{R}}$. A transformação linear em $V$ resultante da aplicação da multiplicação por $i$ pode ser vista em $V_{\mathbb{R}}$ como um operador linear $J : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$ tal que $J^2 = -id$. Neste caso, se $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base de $V$ sobre $\mathbb{C}$ podemos verificar que $\{e_1, Je_1, ..., e_m, Je_m\}$ é uma base de $V_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$, de modo que $dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2dim_{\mathbb{C}} V$.

Agora, consideremos que $V$ seja um espaço vetorial real. Chamamos de **estrutura complexa** em $V$ a um endomorfismo linear $J : V \longrightarrow V$ que satisfaz $J^2 = -id$.

Dado um espaço vetorial real $V$ munido de uma estrututa complexa $J$, temos que $dimV = 2m$. Além disso,

i) podemos escolher uma base $\{e_1, e'_1, ..., e_m, e'_m\}$ para $V$, tal que $Je_k = e'_k$ e

$Je'_k = -e_k$, para $k = 1, ..., m$;

ii) podemos tornar $V$ um espaço vetorial complexo de dimensão complexa $m$ definindo a multiplicação por escalar complexo como sendo $(a + bi)v = av + bJv$. Assim, com as notações do item i), $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base de $V$ sobre $\mathbb{C}$. [1]

**Definição 1.1.** *Uma estrutura quase complexa sobre uma variedade diferenciável de dimensão* $2m$ *é um campo tensorial* $J$*, que a cada* $p \in M$ *associa uma estrutura complexa em* $T_pM$*.*

Uma variedade munida de uma estrutura quase complexa é chamada **variedade quasi-complexa**.

**Definição 1.2.** *Uma variedade complexa* $M$ *de dimensão complexa* $m$ *é uma variedade diferenciável de dimensão real* $2m$*, munida de um atlas formado por cartas* $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2m}$ *satisfazendo a seguinte condição:*
*Se* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$*, então a mudança de coordenadas*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

*é uma função holomorfa de* $m$ *variáveis. Neste caso, cada* $\varphi_\alpha$ *é uma carta coordenada holomorfa, ou ainda, um sistema de coordenadas complexas em* $M$ *e* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *é um atlas complexo.*

Toda variedade complexa admite uma estrutura quase complexa natural. [2]

## 1.2 Variedades Kähler e seu Fibrado Complexificado

Seja $(M^m, \langle , \rangle)$ uma variedade riemanniana complexa de dimensão complexa $m$ com estrutura quase complexa $J$. Dizemos que $\langle , \rangle$ é uma **métrica hermitiana**

[1] Para demonstração destes fatos, veja [4]

[2] Para mais detalhes veja [22]

se ela é $J-$invariante, ou seja,

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \forall X, Y \in TM.$$

Note que neste caso $J$ é uma isometria. Além disso, vale a igualdade

$$\langle X, JY\rangle = -\langle JX, Y\rangle, \forall X, Y \in TM.$$

Uma variedade riemanniana complexa munida de uma estrutura quase complexa, cuja a métrica é hermitiana, é chamada **variedade hermitiana**. Neste caso a 2-forma diferencial definida por

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$$

para $X, Y$ tangentes a $M$, é chamada **forma Kähler**.

**Definição 1.3.** *Uma variedade hermitiana $M$ com forma Kähler fechada é chamada variedade Kähler.*

Seja $\nabla$ a conexão de $M$. Então a forma Kähler é fechada se, somente se, $J$ é paralelo, ou seja, $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in TM$. De fato, dados $X, Y, Z \in TM$

$$d\omega(X, Y, Z) = (\nabla_X\omega)(Y, Z) - (\nabla_Y\omega)(X, Z) - (\nabla_Z\omega)(X, Y).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\nabla_X\omega)(Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= X\langle JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle \\ &= \langle (\nabla_X J)Y, Z\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\nabla_X\omega = 0$ se, e somente se, $\nabla_X J = 0$.

Podemos então pensar em uma variedade Kähler como uma variedade riemanniana complexa munida de uma estrutura quase complexa paralela que é uma isometria.

**Exemplo 1.1.** *Como exemplos básicos de variedades Kähler temos: o espaço vetorial* $\mathbb{C}^n$ *com a métrica Euclidiana e a estrutura quase complexa canônica; as superfícies riemannianas orientáveis munidas com o atlas formado por cartas isotérmicas positivas e estrutura complexa canônica; os produtos de variedades Kähler munidos com a métrica produto e a estrutura complexa produto.*

Seja $M$ uma variedade Kähler conexa de dimensão complexa $m$. Ao longo deste trabalho, pensaremos sempre no espaço tangente como espaço vetorial real. Para cada $p \in M$ a estrutura complexa $J_p$ estende-se a uma estrutura complexa no espaço tangente complexificado $T_p^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in T_pM\}$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} J_p \ : \ & T_p^{\mathbb{C}}M \to T_p^{\mathbb{C}}M \\ & X + iY \mapsto J_p(X) + iJ_p(Y). \end{aligned}$$

Sejam $T_p'$ e $T_p''$ os autoespaços associados a $i$ e $-i$, respectivamente. Então

$$T_p' = \{X - iJ_p(X); X \in T_pM\} \text{ e } T_p'' = \{X + iJ_p(X); X \in T_pM\}.$$

Dessa maneira o fibrado complexificado $T^{\mathbb{C}}M$ se decompõe como soma direta dos subfibrados $T'$ e $T''$, que são os autofibrados associados aos autovalores $i$ e $-i$ de $J$. Por simplificação denotamos $T'' = \overline{T'}$.

Dados $X \in T^{\mathbb{C}}M$ denotaremos por $X'$ e $X''$ as componentes de $X$ em $T'$ e $T''$ respectivamente.

Definimos em $T^{\mathbb{C}}M$ um produto hermitiano como segue: primeiro estendemos $\langle , \rangle_p$ a $T_p^{\mathbb{C}}M$ bilinearmente sobre o corpo dos complexos fazendo

$$\langle iX, Y \rangle_p = \langle X, iY \rangle_p = i \langle X, Y \rangle_p , \forall X, Y \in T_pM.$$

A seguir definimos

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle_p = \langle X, \overline{Y} \rangle_p$$

o qual é um produto interno hermitiano em $T_p^{\mathbb{C}}M$.

Observe que em relação a este produto, $T'$ e $T''$ são ortogonais. De fato, dados $X, Y \in TM$

$$\begin{aligned}
\langle\langle X - iJX, Y + iJY\rangle\rangle &= \langle X - iJX, Y - iJY\rangle \\
&= \langle X, Y\rangle - \langle JX, JY\rangle - i\langle X, JY\rangle - i\langle JX, Y\rangle \\
&= \langle X, Y\rangle - \langle X, Y\rangle - i\langle X, JY\rangle + i\langle X, JY\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Note ainda que isto é equivalente a $\langle T', T'\rangle = 0$ e $\langle T'', T''\rangle = 0$. Dizemos então que $T'$ e $T''$ são isotrópicos em relação a extensão $\mathbb{C}-$bilinear de $\langle , \rangle$.

Agora vamos estender a conexão de Levi-Civita de $M$ a $T^{\mathbb{C}}M$ linearmente no sentido complexo, ou seja,

$$\nabla_{iX} Y = \nabla_X iY = i\nabla_X Y,\ \forall X, Y \in TM.$$

Essa extensão é compatível com a extensão da métrica $\langle , \rangle$. Sendo $J$ paralelo podemos observar que sua extensão ao complexificado também é paralela. Assim quaisquer que sejam $X \in T^{\mathbb{C}}M$ e $Y \in T'$ temos

$$\begin{aligned}
J\left(\nabla_X Y\right) = \nabla_X \left(JY\right) = \nabla_X \left(iY\right) = i\nabla_X Y \quad &\Rightarrow \quad \nabla_X Y \in T' \\
J\left(\nabla_X \overline{Y}\right) = \nabla_X \left(J\overline{Y}\right) = \nabla_X \left(-i\overline{Y}\right) = -i\nabla_X \overline{Y} \quad &\Rightarrow \quad \nabla_X \overline{Y} \in T''.
\end{aligned}$$

Portanto $T'$ e $T''$ são subfibrados paralelos.

Também podemos estender $R$ de maneira natural por

$$R(iX, Y)Z = R(X, iY)Z = R(X, Y)iZ = iR(X, Y)Z.$$

**Lema 1.1.** *Se $A, B \in T'$, então $R(A, B) \equiv R(\overline{A}, \overline{B}) \equiv 0$.*

*Demonstração.* Primeiro note que pela definição do tensor curvatura e o fato de $T'$ e $T''$ serem paralelos, temos, para todo $X, Y \in T^{\mathbb{C}}M$,

$$R(X, Y)A \in T' \text{ e } R(X, Y)\overline{A} \in T''. \tag{1.1}$$

Assim, pela isotropia de $T'$, temos

$$\langle R(A,B)X,\overline{Y}\rangle = \langle R(X,\overline{Y})A,B\rangle = 0,$$

donde

$$\langle\langle R(A,B)X,Y\rangle\rangle = 0, \forall X,Y \in T^{\mathbb{C}}M.$$

Analogamente

$$\langle\langle R(\overline{A},\overline{B})X,Y\rangle\rangle = 0.$$

$\square$

Como consequência deste lema, para $A,B \in T_p^{\mathbb{C}}M$, temos

$$\begin{aligned}
R(JA,JB) &= R(JA' + JA'', JB' + JB'') \\
&= R(JA',JB') + R(JA',JB'') + R(JA'',JB') + R(JA'',JB'') \\
&= R(iA',-iB'') + R(-iA'',iB') \\
&= R(A',B'') + R(A'',B') \\
&= R(A',B') + R(A',B'') + R(A'',B') + R(A'',B'') \\
&= R(A,B)
\end{aligned}$$

e de (1.1) segue

$$\begin{aligned}
R(A,B)JC &= R(A,B)(JC' + JC'') \\
&= R(A,B)(iC') + R(A,B)(-iC'') \\
&= iR(A,B)C - iR(A,B)C'' \\
&= JR(A,B)C' + JR(A,B)C'' \\
&= J(R(A,B)C).
\end{aligned}$$

Em particular, para $X,Y \in TM$

$$R(X,Y)\circ J = J\circ R(X,Y) \text{ e } R(JX,JY) = R(X,Y).$$

Seja $X_p \in T_pM$ não nulo. A **curvatura seccional holomorfa** $K(X_p)$ de $M$ em $p$ é a curvatura seccional de $M$ segundo o plano gerado por $X_p$ e $J_pX_p$. Dizemos que $M$ tem curvatura seccional holomorfa constante $c$ se $K(X_p) = c$, para todo $p \in M$ e $X_p \in T_pM\backslash\{0\}$. Neste caso, temos que o tensor curvatura é dado por

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \frac{c}{4}(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle + \langle X,JW\rangle\langle Y,JZ\rangle \\ &\quad -\langle X,JZ\rangle\langle Y,JW\rangle - 2\langle X,JY\rangle\langle Z,JW\rangle),\end{aligned} \tag{1.2}$$

(para mais detalhes ver [22]).

Sabemos que se $\{e_1,...,e_m\}$ é um referencial unitário sobre um aberto $U \subset M$, então podemos obter um referencial ortonormal

$$\{e_1, J(e_1), ..., e_m, J(e_m)\}. \tag{1.3}$$

Definamos

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - iJe_k), k = 1,...,m.$$

Temos que $\{E_1,...,E_m\}$ é uma base unitária de $T'$. De fato, se $X \in TU$ então escrevemos, de modo único, $X = \sum_{k=1}^{n}(a_ke_k + b_kJe_k), a_k, b_k \in \mathcal{C}(U)$, onde $\mathcal{C}(U)$ é o anel das funções suaves sobre $U$. Então

$$\begin{aligned} X - iJ(X) &= \sum_{k=1}^{n}(a_ke_k + b_kJe_k) - i\sum_{k=1}^{n}(a_kJe_k - b_ke_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(e_k - iJe_k) + ib_k(e_k - iJe_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}a_k\frac{e_k - iJe_k}{\sqrt{2}} + i\sqrt{2}b_k\frac{e_k - iJe_k}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{2}(a_k + ib_k)E_k. \end{aligned}$$

Analogamente $\left\{\overline{E_1}, ..., \overline{E_n}\right\}$ é uma base unitária de $T''$.

O tensor de Ricci é dado por

$$Ric(X,Y) = tr\{V \mapsto R(V,X)Y\}$$

e satisfaz

$$Ric(JX,JY) \quad = \quad Ric(X,Y)$$

para todo $X, Y \in TM$

De fato, considerando o referencial (1.3) temos

$$\begin{aligned} Ric(JX,JY) &= \sum_{k=1}^{m}(\langle R(JX,e_k)e_k,JY\rangle + \langle R(JX,Je_k)Je_k,JY\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{m}(\langle R(X,Je_k)Je_k,Y\rangle + \langle R(X,e_k)e_k,Y\rangle) \\ &= Ric(X,Y). \end{aligned}$$

Associada ao tensor de Ricci temos uma 2-forma antissimétrica dada por

$$\rho(X,Y) = Ric(JX,Y), \tag{1.4}$$

a qual chamamos de **forma Ricci**.

Duas formas $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ fechadas são ditas cohomólogas se $\alpha - \beta$ é exata. Isto define uma relação de equivalência no subconjunto $E$ das formas fechadas em $\Omega^p(M)$. A classe de equivalência $\overline{\alpha} = \{\omega \in E; \omega - \alpha = d\eta \; para \; algum \; \eta \in \Omega^{p-1}(M)\}$ é chamada classe de cohomologia de De Rham e o conjunto de tais classes é o $p$-ésimo grupo de cohomologia de De Rham, denotado por $H^p(M)$. Dizemos que uma classe de cohomologia em $H^2(M)$ é positiva (resp. negativa) se ela pode ser representada por uma 2-forma positiva (resp. negativa).

A forma Ricci é fechada [3] e portanto define uma classe de cohomologia, ou seja, um elemento de $H^2(M)$.

A forma dada por $\dfrac{\rho}{2\pi}$ representa uma classe de cohomologia conhecida como **Primeira Classe de Chern**. Esta classe independe da métrica, pois se $\rho'$ é

[3] Para uma demonstração, veja proposição 4.9 de [22]

a forma Ricci associada a outra métrica Kähler, então $\rho - \rho'$ é cohomologa a forma nula. As variedades complexas compactas com primeira classe de Chern positiva são exatamente aquelas que admitem uma métrica Kähler com forma Ricci positiva. Indicamos [2] para mais detalhes.

Kobayashi e Wu mostraram em [23] que variedades complexas compactas com primeira classe de Chern positiva não admitem formas holomorfas não nulas.

Descreveremos agora um exemplo importante de variedade Kähler.

### 1.2.1 O Espaço Projetivo Complexo

Chamamos de **espaço projetivo complexo** de dimensão complexa $n$ denotado por $\mathbb{C}P^n$, ao conjunto de todas as retas complexas de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Considerando a ação [4] do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, dada por

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda z \end{array}$$

temos que o grupo quociente $\dfrac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$ tem estrutura de variedade complexa definida pela família de vizinhanças coordenadas $U_k = \pi(V_k)$ com sistema de coordenadas locais $\dfrac{z_0}{z_k}, ..., \dfrac{z_{k-1}}{z_k}, \dfrac{z_{k+1}}{z_k}, ..., \dfrac{z_n}{z_k}$, em que $z_0, ..., z_n$ é o sistema de coordenadas naturais em $\mathbb{C}^{n+1}$, $V_k$ é um conjunto de pontos de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ com $z_k \neq 0$ e $\pi$ a projeção canônica

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{C}^*} \\ z = (z_0, ..., z_k, ..., z_n) & \longmapsto & \left[\dfrac{z_0}{z_k}, ..., \dfrac{z_{k-1}}{z_k}, \dfrac{z_{k+1}}{z_k}, ..., \dfrac{z_n}{z_k}\right]. \end{array}$$

[4]Um grupo $G$ age sobre uma variedade diferenciável $M$ se existe uma aplicação $\rho : G \times M \longrightarrow M$ tal que:

(1) $\rho(g, x) = x$, para todo $x \in M$;

(2) $\rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x))$ para todos $g_1, g_2 \in G$ e $x \in M$.

Podemos então identificar $\mathbb{C}P^n$ com $\dfrac{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}{\mathbb{C}^*}$, de modo que $z^1 = \dfrac{z_0}{z_k}, ..., z^k = \dfrac{z_{k-1}}{z_k}, z^{k+1} = \dfrac{z_{k+1}}{z_k}, ..., z^n = \dfrac{z_n}{z_k}$ é chamado sistema de coordenadas não-homogêneas de $\mathbb{C}P^n$ e $z_0, ..., z_n$ é o sistema de coordenadas homogêneas em $\mathbb{C}P^n$.

Uma vez que a restrição da projeção $\pi$ a $\mathbb{S}^{2n+1}$ ainda é sobrejetiva, temos que $\mathbb{C}P^n$ é compacto por ser imagem de um compacto por uma aplicação contínua. Além disso, $\mathbb{C}P^n$ é simplesmente conexo. Estes fatos podem ser estudados com mais detalhes no capítulo 3 de [24].

Usando o sistema de coordenadas não-homogêneas no aberto em $U_k$,

$$t_k^0 = \frac{z_0}{z_k},..., t_k^{k-1} = \frac{z_{k-1}}{z_k}, t_k^{k+1} = \frac{z_{k+1}}{z_k},..., t_k^n = \frac{z_n}{z_k},$$

consideremos as funções

$$f_k = \sum_{k=0}^{n} t_k^j \overline{t}_k^j.$$

Podemos então obter uma forma fechada $\omega$ em $\mathbb{C}P^n$ fazendo

$$\omega = -4i \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha} log f_k$$

em $U_k$.

Definimos então

$$\langle X, Y \rangle = \omega(JX, Y)$$

a qual é uma métrica Kähler, cuja forma Kähler é $\omega$. Tal métrica é conhecida como **métrica Fubini-Study**.

**Teorema 1.1.** *Para qualquer número positivo c, o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ admite uma métrica Kähler de curvatura seccional holomorfa constante c. Com respeito ao sistema de coordenadas não-homogêneas $z^1, ..., z^n$ ela é dada por*

$$ds^2 = \frac{4}{c} \frac{\left(1 + \sum z^k \overline{z}^k\right) \sum dz^k d\overline{z}^k - \sum \overline{z}^k dz^k \sum z^k d\overline{z}^k}{\left(1 + \sum z^k \overline{z}^k\right)^2}.$$

Para demonstração veja Teorema 7.8 em [22].

No que se segue, consideremos $\mathbb{C}P^n$ munido desta métrica.

A ação de $U(n+1)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ induz uma aplicação isométrica de $U(n+1)$ em $\mathbb{C}P^n$, dada por

$$\begin{aligned} U(n+1) \times \mathbb{C}P^n &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ (P, E) &\longmapsto P(E) \end{aligned}$$

onde $E$ é um plano em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Consideremos a reflexão $s$ sobre o plano $E$. Sabemos que

$$s|_E = id \text{ e } s|_{E^\perp} = -id.$$

Assim, $s$ induz uma isometria em $s_p : \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ que fixa o ponto $p = \pi(E) \in \mathbb{C}P^n$ e cuja diferencial nesse ponto é $-id$.

**Definição 1.4.** *Uma variedade riemanniana $M$ é chamada espaço simétrico se para todo ponto $p \in M$ existe uma isometria $s_p : M \longrightarrow M$ tal que $s_p(p) = p$ e $ds_p|_p = -id$*

Diante desta definição, temos que $\mathbb{C}P^n$, com a métrica Fubini-Study, é um espaço simétrico. Em particular, o seguinte teorema é valido para o mesmo.

**Teorema 1.2.** *Seja $M$ um espaço simétrico e $p$ um ponto de $M$. Seja $\mathfrak{k}$ o conjunto dos campos de Killing que se anulam em $p$ e $\mathfrak{p}$ o conjunto das transvecções infinitesimais em $p$, isto é, os campos de Killing com derivada covariante nula em $p$. Então*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k},\ [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \text{ e } [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

*Além disso, a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\longrightarrow T_pM \\ X &\longmapsto X_p \end{aligned}$$

*é um isomorfismo linear, e para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ temos, em $p$,*

$$R(X,Y)Z = [Z,[X,Y]] \tag{1.5}$$

Para demonstração indicamos [8].

## 1.3 Imersões plurimínimas e ppmc

Ao longo desta seção, consideremos $f : M^m \longrightarrow N^n$ uma imersão isométrica de uma variedade Kähler de dimensão complexa $m$ em uma variedade riemanniana $N^n$. Tomemos a extensão $\mathbb{C}$-bilinear da segunda forma fundamental $\alpha$, para a qual usaremos a mesma notação. Denotando ainda por $\widetilde{R}$ e $R^{\perp}$ as extensões $\mathbb{C}$-bilineares dos tensores curvaturas de $N$ e $TM^{\perp}$, temos que as Equações de Gauss, Codazzi e Ricci se estendem a esta situação.

No que diz respeito a extensão da segunda forma fundamental podemos obter a seguinte decomposição: dados $X = X' + X''$ e $Y = Y' + Y''$ em $T^{\mathbb{C}}M$, temos

$$\alpha(X,Y) = \alpha(X',Y') + \alpha(X',Y'') + \alpha(X'',Y') + \alpha(X'',Y'') \tag{1.6}$$

Esta decomposição define os seguintes operadores $\mathbb{C}$-bilineares

$$\begin{aligned}
\alpha^{(2,0)}(X,Y) &= \alpha(X',Y'),\\
\alpha^{(0,2)}(X,Y) &= \alpha(X'',Y'') \;\; e\\
\alpha^{(1,1)}(X,Y) &= \alpha(X',Y'') + \alpha(X'',Y').
\end{aligned}$$

Em particular, se $X$ é um campo real em $T^{\mathbb{C}}M$, então $X' = \frac{1}{2}(X - iJ(X))$ e $X'' = \frac{1}{2}(X + iJ(X))$. Assim, dados $X, Y \in TM \subset T^{\mathbb{C}}M$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1,1)}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left\{\alpha(X,Y) + \alpha(J(X),J(Y))\right\},\\
\alpha^{(2,0)}(X,Y) &= \frac{1}{4}\left\{[\alpha(X,Y) - \alpha(J(X),J(Y))] - i\,[\alpha(X,J(Y)) + \alpha(J(X),Y)]\right\} \;\; e\\
\alpha^{(0,2)}(X,Y) &= \frac{1}{4}\left\{[\alpha(X,Y) - \alpha(J(X),J(Y))] + i\,[\alpha(X,J(Y)) + \alpha(J(X),Y)]\right\}.
\end{aligned}$$

Note que as condições abaixo são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\alpha^{(1,1)}(JX,JY) &= \alpha^{(1,1)}(X,Y),\\ \alpha^{(2,0)}(JX,JY) &= -\alpha^{(2,0)}(X,Y) \;\; e\\ \alpha^{(0,2)}(JX,JY) &= -\alpha^{(0,2)}(X,Y).\end{aligned}$$

Quando $m = 1$, ou seja, $M$ é uma superfície, o operador $\alpha^{(1,1)}$ é exatamente $\langle , \rangle H$, onde $H$ é o vetor curvatura média da imersão. Ademais, quando restrito a qualquer curva complexa $C \subset M$ temos novamente a métrica multiplicada pelo vetor curvatura média de $f|_C$. Por esse motivo o operador $\alpha^{(1,1)}$ é denominado **pluri-curvatura média**.

Além disso, usando o referencial (1.3), vemos que

$$H = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha^{(1,1)}(E_k, \overline{E}_k) \tag{1.7}$$

**Definição 1.5.** *Dizemos que uma imersão é* $(1,1)$*-geodésica ou plurimínima se* $\alpha^{(1,1)} = 0$.

Como exemplo de subvariedades plurimínimas, temos as superfícies mínimas.

Note que por (1.7), plurimínima implica mínima. A recíproca, no entanto, pode não ser válida para dimensão maior que 1. Por exemplo, uma subvariedade extrinsicamente simétrica em $\mathbb{R}^n$ é mínima em alguma hiperesfera [5] mas não é plurimínima, a menos que seja uma superfície, conforme Dajczer e Gromoll em [5]. Neste sentido muitos autores tem estudado condições para as quais minimalidade implica pluriminimalidade. Uma delas é o espaço ambiente, como podemos ver no seguinte teorema:

**Teorema 1.3.** *[Dajczer e Rodrigues [6]] Seja* $f : M^{2m} \longrightarrow Q_c^{2m+p}$ *uma imersão mínima de uma variedade Kähler em um espaço forma de curvatura constante c.*

[5] Ver Ferus [14]

*i) Se $c < 0$, então $m = 1$;*

*ii) Se $c = 0$, então $f$ é circular;*

*iii) Se $c > 0$, então a curvatura de Ricci satisfaz $Ric \leq nc$, com igualdade implicando que a segunda forma fundamental é paralela.*

**Observação 1.1.** *Uma imersão é circular quando $\alpha(X, JY) = \alpha(JX, Y)$, o que é equivalente a plurimínima.*

Outros exemplos de variedades plurimínimas são as subvariedades holomorfas e as anti-holomorfas.

**Definição 1.6.** *Se o espaço ambiente $N$ é hermitiano, $J$ e $\widetilde{J}$ são estruturas quase complexas de $M$ e $N$, respectivamente, então a imersão $f : M^m \longrightarrow N^n$ é holomorfa (anti-holomorfa) se $\widetilde{J}|_{TM} = J$ ($\widetilde{J}|_{TM} = -J$).*

Neste caso, vale $\widetilde{J}\alpha(X, Y) = \alpha(JX, Y) = \alpha(X, JY)$, donde a segunda igualdade é exatamente a condição de circularidade, e portanto $f$ é plurimínima.

Na definição acima, se $\widetilde{J}(TM)$ é normal a $TM$ dizemos que a imersão é totalmente real. Sabemos que imersões mínimas totalmente reais em $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ são exemplos de plurimínimas que não são holomorfas. Em [13] Eschenburg e Tribuzy construiram um exemplo de imersão plurimínima que não é holomorfa nas Grassmannianas.

Finalizaremos esta seção com a seguinte definição.

**Definição 1.7.** *Seja $M$ uma variedade Kähler m-dimensional e $f : M^m \longrightarrow N^n$ uma imersão isométrica. Se $D$ denota a derivada covariante, dizemos que $f$ é ppmc (parallel plurimean curvature) se $D\alpha^{(1,1)} = 0$, ou seja, a pluri-curvatura média é paralela.*

Exemplos clássicos de aplicações ppmc são as imersões mínimas, as imersões extrinsicamente simétricas e as superfícies com curvatura média paralela.

# Capítulo 2

# Imersões ppmc no espaço hiperbólico

Neste capítulo falaremos um pouco sobre imersões ppmc no espaço hiperbólico. Especificamente provaremos que certas imersões deste tipo decorre de imersões ppmc do $\mathbb{R}^n$. Iniciamos então relebrando alguns fatos sobre imersões totalmente umbílicas.

Uma imersão isométrica $f : M \longrightarrow N$ entre duas variedades riemannianas $M$ e $N$ diz-se **umbílica** em $p \in M$ se, para todo vetor não nulo $\eta$ normal a $T_pM$, existe um número real $\lambda_\eta$ tal que

$$A_\eta = \lambda_\eta id.$$

Se $f$ for umbílica em todos os pontos de $M$, dizemos que $f$ é **totalmente umbílica** ou simplesmente **umbílica**.

Decorre desta definição que $f$ é totalmenta umbílica se, e somente se, a segunda forma fundamental é dada por

$$\alpha(,) = \langle,\rangle H,$$

onde $H$ é o vetor curvatura média.

Se a dimensão de $M$ é maior ou igual a 2 e $N$ tem curvatura seccional constante, então o vetor curvatura média de uma imersão totalmente umbílica $f : M \longrightarrow N$ é paralelo.

**Exemplo 2.1.** *(Hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{R}^n$) Lembremos que para imersões $f : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o operador de Weingarten $A_N$ é dado por $A_N = -dg$, onde $g : M^n \longrightarrow S_1^n$ é a aplicação normal de Gauss. Se $M$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$, a aplicação normal de Gauss é constante, logo $A_N = 0$. Se $M$ é uma hiperesfera de raio $r$ então a plicação normal de Gauss pode ser dada pelo vetor posição multiplicado por $1/r$, então temos $A_N = -\dfrac{id}{r}$.*

Se $M$ é qualquer hipersuperfície conexa e completa totalmente umbílica em $\mathbb{R}^n$, então $f(M)$ está contida em um hiperplano ou uma hiperesfera. Este resultado e sua demonstração podem ser encontrados em [22], por exemplo.

**Exemplo 2.2.** *(Hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{H}^n$) Seja $f : M \longrightarrow N$ uma imersão umbílica. Se mudarmos a métrica de $N$ por outra métrica conforme, a imersão continua sendo umbílica. Considerando como modelo para $\mathbb{H}^n$ o semi-espaço superior de $\mathbb{R}^n$ e o resultado mencionado anteriormente, podemos concluir que as hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{H}^n$ são as interseções de hiperplanos e hiperesferesras de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{H}^n$. Estas hipersuperfícies tem curvatura média constante $c = -sen^2\theta$, onde $\theta$ é o ângulo que o hiperplano ou hiperesfera forma com o bordo $\partial\mathbb{H}^n$ de $\mathbb{H}^n$. Elas são chamadas esferas geodésicas quando $c > 0$, horoesferas quando $c = 0$ e hiperesferas quando $c < 0$.*

Consideremos agora $M$ uma variedade Kähler conexa. Veremos alguns exemplos de imersões ppmc em $\mathbb{H}^n$ a partir de imersões ppmc de $\mathbb{R}^n$. Mas antes disso, vejamos o seguinte lema.

**Lema 2.1.** *Sejam $M$ uma variedade Kähler, $N$ uma variedade riemanniana e $Q$ um espaço de curvatura constante. Dadas as imersões $f : M \longrightarrow N$ ppmc e $g : N \longrightarrow Q$ totalmente umbílica a composição $g \circ f$ é ppmc.*

*Demonstração.* Usando o fato de toda imersão ser localmente um mergulho, podemos escrever $\alpha_{g\circ f} = \alpha_f + \alpha_g$. Como $g$ é totalmente umbílica em um espaço de curvatura constante temos que $\alpha_g(X,Y) = \langle X,Y\rangle H_g$ e $H_g$ é paralelo na conexão do fibrado normal a $N$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left(D_W\alpha^{(1,1)}_{g\circ f}\right)(X,\overline{Y}) &= D_W\alpha_{g\circ f}(X,\overline{Y}) - \alpha_{g\circ f}(\nabla_W X,\overline{Y}) - \alpha_{g\circ f}(X,\nabla_W\overline{Y}) \\
&= D_W\alpha_f(X,\overline{Y}) + D_W\big(\big\langle X,\overline{Y}\big\rangle H_g\big) - \alpha_f(\nabla_W X,\overline{Y}) \\
&\quad -\big\langle \nabla_W X,\overline{Y}\big\rangle H_g - \alpha_f(X,\nabla_W\overline{Y}) - \big\langle X,\nabla_W\overline{Y}\big\rangle H_g \\
&= D_W\alpha_f(X,\overline{Y}) + W\big\langle X,\overline{Y}\big\rangle H_g - \alpha_f(\nabla_W X,\overline{Y}) \\
&\quad -\alpha_f(X,\nabla_W\overline{Y}) - W\big\langle X,\overline{Y}\big\rangle H_g \\
&= \left(D_W\alpha^{(1,1)}_{f}\right)(X,\overline{Y}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.** *Seja $f : M \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ uma imersão ppmc, essencial (isto é, $M$ não pode ser imersa em um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$), em que $M$ é mínima em $S^{n-1}$. Seja $\varphi$ a imersão de $M$ em $S^{n-1}$, então $f = \varphi \circ i$, em que $i$ é a inclusão da esfera em $\mathbb{R}^n$. Denotemos $H$ o vetor curvatura média da imersão $f$. Visto que sua projeção sobre o espaço tangente à esfera é nulo, ele também será o vetor curvatura média da inclusão, a qual é umbílica, e portanto tem segunda forma*

$\alpha_i(X,Y) = \langle X,Y\rangle H$. *Assim, para qualquer* $X, Y \in T'$ *e* $W \in T_p^{\mathbb{C}}M$,

$$\begin{aligned}
\Big(D_W\alpha_\varphi^{(1,1)}\Big)(X,\overline{Y}) &= D_W\alpha_\varphi(X,\overline{Y}) - \alpha_\varphi(\nabla_W X,\overline{Y}) - \alpha_\varphi(X,\nabla_W\overline{Y}) \\
&= D_W\alpha_f(X,\overline{Y}) - D_W\big(\big\langle X,\overline{Y}\big\rangle H\big) - \alpha_f(\nabla_W X,\overline{Y}) \\
&\quad + \big\langle \nabla_W X,\overline{Y}\big\rangle H - \alpha_f(X,\nabla_W\overline{Y}) + \big\langle X,\nabla_W\overline{Y}\big\rangle H \\
&= D_W\alpha_f(X,\overline{Y}) - W\big\langle X,\overline{Y}\big\rangle H - \alpha_f(\nabla_W X,\overline{Y}) \\
&\quad - \alpha_f(X,\nabla_W\overline{Y}) + W\big\langle X,\overline{Y}\big\rangle H \\
&= \Big(D_W\alpha_f^{(1,1)}\Big)(X,\overline{Y}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

*donde obtemos que* $\varphi$ *é ppmc. Agora, tome* $S^{n-1}$ *no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$. *Sabemos que ela também é umbílica. Usando o Lema 2.1 concluímos que* $\tilde{f} : M \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{H}^n$ *também é ppmc.*

**Exemplo 2.4.** *Seja* $g : M \longrightarrow S^{n-k}, k > 1$, *uma imersão ppmc. Se* $S^{n-k}$ *está contida em uma esfera* $S^{n-1} \subset \mathbb{H}^n$ *ela é totalmente umbílica em* $\mathbb{H}^n$ *visto que é totalmente geodésica em* $S^{n-1}$. *Se* $S^{n-k}$ *está contida em uma horoesfera* $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{H}^n$ *então ela é umbílica nesta horoesfera. De fato,* $S^{n-k}$ *é umbílica em* $\mathbb{R}^{n-1}$ *que por sua vez é isométrico a uma horoesfera* $\Sigma^{n-1}$ *de* $\mathbb{H}^n$. *Como a horoesfera é totalmente umbílica em* $\mathbb{H}^n$, *segue que* $S^{n-k}$ *também é umbílica. Assim* $\tilde{g} : M \longrightarrow S^{n-k} \subset \mathbb{H}^n$ *é ppmc.*

**Exemplo 2.5.** *Seja* $h : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ *uma imersão mínima. Pelo teorema 1.3,* $h$ *é pluriminima e portanto ppmc. Sabemos que existe uma isometria* $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \Sigma^{n-1}$, *em que* $\Sigma^{n-1}$ *é uma horoesfera de* $\mathbb{H}^n$. *Então podemos tomar* $\tilde{h} : M \longrightarrow \mathbb{H}^n$, *dada por* $\tilde{h} = i \circ \varphi \circ h$. *Como as horoesferas são totalmente umbílicas em* $\mathbb{H}^n$, *temos que* $\tilde{h}$ *é ppmc.*

Note que pelos exemplos anteriores, se a imersão de $M$ em $\mathbb{R}^n$ é ppmc com $M$ imersa minimamente em uma hiperesfera ou hiperplano podemos obter uma imersão ppmc de $M$ em $\mathbb{H}^n$. Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^n$ é ppmc. Sob quais condições essa imersão seria proveniente de uma imersão ppmc do $\mathbb{R}^n$? Uma possível resposta seria quando $M$ for minimamente imersa em uma subvariedade umbílica de $\mathbb{H}^n$. Quando $f$ é semi-isotrópica (que definiremos mais adiante) esta situação é possível, sob certas condições, e assim nossa imersão pode ser como nos Exemplos 2.3 e 2.5. No entanto, também é possível que ela seja um produto de imersões no espaço de Lorentz, ou seja, $i \circ f$ é uma imersão produto, onde $i$ é a imersão canônica do $\mathbb{H}^n$ no espaço de Lorentz, ou então que $M$ seja uma superfície. Para mostrar isso usaremos o seguinte lema.

**Lema 2.2.** *Sejam $\overline{M}^n$ uma variedade riemanniana, $Q_{\tilde{c}}^{n+k}$ uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante $\tilde{c}$ e $f : \overline{M}^n \longrightarrow Q_{\tilde{c}}^{n+k}$ uma imersão isométrica com curvatura média paralela $H \neq 0$. Suponha que $H$ é uma direção umbílica. Então $\overline{M}$ é imersa minimamente em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $Q_{\tilde{c}}^{n+k}$ cuja curvatura seccional é constante $c = \|H\|^2 + \tilde{c}$.*

*Demonstração.* Dado $p \in \overline{M}$, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p\overline{M}$, então

$$\begin{aligned}
\|H\|^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle \alpha(e_i, e_i), H\rangle \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\langle A_H e_i, e_i\rangle) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Considere $N_H(p) = span\{H_p\}$ e $E = N_H(p)^{\perp}$ seu complemento ortogonal em $N_pM$. Então $N_H$ e $E$ são subfibrados paralelos do fibrado normal. Denotando por $(\ )_H$ a projeção ortogonal sobre $N_H$ temos

$$\langle (\alpha(X,Y))_H, H\rangle = \langle \lambda_{XY} H, H\rangle = \lambda_{XY}\|H\|^2.$$

Por outro lado

$$\langle (\alpha(X,Y))_H, H\rangle = \langle \alpha(X,Y), H\rangle = \langle A_H X, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle$$

donde obtemos $\lambda_{XY} = \langle X, Y\rangle$.

Denotemos ainda por $B(X,Y)$ a projeção ortogonal de $\alpha(X,Y)$ sobre $E$, isto é,

$$B(X,Y) = \alpha(X,Y) - \langle X, Y\rangle H.$$

Note que $B$ uma é forma bilinear simétrica.

Para cada seção $\xi$ de $E$, seja $S_\xi$ o operador dado por

$$\langle S_\xi X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle, X, Y \in TM.$$

Denotando por $\overline{R}$ e $\widetilde{R}$ as curvaturas de $\overline{M}$ e $\widetilde{M}$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X,Y)Z), W\right\rangle &- \langle B(X,W), B(Y,Z)\rangle + \langle B(X,Z), B(Y,W)\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(X,Y)Z), W\right\rangle - \langle \alpha(X,W) - \langle X,W\rangle H, \alpha(Y,Z) - \langle Y,Z\rangle H\rangle \\
&\quad + \langle \alpha(X,Z) - \langle X,Z\rangle H, \alpha(Y,W) - \langle Y,W\rangle H\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(X,Y)Z), W\right\rangle - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle + \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle \\
&\quad + \langle \alpha(X,W), \langle Y,Z\rangle H\rangle + \langle \langle X,W\rangle H, \alpha(Y,Z)\rangle \\
&\quad - \langle \langle X,W\rangle H, \langle Y,Z\rangle H\rangle - \langle \alpha(X,Z), \langle Y,W\rangle H\rangle \\
&\quad - \langle \langle X,Z\rangle H, \alpha(Y,W)\rangle + \langle \langle X,Z\rangle H, \langle Y,W\rangle H\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{R}(X,Y)Z, W\right\rangle + (\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)\|H\|^2 \\
&= c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\
&\quad + (\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)\|H\|^2,
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X,Y)Z), W\right\rangle &- \langle B(X,W), B(Y,Z)\rangle + \langle B(X,Z), B(Y,W)\rangle \\
&= (\|H\|^2 + c)\{\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\}. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Temos ainda para todo $\eta \in E$

$$\begin{aligned}
\langle (D_Z B)(X,Y),\eta\rangle &= \langle D_Z B(X,Y) - B(\nabla_Z X, Y) - B(X, \nabla_Z Y), \eta\rangle \\
&= Z\langle B(X,Y),\eta\rangle - \langle B(X,Y), D_Z\eta\rangle \\
&\quad -\langle B(\nabla_Z X, Y) + B(X,\nabla_Z Y),\eta\rangle \\
&= Z\langle \alpha(X,Y),\eta\rangle - \langle \alpha(X,Y), D_Z\eta\rangle \\
&\quad -\langle \alpha(\nabla_Z X, Y) + \alpha(X,\nabla_Z Y),\eta\rangle \\
&= \langle D_Z \alpha(X,Y) - \alpha(\nabla_Z X, Y) - \alpha(X, \nabla_Z Y), \eta\rangle \\
&= \langle (D_Z \alpha)(X,Y),\eta\rangle,
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$(D_Z B)(X,Y) = (D_Z \alpha)(X,Y) = (D_X \alpha)(Z,Y) = (D_X B)(Z,Y). \tag{2.2}$$

Dada uma outra seção $\xi$ de $E$ temos

$$\begin{aligned}
\left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle &- \langle [S_\eta, S_\xi]X, Y\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle S_\eta(S_\xi X) - S_\xi(S_\eta X), Y\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle B(S_\xi X, Y),\eta\rangle + \langle B(S_\eta X, Y),\xi\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle \alpha(S_\xi X, Y),\eta\rangle + \langle \alpha(S_\eta X, Y),\xi\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle A_\eta Y, S_\xi X\rangle + \langle A_\xi Y, S_\eta X\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle B(A_\eta Y, X),\xi\rangle + \langle B(A_\xi Y, X),\eta\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle \alpha(A_\eta Y, X),\xi\rangle + \langle \alpha(A_\xi Y, X),\eta\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \langle A_\xi(A_\eta Y), X\rangle + \langle A\eta(A_\xi Y), X\rangle \\
&= \left\langle R^{\perp}(Y,X)\xi,\eta\right\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]Y, X\rangle \\
&= 0. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

As equações (2.1), (2.2) e (2.3) são respectivamente as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para imersão em um espaço de curvatura constante $c = (\|H\|^2 + c)$.

Então pelo teorema fundamental das imersões existe uma única imersão $\varphi : \overline{M} \longrightarrow \Sigma_c^{n-1}$ com fibrado normal $E$ e segunda forma fundamental $B$. Observe ainda que, $\Sigma_c^{n-1} \subset Q_{\tilde{c}}^{n+k}$ é uma subvariedade umbílica, visto que sua segunda forma fundamental é $(\alpha(X,Y))_H = \langle X, Y \rangle H$. Além disso, $\varphi$ é mínima pois $H_\varphi = proj_E H = 0$. □

Uma imersão $f : M \longrightarrow Q_{\tilde{c}}^{n+k}$ ppmc é dita **semi-isotrópica** se satisfaz

$$\left\langle \alpha^{(2,0)}, \alpha^{(2,0)} \right\rangle = \left\langle \alpha^{(2,0)}, \eta \right\rangle = 0,$$

para todo campo paralelo $\eta \in N^0 = span\{\alpha(X, \overline{Y}); X, Y \in T'\}$.

**Teorema 2.1.** *Seja $M$ uma variedade Kähler e $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^n$ uma imersão ppmc semi-isotrópica. Então uma das condições ocorre:*
*i) $f$ é decomponível no espaço de Lorentz;*
*ii) $f$ é obtida a partir de uma imersão ppmc do $\mathbb{R}^n$ como nos Exemplos 2.3 e 2.5;*
*iii) $M$ é uma superfície de curvatura média paralela.*

*Demonstração.* Denotemos por $H$ o vetor curvatura média. Notemos que se $H = 0$, pelo Teorema 1.3 temos o item (iii). Consideremos então $H \neq 0$. Visto que $f$ é ppmc semi-isotrópica temos $\left\langle \alpha^{(2,0)}, H \right\rangle = 0$.

Isto implica que

$$\langle A_H \cdot, \cdot \rangle = \langle \alpha(\cdot, \cdot), H \rangle = \left\langle \alpha^{(1,1)}(\cdot, \cdot), H \right\rangle.$$

Assim, se $X, Y, Z$ são tangentes a $M$

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_Z A_H)X, Y\rangle &= \langle\nabla_Z A_H X, Y\rangle - \langle A_H(\nabla_Z X), Y\rangle \\
&= Z\langle A_H X, Y\rangle - \langle A_H X, \nabla_Z Y\rangle - \langle A_H(\nabla_Z X), Y\rangle \\
&= Z\big\langle\alpha^{(1,1)}(X, Y), H\big\rangle - \big\langle\alpha^{(1,1)}(X, \nabla_Z Y), H\big\rangle \\
&\quad -\big\langle\alpha^{(1,1)}(\nabla_Z X, Y), H\big\rangle \\
&= \big\langle D_Z\alpha^{(1,1)}(X, Y), H\big\rangle - \big\langle\alpha^{(1,1)}(X, \nabla_Z Y), H\big\rangle \\
&\quad -\big\langle\alpha^{(1,1)}(\nabla_Z X, Y), H\big\rangle \\
&= \big\langle\big(D_Z\alpha^{(1,1)}\big)(X, Y), H\big\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que implica $A_H$ paralelo.

Se $A_H$ possui autovalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_r$, então os auto-fibrados associados $T_1, ..., T_r$ são ortogonais, $J-$invariantes e paralelos, e então pelo teorema da decomposição de de Rham, $M$ é localmente um produto riemanniano. Pela analiticidade de $M$, concluímos então que $M = M_1 \times ... \times M_r$, em que cada $M_i$ é Kähler. Além disso, dados $X_i \in T_i$ e $X_j \in T_j$, $i \neq j$, a equação de Ricci nos fornece

$$\begin{aligned}
\big(\overline{R}(X_i, X_j)H\big)^{\perp} &= R^{\perp}(X_i, X_j)H + \alpha(A_H X_i, X_j) - \alpha(X_i, A_H X_j) \\
0 &= \lambda_i\alpha(X_i, X_j) - \lambda_j\alpha(X_i, X_j) \\
0 &= (\lambda_i - \lambda_j)\alpha(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

donde obtemos $\alpha(X_i, X_j) = 0$.

Consideremos $\mathbb{H}^n$ no modelo hiperbólico e $i$ a imersão canônica de $\mathbb{H}^n$ no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$. Então, usando o lema de Moore [25] para $\mathbb{L}^{n+1}$, podemos concluir que $i \circ f : M_1 \times ... \times M_r \longrightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ é uma imersão produto. De fato, para $X_i \in T_i M_i$

e $X_j \in T_jM_j$, $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_{i\circ f}(X_i, X_j) &= \alpha(X_i, X_j) + \langle X_i, X_j\rangle \overrightarrow{p} \\
&= \alpha(X_i, X_j) + \langle X_i, X_j\rangle \overrightarrow{p} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $A_H$ possui um único autovalor $\lambda \neq 0$, então pelo Lema 2.2, $M$ é imersa minimamente em uma hipersuperfície $\Sigma_c^{n-1} \subset \mathbb{H}^n$ totalmente umbílica cuja curvatura seccional é a constante $c = \|H\|^2 - 1$. Além disso, essa imersão é ppmc pela equação (2.2).

Se $H$ tem norma igual a 1, então $c = 0$ e $\Sigma$ é uma horoesfera. Observe que $M$ não pode ser compacta. Assim, temos que $f$ pode ser obtida como no Exemplo 2.5. Se $H$ tem norma maior que 1, então $c > 0$ e $\Sigma$ é uma esfera. Nesse caso, temos o Exemplo 2.3.

Se $H$ tem norma menor que 1, então $-1 < c < 0$ e $\Sigma$ é uma hiperesfera. Observe que neste caso $M$ também não pode ser compacta. Então segue do Teorema 1.3 que $M$ é superfície. □

**Corolário 2.1.** *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^n$ uma imersão ppmc de uma variedade Kähler compacta com primeira classe de Chern positiva. Então uma das condições ocorre:*
*i) $f$ é decomponível no espaço de Lorentz;*
*ii) $\|H\| > 1$ e $f$ é obtida a partir de uma imersão ppmc do $\mathbb{R}^n$ como no Exemplo 2.3.*

*Demonstração.* Pela compacidade de $M$ e a hipótese de $f$ ser ppmc temos que $H$ é não nulo e paralelo. Sejam $A, B, X, Y, Z \in T'$ provenientes de referencial coordenado e $\eta$ um campo paralelo em $N^0$, usando Codazzi temos

$$\begin{aligned}
\overline{Z}\big\langle \alpha^{(2,0)}(X,Y),\eta\big\rangle &= \langle D_{\overline{Z}}\alpha(X,Y),\eta\rangle + \langle \alpha(X,Y), D_{\overline{Z}}\eta\rangle \\
&= \langle (D_{\overline{Z}}\alpha)(X,Y),\eta\rangle + \langle \alpha(\nabla_{\overline{Z}}X,Y),\eta\rangle + \langle \alpha(X,\nabla_{\overline{Z}}Y),\eta\rangle \\
&= \big\langle \big(D_X\alpha^{(1,1)}\big)(\overline{Z},Y),\eta\big\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\overline{Z}\big\langle \alpha^{(2,0)}(X,Y),\alpha^{(2,0)}(A,B)\big\rangle &= \langle D_{\overline{Z}}\alpha(X,Y),\alpha(A,B)\rangle + \langle \alpha(X,Y), D_{\overline{Z}}\alpha(A,B)\rangle \\
&= \langle (D_{\overline{Z}}\alpha)(X,Y),\alpha(A,B)\rangle \\
&\quad + \langle \alpha(X,Y),(D_{\overline{Z}}\alpha)(A,B)\rangle \\
&= \big\langle \big(D_X\alpha^{(1,1)}\big)(\overline{Z},Y),\alpha(A,B)\big\rangle \\
&\quad + \big\langle \alpha(X,Y),\big(D_A\alpha^{(1,1)}\big)(\overline{Z},B)\big\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\big\langle \alpha^{(2,0)},\eta\big\rangle$ e $\big\langle \alpha^{(2,0)},\alpha^{(2,0)}\big\rangle$ são formas holoformas em $M$. Portanto, elas são nulas pois variedades complexas compactas com primeira classe de Chern positiva não admitem $p$-formas, $p \geq 1$, holomorfas não nulas (cf. [23]). Isto implica que $f$ é semi-isotrópica. Então, o resultado segue do teorema anterior. $\square$

# Capítulo 3

# Imersões em variedades produto

Vamos tratar agora de imersões em $N \times \mathbb{R}$, em que primeiramente consideramos $N = E^n(c)$ um espaço de curvatura constante $c \neq 0$ e depois consideramos $N = \mathbb{C}P^n$. Alencar, do Carmo e Tribuzy estudaram em [1] superfícies imersas em $E^n(c) \times \mathbb{R}$ com vetor curvatura média paralelo. Aqui vamos tratar o caso em que a variedade imersa $M$ é uma variedade Kähler e a imersão é mínima ou pluriminima. Provamos que neste caso $M$ deve ser uma superfície. Para o caso de imersões pluriminimas em $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, verificamos que a variedade imersa é uma superfície ou admite uma folheação em um subconjunto aberto denso formada por subvariedades holomorfas de $\mathbb{C}P^n$ e que sobre certas condições a própria imersão é holomorfa em $\mathbb{C}P^n$.

## 3.1 Imersões em $E^n(c) \times \mathbb{R}$

Ao longo deste capítulo, $\pi$ denotará a projeção de $E^n(c) \times \mathbb{R}$ sobre o primeiro fator e $\xi$ representará o vetor unitário tangente a $\mathbb{R}$. Assim, dado $X$ tangente a $E^n(c) \times \mathbb{R}$ escrevemos

$$d\pi X = X - \langle X, \xi \rangle \xi.$$

Denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $R_1$ a métrica e a curvatura de $E^n(c)$. Analogamente, denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ e $R_2$ a métrica e a curvatura de $\mathbb{R}$. Usando a métrica produto e o fato de que $R_2 = 0$ temos a expressão da curvatura $\tilde{R}$ da nossa variedade produto do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{R}(X,Y)Z,W \right\rangle &= \langle R_1(d\pi X, d\pi Y)d\pi Z, d\pi Z\rangle_1 \\
&= c\{\langle d\pi X, d\pi W\rangle_1 \langle d\pi Y, d\pi Z\rangle_1 - \langle d\pi X, d\pi Z\rangle_1 \langle d\pi Y, d\pi W\rangle_1\} \\
&= c\{\langle X - \langle X,\xi\rangle\xi, W - \langle W,\xi\rangle\xi\rangle_1 \langle Y - \langle Y,\xi\rangle\xi, Z - \langle Z,\xi\rangle\xi\rangle_1\} \\
&\quad -c\{\langle X - \langle X,\xi\rangle\xi, Z - \langle Z,\xi\rangle\xi\rangle_1 \langle Y - \langle Y,\xi\rangle\xi, W - \langle W,\xi\rangle\xi\rangle_1\} \\
&= c\{\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\} \\
&\quad +c\{-\langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\langle W,\xi\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle\langle W,\xi\rangle\} \\
&\quad +c\langle Y,W\rangle\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle,
\end{aligned}$$

onde $X, Y, Z, W$ são vetores tangentes a $E^n(c) \times \mathbb{R}$.

Dada uma variedade Riemanianna $M$ isometricamente imersa em $E^n(c) \times \mathbb{R}$, $T$ representa a projeção ortogonal de $\xi$ sobre o espaço tangente a $M$. Assim, se $X, Y, Z, W$ são tangentes a $M$ então

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{R}(X,Y)Z,W \right\rangle &= c\{\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\} \\
&\quad +c\{-\langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\langle W,T\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle\} \\
&\quad +c\langle Y,W\rangle\langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle.
\end{aligned}$$

Pela analiticidade de $M$, se $T$ é nulo em um aberto qualquer de $M$ então o será em toda $M$. Assim, o conjunto dos pontos em que isto ocorre ou é vazio ou é um conjunto magro.

**Teorema 3.1.** *Sejam $M$ uma variedade Kähler, de dimensão complexa $m$ e $E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma variedade produto onde $E^n(c)$ é um espaço de curvatura constante $c < 0$. Se $f : M \longrightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ é uma imersão isométrica mínima, então $m = 1$.*

*Demonstração.* Em um ponto qualquer de $M$, onde $T \neq 0$, tomamos $e_1 = \dfrac{T}{\|T\|}$ e obtemos a partir dele uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_m, Je_1, ..., Je_m\}$, em que $J$ é a estrutura quase complexa de $M$. Como de costume obtemos uma base ortonormal em $T'M$ tomando $E_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_k - iJe_k), k = 1, ..., m.$

Denotamos o tensor curvatura de $M$ por $R$, a segunda forma fundamental por $\alpha$ e o vetor curvatura média $H$. Usando a extensão $\mathbb{C}$-linear da equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k,j=1}^{m} \left\langle R(E_k, E_j)\overline{E}_k, \overline{E}_j \right\rangle \\
&= \sum_{k,j=1}^{m} \left\langle \tilde{R}(E_k, E_j)\overline{E}_k, \overline{E}_j \right\rangle + \sum_{k,j=1}^{m} \left\langle \alpha(E_k, \overline{E}_j), \alpha(E_j, \overline{E}_k) \right\rangle \\
&\quad - \sum_{k,j=1}^{m} \left\langle \alpha(E_k, \overline{E}_k), \alpha(E_j, \overline{E}_j) \right\rangle \\
&= \sum_{k,j=1}^{m} \left\langle \tilde{R}(E_k, E_j)\overline{E}_k, \overline{E}_j \right\rangle + \sum_{k,j=1}^{m} \|\alpha(E_k, \overline{E}_j)\|^2 \\
&\quad - \sum_{k,j=1}^{m} \left\langle \alpha(E_k, \overline{E}_k), \alpha(E_j, \overline{E}_j) \right\rangle. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Usando a expressão da curvatura $\widetilde{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{R}(E_k, E_j)\overline{E}_k, \overline{E}_j \right\rangle &= c\left\{ \left\langle E_k, \overline{E}_j \right\rangle \left\langle E_j, \overline{E}_k \right\rangle - \left\langle E_k, \overline{E}_k \right\rangle \left\langle E_j, \overline{E}_j \right\rangle \right\} \\
&\quad - c\left\{ \left\langle E_k, \overline{E}_j \right\rangle \langle E_j, T \rangle \left\langle \overline{E}_k, T \right\rangle + \left\langle E_j, \overline{E}_k \right\rangle \langle E_k, T \rangle \left\langle \overline{E}_j, T \right\rangle \right\} \\
&\quad + c\left\{ \left\langle E_k, \overline{E}_k \right\rangle \langle E_j, T \rangle \left\langle \overline{E}_j, T \right\rangle + \left\langle E_j, \overline{E}_j \right\rangle \langle E_k, T \rangle \left\langle \overline{E}_k, T \right\rangle \right\} \\
&= c\left\{ \delta_{kj}^2 - 1 - \delta_{kj} \langle E_j, T \rangle \left\langle \overline{E}_k, T \right\rangle - \delta_{jk} \langle E_k, T \rangle \left\langle \overline{E}_j, T \right\rangle \right\} \\
&\quad + c\left\{ \langle E_j, T \rangle \left\langle \overline{E}_j, T \right\rangle + \langle E_k, T \rangle \left\langle \overline{E}_k, T \right\rangle \right\}
\end{aligned}$$

Note que:

i)$\langle E_k, T\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle e_k - iJe_k, T\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\langle e_k, T\rangle - i\langle Je_k, T\rangle) = 0, \forall k \neq 1.$

ii)$\langle E_1, T\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1 - iJe_1, \|T\|e_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|T\|.$

Então, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j=1}^{m}\left\langle \tilde{R}(E_k,E_j)\overline{E}_k,\overline{E}_j\right\rangle &= c\sum_{k,j=1}^{m}\left\{\delta_{kj}^2 - 1 - \delta_{kj}\langle E_j,T\rangle\left\langle \overline{E}_k,T\right\rangle - \delta_{jk}\langle E_k,T\rangle\left\langle\overline{E}_j,T\right\rangle\right\} \\
&\quad + c\sum_{k,j=1}^{m}\left\{\langle E_j,T\rangle\left\langle\overline{E}_j,T\right\rangle + \langle E_k,T\rangle\left\langle\overline{E}_k,T\right\rangle\right\} \\
&= c(m-m^2) - c\sum_{k=1}^{m}\langle E_k,T\rangle\left\langle\overline{E}_k,T\right\rangle - c\sum_{k=1}^{m}\langle E_k,T\rangle\left\langle\overline{E}_k,T\right\rangle \\
&\quad + c\sum_{k=1}^{m}\langle E_1,T\rangle\left\langle\overline{E}_1,T\right\rangle + cm\sum_{k=1}^{m}\langle E_k,T\rangle\left\langle\overline{E}_k,T\right\rangle \\
&= c\Big\{(m-m^2) - 2\langle E_1,T\rangle\left\langle\overline{E}_1,T\right\rangle + 2m\langle E_1,T\rangle\left\langle\overline{E}_1,T\right\rangle\Big\} \\
&= c\{(m-m^2) - \|T\|^2 + m\|T\|^2\} \\
&= c\{m(1-m) - (1-m)\|T\|^2\} \\
&= c(1-m)(m-\|T\|^2).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em (3.1) obtemos

$$0 = c(1-m)(m-\|T\|^2) + \sum_{k,j=1}^{m}\|\alpha(E_k,\overline{E}_j)\|^2 - m^2\|H\|^2. \tag{3.3}$$

Como a imersão é mínima deduzimos que

$$c(m-1)(m-\|T\|^2) = \sum_{k,j=1}^{m}\|\alpha(E_k,\overline{E}_j)\|^2 \geq 0.$$

Por outro lado, como $c < 0$ e $\|T\| \leq 1$, temos

$$c(m-1)(m-\|T\|^2) \leq 0.$$

Logo

$$c(m-1)(m-\|T\|^2) = 0,$$

donde concluímos que $m = 1$ ou $m = \|T\|^2$. Mas este último caso só é possível se $\|T\| = 1$, donde também obtemos $m = 1$. Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

**Observação 3.1.** *No caso em que $\xi$ é perpendicular a $TM$, temos o item i) do Teorema 1.3.*

Do teorema acima decorre que se $f$ é plurimínima, então $M$ é superfície. Porém, esta conclusão também é válida no caso em que $c > 0$, como mostra o nosso próximo teorema.

**Teorema 3.2.** *Sejam $M$ uma variedade Kähler, de dimensão complexa $m$ e $E^n(c)\times\mathbb{R}$ uma variedade produto onde $E^n(c)$ é um espaço de curvatura constante $c \neq 0$. Se $f : M \longrightarrow E^n(c)\times\mathbb{R}$ é uma imersão isométrica plurimínima, então $m = 1$.*

*Demonstração.* Efetuando os mesmos cálculos da demonstração anterior temos

$$\sum_{k,j=1}^{m} \|\alpha(E_k, \overline{E}_j)\|^2 - m^2\|H\|^2 = c(m-1)(m-\|T\|^2).$$

Como $f$ é plurimínima, isto é, $\alpha^{(1,1)} = 0$, segue que

$$c(m-1)(m-\|T\|^2) = 0.$$

Sendo $c \neq 0$ concluímos que $m = 1$. $\square$

**Observação 3.2.** *Em particular, se $\xi$ é ortogonal a $TM$, temos a proposição 1.8 de Dajczer e Gromoll [5].*

Consideremos agora o operador bilinear simétrico $P$ dado por

$$P(X,Y) = \frac{1}{2}\{\alpha(X,Y) + \alpha(JX,JY)\}, X,Y \in TM. \tag{3.4}$$

**Definição 3.1.** *Dizemos que $P$ é totalmente umbílico se $P = \langle \cdot, \cdot \rangle H$.*

Note que esta definição é equivalente a $\alpha^{(1,1)} = \langle \cdot, \cdot \rangle H$. De fato, dados $X, Y \in TM$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha^{(1,1)}(X - iJX, Y + iJY) &= \{\alpha(X,Y) + \alpha(JX, JY)\} + i\{\alpha(X, JY) - \alpha(JX, Y)\} \\ &= 2P(X,Y) + i2P(X, JY) \\ &= 2\langle X, Y\rangle H + i2\langle X, JY\rangle H \\ &= \langle X - iJX, Y + iJY\rangle H. \end{aligned}$$

Imersões de variedades Kähler em espaços formas com $P$ totalmente umbílico foram estudadas em [18]. Verificamos o que os resultados ainda são válidos quando o espaço ambiente é $E^n(c) \times \mathbb{R}$.

**Proposição 3.1.** *Seja $f : M \longrightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média não nulo.*
*i) Se $c < 0$, então $\|H\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}m}\|P\|$;*
*ii) Se $c > 0$, então $\|H\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}m}\|P\|$;*
*Em ambos os itens a igualdade ocorre se, e somente se, $m = 1$.*

*Demonstração.* Sabemos que da equação de Gauss decorre

$$m^2\|H\|^2 - \sum_{k,j=1}^{m} \|\alpha(E_k, \overline{E}_j)\|^2 + c(m-1)(m - \|T\|^2) = 0. \tag{3.5}$$

Note que

$$\sum_{k,j=1}^{m} \|\alpha(E_k, \overline{E}_j)\|^2 = \frac{1}{2}\|P\|^2.$$

Então, a equação (3.5) se escreve

$$\|H\|^2 - \frac{1}{2m^2}\|P\|^2 = -\frac{c}{m^2}(m-1)(m - \|T\|^2).$$

Se $c < 0$, então $\|H\|^2 - \dfrac{1}{2m^2}\|P\|^2 \geq 0$. Além disso, se $c > 0$, então $\|H\|^2 - \dfrac{1}{2m^2}\|P\|^2 \leq 0$. Como queríamos demonstrar.

$\square$

Na próxima proposição temos uma pequena diferença na expressão da curvatura média.

**Proposição 3.2.** *Seja $f : M \longrightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com $P$ totalmente umbílico.*
*i) Se $c < 0$, então $m = 1$ ou $\|H\| = \sqrt{\dfrac{c}{m}(\|T\|^2 - m)}$;*
*ii) Se $c > 0$, então $m = 1$.*

*Demonstração.* Sendo $P$ totalmente umbílico, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j=1}^{m} \|\alpha(E_k, \overline{E}_j)\|^2 &= \sum_{k,j=1}^{m} \|\langle E_k, \overline{E}_j)\rangle H\|^2 \\
&= \sum_{k,j=1}^{m} \|\delta_{kj} H\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{m} \|H\|^2 \\
&= m\|H\|^2.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= m^2\|H\|^2 - m\|H\|^2 + c(m-1)(m - \|T\|^2) \\
&= m(m-1)\|H\|^2 + c(1-m)(m - \|T\|^2) \\
&= (m-1)(m\|H\|^2 + c(m - \|T\|^2))
\end{aligned}$$

donde

$$m = 1 \text{ ou } \|H\|^2 = \frac{c}{m}(\|T\|^2 - m)$$

i) Para $c < 0$, temos $\dfrac{c}{m}(\|T\|^2 - m) \geq 0$. Nesse caso,

$$m = 1 \text{ ou } \|H\| = \sqrt{\frac{c}{m}(\|T\|^2 - m)};$$

ii) Para $c > 0$, $\|H\|^2 = \dfrac{c}{m}(\|T\|^2 - m) \leq 0$ só é possível se $m = \|T\|^2 = 1$. Portanto, $m = 1$.

$\square$

**Observação 3.3.** *Quando $\xi$ é ortogonal a $TM$ a projeção $T$ é nula e portanto, no item i) temos $\|H\| = \sqrt{-c}$ .*

## 3.2 Imersões em $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$

Seja $M$ uma variedade Kähler de dimensão complexa $m$ pluriminimamente imersa em $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$. Novamente denotaremos por $T$ a projeção de $\xi$ sobre o espaço tangente a $M$. Para cada $p \in M$, denotemos $\mathcal{T}_p = span\{T, JT\}$ que é $J$-invariante, ou seja, $J\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_p$. Seja $\mathcal{D}_p = \mathcal{T}_p^{\perp}$ o complemento ortogonal de $\mathcal{T}_p$ em $T_pM$. Este espaço satisfaz $J\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}_p$ e $\langle \mathcal{D}_p, \xi \rangle = 0$. De fato, dado $x \in \mathcal{D}_p$ temos

$$\langle x, \xi \rangle = \langle x, T \rangle = 0$$

e

$$\langle Jx, T \rangle = \langle x, JT \rangle = 0 \text{ e } \langle Jx, JT \rangle = \langle x, T \rangle = 0.$$

Note que os elementos de $\mathcal{D}_p$ são horizontais, ou seja, $d\pi(x) = x, \forall x \in \mathcal{D}_p$.

**Lema 3.1.** *Para $m > 2$ a distribuição $\mathcal{D}$ satisfaz $\widetilde{J}|_{\mathcal{D}} = \pm J$, em que $\widetilde{J}$ é a estrutura quase complexa de $\mathbb{C}P^n$.*

*Demonstração.* Dados $X, Y \in \mathcal{D}'_p = \left\{x - iJx \in T'_pM; x \in \mathcal{D}_p\right\}$ temos, pela equação de Gauss,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle R(X,Y)\overline{X},\overline{Y}\right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{R}(X,Y)\overline{X},\overline{Y}\right\rangle + \left\langle \alpha(X,\overline{Y}),\alpha(Y,\overline{X})\right\rangle - \left\langle \alpha(X,\overline{X}),\alpha(Y,\overline{Y})\right\rangle \\
&= \left\langle R_1(X,Y)\overline{X},\overline{Y}\right\rangle \\
&= \left\langle [\overline{X},[X,Y]],\overline{Y}\right\rangle \\
&= -\left\langle [X,Y],[\overline{X},\overline{Y}]\right\rangle \\
&= -\|[X,Y]\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $[X,Y]=0$. Assim, para todo $U$ no tangente complexificado de $\mathbb{C}P^n$ temos $R_1(X,Y)U=[U,[X,Y]]=0$, donde obtemos

$$R_1(X,Y)=0, \forall X,Y\in\mathcal{D}'.$$

Por outro lado, sabemos que $\forall U,V,W\in T\mathbb{C}P^n$

$$R_1(U,V)W=\langle V,W\rangle U-\langle U,W\rangle V-\left\langle V,\widetilde{J}W\right\rangle \widetilde{J}U+\left\langle U,\widetilde{J}W\right\rangle \widetilde{J}V+2\left\langle U,\widetilde{J}V\right\rangle \widetilde{J}W.$$

Então dados $X,Y\in\mathcal{D}'$, e denotando $S$ a projeção ortogonal de $\tilde{J}$ sobre o tangente a $M$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= R_1(X,Y)\tilde{J}X \\
&= \left\langle Y,\widetilde{J}X\right\rangle X-\left\langle X,\widetilde{J}X\right\rangle Y-\left\langle Y,\widetilde{J}^2X\right\rangle \widetilde{J}X+\left\langle X,\widetilde{J}^2X\right\rangle \widetilde{J}Y \\
&\quad +2\left\langle X,\widetilde{J}Y\right\rangle \widetilde{J}^2X \\
&= \langle Y,SX\rangle X+\langle Y,X\rangle \widetilde{J}X-\langle X,X\rangle \widetilde{J}Y+2\langle SX,Y\rangle X \\
&= 3\langle Y,SX\rangle X,
\end{aligned}$$

isto é, $\langle Y,SX\rangle=0$.

Dado $X \in \mathcal{D}'$, tome $Y \in \mathcal{D}'$ ortogonal a $X$, então para todo $W \in T'\mathbb{C}P^n$ temos

$$
\begin{aligned}
0 &= R_1(X,Y)W \\
&= \langle Y, W\rangle X - \langle X, W\rangle Y - \left\langle Y, \widetilde{J}W \right\rangle \widetilde{J}X \\
&\quad + \left\langle X, \widetilde{J}W \right\rangle \widetilde{J}Y + 2\left\langle X, \widetilde{J}Y \right\rangle \widetilde{J}W \\
&= \langle Y, W\rangle X - \langle X, W\rangle Y - \langle Y, iW\rangle \widetilde{J}X \\
&\quad + \langle X, iW\rangle \widetilde{J}Y + 2\langle X, SY\rangle (iW) \\
&= \langle Y, W\rangle X - \langle X, W\rangle Y - \langle Y, W\rangle i\widetilde{J}X + \langle X, W\rangle i\widetilde{J}Y,
\end{aligned}
$$

donde

$$0 = \langle Y, W\rangle (X - i\widetilde{J}X) - \langle X, W\rangle (Y - i\widetilde{J}Y). \tag{3.6}$$

Sabemos que $X - i\widetilde{J}X$ e $Y - i\widetilde{J}Y$ podem ser linearmente dependentes ou independentes. Se forem linearmente independentes, temos

$$\langle Y, W\rangle = \langle X, W\rangle = 0, \tag{3.7}$$

o que implica $X, Y \in T'\mathbb{C}P^n$. Logo $\widetilde{J}X = iX$ donde obtemos $\widetilde{J}x = Jx$ para todo $x \in \mathcal{D}$, isto é, $\widetilde{J}|_{\mathcal{D}} = J$.

Agora, suponha que $X - i\widetilde{J}X$ e $Y - i\widetilde{J}Y$ são linearmente dependentes. Então existe $\lambda = a + bi \neq 0$ tal que

$$X - i\widetilde{J}X = \lambda(Y - i\widetilde{J}Y).$$

Sendo $X - i\widetilde{J}X = (x - iJx) - i(\widetilde{J}x - i\widetilde{J}Jx) = (x - \widetilde{J}Jx) - i(Jx + \widetilde{J}x)$, temos

$$
\begin{aligned}
X - i\widetilde{J}X &= (a+bi)[(y - \widetilde{J}Jy) - i(Jy + \widetilde{J}y)] \\
&= a(y - \widetilde{J}Jy) - ia(Jy + \widetilde{J}y) + ib(y - \widetilde{J}Jy) + b(Jy + \widetilde{J}y) \\
&= ay - a\widetilde{J}Jy + bJy + b\widetilde{J}y - i(aJy + a\widetilde{J}y - by + b\widetilde{J}Jy).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{cases}
x - \widetilde{J}Jx = ay - a\widetilde{J}Jy + bJy + b\widetilde{J}y \\
Jx + \widetilde{J}x = aJy + a\widetilde{J}y - by + b\widetilde{J}Jy
\end{cases}.
$$

Portanto,

$$\begin{cases} a\widetilde{J}Jy - \widetilde{J}Jx - b\widetilde{J}y = ay + bJy - x \\ -a\widetilde{J}y + \widetilde{J}x - b\widetilde{J}Jy = aJy - by - Jx \end{cases},$$

ou ainda

$$\begin{cases} \widetilde{J}(aJy - Jx - by) = -J(aJy - by - Jx) \\ \widetilde{J}(-ay + x - bJy) = -J(-ay - bJy + x) \end{cases}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, de (3.6) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Y, W\rangle\lambda(Y - i\widetilde{J}Y) - \langle X, W\rangle(Y - i\widetilde{J}Y) \\ &= (\langle Y, W\rangle\lambda - \langle X, W\rangle)(Y - i\widetilde{J}Y) \\ &= \langle \lambda Y - X, W\rangle(Y - i\widetilde{J}Y). \end{aligned}$$

Se $Y - i\widetilde{J}Y$ é não nulo então $\langle \lambda Y - X, W\rangle = 0$ para todo $W \in T'\mathbb{C}P^n$, o que implica $\lambda Y - X \in T'\mathbb{C}P^n$. Logo, $\widetilde{J}(\lambda Y - X) = i(\lambda Y - X)$, e então

$$\begin{cases} \widetilde{J}(ay + bJy - x) = J(ay + bJy - x)) \\ \widetilde{J}(-aJy + by + Jx) = J(-aJy + by + Jx) \end{cases}. \tag{3.9}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \widetilde{J}((a + bi)(y - iJy) - (x - iJx)) &= \widetilde{J}(ay - iaJy + iby + bJy - x + iJx) \\ &= \widetilde{J}(ay + bJy - x + i(-aJy + by + Jx)) \\ &= \widetilde{J}(ay + bJy - x) + i\widetilde{J}(-aJy + by + Jx) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
i((a+bi)(y-iJy)-(x-iJx)) &= i(ay-iaJy+iby+bJy-x+iJx)\\
&= i(ay+bJy-x+i(-aJy+by+Jx))\\
&= -(-aJy+by+Jx))+i(ay+bJy-x)\\
&= (aJy-by-Jx)+i(ay+bJy-x)\\
&= J(ay+bJy-x)+iJ(-aJy+by+Jx).
\end{aligned}$$

Assim, de (3.8) e (3.9) temos que $\widetilde{J}(aJy-by-Jx)=0$. Portanto, $aJy-by-Jx=0$. Decorre daí que $Jx=aJy-by$, que é uma contradição pois $x$ e $Jx$ são ambos ortogonais a $y$ e $Jy$.

Portanto, $Y-i\widetilde{J}Y=0$ e segue que $\widetilde{J}|_{\mathcal{D}}=-J$, finalizando a prova do lema. □

**Lema 3.2.** *A distribuição $\mathcal{D}$ é integrável.*

*Demonstração.* Pelo teorema de Frobenius basta mostrar que $[X,Y]\in\mathcal{D}$ quaisquer que sejam $X,Y\in\mathcal{D}$. Sejam $\nabla$ e $\widetilde{\nabla}$ as conexões de $M$ e $\mathbb{C}P^n\times\mathbb{R}$, respectivamente. Vamos mostrar que $\langle [X,Y],\mathcal{T}\rangle=0$, isto é, $[X,Y]$ é ortogonal a $T$ e $JT$.

Note que

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \nabla_Y X-\nabla_X Y\\
&= \widetilde{\nabla}_Y X-\alpha(X,Y)-\widetilde{\nabla}_X Y+\alpha(Y,X)\\
&= \widetilde{\nabla}_Y X-\widetilde{\nabla}_X Y.
\end{aligned}$$

Então, visto que $\xi$ paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle [X,Y],\xi\rangle &= \left\langle \widetilde{\nabla}_Y X-\widetilde{\nabla}_X Y,\xi\right\rangle\\
&= Y\langle X,\xi\rangle-\left\langle X,\widetilde{\nabla}_Y\xi\right\rangle-X\langle Y,\xi\rangle+\left\langle Y,\widetilde{\nabla}_X\xi\right\rangle\\
&= 0. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Usando o lema anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{J}[X,Y],\xi \right\rangle &= \left\langle \widetilde{J}(\widetilde{\nabla}_Y X - \widetilde{\nabla}_X Y),\xi \right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{J}X,\xi \right\rangle - \left\langle \widetilde{\nabla}_X \widetilde{J}Y,\xi \right\rangle \\
&= Y\left\langle \widetilde{J}X,\xi \right\rangle - X\left\langle \widetilde{J}Y,\xi \right\rangle \\
&= Y\langle JX,\xi\rangle - X\langle JY,\xi\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $J$ e $\widetilde{J}$ são paralelos e a imersão é plurimínima, temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}[X,Y] &= \widetilde{J}(\widetilde{\nabla}_Y X - \widetilde{\nabla}_X Y) \\
&= \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{J}X - \widetilde{\nabla}_X \widetilde{J}Y \\
&= \widetilde{\nabla}_Y JX - \widetilde{\nabla}_X JY \\
&= \nabla_Y JX + \alpha(JX,Y) - \nabla_X JY - \alpha(X,JY) \\
&= J(\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&= J[X,Y].
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$\langle J[X,Y],\xi\rangle = 0. \tag{3.11}$$

Portanto, decorre de (3.10) e (3.11) que

$$\langle [X,Y],T\rangle = 0 \text{ e } \langle [X,Y],JT\rangle = 0.$$

Isto garante que, $\mathcal{D}$ é integrável.

□

Decorre dos dois resultados anteriores o seguinte teorema.

**Teorema 3.3.** *Seja $M$ uma variedade Kähler de dimensão complexa $m > 2$ e $f : M \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica plurimínima. Então existe um subconjunto aberto e denso na imagem de $M$ folheado por subvariedades holomorfas ou antiholomorfas de $\mathbb{C}P^n$.*

**Observação 3.4.** *Supondo que o conjunto dos pontos em que $T \equiv 0$ é não vazio, o mesmo é um conjunto magro. Portanto o seu complementar $M_0$ em $M$ é denso, ou seja, o seu fecho $\overline{M_0}$ é exatamente $M$.*

Quando $\xi$ é tangente a $M$ em todo ponto temos o seguinte lema.

**Lema 3.3.** *Se $\xi \in TM$, as distribuições $\mathcal{D}$ e $\mathcal{T}$ são paralelas.*

*Demonstração.* Neste caso, $T = \xi$. Sejam $X \in \mathcal{D}$ e $Y \in TM$. Denotaremos por $\nabla$ a conexão de $M$ e mostremos que $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$, isto é, $\nabla_Y X$ é ortogonal a $\xi$ e $J\xi$. De fato, sendo $\xi$ paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$ de $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, \xi \rangle &= \left\langle \widetilde{\nabla}_Y X - \alpha(X,Y), \xi \right\rangle \\ &= Y\langle X, \xi \rangle - \left\langle X, \widetilde{\nabla}_Y \xi \right\rangle - \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\langle \nabla_Y JX, \xi \rangle = 0,$$

que implica, pelo paralelismo de $J$, em

$$\langle \nabla_Y X, J\xi \rangle = 0.$$

Portanto, $\mathcal{D}$ é paralela.

Agora tomemos $Z \in \mathcal{T}$. Temos

$$\langle \nabla_Y Z, X \rangle = Y\langle Z, X \rangle - \langle Z, \nabla_Y X \rangle = 0.$$

Assim $\mathcal{T}$ é paralela. $\square$

**Proposição 3.3.** *Seja $M$ uma variedade Kähler de dimensão complexa $m > 2$ e $f : M \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, tal que $\xi \in TM$. Então $M$ é um produto $M_1 \times M_2$ onde $M_2$ é uma superfície.*

*Demonstração.* Segue do lema 3.3 e do teorema da decomposição de De Rham. □

Definamos em $M$ uma forma quadrática por

$$Q(X,Y) = \langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle.$$

É fácil ver que a componente $(2,0)$ de $Q$ é holomorfa. De fato, sejam $X, Y, Z \in T'M$ provenientes de referencial coordenado. Lembrando que $\xi$ é paralelo, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{Z}Q(X,Y) &= \overline{Z}(\langle X,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle)\\
&= \overline{Z}\langle X,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle + \langle X,\xi\rangle\overline{Z}\langle Y,\xi\rangle\\
&= \Big(\Big\langle \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}X,\xi\Big\rangle + \Big\langle X, \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\xi\Big\rangle\Big)\langle Y,\xi\rangle + \langle X,\xi\rangle\Big(\Big\langle \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}Y,\xi\Big\rangle + \Big\langle Y, \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\xi\Big\rangle\Big)\\
&= \big\langle \nabla_{\overline{Z}}X + \alpha(X,\overline{Z}),\xi\big\rangle\langle Y,\xi\rangle + \langle X,\xi\rangle\big\langle \nabla_{\overline{Z}}Y + \alpha(Y,\overline{Z}),\xi\big\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

**Lema 3.4.** *Se $M$ é compacta com primeira classe de Chern positiva, então $\xi$ é ortogonal a $TM$.*

*Demonstração.* Consideremos a forma quadrática $Q$ e seja $Q^{(2,0)}$ a sua $(2,0)$-componente, a qual é holomorfa. Visto que $M$ é compacta e tem primeira classe de Chern positiva, temos que $Q^{(2,0)} \equiv 0$. Assim dado $X \in TM$ temos

$$\begin{aligned}
0 &= Q(X - iJX, X - iJX)\\
&= \langle X - iJX, \xi\rangle\langle X - iJX, \xi\rangle\\
&= (\langle X,\xi\rangle - i\langle JX,\xi\rangle)(\langle X,\xi\rangle - i\langle JX,\xi\rangle)\\
&= \langle X,\xi\rangle^2 - 2i\langle X,\xi\rangle\langle JX,\xi\rangle - \langle JX,\xi\rangle^2\\
&= \langle X,\xi\rangle^2 - \langle JX,\xi\rangle^2 - 2i\langle X,\xi\rangle\langle JX,\xi\rangle,
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\langle X,\xi\rangle^2 - \langle JX,\xi\rangle^2 = 0 \text{ e } \langle X,\xi\rangle\langle JX,\xi\rangle = 0.$$

Portanto $\langle X,\xi\rangle = 0$, o que mostra que $\xi$ é ortogonal a $TM$.

□

**Teorema 3.4.** *Seja $M^m$ uma variedade Kähler, de dimensão complexa $m > 1$, compacta com primeira classe de Chern positiva e $f : M \longrightarrow \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica pluriminíma. Então $M$ é holomorfa ou antiholoforma em $\mathbb{C}P^n$.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.4 temos que $TM = \mathcal{D}$ e pelo Lema 3.1 segue a conclusão. □

**Observação 3.5.** *Para uma variedade Kähler qualquer $M$ com $\xi$ ortogonal a $TM$ temos o teorema devido a Dajczer e Thorbergsson em [7].*

# Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, H.; do CARMO, M.; TRIBUZY, R. *A theorem of Hopf and the Cauchy–Riemann inequality*, Comm. Anal. Geom. 15, 2007, 283–298.

[2] BESSE, A. *Einstein Manifolds*, A Series of Modern Surveys, Springer-Verlag, 1987.

[3] BURSTALL, F. E.; ESCHENBURG, J-H.; FERREIRA, M. J.; TRIBUZY R. *Kähler submanifolds with parallel pluri-minimal curvature*. Diff. Geom. and Apl. 20, 2004, 47-66.

[4] CAMINHA, Antônio; M. N. *Tópicos de Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[5] DAJCZER, M.; GROMOLL d. *Real Kaehler Submanifolds and uniqueness of the Gauss map*, J. Differential Geometry 22, 1985, 13-28.

[6] DAJCZER M.; RODRIGUES L. *Rigidity of Real Kähler Submanifolds*, Duke Math. J. 53, 1986, 211-220.

[7] DAJCZER, M.; THORBERGSSON, G. *Holomorphicity of minimal submanifolds in complex space forms*, Math. Ann. 277, 1987, 353 - 360

[8] ESCHENBURG, J-H. *Lecture notes on symmetric spaces*, http://www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu/.

[9] ESCHENBURG, J-H.; FERREIRA, M.J.; TRIBUZY, R. *A Characterization of the standard embeddings of $CP^2$ and $Q^3$*, Journal of Diferential Geometry 84, 2010, 289-300.

[10] ESCHENBURG, J-H.; FERREIRA, M.J.; TRIBUZY, R. *Isotropic ppmc immersions*, Differencial Geometry and Applications 27, 2007, 351-355.

[11] ESCHENBURG, J. H.; KOLLROSS, A.; TRIBUZY, R. *Codimension of immersions with parallel pluri-mean curvature*, Differential Geometry and Applications 27, 2009, 691-695.

[12] ESCHENBURG, J-H.; TRIBUZY, R. *Associated families of pluriharmonic maps and isotropy*, Manusc. Math. v.95, n. 3, 1998, 295-310.

[13] ESCHENBURG, J-H.; TRIBUZY, R. *(1,1)-geodesic maps into Grassmann manifolds*, Math. Z. 220, 1995, 337-346.

[14] Ferus D. *Symmetric submanifols of euclidian space*. Math. Ann. 247,1980, 81-93.

[15] FLORIT, L. A.; HUI, W. S.; ZHENG, F. *On real Kähler Euclidean submanifolds with non-negative Ricci curvature*, J. Eur. Math. Soc. 7, 2005, 1–11.

[16] FERREIRA, M. J.; RIGOLI, M.; TRIBUZY, R. *Isometric Immesions of Kähler manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 90, 1993, 25-38.

[17] FERREIRA, M. J.; TRIBUZY, R. *Kählerian Submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with Pluriharmonic Gauus map*, Bull. Soc. Math. Belg. 45, 1991, 183-197.

[18] FERREIRA, M. J.; TRIBUZY, R. *On the type decomposition of the second fundamental form of a Kaehler submanifold*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 94, 1995, 17-23.

[19] FERREIRA, M. J.; TRIBUZY, R. *On the nullity of isometric immersions from Kähler manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 65, 3, 2007, 345-352.

[20] JOST, Jürgen. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 2011.

[21] KÄHLER, Erich. *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 1933, 173-186.

[22] KOBAYASHI, S; NOMIZU, K. *Foudations of Diferential Geometry*, Vol. II. Wiley 198, 1973.

[23] KOBAYASHI, S.; WU, H-H. *On Holomorpic Sections of Certain Hermitian Vector Bundles*, Math. Ann. 198, 1970, 1-4.

[24] LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[25] MOORE, J. D. *Isometric Immersions of Riemannian Products*, J. Diff. Geom. 5, 1971, 159–168.

[26] NAITOH, H. *Isotropic Submanifolds with Parallel Second Fundamental Forms in Symmetric Spaces*, Osaka J. Math. 17, 1980, 95-110.

[27] O'NEILL, B. *Isotropic and Kahler immersions*, Canad J. Math 17, 1965, 905-915

[28] PETERSEN, P. *Riemannian Geometry*. Springer Science +Business Media, 2006.

[29] TSUKADA, K. *Parallel Kaehler Submanifolds of Hermitian Symmetric Spaces*, Math. Z. 190, 1985, 129-150.

[30] UDAGAWA, S. *Minimal Immersions of Kaehler Manifolds into Complex Space Forms*, TOKYO J. MATH. VOL. 10, No. 1, 1987, 227-239.