



UFAM

O MODELO LOG-POLY-WEIBULL MULTIVARIADO APLICADO À PREDIÇÃO
ESPAÇO-TEMPORAL DE TEMPERATURA NO ESTADO DO AMAZONAS

Alex Leal Mota

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Max Sousa de Lima

Manaus - AM

Junho de 2017

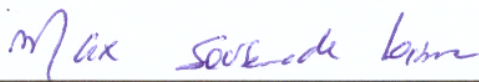
O MODELO LOG-POLY-WEIBULL MULTIVARIADO APLICADO À PREDIÇÃO
ESPAÇO-TEMPORAL DE TEMPERATURA NO ESTADO DO AMAZONAS

Alex Leal Mota

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA
(M.Sc). ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ESTATÍSTICA.

Examinada por:

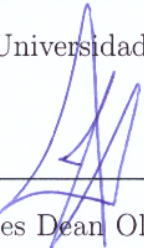
BANCA EXAMINADORA



Prof. Max Sousa de Lima, D.Sc. - Orientador
Universidade Federal do Amazonas



Prof. Fábio Nogueira Demarqui, D.Sc.
Universidade Federal Fluminense



Prof. James Dean Oliveira dos Santos Júnior, D.Sc.
Universidade Federal do Amazonas

MANAUS, AM- BRASIL

JUNHO de 2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M917m	<p>Mota, Alex Leal</p> <p>O Modelo Log-Poly-Weibull Multivariado Aplicado à Predição Espaço-Temporal de Temperatura no Estado do Amazonas / Alex Leal Mota. 2017</p> <p>62 f.: il. color; 31 cm.</p> <p>Orientador: Max Sousa de Lima</p> <p>Dissertação (Mestrado em Matemática - Estatística) - Universidade Federal do Amazonas.</p> <p>1. Dependência Espacial. 2. Distribuição Poly-Weibull. 3. Algoritmo MCEM. 4. Predição Espaço-Temporal. I. Lima, Max Sousa de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título</p>
-------	--

Dedico este trabalho a Deus e a toda minha
família.

Agradecimentos

Atribuo a honra deste trabalho primeiramente a Deus, o qual me honrou primeiro, concedendo o prestígio de me tornar acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Matemática-PPGM da UFAM e hoje finalizar esta etapa. A força e coragem me dados foram essenciais para superar as dificuldades durante esta longa caminhada.

Agradeço ao meu orientador, professor Max Sousa de Lima, pela confiança, incentivos e importantes contribuições para a elaboração e conclusão deste trabalho. Agradeço também aos professores e técnicos deste programa de pós-graduação que me ensinaram e mostraram a importância deste curso.

Em especial, agradeço aos meus irmãos Daniel Renato, Marcos André, Maria Eliene, Antônio Neto, a minha noiva e companheira Milena Nascimento Lima, principalmente à minha mãe Lucilene Leal Mota e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Quero agradecer também as pessoas com quem convivi nesses espaços ao longos desses anos, dentre estas pessoas destaco Regina, Alice, Guilherme, Marcos Andrade, Juan, Alan, Danilo, Jhonatan, Natan Cícero, Renata, Thiago e Vinícius que por sinal tiveram uma enorme participação na minha formação acadêmica. É importante ressaltar que a experiência de uma produção compartilhada na comunhão com amigos nesses espaços foram a melhor experiência da minha formação acadêmica.

Agradeço também aos meus amigos Michael e Adineube que embora não estiveram por perto, sempre mantiveram contato me apoiando e incentivando.

Enfim, o meu muito obrigado a todos os quais não fiz menção, porém estiveram inclusos nesta trajetória acadêmica que, por conseguinte também foram importantes na minha vida.

À Fundação de Amparo as Pesquisas do Amazonas - FAPEAM pelo financiamento nesses 2 anos de estudos.

“Um pouco de ciência nos afasta
de Deus. Muita, nos aproxima”.

Louis Pasteur

Resumo da dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. (M.Sc.)

O MODELO LOG-POLY-WEIBULL MULTIVARIADO APLICADO À PREDIÇÃO
ESPAÇO-TEMPORAL DE TEMPERATURA NO ESTADO DO AMAZONAS

Alex Leal Mota

Junho/2017

Orientador: Max Sousa de Lima

Linha de Pesquisa: Estatística

Neste trabalho, uma classe de distribuições multivariadas para dados possivelmente correlacionados foi construída através da marginalização da distribuição Pareto tipo IV G-exponencializada condicionada a uma mistura de distribuições alfa-estáveis positivas. Algumas propriedades desta classe foram apresentadas e procedimentos para estimação e inferência foram discutidos. Como um caso particular desta classe, o modelo espacial Log-Poly-Weibull foi proposto para modelagem e predição espaço-temporal de superfícies de temperatura. Algumas propriedades deste modelo foram apresentadas de maneira semelhante às do modelo geral e outras foram acrescentadas, todas no contexto da aplicação. Os parâmetros deste modelo foram estimados através do algoritmo MCEM e os erros padrões dos mesmos foram calculados via método Bootstrap paramétrico. O modelo proposto foi aplicado aos dados de temperatura média compensada observados no período de 1996 a 2015 nas estações meteorológicas do Estado do Amazonas-Brasil, e estudos simulados foram realizados para avaliar a capacidade preditiva do modelo.

Abstract of Dissertation presented to Postgraduate in Mathematics, of the Federal University of Amazonas, as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Mathematics. (M.Sc.)

THE MULTIVARIATE LOG-POLY-WEIBULL MODEL APPLIED TO SPACE-TEMPORAL
PREDICTION OF TEMPERATURE IN AMAZON STATE

Alex Leal Mota

Junho/2017

Advisor: Max Sousa de Lima

Research area: Statistics

A class of multivariate distributions for possibly correlated data was built by marginalizing of G-exponentialized Type IV Pareto distribution, and conditioned to a mixture of positive alpha-stables distributions. Some proprieties of this class were presented and the procedures for estimation and inference were discussed. A Log-Poly-Weibull spatial model was introduced, as a special case of proposed class, for modeling and space-temporal prediction of temperature surfaces. Most properties of the model were similar to the general model ones, while some were added to fit with the application. The parameters were estimated by the MCEM algorithm and the standard error through parametric method Bootstrap. The proposed model was applied to data on mean compensated temperature observed from 1996 to 2015 at meteorological stations of Amazon State – Brazil and simulations were performed to evaluate the predictive capacity of the model.

Lista de Figuras

2.1	Gráficos da função densidade (à esquerda) e função distribuição acumulada (à direita) Pareto tipo IV com os parâmetros: $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$ e $\sigma = 1$.	6
2.2	Gráficos das funções densidades e funções distribuições acumuladas das distribuições Pareto tipo I com parâmetro de escala fixado $\mu = 1$ e parâmetros de forma variando $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ e $\sigma = 3$	8
2.3	Gráfico da função de excedência Log-Poly-Weibull	13
4.1	Exemplo de representação espacial do processo de modelagem. Fonte (Cunha et al., 2017).	27
5.1	Distribuição espacial das estações meteorológicas do Estado do Amazonas segundo o INMET.	40
5.2	Séries de temperaturas compensadas médias anuais observadas nas 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas no período de 1996 a 2015. .	41
5.3	Divisão das estações meteorológicas em 3 sub-regiões com centros \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 . Os pontos com os mesmos símbolos pertencem a mesma sub-região/grupo.	42
5.4	Mapas de predição de temperatura de 1998 a 2006	45
5.5	Mapas de predição de temperatura de 2007 a 2015	46
5.6	Série das médias das temperaturas preditas para todo o Estado do Amazonas no período de 1996 a 2015. A linha tracejada indica a média global.	47
5.7	Predição simulada em Manaus	51
5.8	Predição simulada em Eirunepé	51

Lista de Tabelas

5.1	Coordenadas geográfica das estações meteorológicas do Estado do Amazonas-INMET	40
5.2	Estimativas do parâmetro α	43
5.3	Estimativas do parâmetro σ	44
5.4	Estimativas da predição em Manaus através dos preditores Trimmed (\tilde{Y}_t) e Valor Esperado Marginal (\hat{Y}_t) e seus erros quadráticos (\tilde{e}_t^2 e \hat{e}_t^2).	49
5.5	Estimativas da predição em Eirunepé através dos preditores Trimmed (\tilde{Y}_t) e Valor Esperado Marginal (\hat{Y}_t) e seus erros quadráticos (\tilde{e}_t^2 e \hat{e}_t^2).	50

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Aspectos Gerais	1
1.2 Justificativa e Relevância	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Organização	3
2 Fundamentação Teórica	5
2.1 A Classe de distribuições Pareto	5
2.1.1 A Pareto Tipo IV	5
2.1.2 Casos Particulares da Pareto Tipo IV	6
2.1.3 Relação da Distribuição Pareto tipo I Com a Distribuição Exponencial	8
2.2 Funções de Excedência e de Risco	9
2.3 Distribuições Estáveis	9
2.4 Distribuições Condicionais G-Exponencializadas	11
2.5 O Algoritmo EM e MCEM	14
3 A Classe Multivariada Proposta	16
3.1 Construção da Classe	16
3.2 Propriedades	17
3.2.1 Função Densidade Conjunta	17
3.2.2 Distribuições do Mínimo e Marginal	20
3.2.3 Função Densidade Por Grupos	21

3.2.4	Geração de Vetores Aleatórios Por Grupos	21
3.2.5	Inferência Por Grupos	23
4	O Modelo Log-Poly-Weibull Multivariado Para Predição Espaço-Temporal de Temperatura	25
4.1	O Modelo Log-Poly-Weibull Multivariado	25
4.1.1	Construção do Modelo	26
4.1.2	Propriedades	28
4.1.3	Representação Hierárquica	32
4.2	Estimação dos Parâmetros	33
4.2.1	Construção do algoritmo MCEM	34
4.3	O Processo de Predição	37
5	Aplicação a Dados Reais	39
5.1	Descrição dos Dados	39
5.2	Resultados do Modelo	42
5.3	Avaliação da Capacidade Preditiva do Modelo	47
6	Considerações Finais	52
A	Demonstração da Função Densidade por Grupos	54
B	Demonstração das Esperanças $\mathbb{E}_{m,1}$, $\mathbb{E}_{m,2}$, $\mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$	56
	Referências Bibliográficas	58

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos Gerais

Nos últimos anos, as mudanças climáticas vêm ganhando espaço nas mídias e têm trazido grandes preocupações tanto regionais quanto globais. Por exemplo, em 2014, o Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC, em inglês) publicou mais um relatório a respeito dos avanços da ciência referente às mudanças climáticas globais. O cenário mais otimista prevê um aumento da temperatura terrestre entre 0,3 °C e 1,7 °C de 2010 até 2100 e, no pior cenário, a superfície da Terra poderá aquecer entre 2,6 °C e 4,8 °C ao longo deste século (IPCC, 2014). Além disso, existem outros modelos climáticos que estimam um aumento na temperatura de 4°C a 6°C em partes do Brasil (principalmente na Amazônia) até 2100 (Nobre, 2001).

A sociedade a nível regional é sensível a variações e mudanças em eventos meteorológicos extremos, e espera-se que em cenários futuros de clima, como consequência de aquecimento global, a frequência e intensidade de eventos extremos podem ser alteradas, com vários efeitos potenciais sobre indivíduos, ecossistemas naturais, populações e comunidades (Lurgi et al., 2012, Marengo et al., 2007, Tood et al., 2011, Walther et al., 2002). Como exemplo, nos anos de 2005 e 2010 aconteceram as maiores secas do século na Amazônia. A falta prolongada de chuvas nas calhas dos rios Solimões fez cair o nível da água e deixou várias cidades da região Amazônica praticamente isoladas. Para a população ribeirinha os reflexos foram a falta de água potável, surtos epidêmicos de doenças e dificuldade de acesso a outras cidades (Serrão et al., 2015).

Os estudos para detectar as mudanças climáticas podem ser realizados usando séries

temporais históricas de variáveis atmosféricas (como temperatura e precipitação) de uma estação meteorológica ou de várias estações ajustadas em pontos não observados por algum modelo estatístico de predição ou interpolação espacial (Brillinger e Finney, 2014, Cunha et al., 2017, Davidson et al., 2016, Gelfand et al., 2010, Guttorp e Xu, 2011, Krahenmann et al., 2011, Shaby e Reich, 2012, Reich e Shaby, 2013). Geralmente, a temperatura do ar e a precipitação são consideradas indicadoras clássicas de mudanças de clima (Blanchet e Davison, 2011, Cooley e Sain, 2010, Lurgi et al., 2012, Padoan, 2011). Com base nisso, neste trabalho uma classe de distribuições multivariadas para dados possivelmente correlacionados é construída através da marginalização da distribuição Pareto tipo IV G-exponencializada condicionada a uma mistura de distribuições estáveis positivas. Algumas propriedades desta classe são apresentadas e procedimentos para estimação e inferência são discutidos. Como um caso particular desta classe, o modelo espacial Log-Poly-Weibull é proposto para modelagem e predição espaço-temporal de superfícies de temperatura. Algumas propriedades deste modelo são apresentadas de maneira semelhante às do modelo geral e outras são acrescentadas, todas no contexto da aplicação. Os parâmetros deste modelo são estimados através do algoritmo MCEM e os erros padrões dos mesmos são calculados via método Bootstrap paramétrico. O modelo proposto é aplicado aos dados de temperatura média compensada observados no período de 1996 a 2015 nas estações meteorológicas do Estado do Amazonas-Brasil, e estudos simulados são realizados para avaliar a capacidade preditiva do modelo.

1.2 Justificativa e Relevância

Modelos climáticos utilizados para as simulações de climas futuros numa região são dependentes de metodologias para predição ou interpolação espacial de valores climáticos como, por exemplo, valores de temperatura, precipitação, velocidade do vento etc. Por exemplo, em alguns modelos usuais, a interpolação é realizada usando o algoritmo Vebyk (Value Estimation by Kriging). Para utilização do Vebyk é recomendável termos um número razoável de estações meteorológicas uniformemente espaçadas (Marengo et al., 2007). No entanto, devido a grande extensão do Estado do Amazonas e a poucas estações meteorológicas, interpoladores como este produzem valores errôneos para a temperatura e outras variáveis climáticas. A consequência é que as tendências de clima estimadas no

Amazonas podem ser bastante distorcidas. Logo, a construção de modelos estatísticos mais robustos para a predição espacial ou espaço-temporal são necessários e podem contribuir para o aprimoramento nas previsões climáticas não somente no Amazonas, mas em todo o Brasil. Além disso, os modelos podem ajudar na análise de impactos de mudanças climáticas e nas avaliações de vulnerabilidade e de risco frente a estas mudanças. Isto pode auxiliar na definição de políticas de planejamento ambiental, assim como na implementação de políticas locais de avaliação e definição de zonas de risco a eventos extremos de tempo e clima.

1.3 Objetivos

O objetivo geral desta dissertação é propor um modelo multivariado para modelagem e predição de dados de temperatura no espaço-tempo.

Como objetivos específicos, temos:

1. Construir uma classe de distribuições multivariadas;
2. Apresentar algumas propriedades desta classe;
3. Propor o modelo Log-Poly-Weibull Multivariado como caso particular desta classe;
4. Representar hierarquicamente o modelo proposto e discutir suas propriedades;
5. Desenvolver e implementar o algoritmo MCEM para a inferência e estimação dos parâmetros do modelo proposto;
6. Aplicar o modelo proposto em dados reais para predição de temperatura no espaço-tempo;
7. Realizar estudos simulados para verificar a capacidade preditiva do modelo proposto.

1.4 Organização

Em termos de estruturação, esta dissertação está dividida em 6 capítulos.

No capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos que fundamentam esta dissertação.

No Capítulo 3, construímos uma classe de distribuições multivariada chamada Log-Pareto-Exponencializada. Derivamos também algumas de suas propriedades e discutimos métodos de estimação de seus parâmetros.

No Capítulo 4, propomos o modelo Log-Poly-Weibull multivariado como um caso particular da classe construída e apresentamos suas propriedades. Além disso, desenvolvemos o algoritmo MCEM para a inferência e estimação dos parâmetros deste modelo.

No Capítulo 5, aplicamos o modelo proposto no problema de predição espaço-temporal de valores de temperatura para o Estado do Amazonas e avaliamos a capacidade preditiva do modelo por meio de dois estudos simulados.

No Capítulo 6, descrevemos as considerações finais e, com base neste trabalho, sugerimos algumas ideias para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos necessários para uma melhor compreensão desta dissertação. Primeiramente, apresentaremos a classe de distribuições Pareto, em seguida a relação da distribuição Pareto tipo I com a exponencial e o conceito de distribuições estáveis e condicionais G-exponencializadas e, por último, o algoritmo EM e MCEM.

2.1 A Classe de distribuições Pareto

A classe de distribuições Pareto, em homenagem ao engenheiro civil italiano, economista e sociólogo Vilfredo Pareto, é constituída por distribuições de probabilidade leis de potências e são bastante usadas para modelar fenômenos observáveis nas áreas de economia, engenharias e ciências atuarias (Arnold, 1983).

A seguir apresentamos a distribuição Pareto tipo IV e obtemos as seguintes distribuições como casos particulares: Pareto tipo I (ou apenas Pareto), Pareto tipo II e Pareto tipo III.

2.1.1 A Pareto Tipo IV

Definição 2.1. *Seja Y uma variável aleatória. Dizemos que Y possui distribuição Pareto tipo IV com o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \mu, \gamma, \sigma)$, e representamos por $Y \sim P(IV)(\boldsymbol{\theta})$, se Y possui a seguinte função distribuição acumulada (Fig. (2.1) à direita)*

$$G(y; \boldsymbol{\theta}) = 1 - \left[1 + \left(\frac{y - \lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{-\sigma}, \quad y > \lambda \quad (2.1)$$

em que, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu, \gamma, \sigma > 0$. O λ é o parâmetro de localização, μ o parâmetro de escala, γ o parâmetro de desigualdade e σ o parâmetro de forma (Aban et al., 2006, Arnold, 1983, Forbes et al., 2011, Johnson et al., 1994).

A função densidade de probabilidade (Fig. (2.1) à esquerda) da variável aleatória $Y \sim P(IV)(\lambda, \mu, \gamma, \sigma)$ é dada por

$$g(y; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma}{\gamma\mu} \left(1 + \left(\frac{y - \lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-(\sigma+1)} \times \left(\frac{y - \lambda}{\mu} \right), \quad y > \lambda$$

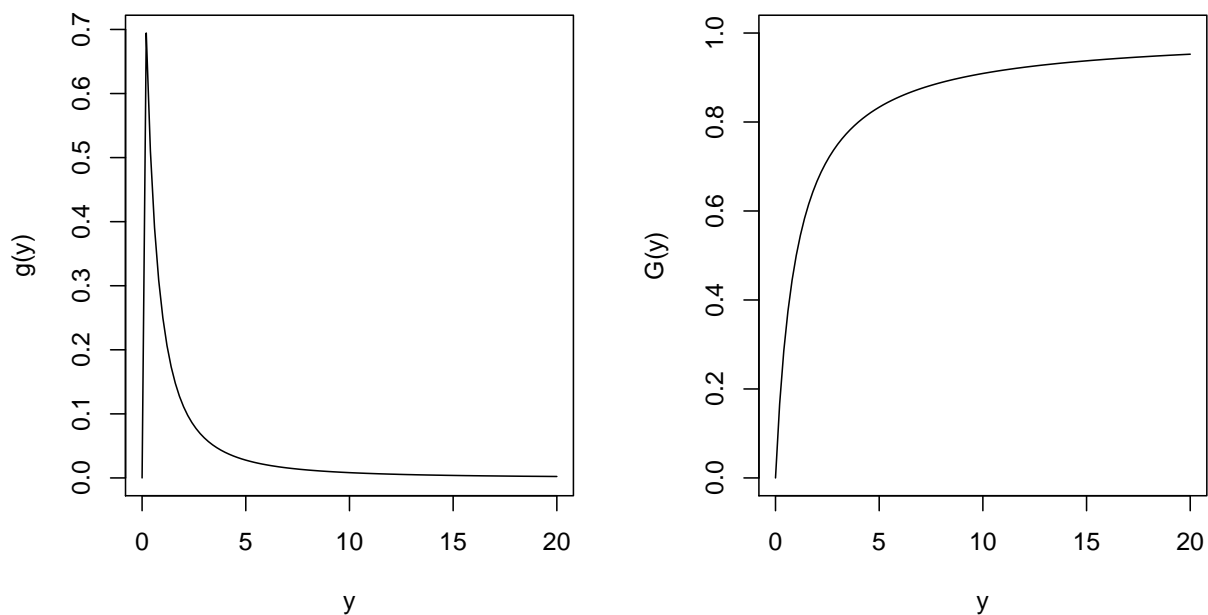


Figura 2.1: Gráficos da função densidade (à esquerda) e função distribuição acumulada (à direita) Pareto tipo IV com os parâmetros: $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$ e $\sigma = 1$.

2.1.2 Casos Particulares da Pareto Tipo IV

Alguns casos particulares da distribuição $P(IV)(\lambda, \mu, \gamma, \sigma)$ são:

1. $P(IV)(\mu, \mu, 1, \sigma) = P(I)(\mu, \sigma)$
2. $P(IV)(\lambda, \mu, 1, \sigma) = P(II)(\lambda, \mu, \sigma)$
3. $P(IV)(\lambda, \mu, \gamma, 1) = P(III)(\lambda, \mu, \gamma)$

em que, $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ representam, respectivamente, as distribuições Pareto tipo I, tipo II e tipo III.

Definição 2.2. Dizemos que a variável aleatória Y possui distribuição Pareto tipo I com os parâmetros μ e σ , e denotamos por $Y \sim P(I)(\mu, \sigma)$, se Y possui a seguinte função distribuição acumulada (Fig. (2.2) à direita)

$$G(y; \mu, \sigma) = 1 - \left(\frac{y}{\mu}\right)^{-\sigma}, \quad y > \mu. \quad (2.2)$$

em que $\mu > 0$ é o parâmetro de escala e $\sigma > 0$ é chamado de índice da cauda ou parâmetro de forma.

A função densidade de probabilidade (Fig. (2.2) à esquerda) é expressa por:

$$g(y; \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma \mu^\sigma}{y^{\sigma+1}}, & \text{se } y > \mu \\ 0, & \text{se } y \leq \mu \end{cases}$$

O valor esperado deste modelo é

$$\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} \frac{\mu\sigma}{\sigma-1}, & \text{se } \sigma > 1 \\ \infty, & \text{se } \sigma \leq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

A variância é dada por

$$\text{Var}(Y) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{\sigma-2}\right) \left(\frac{\mu}{\sigma-1}\right)^2, & \text{se } \sigma > 2 \\ \infty, & \text{se } \sigma \leq 2 \end{cases} \quad (2.4)$$

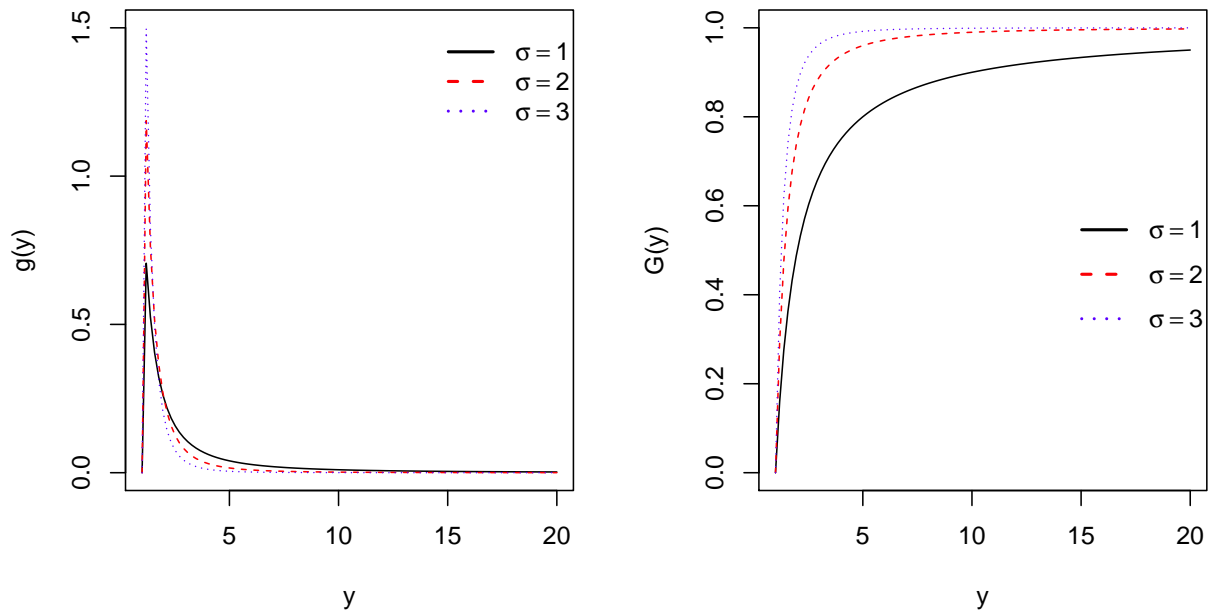


Figura 2.2: Gráficos das funções densidades e funções distribuições acumuladas das distribuições Pareto tipo I com parâmetro de escala fixado $\mu = 1$ e parâmetros de forma variando $\sigma = 1, \sigma = 2$ e $\sigma = 3$

2.1.3 Relação da Distribuição Pareto tipo I Com a Distribuição Exponencial

O seguinte resultado mostra a relação entre as distribuições Pareto e exponencial.

Proposição 2.1.1. *Sejam X e Y variáveis aleatórias. Se X é exponencialmente distribuída com parâmetro de taxa σ , então $Y = \mu \exp(X)$ possui distribuição Pareto tipo I com parâmetros μ e σ .*

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 G_Y(y; \mu, \sigma) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\mu e^X \leq y) \\
 &= \mathbb{P}\left(X \leq \log\left(\frac{y}{\mu}\right)\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\sigma \log\left(\frac{y}{\mu}\right)\right) \\
 &= 1 - \left(\frac{y}{\mu}\right)^{-\sigma}.
 \end{aligned}$$

Assim, $G_Y(y; \mu, \sigma) = 1 - \left(\frac{y}{\mu}\right)^{-\sigma}$ e, portanto, segue o resultado. \square

Observação 2.1. Onde usamos o seguinte resultado: Se $X \sim \exp(\lambda)$ então $G_X(x; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x > 0$. Para mais detalhes sobre a distribuição exponencial, veja (Magalhães, 2006).

2.2 Funções de Excedência e de Risco

Definição 2.3. Seja Y uma variável aleatória com função de distribuição G . Definimos função de excedência da variável Y , indicada por \bar{G} , como sendo o complementar da sua respectiva função distribuição, isto é,

$$\bar{G}(y; \boldsymbol{\theta}) = 1 - G(y; \boldsymbol{\theta}).$$

Definição 2.4. A função de risco de uma variável aleatória Y com densidade $g(y; \boldsymbol{\theta})$ e função de excedência $\bar{G}(y; \boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$h(y; \boldsymbol{\theta}) = \frac{g(y; \boldsymbol{\theta})}{\bar{G}(y; \boldsymbol{\theta})}$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetro.

Exemplo 2.2.1. A função de risco da distribuição da variável aleatória $Y \sim \text{Pareto(IV)}(\boldsymbol{\theta})$ com $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \mu, \gamma, \sigma)$ é expressa por:

$$h(y; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma}{\mu\gamma} \left(\frac{y - \lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{\gamma} - 1} \left(1 + \left(\frac{y - \lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1}, \quad y > \lambda. \quad (2.5)$$

2.3 Distribuições Estáveis

Distribuições estáveis é uma rica classe de distribuições de probabilidades que permitem assimetria e caudas pesadas e têm muitas propriedades matemáticas intrigantes. A classe foi caracterizada por Paul Lèvy em seu estudo de soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) na década de 1920, (Nolan, 2012).

As funções de densidades e distribuição pertencentes a essa classe, com exceção de três tipos Normal, Cauchy e Lèvy, não possuem formas analiticamente tratáveis. Entretanto, sua função característica é bem conhecida.

Definição 2.5. Uma variável aleatória $E \sim$ estável com o vetor de parâmetros $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ se sua função característica for dada por:

$$\phi_E(u) = \begin{cases} \exp \left\{ -\gamma^\alpha |u|^\alpha \left(1 + i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sign}(u) (|\gamma u|^{1-\alpha} - 1) + i\delta u \right) \right\}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ -\gamma |u| \left(1 + i\beta \left(\frac{2}{\pi}\right) \text{sign}(u) \log(\gamma |u|) + i\delta u \right) \right\}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

com $\text{sign}(u) = \frac{u}{|u|} \forall u \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\gamma > 0$ e $\delta \in \mathbb{R}$.

As interpretações dos parâmetros são as seguintes: α é o parâmetro chamado de índice de estabilidade ou expoente característico, ele define o nível da intensidade local, β é o parâmetro de assimetria (se $\beta = 0$ a distribuição é totalmente simétrica em torno de zero, se $\beta = -1$ é assimétrica negativa, se $\beta = 1$ é assimétrica positiva), δ é o parâmetro de locação e γ é o parâmetro de escala.

A seguinte definição trata-se de um caso particular da distribuição estável e será bastante útil.

Definição 2.6. Seja E uma variável aleatória estável. Dizemos que E é α -estável positiva ($E > 0$), quando $\alpha \in (0, 1]$, $\beta = 0$, $\delta = 0$ e $\gamma = 1$. Neste caso, sua distribuição fica especificada pela seguinte transformada de Laplace:

$$\mathbb{E}(e^{-uE}) = e^{-u^\alpha}, \quad u \geq 0. \quad (2.6)$$

Os momentos da distribuição estável não existem, porém (Zolotarev, 1986) mostrou que os momentos log-estáveis são bem conhecidos. Usando estes resultados, temos que:

$$\mathbb{E}(\log E) = \frac{\gamma^*}{\alpha} (1 - \alpha) \quad (2.7)$$

e,

$$\text{Var}(\log E) = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (2.8)$$

em que, $\gamma^* \approx 0.57721$ é a constante de Euler.

Um resultado importante que nos auxiliará na geração de variáveis aleatórias α -estáveis positivas é dada no seguinte corolário:

Corolário 2.1. *Sejam V e U variáveis aleatórias independentes em que $V \sim \exp(1)$ e $U \sim \mathcal{U}[0, \pi]$. Então para $\alpha \in (0, 1)$ tem-se que $E = \left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sim \alpha$ -estável positiva. Em que a função $a(\cdot)$ é dada por:*

$$a(\varphi) = \left(\frac{\sin(\alpha\varphi)}{\sin(\varphi)}\right)^{(1-\alpha)^{-1}} \left(\frac{\sin((1-\alpha)\varphi)}{\sin(\alpha\varphi)}\right)$$

Demonstração. Ver (Kanter , 1975). □

Então, valores de E podem ser gerados da seguinte forma:

1. Gere $U \sim \mathcal{U}(0, \pi)$ e $V \sim \exp(1)$, independentes.
2. Obtenha $E = \left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

2.4 Distribuições Condicionais G-Exponencializadas

Outro conceito fundamental nesta dissertação, é o de distribuições condicionais G-exponencializadas caracterizadas pelas suas respectivas funções de distribuições acumuladas G (ou por suas funções de excedências \bar{G}) de uma variável aleatória elevada a um expoente E . Embora este tipo de distribuição, com E fixo, tenha sido apresentada a mais de meio século (Lehmann, 1953), nós o formulamos com objetivo de introduzir a dependência em distribuições multivariadas.

Definição 2.7. *Sejam Y e $E > 0$ duas variáveis aleatórias. Dizemos que condicional a E , Y possui distribuição G-Exponencializada, se a distribuição de Y for dada por:*

$$F(y; \boldsymbol{\theta}|E) = P(Y \leq y|E) = [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E \quad (2.9)$$

ou, se sua função de excedência é da forma

$$\begin{aligned} \bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E) = P(Y > y|E) &= [1 - G(y; \boldsymbol{\theta})]^E \\ &= [\bar{G}(y; \boldsymbol{\theta})]^E \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que G e \bar{G} são chamadas, respectivamente, de função de distribuição e função de excedência de base dependendo do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

Uma aplicação interessante da definição acima é vista quando consideramos $E \sim \alpha$ -estável positiva. Primeiramente, note que podemos expressar (2.9) da seguinte maneira:

$$F(y; \boldsymbol{\theta}|E) = [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E = \exp(-E \log(1/G(y; \boldsymbol{\theta}))).$$

Aplicando esperança em ambos os membros desta igualdade e em seguida (2.6), com $u = \log(G(y; \boldsymbol{\theta})^{-1})$, vem que a distribuição marginal G-exponencializada de Y é dada por

$$F(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = P(Y \leq y) = \exp\{-[-\log(G(y; \boldsymbol{\theta}))]^\alpha\}. \quad (2.11)$$

Analogamente, usando a Equação (2.10), obtemos

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = P(Y > y) = \exp\{-[-\log(\bar{G}(y; \boldsymbol{\theta}))]^\alpha\}. \quad (2.12)$$

Em alguns casos o parâmetro α é chamado parâmetro de forma. Em outros casos, entretanto, ele apenas modifica (aumenta ou diminui) os parâmetros da função (distribuição ou excedência) de base.

A seguir vamos apresentar alguns exemplos dessa observação. As notações $Y \sim G(y; \boldsymbol{\theta})$ ou $Y \sim \bar{G}(y; \boldsymbol{\theta})$ será utilizada para especificar que G ou \bar{G} é a distribuição de base para a variável Y .

Exemplo 2.1. Considere que $E \sim \alpha$ -estável positiva e $Y \sim P(I)(\mu, 1/\sigma)$ então $Y|E \sim P(I)(\mu, E/\sigma)$, isto é,

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E) = \left(\frac{y}{\mu}\right)^{-\frac{E}{\sigma}}, \quad y > \mu. \quad (2.13)$$

Logo, por (2.12), temos que

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{\log y - \log \mu}{\sigma}\right)^\alpha\right\}, \quad y > \mu \quad (2.14)$$

que representa a função de excedência Log-Poly-Weibull($\log \mu, \sigma, \alpha$) (Berger e Sun, 1993).

Na Figura (2.3) apresentamos o gráfico dessa função de excedência com $\mu = 0.5$, $\sigma = 2$ e variando os valores do parâmetro de forma α .

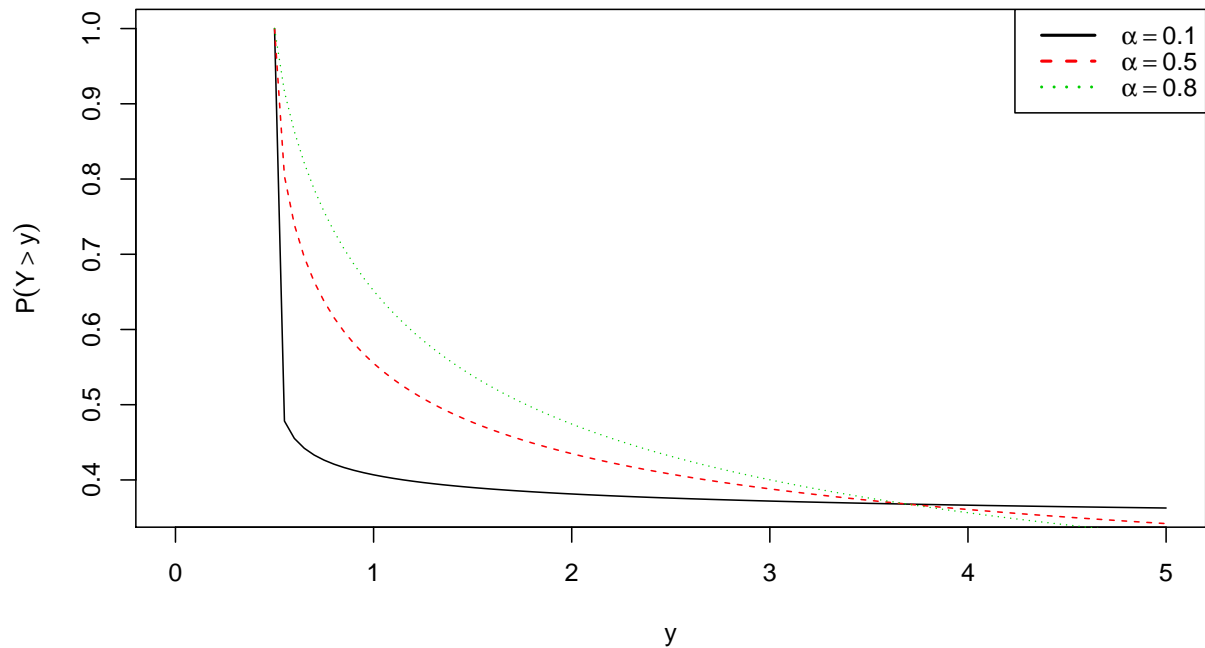


Figura 2.3: Gráfico da função de excedência Log-Poly-Weibull

Exemplo 2.2. Dizemos que Y possui distribuição Kumaraswamy se sua função de excedência é dada por:

$$\bar{G}(y; \boldsymbol{\theta}) = (1 - y^\lambda)^\beta, \quad y \in (0, 1). \quad (2.15)$$

em que $\lambda, \beta > 0$ são parâmetros de forma. Notação: $Y \sim KW(\lambda, \beta)$.

Agora, se $E \sim \alpha$ -estável positiva e $Y \sim KW(\lambda, \beta)$ então $Y|E \sim KW(\lambda, \beta E)$. Portanto, por (2.12) a distribuição marginal é dada por:

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \exp \{ -\beta^\alpha [-\log(1 - y^\lambda)]^\alpha \}, \quad y \in (0, 1). \quad (2.16)$$

Nos dois exemplos acima, vemos que após a marginalização, as distribuições não pertencem à mesma família. No entanto, existem casos em que as distribuições tanto condicionais quanto incondicionais pertencem a mesma classe de distribuições. Os exemplos a seguir ilustram esse fato.

Exemplo 2.3. Se a distribuição de base é $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, isto é

$$G(y; \boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

então,

$$F(y; \boldsymbol{\theta}|E) = \exp \left\{ -E \exp \left[- \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{y - (\mu + \sigma \log E)}{\sigma} \right) \right] \right\}$$

isto é, $Y|E \sim \text{Gumbel}(\mu + \sigma \log E, \sigma)$. Logo, aplicando (2.11), vem que

$$F(y; \boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{y - \mu}{\sigma/\alpha} \right) \right] \right\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma/\alpha)$.

Portanto, após a marginalização Y pertence à mesma família Gumbel. Neste caso α não representa um parâmetro de forma. Deste modo, dizemos que a distribuição estável positiva simplesmente aumentou o parâmetro de escala de σ para σ/α .

Exemplo 2.4. Se $E \sim \alpha$ -estável positiva e $Y \sim \text{Weibull}(\kappa, \eta)$, isto é possui função de excedência

$$\bar{G}(y; \kappa, \eta) = \exp \left\{ - \left(\frac{y}{\kappa} \right)^\eta \right\}, \quad y > 0. \quad (2.18)$$

Então, $Y|E \sim \text{Weibull}(\kappa/E^\eta, \eta)$ e aplicando (2.12), temos

$$F(y; \boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ - \left(\frac{y}{\kappa} \right)^{\eta\alpha} \right\}, \quad y > 0 \quad (2.19)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \eta\alpha)$.

Portanto, após a marginalização $Y \sim \text{Weibull}(\kappa, \eta\alpha)$. Neste caso, dizemos que o parâmetro α diminuiu o parâmetro de forma η para $\eta\alpha$.

2.5 O Algoritmo EM e MCEM

O algoritmo EM, proposto por (Dempster et al., 1977), é um método computacional iterativo para encontrar o estimador de máxima verossimilhança (EMV) quando a

função de verossimilhança não é analiticamente tratável, e é principalmente utilizado em problemas envolvendo dados incompletos ou não observáveis (efeitos aleatórios, variáveis latentes ou dados faltantes)(Casella e Berger, 2010).

Considere \mathbf{y} o vetor dos dados observados e \mathbf{y}^* o vetor dos dados faltantes ou latentes tais que admitem a seguinte representação hierárquica:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}|\mathbf{y}^* &\sim f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}^*) \\ \mathbf{y}^* &\sim f(\mathbf{y}^*; \boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

O vetor $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{y}^*)$ é chamado de dados completos ou aumentados e possui função densidade de probabilidade $f(\mathbf{y}_c; \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}^*)f(\mathbf{y}^*; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Sejam $\ell_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_c)$ e $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$, respectivamente, as funções log-verossimilhanças dos dados completos e dos dados observados. Segundo (Zhu e Lee, 2001), na maioria das aplicações em estatística, a função log-verossimilhança dos dados completos geralmente tem forma mais simples que a log-verossimilhança dos dados observados.

Defina $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ como a estimativa da k-ésima iteração e $f(\mathbf{y}^*|\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})$ a distribuição condicional de \mathbf{Y}^* dado os dados observados com esperança $\mathbf{E}_{\mathbf{Y}^*|\mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}}$. Cada iteração do algoritmo EM envolve dois passos, um passo E (esperança) e um passo M (maximização), definidos da seguinte maneira:

1. Passo E: Na (k+1)-ésima interação compute a quantidade:

$$\tilde{\ell}_c(\boldsymbol{\theta}^{(k)}; \mathbf{y}_c) = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}^*|\mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}} \left(\ell_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) \right)$$

2. Passo M: Encontre $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} = \text{Argmax}_{\boldsymbol{\theta}} \left(\tilde{\ell}_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) \right)$

Estes passos devem ser repetidos até se atingir uma convergência. Podemos adotar como critério de parada $|\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}; \mathbf{y}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y})| < \epsilon$ ou $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\| < \epsilon$ em que ϵ é um valor, maior do que zero, especificado para o erro de aproximação e $\|a\|$ é a norma do vetor a .

Em muitas aplicações, a esperança condicional $\mathbb{E}_{\mathbf{Y}^*|\mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}} \left(\ell_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) \right)$ do passo E não pode ser calculada analiticamente. Quando este problema ocorre, geralmente, usamos o método de Monte Carlo para solucioná-lo e, assim, o algoritmo EM passa a ser chamado MCEM (Levine e Casella, 2001, Wei e Tanner, 1990).

Capítulo 3

A Classe Multivariada Proposta

Neste capítulo construiremos uma classe de distribuições multivariadas para dados possivelmente correlacionados chamada Log-Pareto-Exponencializada e representada por Log-Pareto-Exp($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}$). Algumas propriedades serão desenvolvidas e métodos para a estimação dos parâmetros serão discutidos.

3.1 Construção da Classe

Considere \mathcal{A} e \mathcal{B} conjuntos de índices discretos finitos. Sejam $\{\delta_{a,b} : a \in \mathcal{A} \text{ e } b \in \mathcal{B}\}$ constantes não-negativas tais que $\sum_{b \in \mathcal{B}} \delta_{a,b} = 1$ e, $\{E_b : b \in \mathcal{B}\}$ um conjunto de variáveis independentes α_b -estáveis positivas. Defina $H_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \delta_{a,b} E_b$, isto é, para cada $a \in \mathcal{A}$, H_a é uma mistura de distribuições α_b -estáveis positivas. Assuma que $\{Y_a | H_a : a \in \mathcal{A}\}$ é um conjunto de variáveis condicionalmente independentes com distribuições Pareto (IV)($\lambda_a, \mu_a, \gamma_a, H_a/\sigma_a$), ou seja, possui função de excedência

$$\bar{F}(y_a; \boldsymbol{\theta} | H_a) = \exp \left\{ -H_a \log \left(\left[1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{1/\gamma_a} \right]^{1/\sigma_a} \right) \right\}, \quad y_a > \lambda_a. \quad (3.1)$$

Seja \mathcal{H} um vetor cujas coordenadas são marginais formadas por misturas de distribuições α_b -estáveis. Então,

$$\begin{aligned}\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}) &= \prod_{a \in \mathcal{A}} \bar{F}(y_a; \boldsymbol{\theta} | H_a) \\ &= \prod_{a \in \mathcal{A}} \exp \left\{ -H_a \log \left(\left[1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{1/\gamma_a} \right]^{1/\sigma_a} \right) \right\}\end{aligned}$$

Desta forma, aplicando esperança em ambos os lados da igualdade acima, temos que marginalmente ao vetor \mathcal{H}

$$\begin{aligned}\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbb{E}(\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H})) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ -E_b \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a,b} \log \left[1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{1/\gamma_a} \right]^{1/\sigma_a} \right\} \right).\end{aligned}$$

Como $E_b, b \in \mathcal{B}$, são variáveis aleatórias independentes α_b -estáveis positivas, aplicando (2.6), obtemos o seguinte resultado:

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \left[\sum_{a \in \mathcal{A}} (\delta_{a,b}/\sigma_a) \log \left(1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right) \right]^{\alpha_b} \right\}, \quad y_a > \lambda_a. \quad (3.2)$$

O modelo multivariado obtido é chamado de Modelo Log-Pareto-Exponencializado e denotado por $\mathbf{Y} \sim \text{Log-Pareto-Exp}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$. Dizemos também que este modelo forma uma classe multivariada, pois a distribuição Pareto tipo IV possui como caso particulares as distribuições $P(III)$, $P(II)$ e $P(I)$ (veja a Subseção (2.1.2)).

3.2 Propriedades

Nesta seção apresentamos algumas propriedades do modelo multivariado Log-Pareto-Exp($\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}$).

3.2.1 Função Densidade Conjunta

Para o cálculo da função densidade conjunta, definimos as seguintes variáveis:

$$\nu_{a,b} = (\delta_{a,b}/\sigma_a) \log \left(1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right) \quad (3.3)$$

e

$$z_b = \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} \nu_{a,b} \right)^{\alpha_b}. \quad (3.4)$$

Então, a função de excedência conjunta (3.2) fica expressada da seguinte maneira:

$$\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \exp \left(- \sum_{b \in \mathcal{B}} z_b \right), \quad z_b > 0. \quad (3.5)$$

De acordo com (Li, 1997), a função densidade de probabilidade multivariada de um vetor aleatório $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ pode ser encontrada a partir do conhecimento da função de excedência pela seguinte fórmula:

$$f(y_1, \dots, y_n; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{(-1)^n \partial^{(n)} \bar{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n}. \quad (3.6)$$

Usando este resultado, temos a seguinte

Proposição 3.2.1. *A função densidade conjunta de (3.5) é expressa por:*

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \phi_{1,2,\dots,A}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (3.7)$$

em que A é a cardinalidade do conjunto \mathcal{A} ,

$$\phi_{1,2,\dots,A}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \phi_A(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_{1,2,\dots,(A-1)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_A} \phi_{1,2,\dots,(A-1)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$$

e,

$$\phi_a(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) = h(y_a; \boldsymbol{\theta}) \cdot \Psi(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \text{para } a = 1, 2, 3, \dots, A$$

com

$$\Psi(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \delta_{a,b} \alpha_b z_b^{1 - \frac{1}{\alpha_b}}$$

e,

$$h(y_a; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a} - 1} \left(1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right)^{-1}}{\sigma_a \mu_a \gamma_a} \quad (3.8)$$

é a função de risco associada a distribuição $P(IV)(\lambda_a, \mu_a, \gamma_a, 1/\sigma_a)$.

Demonstração. Vamos usar o princípio da indução finita sobre $A \geq 2$. Com efeito, para $A = 2$, temos que por (3.6)

$$f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = (-1)^2 \frac{\partial^{(2)} \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1, \partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1} \right).$$

Note que,

$$\frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_a} = -\bar{F}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_a(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) \quad \text{para } a = 1, 2, 3, \dots, A. \quad (3.9)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial y_2} (-\bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})) \\ &= \left[-\frac{\partial}{\partial y_2} \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] \cdot \phi_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_2} \phi_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right] \\ &= \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \left[\phi_2(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_2} \phi_1(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{F}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_{1,2}(y_1, y_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}).$$

e, portanto, o resultado é válido.

Suponha que o resultado é válido para $A = k$ com $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{(-1)^k \partial^{(k)} \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_k} \\ &= \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_{1,2,\dots,k}(y_1, y_2, \dots, y_k; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Devemos provar que vale para $A = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. De fato, por diferenciação recursiva temos que

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{-\partial}{\partial y_{k+1}} \left(\frac{(-1)^k \partial^{(k)} \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_k} \right) \\ &= \frac{-\partial}{\partial y_{k+1}} (\bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \phi_{1,2,\dots,k}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})) \end{aligned}$$

de modo que

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \phi_{1,2,\dots,k+1}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$$

Portanto, segue o resultado para todo $A \in \mathbb{N}$. \square

Essa fórmula recursiva da densidade é conveniente para programação computacional.

3.2.2 Distribuições do Mínimo e Marginal

Considere $\mathbf{Y} \sim \text{Log-Pareto-Exp}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta})$. As distribuições do mínimo e marginais sobre qualquer subconjunto $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, tal que $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$, pertencem à mesma classe Log-Pareto-Exponencializado.

Demonstração. Com efeito, observe que

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E} \left(P \left(\min_{a \in \mathcal{A}_0} Y_a > y \mid \mathcal{H} \right) \right)$$

Como, $\{Y_a \mid H_a : a \in \mathcal{A}_0\}$ são variáveis condicionalmente independentes com distribuições Pareto (IV) $(\lambda_a, \mu_a, \gamma_a, H_a/\sigma_a)$, então por (3.1)

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_0} \exp \left\{ \frac{-H_a}{\sigma_a} \log \left[1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right] \right\} \right) \quad (3.10)$$

Substituindo-se $H_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \delta_{a,b} E_b$ e em seguida aplicando (2.6), temos

$$\bar{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \left[\sum_{a \in \mathcal{A}_0} (\delta_{a,b}/\sigma_a) \log \left(1 + \left(\frac{y - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right) \right]^{\alpha_b} \right\}, \quad y > \lambda_a.$$

e pertence à mesma família Log-Pareto-Exponencializado.

Em particular, se \mathcal{A}_0 possui apenas um ponto então a distribuição marginal de Y_a é

$$\bar{F}_{Y_a}(y_a; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \left[(\delta_{a,b}/\sigma_a) \log \left(1 + \left(\frac{y_a - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right) \right]^{\alpha_b} \right\}, \quad y_a > \lambda_a.$$

e, também pertence à mesma família. \square

3.2.3 Função Densidade Por Grupos

Considere que a família de subconjuntos $\{\mathcal{A}_b; b \in \mathcal{B}\}$ é uma partição de \mathcal{A} e que para cada $b \in \mathcal{B}$ temos observações da forma $\mathbf{y}_b = (y_1, y_2, \dots, y_{A_b})$ em \mathcal{A}_b . Obtemos diretamente de (3.5) que a função distribuição marginal do vetor aleatório $\mathbf{Y}_b \sim \text{Log-Pareto-Exp}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_b)$ é dada por

$$\bar{F}(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b) = \exp\{-\bar{z}_b\}, \quad \bar{z}_b > 0 \quad (3.11)$$

em que $\bar{z}_b = \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} \nu_{a,b}\right)^{\alpha_b}$ e $\nu_{a,b}$ é dado em (3.3).

Proposição 3.1. *A função densidade do vetor aleatório $\mathbf{Y}_b \sim \text{Log-Pareto-Exp}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_b)$, $b \in \mathcal{B}$ é expressa por*

$$f(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha_b) = \alpha_b^{A_b} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \right) \exp(-\bar{z}_b) \bar{z}_b^{1 - \frac{A_b}{\alpha_b}} Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b) \quad (3.12)$$

em que $\boldsymbol{\theta}_b$ é o subvetor de parâmetros, A_b é a cardinalidade do conjunto \mathcal{A}_b , $h(\cdot)$ é dada como em (3.8) e $Q_1(\bar{z}_b, \alpha_b) = 1$ com

$$Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b) = \left(\frac{A_b - 1 - \alpha_b}{\alpha_b} + \bar{z}_b \right) Q_{A_b-1}(\bar{z}_b, \alpha_b) - \bar{z}_b \frac{\partial}{\partial \bar{z}_b} Q_{A_b-1}(\bar{z}_b, \alpha_b), \quad A_b \geq 2. \quad (3.13)$$

Esta função densidade conjunta por grupos (3.12) é encontrada de forma similar a (Shi, 1995), em que $Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b)$ é um polinômio de ordem $(A_b - 1)$ em \bar{z}_b .

A demonstração desse resultado é consequência da Proposição (3.2.1) e se encontra no Apêndice A.

3.2.4 Geração de Vetores Aleatórios Por Grupos

Para todas as observações $\mathbf{y}_b = (y_1, y_2, \dots, y_{A_b})$ pertencentes a \mathcal{A}_b , introduzimos a seguinte transformação

$$(w_1, w_2, \dots, w_{A_b-1}, \bar{z}_b) = \left(\frac{\nu_{1,b}}{\sum_{a \in \mathcal{A}_b} \nu_{a,b}}, \frac{\nu_{2,b}}{\sum_{a \in \mathcal{A}_b} \nu_{a,b}}, \dots, \frac{\nu_{A_b-1,b}}{\sum_{a \in \mathcal{A}_b} \nu_{a,b}}, \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} \nu_{a,b}\right)^{\alpha_b} \right) \quad (3.14)$$

Obviamente que $w_1 + w_2 + \dots + w_{A_b} = 1$ e $\nu_{a,b} = w_a \bar{z}_b^{\frac{1}{\alpha_b}}$. Assim,

$$\frac{\partial y_{a,b}}{\partial w_j} = \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \nu_{a,b}} \times \frac{\partial \nu_{a,b}}{\partial w_a} = \begin{cases} \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \nu_{a,b}} \times \bar{z}_b^{\frac{1}{\alpha_b}}, & \text{se } a = j \\ 0, & \text{se } a \neq j \end{cases}$$

e, como $\nu_{a,b} = \bar{z}_b^{\frac{1}{\alpha_b}} - \sum_{j \neq a} \nu_{j,b}$, temos que:

$$\frac{\partial y_{a,b}}{\partial \bar{z}_b} = \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \nu_{a,b}} \times \frac{\partial \nu_{a,b}}{\partial \bar{z}_b} = \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \nu_{a,b}} \times \frac{1}{\alpha_b} \bar{z}_b^{\frac{1}{\alpha_b} - 1}$$

daí, o módulo do jacobiano da transformação $(y_{1,b}, y_{2,b}, \dots, y_{A_b,b}) \mapsto (w_1, \dots, w_{A_b-1}, \bar{z}_b)$ é dado por,

$$|\mathbf{J}| = \frac{\bar{z}_b^{\frac{A_b}{\alpha_b} - 1}}{\alpha_b \left(\prod_{a=1}^{A_b} \left| \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \nu_{a,b}} \right| \right)^{-1}}. \quad (3.15)$$

Observe que

$$\left| \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \nu_{a,b}} \right|^{-1} = \left| \frac{\partial \nu_{a,b}}{\partial y_{a,b}} \right| = \delta_{a,b} h(y_a; \boldsymbol{\theta}).$$

Logo,

$$f(w_1, \dots, w_{A_b-1}, \bar{z}_b) = \Gamma(A_b) \times Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b) \frac{\alpha_b^{A_b-1}}{\Gamma(A_b)} e^{-\bar{z}_b}. \quad (3.16)$$

Portanto, \mathbf{W}_b é independente de \bar{Z}_b . Além disso, temos que $\mathbf{W}_b \sim \text{Dirichlet}(1, \dots, 1)$ simétrica (Bela et al., 2010) e \bar{Z}_b é uma mistura de distribuições Gama. Isto é,

$$f(\bar{z}_b) = \sum_{a \in A_b} q_{A_b,a} \frac{1}{\Gamma(a)} z_b^{a-1} e^{-\bar{z}_b}, \quad \bar{z}_b > 0$$

em que, os pesos $q_{A_b,a}$ são decididos por $Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b)$. De (3.13), (Shi, 1995) obtém as seguintes relações de recorrência:

$$q_{A_b,1} = \frac{\Gamma(A_b - \alpha_b)}{\Gamma(A_b) \Gamma(1 - \alpha_b)},$$

$$q_{A_b, a} = \frac{\alpha_b(a-1)q_{A_b-1, a-1} + (A_b - 1 - a\alpha_b)q_{A_b-1, a}}{(A_b - 1)}$$

$$q_{A_b, A_b} = \alpha_b^{A_b-1}$$

Por exemplo, se $A_b = 2$, teremos

$$\bar{Z}_b \sim (1 - \alpha_b)\Gamma(1, 1) + \alpha_b\Gamma(2, 1) \quad \text{e} \quad W_{1,b} \sim \text{Beta}(1, 1). \quad (3.17)$$

Observe que não é uma tarefa fácil gerar valores do vetor \mathbf{Y}_b diretamente do modelo dado em (3.11). Todavia, a partir de (3.3) e da transformação (3.14) obtemos que

$$y_{a,b} = \mu_a \left[\exp \left(\frac{\sigma_a w_{a,b} \bar{z}_b^{\frac{1}{\alpha_b}}}{\delta_{a,b}} + \log \mu_a \right) - 1 \right]^{\frac{1}{\gamma_a}} + \lambda_a, \quad \forall a \in \mathcal{A}_b \quad (3.18)$$

Então, geramos valores das distribuições de \mathbf{W}_b e \bar{Z}_b e obtemos, \mathbf{y}_b através do método da transformação inversa dado em (3.18).

3.2.5 Inferência Por Grupos

Para realizar o ajuste do modelo, uma abordagem pode ser o método da máxima verossimilhança por grupos. Neste caso, a função log-verossimilhança do modelo Log-Pareto-Exponencializado por grupo é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}, \alpha_b; \mathbf{y}_b) = A_b \log \alpha_b + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \log[\delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta})] - \bar{z}_b + \left(1 - \frac{A_b}{\alpha_b}\right) \log \bar{z}_b + \log Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b).$$

As componentes para o vetor escore $\mathbf{U} = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_a}, \frac{\partial \ell}{\partial \mu_a}, \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_a}, \frac{\partial \ell}{\partial \gamma_a}, \frac{\partial \ell}{\partial \alpha_b} \right)'$ são

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_a} = \frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a \gamma_a \mu_a} \left[\frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\mu_a \gamma_a} - \frac{1}{\mu_a} \left(\frac{1}{\gamma_a} - 1 \right) \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{-1} - D_1(\bar{z}_b, \alpha_b) \left(\left(1 - \frac{A_b}{\alpha_b}\right) - \bar{z}_b + S_1 \bar{z}_b \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\mu_a} &= \frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a \mu_a^2 \gamma_a^2} \left[-\gamma_a + \frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\mu_a} \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right) - \gamma_a \left(\frac{1}{\gamma_a} - 1 \right) \right] \\ &+ \frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a \mu_a \gamma_a} \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right) D_1(\bar{z}_b, \alpha_b) \left(\bar{z}_b - \left(1 - \frac{A_b}{\alpha_b} \right) - S_1 \bar{z}_b \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_a} = -\frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a^2 \gamma_a \mu_a} + \frac{\nu_{a,b} D_1(\bar{z}_b, \alpha_b)}{\delta_{a,b} \sigma_a} \left(\bar{z}_b + \left(1 - \frac{A_b}{\alpha_b} \right) - S_1 \bar{z}_b \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \gamma_a} &= -\frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a \gamma_a^2} \left\{ \frac{1}{\mu_a \gamma_a} \log \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right) \left[1 - \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{C_1(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a \gamma_a^2} \left\{ \frac{1}{\mu_a} + \frac{1}{\mu_a \gamma_a} \log \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right) \left[D_1(\bar{z}_b, \alpha_b) \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right) \left(\bar{z}_b + \left(1 - \frac{A_b}{\alpha_b} \right) + S_1 \bar{z}_b \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_b} = \frac{R}{\alpha_b} + S_2$$

em que,

$$C_1(\boldsymbol{\theta}) = \left(1 + \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a}} \right)^{-1} \left(\frac{y_{a,b} - \lambda_a}{\mu_a} \right)^{\frac{1}{\gamma_a} - 1} \quad D_1(\bar{z}_b, \alpha_b) = \frac{\delta_{a,b} \alpha_b}{\bar{z}_b^{\frac{1}{\alpha_b}}}$$

$$S_1 = S_1(\bar{z}_b, \alpha_b) = \frac{\partial \log Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b)}{\partial \bar{z}_b} \quad S_2 = S_2(\bar{z}_b, \alpha_b) = \frac{\partial \log Q_{A_b}(\bar{z}_b, \alpha_b)}{\partial \alpha_b}$$

$$R = A_b + \log \bar{z}_b - \bar{z}_b \log \bar{z}_b + S_1 \bar{z}_b \log \bar{z}_b$$

Notamos que a função log-verossimilhança é analiticamente intratável de modo que a obtenção dos estimadores dos parâmetros do modelo deve ser realizada por algum algoritmo de otimização numérica do tipo Newton-Raphson. É possível notar também que a matriz de informação de Fisher não pode ser facilmente obtida dificultando a inferência do mesmo. Mas, como sabemos gerar amostras a partir da Equação (3.18), após a estimação dos parâmetros, podemos obter reamostras e neste caso a inferência pelo método Bootstrap paramétrico torna-se mais viável.

Capítulo 4

O Modelo Log-Poly-Weibull

Multivariado Para Predição

Espaço-Temporal de Temperatura

Neste capítulo proporemos o modelo Log-Poly-Weibull multivariado para a modelagem e predição espaço-temporal de valores de temperatura. Esse modelo surge como um caso particular do modelo Log-Pareto-Exp($\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}$) multivariado dado em (3.2), quando utilizamos como base a função de excedência Pareto tipo I (clássica). A estrutura e propriedades do modelo descrito no capítulo anterior serão retomadas e aplicadas neste contexto específico de modelagem de dados espaço-temporais.

4.1 O Modelo Log-Poly-Weibull Multivariado

Considere uma região espacialmente contínua $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ na qual somente para um conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ de posições fixas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_L$ e tempos $t = 1, 2, \dots, T$ são conhecidas as medidas de interesse de um processo estocástico $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \dots, \mathbf{Y}'_T)'$.

O objetivo da nossa modelagem é ser capaz de fornecer a qualquer localização $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$ e $t \geq 1$, em que não se conhece o valor da medida de interesse, a estimativa $\widehat{Y}_t(\mathbf{s}_0)$ a partir do processo observado \mathbf{Y}_t .

4.1.1 Construção do Modelo

Sejam $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_L$ as localizações espaciais de L estações meteorológicas, em que para cada tempo t é observado o processo estocástico espacial $\mathbf{Y}_t(\mathbf{s}) = (Y_t(\mathbf{s}_1), \dots, Y_t(\mathbf{s}_L))'$. A variável $Y_t(\mathbf{s}_\ell) \equiv Y_{t,\ell}$ representa uma medida de temperatura na ℓ -ésima estação no tempo t (semana, mês ou ano). Considere $\mathcal{B} = \mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M\} \subset \mathcal{D}$, um conjunto com M localizações espaciais arbitrárias próximas às localizações $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_L$. Sejam $\{\delta(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{u}_m) \equiv \delta_{\ell,m} : m = 1, 2, \dots, M \text{ e } \ell = 1, 2, \dots, L\}$ constantes representando uma medida de distância entre o par de localizações $(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{u}_m)$. A região \mathcal{D} é particionada em M sub-regiões/grupos com centros em \mathbf{u}_m . Quanto mais próximo a localização \mathbf{s}_ℓ estiver do ponto \mathbf{u}_m maior será $\delta_{\ell,m}$. Em cada \mathbf{u}_m , $m = 1, 2, \dots, M$ atribuímos variáveis aleatórias latentes $E(\mathbf{u}_m)$ independentes, isto é

$$E(\mathbf{u}_m) \sim \alpha_m\text{-estável Positiva.}$$

O processo espacial $\{E(\mathbf{u}_m) : m = 1, 2, \dots, M\}$ é um campo aleatório latente construído por variáveis independentes α_m -estável positivas e é incorporado ao modelo para capturar a dependência espacial entre os componentes do processo observado $\mathbf{Y}_t(\mathbf{s})$. Para acomodar essa dependência espacial, definimos $k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m)$ como sendo o valor de uma função núcleo gaussiana centrada em \mathbf{u}_m e avaliada em \mathbf{s}_ℓ :

$$k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m) = \frac{1}{2\pi\tau_m} \exp\left(-\frac{(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|))^2}{2\tau_m^2}\right), \quad \tau_m > 0.$$

A notação $\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|$ representa a distância euclidiana da ℓ -ésima estação para o ponto \mathbf{u}_m . Os parâmetros τ_m , $m = 1, 2, \dots, M$, são chamados de parâmetros de suavização da função núcleo. Quanto maiores os valores de τ_m mais suave é o processo final observado (Cunha et al., 2017). Os pesos $\delta_{\ell,m}$ são definidos em função de $k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m)$, tal que $0 < \delta_{\ell,m} < 1$ e $\sum_{m=1}^M \delta_{\ell,m} = 1$, similar ao descrito em (Banerjee et al., 2004).

Para cada m fixo definimos $H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) = \delta_{\ell,m}E(\mathbf{u}_m)/\sigma_t$, $\sigma_t > 0$. Neste caso, dizemos que $E(\mathbf{u}_m)$ é um efeito espacialmente compartilhado por todas as estações meteorológicas próximas do ponto \mathbf{u}_m e $H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)$ é a contribuição desse efeito para a medida na ℓ -ésima estação próxima de \mathbf{u}_m ajustado por um fator de larga escala temporal σ_t .

Para exemplificar nossa modelagem, na Figura (4.1) apresentamos uma região $\mathcal{D} = [0, 100] \times [0, 100]$ composta de 40 localizações arbitrárias $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{40})$ em que são

observadas as medidas de interesse $y_{t,\ell}$. O conjunto $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ representa 4 localizações arbitrárias em que são alocados os processos latentes $E(\mathbf{u}_m)$, $m = 1, 2, 3, 4$.

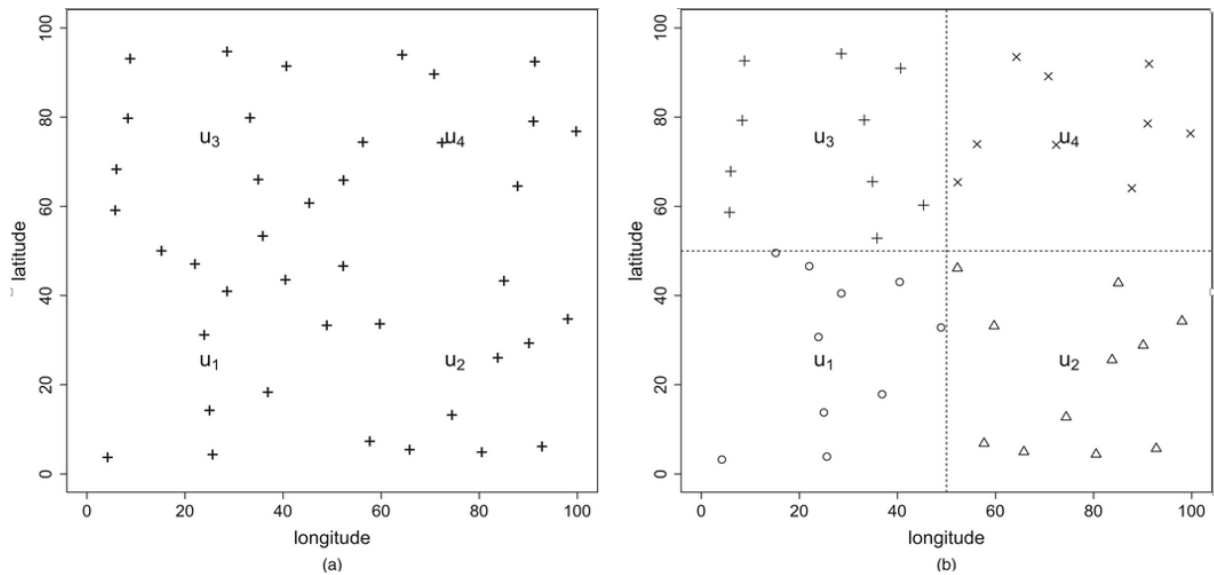


Figura 4.1: Exemplo de representação espacial do processo de modelagem. Fonte (Cunha et al., 2017).

Seja $L_m \in \{1, 2, \dots, L\}$ a quantidade de estações meteorológicas mais próximas de \mathbf{u}_m do que de qualquer outro $\mathbf{u}_{m'} \in \mathbf{U}$, $m \neq m'$, com observações $\mathbf{y}_t^{(m)}$. Assumindo que dado o valor do efeito aleatório $\{E(\mathbf{u}_m) : \mathbf{u}_m \in \mathbf{U}\}$, $Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \sim P(I) \left(\mu(\mathbf{s}_\ell), H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \right)$ e são condicionalmente independentes para todo $\ell = 1, 2, \dots, L_m$, $m = 1, 2, \dots, M$ e $t = 1, 2, \dots, T$. Então,

$$\bar{F} \left(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \right) = \left(\frac{\mu_\ell}{y_{t,\ell}^{(m)}} \right)^{H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)}, \quad y_{t,\ell}^{(m)} > \mu_\ell \quad (4.1)$$

em que $\boldsymbol{\theta}_{t,\ell} = (\mu_\ell, \sigma_t)$.

No modelo condicional acima, $\mu(\mathbf{s}_\ell) \equiv \mu_\ell > 0$ é o parâmetro que representa o menor valor para a temperatura no ponto \mathbf{s}_ℓ e que pode ser ajustado por covariáveis ambientais.

Para cada t fixo, a distribuição condicional conjunta é dada por

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\theta}_t | \mathcal{H}_t) &= \prod_{m=1}^M \prod_{\ell=1}^{L_m} \bar{F} \left(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \right) \\ &= \prod_{m=1}^M \prod_{\ell=1}^{L_m} \exp \left\{ -E(\mathbf{u}_m) \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Deste modo, aplicando esperança em ambos os lados, temos que

$$\bar{F}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E} \left(\prod_{m=1}^M \exp \left\{ -E(\mathbf{u}_m) \sum_{\ell=1}^{L_m} \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right\} \right).$$

Como $E(\mathbf{u}_m)$ são variáveis independentes α_m -estáveis, resulta de (2.6) que o modelo marginal do processo observado é expresso por:

$$\bar{F}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\alpha}) = \exp \left\{ - \sum_{m=1}^M \left(\sum_{\ell=1}^{L_m} \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right)^{\alpha_m} \right\}, \quad y_{t,\ell}^{(m)} > \mu_\ell. \quad (4.2)$$

que representa o modelo Log-Poly-Weibull multivariado no sentido (Berger e Sun, 1993).

4.1.2 Propriedades

Nesta seção, apresentamos propriedades para o modelo Log-Poly-Weibull multivariado semelhantes as desenvolvidas na Seção (3.2) e acrescentamos outras, todas baseadas no contexto da aplicação.

1. **Dependência Espacial:** Suponha que $Y_{t,\ell}^{(m)}$ e $Y_{t,j}^{(m)}$ compartilhem do mesmo efeito aleatório $E(\mathbf{u}_m)$. Então, pela independência condicional e representação do modelo dado pela Equação (4.15) segue que $\mathbb{E}(\text{Cov}(\log Y_{t,\ell}^{(m)} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), \log Y_{t,j}^{(m)} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_j))) = 0$. De modo que,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\log Y_{t,\ell}^{(m)}, \log Y_{t,j}^{(m)}) &= \text{Cov}(\mathbb{E}(\log Y_{t,\ell}^{(m)} | H_t^{(m)}(\mathbf{s})), \mathbb{E}(\log Y_{t,j}^{(m)} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}))) \\ &= \text{Cov} \left(\frac{\sigma_t}{\delta_{\ell,m} E(\mathbf{u}_m)}, \frac{\sigma_t}{\delta_{j,m} E(\mathbf{u}_m)} \right) \\ &= \frac{\sigma_t^2}{\delta_{\ell,m} \delta_{j,m}} \text{Var} \left(\frac{1}{E(\mathbf{u}_m)} \right) \\ &= \frac{\sigma_t^2}{\delta_{\ell,m} \delta_{j,m}} \text{Var} (e^{-\log E(\mathbf{u}_m)}) \\ &\approx \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{\alpha_m^2} - 1 \right) \frac{\sigma_t^2 e^{-\frac{2\gamma}{\alpha_m}(1-\alpha_m)}}{\delta_{\ell,m} \delta_{j,m}} \end{aligned}$$

em que é usada a aproximação de segunda ordem para $\text{Var} (e^{-\log E(\mathbf{u}_m)})$ e o resultado dado em (2.6). Observe que, quando $\alpha_m \rightarrow 1$ temos que $\text{Cov}(\log Y_{t,\ell}, \log Y_{t,j}) \rightarrow 0$, então α_m pode ser interpretado como uma medida de dependência espacial na escala logarítmica. Nota-se também que como $0 < \delta_{\ell,m} \times \delta_{j,m} < 1$, quanto mais próximo estiverem \mathbf{s}_ℓ e \mathbf{s}_j de \mathbf{u}_m maior será a covariância.

2. **Distribuição do Mínimo:** Seja $\mathcal{S}_0 \subsetneq \mathcal{S}$ não-vazio. Considere m e t fixos e defina

$$Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_0) = \min_{\mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0} Y_t(\mathbf{s}_\ell).$$

Observe que,

$$\bar{F}_{Y_{t,0}^{(m)}}(y_{t,0}; \boldsymbol{\theta}_{t,0}, \alpha_m) = \mathbb{E} \left(P \left(\min_{\mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0} Y_t(\mathbf{s}_\ell) > y_{t,0}; \boldsymbol{\theta}_{t,0} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \right) \right)$$

Agora, como $\{Y_t(\mathbf{s}_\ell) | H_t(\mathbf{s}_\ell) : \forall \mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0\}$ são variáveis condicionalmente independentes com distribuição (4.1), vem que

$$\begin{aligned} \bar{F}_{Y_{t,0}^{(m)}}(y_{t,0}; \boldsymbol{\theta}_{t,0}, \alpha_m) &= \mathbb{E} \left(\prod_{\mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0} P \left(Y_{t,\ell} > y_{t,0}; \boldsymbol{\theta}_{t,0} | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{\mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0} \exp \left\{ -H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \log \left(\frac{y_{t,0}}{\mu_\ell} \right) \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -E(\mathbf{u}_m) \sum_{\mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0} \left(\frac{\log y_{t,0} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right\} \right) \end{aligned}$$

e, por (2.6), obtemos que a distribuição do mínimo é dada por:

$$\bar{F}_{Y_{t,0}^{(m)}}(y_{t,0}; \boldsymbol{\theta}_{t,0}, \alpha_m) = \exp \left\{ - \left(\sum_{\mathbf{s}_\ell \in \mathcal{S}_0} \left(\frac{\log y_{t,0} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right)^{\alpha_m} \right\}, \quad y_{t,0} > \mu_\ell. \quad (4.3)$$

3. **Distribuição Marginal:** Se \mathcal{S}_0 é unitário, então a distribuição marginal de $Y_{t,\ell}$ é dada por:

$$\bar{F}(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}, \alpha_m) = \exp \left\{ - \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right)^{\alpha_m} \right\}, \quad y_{t,\ell}^{(m)} > \mu_\ell. \quad (4.4)$$

Logo, $Y_{t,\ell}^{(m)} \sim \text{Log-Poly-Weibull}(\log \mu_\ell, \sigma_t / \delta_{\ell,m}, \alpha_m)$.

Note que, por construção $Y_{t,\ell} | E(\mathbf{u}_m) \sim P(I) \left(\mu_\ell, \frac{E(\mathbf{u}_m)}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right)$, assim o valor esperado (aproximado) é

$$\mathbb{E}(Y_{t,\ell}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_{t,\ell}|E(\mathbf{u}_m))) \approx \mu_\ell \left(1 - \frac{\sigma_t}{\delta_{\ell,m}} e^{-\frac{\gamma^*}{\alpha_m}(1-\alpha_m)}\right)^{-1}$$

e, portanto, um preditor para a temperatura na ℓ -ésima estação e tempo t pode ser dado por:

$$\widehat{Y}_{t,\ell}^{(m)} = \widehat{\mu}_\ell \left(1 - \frac{\widehat{\sigma}_t}{\delta_{\ell,m}} e^{-\frac{\gamma^*}{\widehat{\alpha}_m}(1-\widehat{\alpha}_m)}\right)^{-1}. \quad (4.5)$$

Para o cálculo da variância do preditor acima, usamos a seguinte Propriedade (Feller, 1966, Magalhães, 2006):

$$\mathbb{V}ar(Y_{t,\ell}^{(m)}) = \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(Y_{t,\ell}^{(m)}|E(\mathbf{u}_m))) + \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(Y_{t,\ell}^{(m)}|E(\mathbf{u}_m))). \quad (4.6)$$

Como

$$\mathbb{E}(Y_{t,\ell}^{(m)}|E(\mathbf{u}_m)) = \frac{\mu_\ell \delta_{\ell,m} E(\mathbf{u}_m)}{\delta_{\ell,m} E(\mathbf{u}_m) - \sigma_t} \quad (4.7)$$

e,

$$\mathbb{V}ar(Y_{t,\ell}^{(m)}|E(\mathbf{u}_m)) = \left(\frac{\mu_\ell^2 \sigma_t^2}{(E(\mathbf{u}_m) \delta_{\ell,m} - \sigma_t)^2}\right) \left(\frac{E(\mathbf{u}_m) \delta_{\ell,m}}{(E(\mathbf{u}_m) \delta_{\ell,m} - 2\sigma_t)}\right) \quad (4.8)$$

Agora, usando (2.7) e (2.8) e, fazendo aproximações de primeira e segunda ordem, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(Y_{t,\ell}^{(m)}) &\approx \frac{\mu_\ell^2 \mu_*^2 \sigma_t^2 \sigma_*^2 \exp(-2\mu_*)}{\delta_{\ell,m}^2} \left(1 - \frac{\sigma_t}{\delta_{\ell,m}} \exp(-\mu_*)\right)^{-4} \\ &+ \mu_\ell^2 \sigma_t^2 \left(\delta_{\ell,m}^2 \exp(2\mu_*) - 4\sigma_t \delta_{\ell,m} \exp(\mu_*) - \frac{2\sigma_t^3}{\delta_{\ell,m}} \exp(-\mu_*) + 5\sigma_t^2\right)^{-1}. \end{aligned}$$

em que μ_* e σ_*^2 são, respectivamente, a esperança e variância das log-estáveis dados em (2.7) e (2.8). Portanto, o erro padrão do preditor (4.5) é dado por:

$$E.P(\widehat{Y}_{t,\ell}^{(m)}) = \sqrt{\widehat{\mathbb{V}ar}(Y_{t,\ell}^{(m)})}. \quad (4.9)$$

4. **Densidade de Probabilidade por Grupos:** Considere as L_m observações $\mathbf{y}_t^{(m)}$ que compartilham $E(\mathbf{u}_m)$ e possuem distribuição conjunta

$$\bar{F}(\mathbf{y}_t^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_t, \alpha_m) = \exp \left\{ - \left[\sum_{\ell=1}^{L_m} \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right]^{\alpha_m} \right\}.$$

Então, sua função densidade conjunta é dada por

$$f(\mathbf{y}_t^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_t, \alpha_m) = \alpha_m^{L_m} \left(\prod_{\ell=1}^{L_m} \frac{\delta_{\ell,m}}{\sigma_t y_{t,\ell}^{(m)}} \right) e^{-\bar{z}_{t,m} \bar{z}_{t,m}^{1-\frac{L_m}{\alpha_m}}} Q_{L_m}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m). \quad (4.10)$$

em que, $\boldsymbol{\theta}_t^{(m)}$ é o subvetor de parâmetros, $\bar{z}_{t,m} = \left[\sum_{\ell=1}^{L_m} \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right) \right]^{\alpha_m}$, $Q_1(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m) = 1$ e para $L_m \geq 2$

$$Q_{L_m}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m) = \left(\frac{L_m - 1 - \alpha_m}{\alpha_m} + \bar{z}_{t,m} \right) Q_{L_m-1}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m) - \bar{z}_{t,m} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{t,m}} Q_{L_m-1}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m).$$

Demonstração. É análoga à demonstração do **Apêndice A**. □

5. **Geração de valores da distribuição conjunta por grupos:** Considere $\mathbf{y}_t^{(m)} = (y_t(\mathbf{s}_1), y_t(\mathbf{s}_2), \dots, y_t(\mathbf{s}_{L_m}))$ com densidade (4.10). Introduzimos a seguinte transformação

$$(w_{t,1}, w_{t,2}, \dots, w_{t,L_m-1}, \bar{z}_{t,m}) = \left(\frac{v_{t,1}^{(m)}}{\sum_{\ell=1}^{L_m} v_{t,\ell}^{(m)}}, \frac{v_{t,2}^{(m)}}{\sum_{\ell=1}^{L_m} v_{t,\ell}^{(m)}}, \dots, \frac{v_{t,L_m-1}^{(m)}}{\sum_{\ell=1}^{L_m} v_{t,\ell}^{(m)}}, \left(\sum_{\ell=1}^{L_m} v_{t,\ell}^{(m)} \right)^{\alpha_m} \right)$$

em que $v_{t,\ell}^{(m)} = \left(\frac{\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \mu_\ell}{\sigma_t / \delta_{\ell,m}} \right)$ para $\ell = 1, 2, 3, \dots, L_m$ e, obviamente, $\sum_{\ell=1}^{L_m} w_{t,\ell} =$

1. Então,

$$v_{t,\ell}^{(m)} = w_{t,\ell}^{(m)} \bar{z}_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y_{t,\ell}^{(m)}}{\partial w_{t,\ell}} = \frac{\partial y_{t,\ell}^{(m)}}{\partial v_{t,\ell}^{(m)}} \times \frac{\partial v_{t,\ell}^{(m)}}{\partial w_{t,\ell}} = \frac{\partial y_{t,\ell}^{(m)}}{\partial v_{t,\ell}^{(m)}} \times \bar{z}_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}, \quad (4.11)$$

então, o jacobiano da transformação $(y_t(\mathbf{s}_1), y_t(\mathbf{s}_2), \dots, y_t(\mathbf{s}_{L_m})) \mapsto (w_{t,1}, w_{t,2}, \dots, w_{t,L_m-1}, \bar{z}_{t,m})$ é dado por

$$\mathbf{J} = \frac{\bar{z}_{t,m}^{\frac{L_m}{\alpha_m} - 1}}{\alpha_m \left(\prod_{\ell=1}^{L_m} \left| \frac{\delta_{\ell,m}}{\sigma_t y_{t,\ell}^{(m)}} \right| \right)^{-1}}.$$

Segue que,

$$f(w_{t,1}, \dots, w_{t,L_m-1}, \bar{z}_{t,m}) = \Gamma(L_m) \times \frac{\alpha_m^{L_m-1}}{\Gamma(L_m)} Q_{L_m}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m) e^{-\bar{z}_{t,m}}. \quad (4.12)$$

Assim, $\mathbf{W}_t^{(m)}$ e $\bar{Z}_{t,m}$ são independentes, e temos que $\mathbf{W}_t^{(m)} \sim \text{Dirichlet}(1, 1, \dots, 1)$ simétrica, (Bela et al., 2010), e $\bar{Z}_{t,m}$ é uma mistura de distribuições Gamma com pesos determinados por $Q_{L_m}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m)$, (Shi, 1995). Por exemplo, se $L_m = 2$, teremos

$$\bar{Z}_{t,m} \sim (1 - \alpha_m)\text{Gamma}(1,1) + \alpha_m\text{Gamma}(2,1) \quad \text{e} \quad W_{t,1} \sim \text{Beta}(1,1). \quad (4.13)$$

Agora, da transformação $v_{t,\ell}^{(m)} = w_{t,\ell}^{(m)} \bar{z}_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}$, obtemos que

$$\mathbf{y}_{t,\ell}^{(m)} = \exp \left(\frac{\hat{\sigma}_t w_{t,\ell}^{(m)} \bar{z}_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}}{\delta_{\ell,m}} + \log \hat{\mu}_\ell \right), \quad \ell = 1, 2, \dots, L_m \quad (4.14)$$

Então, após a estimação dos parâmetros, geramos valores das distribuição conjunta $\mathbf{W}_t^{(m)}$ e $\bar{Z}_{t,m}$ e obtemos, $\mathbf{y}_t^{(m)}$ através da transformação em (4.14).

4.1.3 Representação Hierárquica

O modelo em (4.2) pode ser representado hierarquicamente da seguinte forma,

$$\log(y_t(\mathbf{s})) = \eta(\mathbf{s}) + \xi_t(\mathbf{s}) \quad (4.15)$$

em que, $\eta(\mathbf{s}) = \log(\mu(\mathbf{s}))$ é a componente responsável pela relação entre as covariáveis e a tendência para o menor valor da mínima temperatura. Assim, assumimos a estrutura

$$\eta(\mathbf{s}) = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}(\mathbf{s})$$

em que β_0 é um coeficiente *offset* que também pode ser obtido por um ajuste ou interpolação de mínimos quadrados, também chamado gradiente horizontal da temperatura, $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ é altitude da estação meteorológica localizada em \mathbf{s} e β_1 é interpretado como o gradiente vertical de temperatura, pois mede a variação da temperatura de acordo com a altitude. A quantidade $\xi_t(\mathbf{s})$ é assumida ser o produto de duas componentes, tal que

$$\log(\xi_t(\mathbf{s})) = \log(\epsilon_t) + \log(\nu(\mathbf{s}, \mathbf{u}))$$

aqui, ϵ_t representa o efeito temporal de larga escala comum as estações meteorológicas e assumido $\epsilon_t \sim \exp(\sigma_t^{-1})$, com $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_t^2$. Por fim, $\nu(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = 1/\delta_{\ell,m}E(\mathbf{u})$ representa o efeito espacialmente compartilhado que captura os efeitos locais próximos a \mathbf{u} não explicados pelas covariáveis e efeitos temporais. Observa-se que condicional ao campo aleatório $\{E(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$, temos que

$$Y_t^{(m)}(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}) \exp\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t H_t^{(m)}(\mathbf{s})}\right).$$

Então, pela relação entre as distribuições Pareto (I) e exponencial dado na Proposição (2.1.1), segue-se que (4.2) é a distribuição marginal do modelo proposto em (4.15).

4.2 Estimação dos Parâmetros

Como os dados são condicionalmente independentes no tempo, a partir da densidade dada em (4.10) na Propriedade 4., obtemos que a função log-verossimilhança para o modelo proposto (4.15) é,

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}) &= \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \log[f(\mathbf{y}_t^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_t, \alpha_m)] \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \left(L_m \log \alpha_m + \sum_{\ell=1}^{L_m} \log \delta_{\ell,m} - L_m \log \sigma_t - \sum_{\ell=1}^{L_m} \log y_{t,\ell}^{(m)} - \bar{z}_{t,m} \right) \\ &+ \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \left(\log \bar{z}_{t,m} - \frac{L_m}{\alpha_m} \log \bar{z}_{t,m} + \log Q_{L_m}(\bar{z}_{t,m}, \alpha_m) \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

A maximização de $l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y})$ por Newton-Raphson apresentou problemas numéricos. Desta forma, propomos a maximização através algoritmo MCEM, em que o passo E do algoritmo EM é substituído por uma aproximação de Monte Carlo.

4.2.1 Construção do algoritmo MCEM

Considere $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{E})$ o vetor de dados completos e $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$ seu respectivo vetor de parâmetros. A função de verossimilhança completa é dada por:

$$\begin{aligned} L_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) &= f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{E}; \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \prod_{m=1}^M \left[\left(\prod_{t=1}^T \prod_{\ell=1}^{L_m} \delta_{\ell,m} E_m \overline{G}(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell})^{\delta_{\ell,m} E_m} h(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) \right) p(E_m; \alpha_m) \right] \end{aligned}$$

em que $\overline{G}(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) = \left(\frac{\mu_\ell}{y_{t,\ell}^{(m)}} \right)^{\frac{1}{\sigma_t}}$, $y_{t,\ell}^{(m)} > \mu_\ell$ é a função de excedência Pareto com parâmetros μ_ℓ e σ_t e, $h(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(m)})$ é a função de risco associada.

Seja $B_m \in (0, 1)$ uma variável auxiliar tal que a distribuição conjunta de (E_m, B_m) é

$$p(E_m, B_m; \alpha_m) = \frac{\alpha_m}{(1 - \alpha_m)} E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} c(B_m) e^{-c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}}, \quad E_m > 0. \quad (4.17)$$

em que,

$$c(B_m) = \left\{ \frac{\sin(\pi \alpha_m B_m)}{\sin(\pi B_m)} \right\}^{\frac{1}{1-\alpha_m}} \frac{\sin\{(1 - \alpha_m)\pi B_m\}}{\sin(\pi \alpha_m B_m)}.$$

Então, marginalmente a B_m , E_m é α_m -estável (Stephenson, 2009).

Logo, a função log-verossimilhança completa é

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) &= \sum_{m=1}^M \left(\sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log \delta_{\ell,m} - E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log h(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) \right) \\ &+ \sum_{m=1}^M (\log p(E_m; \alpha_m) + T L_m \log E_m) \\ &= \ell_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{E}) + \ell_2(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{E}) \end{aligned}$$

em que $v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) = - \sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \delta_{\ell,m} \log \overline{G}(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell})$.

A seguinte proposição tem o objetivo de calcular a distribuição condicional $\mathbf{E} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}$ que será utilizada no Passo E do algoritmo MCEM.

Proposição 4.1. *A distribuição condicional de $\mathbf{E} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}$ é dada por*

$$p(\mathbf{E} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{T L_m + 1} E_m^{T L_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} \varphi_0(E_m, \alpha_m)}{\Gamma(T L_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$$

em que $\mathcal{G} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$ e

$$\varphi_0(E_m, \alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 c(B_m) e^{-c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}}} dB_m. \quad (4.18)$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &\propto f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}|\mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{E}; \boldsymbol{\alpha}) \\ &= k \prod_{m=1}^M E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} \varphi_0(E_m, \alpha_m) \end{aligned}$$

em que k é a constante de normalização. Afirmamos que $k = \prod_{m=1}^M \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$ sendo que $\mathcal{G} \sim \text{Gama}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} k^{-1} &= \prod_{m=1}^M \int_0^\infty \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} d(E_m) \\ &= \prod_{m=1}^M \frac{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}} \end{aligned}$$

e, portanto

$$k = \prod_{m=1}^M \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))},$$

como queríamos. \square

Agora, considere $\tilde{\ell}_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}}(\ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c))$, então a partir da proposição acima, temos

$$\tilde{\ell}_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) = \tilde{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{E}) + \tilde{\ell}_2(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{E}) \quad (4.19)$$

em que,

$$\tilde{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{E}) = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log \delta_{\ell, m} - v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) \mathbb{E}_{m,1} + \sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log h(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) \right)$$

e,

$$\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{E}) = \sum_{m=1}^M \left(\log \left(\frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m} \right) - \left(\frac{1}{1 - \alpha_m} \right) \mathbb{E}_{m,2} + \mathbb{E}_{m,3} - \mathbb{E}_{m,4} + TL_m \mathbb{E}_{m,2} \right)$$

em que

$$\mathbb{E}_{m,1} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$$

$$\mathbb{E}_{m,2} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m)) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$$

$$\mathbb{E}_{m,3} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(c(B_m))) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_1(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$$

$$\mathbb{E}_{m,4} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \varphi_2(E_m; \alpha_m)) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \times \varphi_2(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$$

Essas esperanças $\mathbb{E}_{m,1}$, $\mathbb{E}_{m,2}$, $\mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$ não possuem forma fechada e por isso serão aproximadas através de simulação de Monte Carlo em que $E_m|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$ (veja o **Apêndice B**) e

$$\varphi_1(E_m, \alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 \log(c(B_m)) \times c(B_m) e^{-c(B_m)E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}}} dB_m. \quad (4.20)$$

$$\varphi_2(E_m, \alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 c^2(B_m) e^{-c(B_m)E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}}} dB_m. \quad (4.21)$$

Desta forma, o algoritmo MCEM para maximização de $\ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c)$ é da seguinte forma:

1. Passo **E**: Inicialize o processo iterativo com $\boldsymbol{\phi}^{(0)} = (\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)})$ e na k -ésima iteração, obtenha $v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$, gere $\{(B_m^{j_k}, E_m^{j_k}) : j_k = 1, 2, \dots, N\}$, em que $E_m^{j_k} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}))$ e $B_m^{j_k} \sim U(0, 1)$. Compute $\mathbb{E}_{m,1}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,2}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,3}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,4}^{j_k}$ e, finalmente, aproxime, $\mathbb{E}_{m,1}, \mathbb{E}_{m,2}, \mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$ por Monte Carlo,

$$\tilde{\mathbb{E}}_{m,1}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,1}^{j_k}, \quad \tilde{\mathbb{E}}_{m,2}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,2}^{j_k}, \quad \tilde{\mathbb{E}}_{m,3}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,3}^{j_k} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbb{E}}_{m,4}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,4}^{j_k}.$$

2. Passo **M**: Considerando $\log \mu_\ell = \beta_0 + \beta_1 x_\ell$ em que x_ℓ indica a altitude na ℓ -ésima estação e β_0 um valor offset, temos que o estimador de máxima verossimilhança para μ_ℓ é $\hat{\mu}_\ell = \exp(\beta_0 + \hat{\beta}_1 x_\ell)$. Como $y_{t,\ell} > \mu_\ell$, obtemos que o estimador para β_1 que maximiza $\tilde{\ell}_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c)$ é,

$$\hat{\beta}_1 = \min_{(t,\ell)} \left\{ \frac{\log y_{t,\ell} - \beta_0}{x_\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, L \quad \text{e} \quad t = 1, 2, \dots, T \right\}.$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos diretamente, na $(k + 1)$ -iteração que os estimadores de máxima verossimilhança para σ_t e α_m são:

$$\hat{\sigma}_t^{(k+1)} = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^M \sum_{\ell=1}^{L_m} \tilde{\mathbb{E}}_{m,1}^{(k)} \delta_{\ell,m} (\log y_{t,\ell}^{(m)} - \log \hat{\mu}_\ell), \quad \hat{\alpha}_m^{(k+1)} = \frac{1}{\tilde{\mathbb{E}}_{m,2}^{(k)} + 1}. \quad (4.22)$$

Estes estimadores de máxima verossimilhança obtidos para $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$, não convergem para distribuição normal, pois o suporte da variável $Y_{t,\ell}$ depende do parâmetro μ_ℓ . Ou seja, a distribuição proposta não satisfaz as condições de regularidade (Casella e Berger, 2010). Neste caso, testes de hipótese e intervalos de confiança para os parâmetros podem ser obtidos via método Bootstrap paramétrico. Para isso, é suficiente reamostrar valores do processo utilizando a transformação apresentada na Equação (4.14) da Propriedade 5.

4.3 O Processo de Predição

Para realizar a predição espaço-temporal, consideramos inicialmente os parâmetros estimados na seção anterior $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = (\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}})$.

Observa-se, pela Propriedade 3, $Y_{t,\ell}^{(m)} | E(\mathbf{u}_m) \sim P(I) \left(\mu_\ell, \frac{\delta_{\ell,m} E(\mathbf{u}_m)}{\sigma_t} \right)$. Admitindo a mesma distribuição para qualquer $Y_{t,0}^{(m)}$, em que $s_0 \in \mathcal{D}$, então o seguinte algoritmo pode ser utilizado para predição de valores de temperatura no espaço-tempo:

1. Para $m = 1, 2, \dots, M$ gere $E(\mathbf{u}_m) \sim \hat{\alpha}_m$ -estável positiva (corolário 2.1);
2. Para cada $i = 1, 2, \dots, N$ e $t = 1, 2, \dots, T$ gere $Y_{t,0}^{(m,i)} \sim P(I) \left(\hat{\mu}_0, \frac{\delta_{0,m} E(\mathbf{u}_m)}{\hat{\sigma}_t} \right)$, ou através da transformação inversa dado em (4.14);
3. Estime o valor predito, $\tilde{Y}_{t,0}^{(m)}$, pela média aparata (trimmed mean, em inglês) (Leonowicz et al., 2005) dos valores gerados $Y_{t,0}^{(m,i)}$ em cada tempo $t = 1, 2, \dots, T$.

A utilização da média trimmed para prever os valores de temperatura é necessária, pois a distribuição Pareto tipo I possui caudas pesadas no sentido que acomoda valores extremos (à direita). Deste modo, o processo de geração é afetado por outliers e, conseqüentemente, a média aritmética é influenciada.

Outra forma que pode ser utilizada para fazer as previsões espaço-temporais é através do preditor valor esperado da distribuição marginal dado na Equação (4.5), sendo este assumido válido para toda localização \mathbf{s}_0 pertencente à região \mathcal{D} . Isto é,

$$\hat{Y}_{t,0}^{(m)} = \hat{\mu}_0 \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_t}{\delta_{0,m}} e^{-\frac{\gamma^*}{\hat{\alpha}_m} (1-\hat{\alpha}_m)} \right)^{-1}. \quad (4.23)$$

Na Seção (5.3) apresentamos estudos simulados que mostram que a previsão espaço-temporal através do preditor valor esperado marginal mostrou-se mais eficiente do que a previsão espaço-temporal através da média trimmed (preditor Trimmed), no sentido de apresentar menor erro quadrático médio de previsão quando temos poucas informações vizinhas.

Capítulo 5

Aplicação a Dados Reais

Neste capítulo aplicaremos o modelo Log-Poly-Weibull multivariado (4.2) no problema de predição de temperatura para o Estado do Amazonas. Ao final do capítulo, avaliaremos a capacidade preditiva do modelo por meio de dois estudos simulados.

5.1 Descrição dos Dados

Para a realização das análises, foram obtidos os dados das estações meteorológicas do Estado (Fig. (5.1)) disponíveis na Base de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET, BDMEP).

Os dados referem-se a registros de temperatura média compensada¹ mensais observadas nos anos de 1996 a 2015 ($T = 20$ anos) nas $L = 14$ estações do Estado distribuídas em 13 municípios (o município São Gabriel da Cachoeira possui duas estações: Iauaretê e S.G. da Cachoeira) e monitoradas pelo INMET. A Tabela (5.1) mostra as coordenadas geográficas (longitude, latitude e altitude) de cada uma dessas estações.

¹Nas estações meteorológicas são feitas leituras das temperaturas de seis em seis horas, às 9h, 15h e 21h, por exemplo. Para um perfeito controle, dever-se-ia fazer uma quarta leitura, às 3h da madrugada, o que não costuma ocorrer, por se tratar de horário de descanso do observador. Assim, a temperatura média que se calcula não é exatamente a média do dia, pois falta o valor das 3h. O que os meteorologistas fazem então é calcular uma média das três leituras, mais a máxima e a mínima. A média desses cinco valores é chamada de temperatura média compensada (CPRM, 2017).

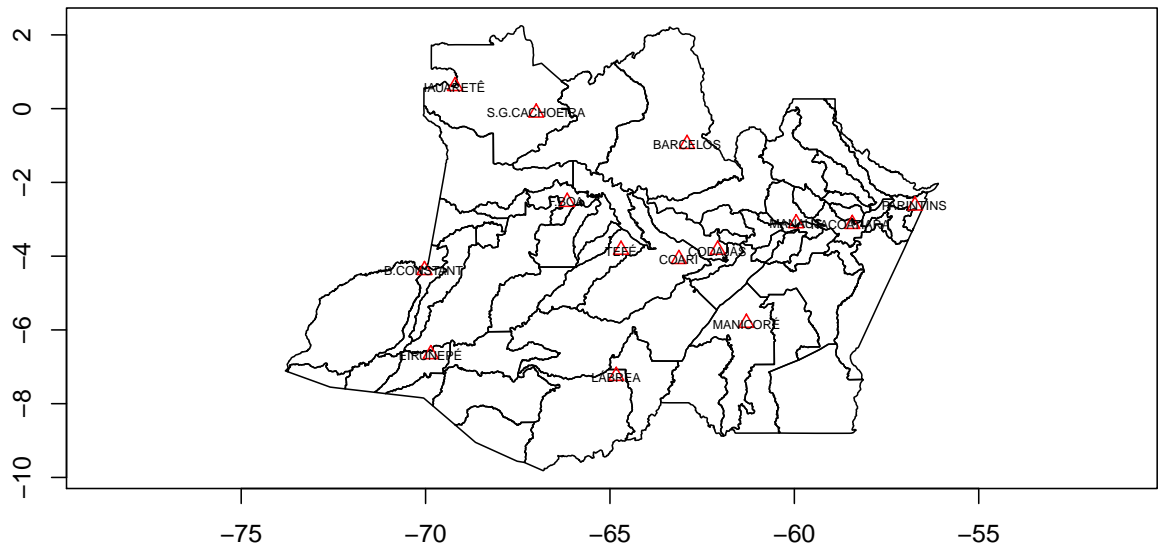


Figura 5.1: Distribuição espacial das estações meteorológicas do Estado do Amazonas segundo o INMET.

Tabela 5.1: Coordenadas geográfica das estações meteorológicas do Estado do Amazonas-INMET

Estações Meteorológicas	Longitude	Latitude	Altitude
Barcelos	-62.91	-0.96	40
Iauaretê	-69.2	0.61	120
S.G da Cachoeira	-67	-0.11	90
Fonte Boa	-66.16	-2.53	55.57
Tefé	-64.7	-3.83	47
Benjamin Constant	-70.03	-4.38	65
Eirunepé	-69.86	-6.66	104
Lábrea	-64.83	-7.25	61
Coari	-63.13	-4.08	46
Codajás	-62.08	-3.83	48
Manicoré	-61.3	-5.81	50
Manaus	-59.95	-3.11	67
Itacoatiara	-58.43	-3.13	40
Parintins	-56.73	-2.63	29

A partir desses dados, consideramos a temperatura média anual do período - julho, agosto, setembro e outubro - que representam os meses mais quentes do Estado. A Figura (5.2) mostra o comportamento desses dados para o período considerado. Observe que a menor temperatura foi 24.46°C registrada no ano de 1998 na estação de S. G. da Cachoeira, enquanto que a maior foi 30.23°C observada no ano de 2015 na estação de Manaus.

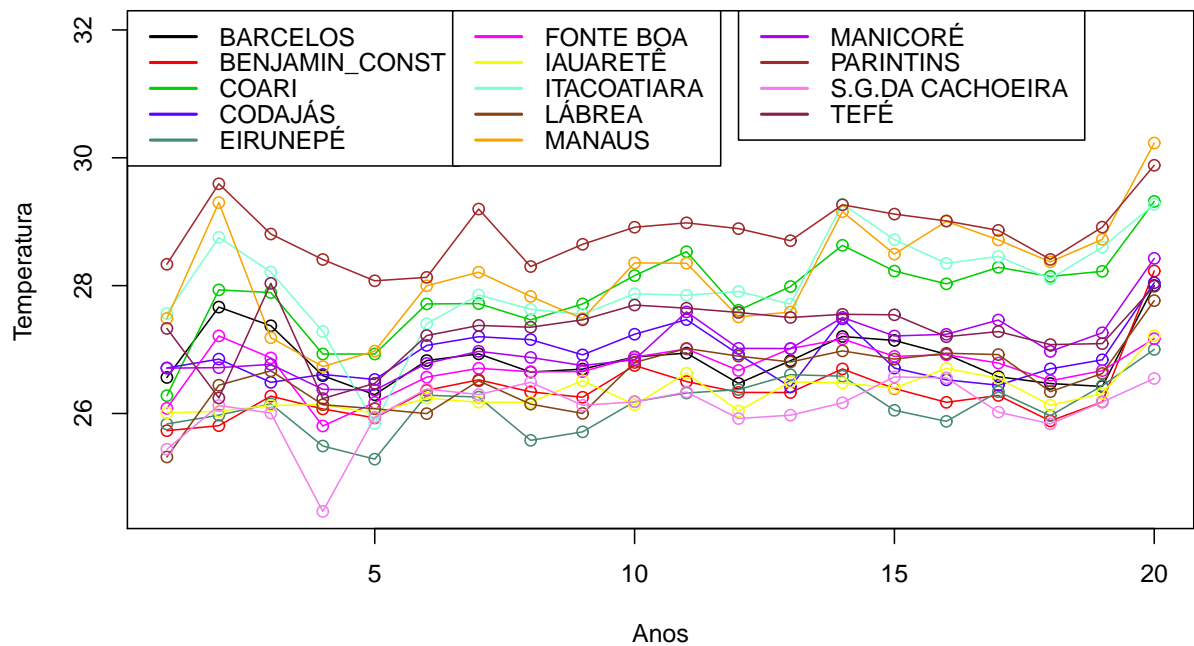


Figura 5.2: Séries de temperaturas compensadas médias anuais observadas nas 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas no período de 1996 a 2015.

As estações meteorológicas foram dispostas em $M = 3$ sub-regiões/grupos com centros, respectivamente, em \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 em que alocamos as variáveis latentes α_m -estáveis, $m = 1, 2, 3$. Essa divisão foi feita de acordo com o regime pluviométrico para o Estado (Quadro et al., 2014). A composição desses grupos é mostrada na Figura (5.3). Observe que $L_1 = 5$, $L_2 = 3$ e $L_3 = 6$, representam a quantidade de estações próximas a \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 , respectivamente.

Como a distância entre as estações são grandes, pois o Estado do Amazonas apresenta extensões continentais, os pesos $\delta_{\ell,m}$ foram normalizados da seguinte maneira

$$\delta_{\ell,m} = \frac{k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m)}{\sum_{m=1}^M k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m)}, \quad m = 1, 2, 3.$$

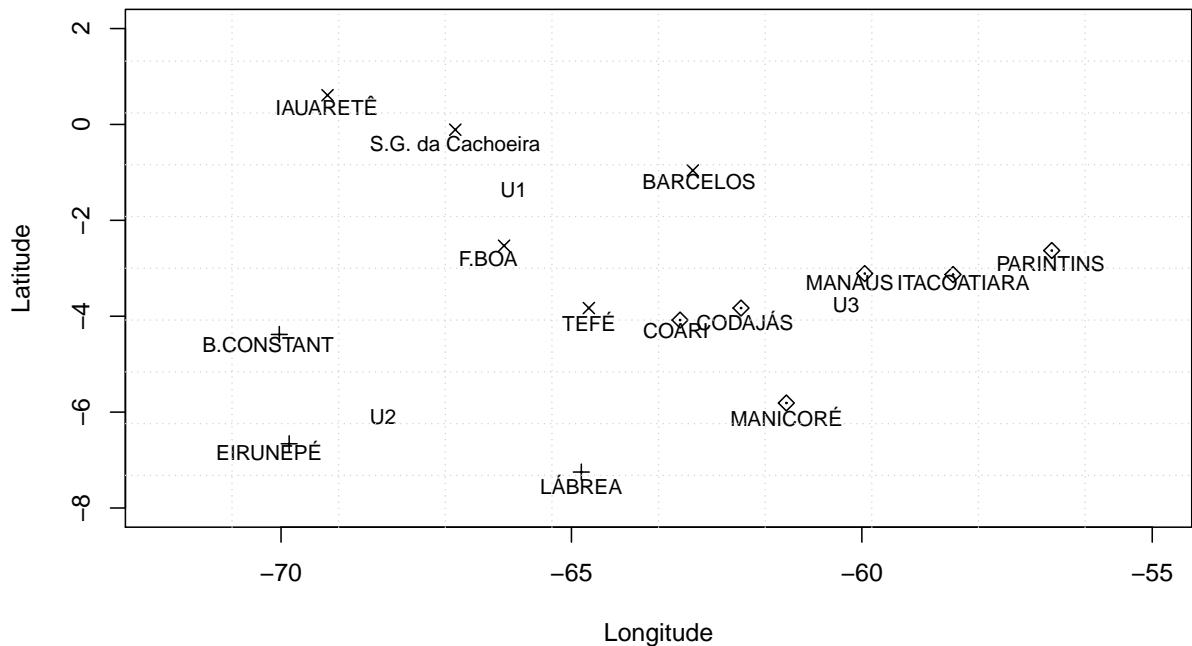


Figura 5.3: Divisão das estações meteorológicas em 3 sub-regiões com centros \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 . Os pontos com os mesmos símbolos pertencem a mesma sub-região/grupo.

Os parâmetros de suavização τ_m , $m = 1, 2, 3$, foram estimados por:

$$\hat{\tau}_m = \left(\frac{4}{3L_m} \right)^{\frac{1}{5}} \times \frac{\text{Me}\{(|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m|) - \text{Me}(|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m|); \forall \mathbf{s}_\ell \sim \mathbf{u}_m\}}{0.6745}, \quad m = 1, 2, 3$$

em que Me indica a mediana (Bowman e Azzalini, 1997, Hogg, R. V., 1979).

5.2 Resultados do Modelo

Nesta seção, apresentamos os resultados referentes a aplicação do modelo Log-Poly-Weibull no problema espaço-temporal de temperatura. Os parâmetros do modelo foram estimados usando o algoritmo MCEM descrito na Subseção (4.2.1) e seus respectivos erros padrões foram obtidos através do método Bootstrap paramétrico da seguinte forma: 1) Estimamos os parâmetros com os dados reais; 2) Com os parâmetros estimados, geramos $N = 1000$ reamostras do modelo usando a Equação (4.14) ou algoritmo descrito em (4.3); 3) Com estas $N = 1000$ reamostras estimamos novamente os parâmetros do modelo. Então, o erro padrão Bootstrap foi estimado pelo desvio padrão das $N = 1000$ estimativas

geradas. Todos estes algoritmos foram implementados no *software* R (R, 2016).

A Tabela (5.2) mostra os valores estimados para o parâmetro α .

Tabela 5.2: Estimativas do parâmetro α

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão
α_1	0.39	0.01185603
α_2	0.51	0.01347734
α_3	0.41	0.01206314

Percebe-se que todas as estimativas $\hat{\alpha}_m$ indicam uma razoável dependência entre as observações pertencentes à mesma sub-região com centro em \mathbf{u}_m . Essa dependência é esperada desde que estamos trabalhando com dados medidos em estações meteorológicas. Note que as observações pertencentes a sub-região centrada em \mathbf{u}_2 são menos espacialmente dependentes que as demais. Isto porque as estações pertencentes a essa sub-região são as mais distantes uma das outras.

No que diz respeito a predição do menor valor da temperatura, $\mu(\mathbf{s})$, este foi obtido através da fixação do valor $\beta_0 = 3.30562$, que representa o gradiente horizontal de temperatura e foi calculado como sendo o menor valor dentre todos os ajustes de mínimos quadrados para as temperaturas observadas em relação as altitudes $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ de cada estação. O gradiente vertical de temperatura, β_1 , estimado pelo algoritmo MCEM foi $\hat{\beta}_1 = -0.001338944$ (com erro padrão = 0.000192), de modo que

$$\hat{\mu}(\mathbf{s}) = \exp(3.30562 - 0.00134 \times \mathbf{x}(\mathbf{s}))$$

em que cada $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ representa a altitude da estação localizada em \mathbf{s} dada na Tabela (5.1).

A variação em larga escala, σ_t , estimadas para cada tempo é descrita na Tabela (5.3) com seus respectivos erros padrões. Percebe-se que durante os 20 anos avaliados foi estimada uma variação média de aproximadamente 0.075 °C em torno da temperatura.

Tabela 5.3: Estimativas do parâmetro σ

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão	Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão
σ_1	0.05532001	0.0006090359	σ_{11}	0.08486613	0.0009346822
σ_2	0.07899923	0.0008717993	σ_{12}	0.07181195	0.0007928621
σ_3	0.07288298	0.0008039714	σ_{13}	0.07415741	0.0008191996
σ_4	0.04550858	0.0005064726	σ_{14}	0.09324918	0.001029045
σ_5	0.04739926	0.0005237235	σ_{15}	0.08276133	0.0009110714
σ_6	0.07127485	0.0007851173	σ_{16}	0.08085126	0.0008901698
σ_7	0.07713923	0.0008498745	σ_{17}	0.07924172	0.0008740455
σ_8	0.06958395	0.0007660154	σ_{18}	0.06911851	0.0007625005
σ_9	0.06746180	0.0007428254	σ_{19}	0.07873016	0.0008693515
σ_{10}	0.07971330	0.0008784233	σ_{20}	0.11495550	0.001270557

Com estes parâmetros estimados obtivemos as temperaturas preditas utilizando o preditor valor esperado marginal dado na Equação (4.23). Após a realização das predições em cada município, o pacote *kriging* do *software* R (Kriging, 2014) foi utilizado para a suavização dos mapas.

As Figuras (5.4) e (5.5) mostram os resultados gerados pela aplicação do modelo para os últimos 18 anos (1998-2015). É possível observar, principalmente na Figura (5.5), um suave aumento na distribuição espacial da temperatura no Estado do Amazonas. Esse aumento é mais evidente na região leste do Estado em que se encontra a capital Manaus. Isto pode ser explicado pela grande urbanização dessas áreas e, conseqüentemente, altos índices de queimadas, poluição e desmatamento.

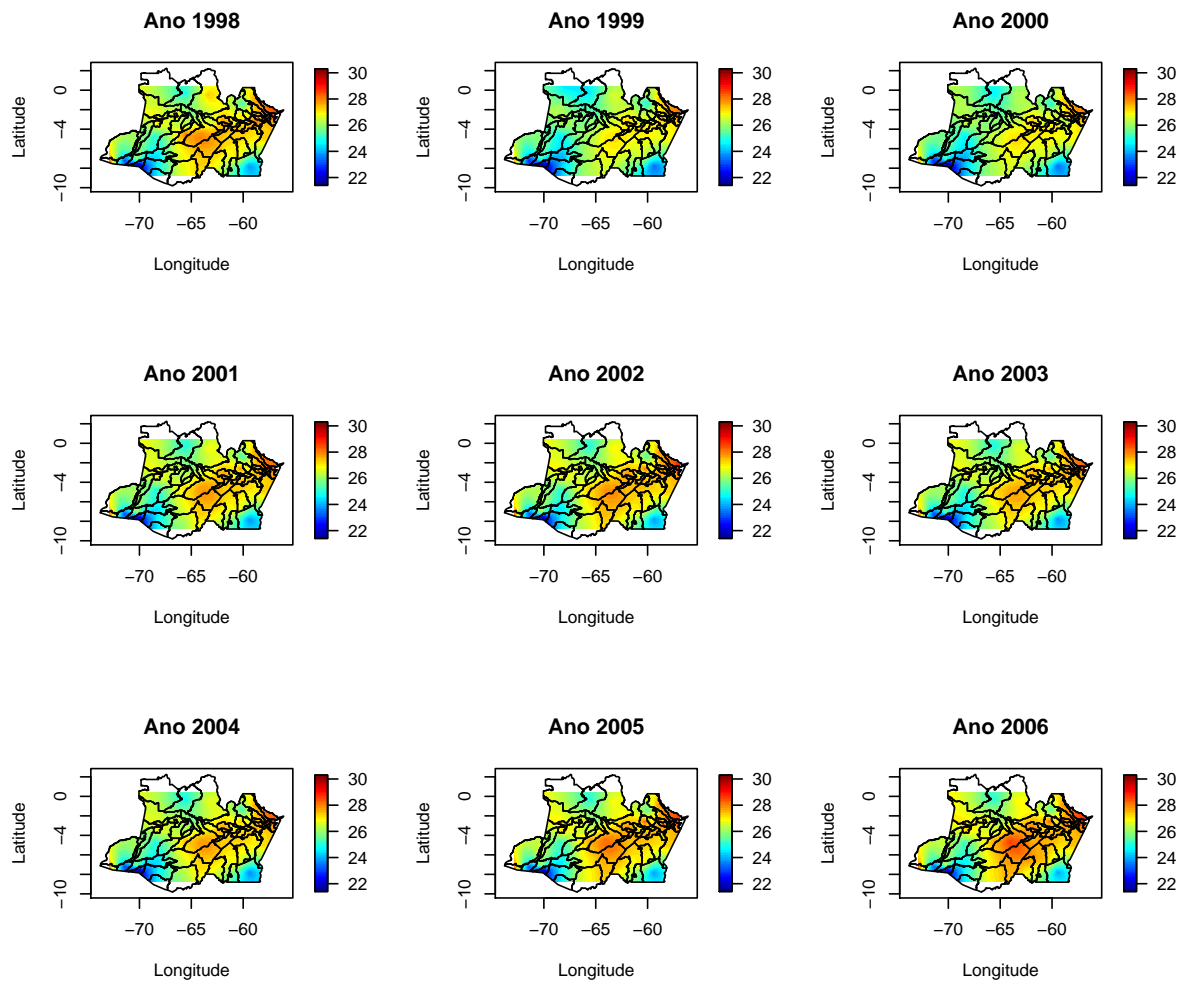


Figura 5.4: Mapas de previsão de temperatura de 1998 a 2006

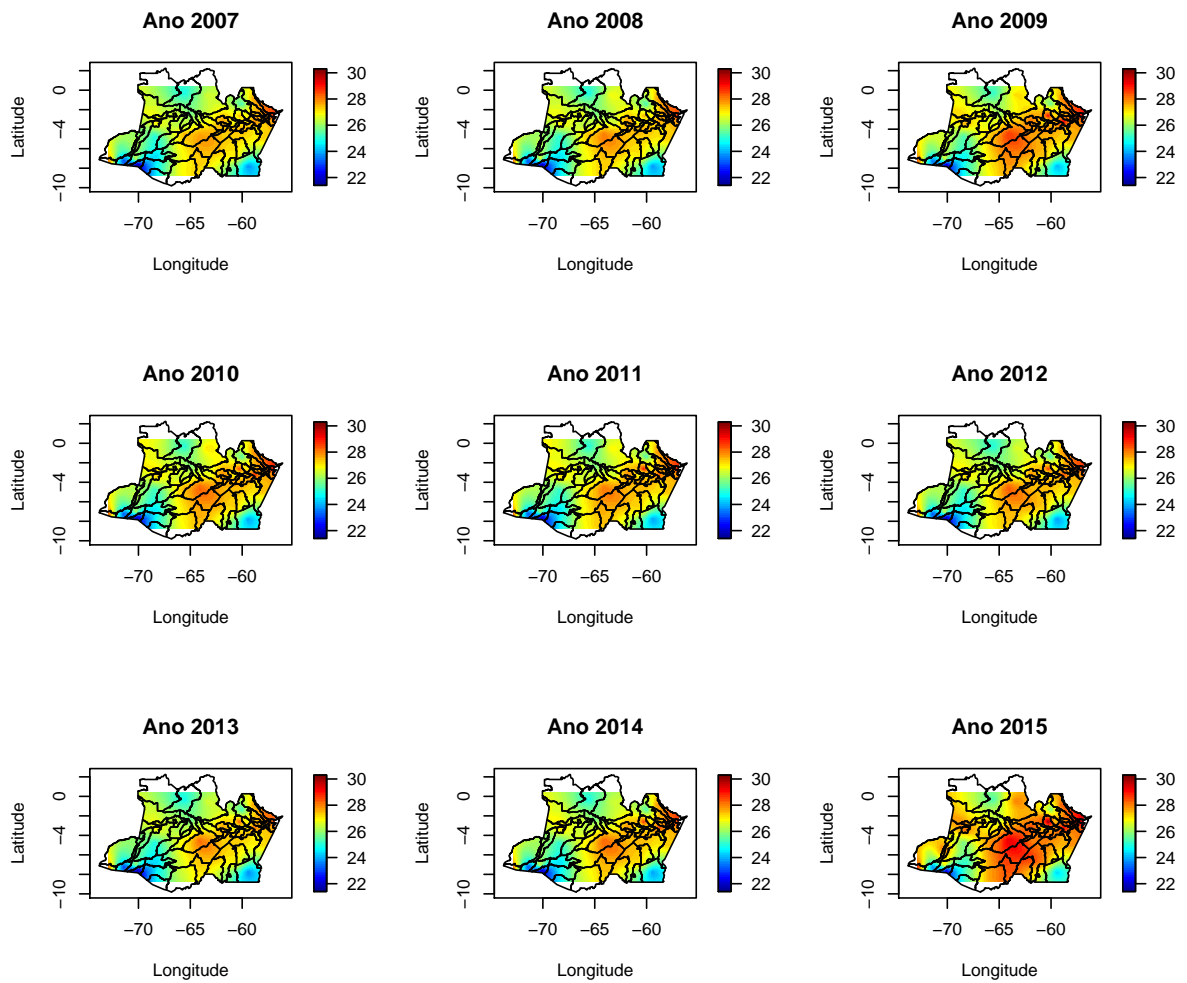


Figura 5.5: Mapas de predição de temperatura de 2007 a 2015

Para termos uma ideia geral do aumento da temperatura no Estado, na Figura (5.6) apresentamos o gráfico que mostra as médias das temperaturas preditas para cada ano. Observa-se que, anualmente, a temperatura aumentou, em média, cerca de $0.062\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ou seja, durante os 20 anos de estudo o aumento médio da temperatura foi de aproximadamente $1.25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Então, considerando as mesmas condições climáticas, o modelo estima que a temperatura média poderá subir até $5.27\text{ }^{\circ}\text{C}$ ao final deste século. Este resultado é bastante coerente ao se comparar com o valor estimado pelo IPCC, o qual aponta um aumento médio na temperatura global de quase 5°C (IPCC, 2014). Além disso, existem outros modelos climáticos que estimam um aumento na temperatura de 4°C a 6°C em partes do Brasil (principalmente na Amazônia) (Nobre, 2001).

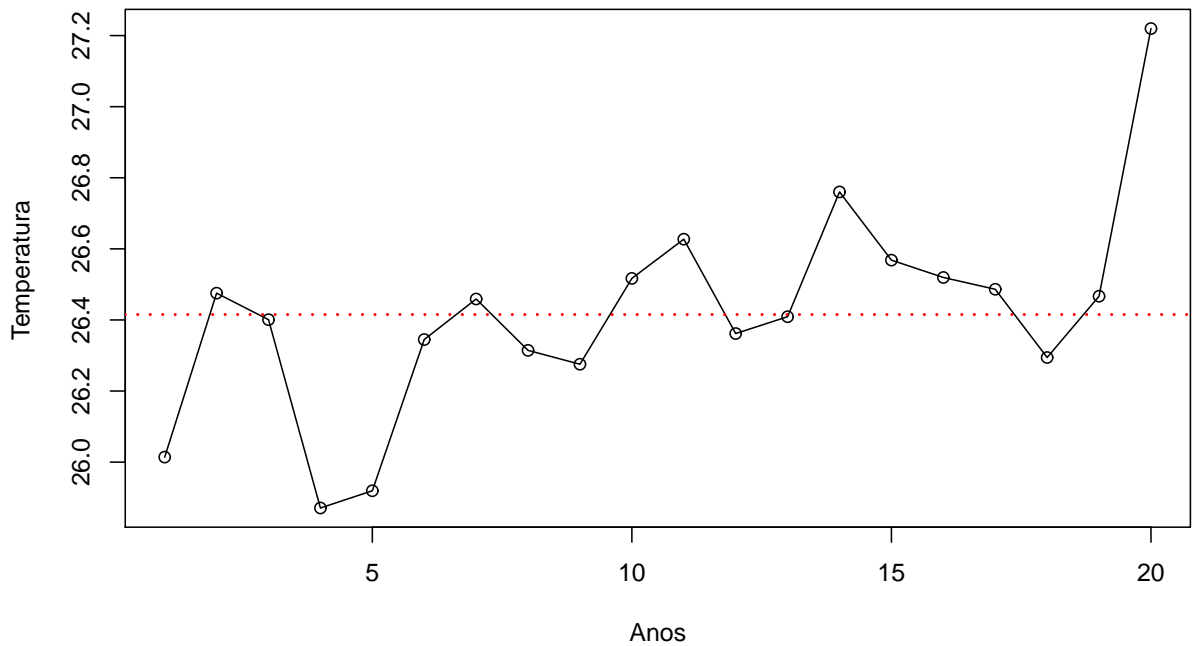


Figura 5.6: Série das médias das temperaturas preditas para todo o Estado do Amazonas no período de 1996 a 2015. A linha tracejada indica a média global.

5.3 Avaliação da Capacidade Preditiva do Modelo

Nesta seção avaliamos a capacidade do modelo proposto (4.2) no problema de predição espaço-temporal de temperatura no Estado do Amazonas. Para isto, fizemos dois estudos simulados: um para o município de Manaus e outro para o município de Eirunepé (veja a Figura (5.3)).

No primeiro estudo retiramos a localização da estação de Manaus do conjunto \mathcal{S} (conjunto das localizações das estações meteorológicas) e repetimos os procedimentos de geração de valores (Seção (4.3)) e estimação dos parâmetros com as informações das $L = 13$ estações meteorológicas restantes. Após este procedimento, os valores de temperatura para Manaus foram preditos de duas maneiras: pelo valor esperado marginal (Equação (4.23)) e pelo algoritmo de predição espaço-temporal descrito na Seção (4.3) (preditor Trimmed). Os valores verdadeiros e os preditos estão descritos na Tabela (5.4) juntamente com suas respectivas estimativas do erro quadrático de predição. Observou-se que em média os erros quadráticos de predição foram próximos (0.28065 para o preditor Trimmed

e 0.28986 para o preditor valor esperado marginal).

No segundo estudo simulado retirou-se as informações de dados da estação de Eirunepé e, novamente, os procedimentos de geração e estimação foram repetidos. Os resultados são mostrados na Tabela (5.5) com seus respectivos erros quadráticos de predição. Neste caso, o preditor valor esperado marginal apresentou erro quadrático médio (0.15657) substancialmente inferior em relação preditor Trimmed (0.84102).

O fato é que quando realizamos a predição de temperatura em Manaus, as informações vizinhas (ou de dependência espacial) são obtidas através de cinco estações meteorológicas e quando realizamos a predição de temperatura em Eirunepé utilizamos informações vizinhas de apenas duas estações (veja a Fig. (5.3)). Desta forma, como o preditor valor esperado marginal mostrou-se razoável nos dois estudos, nos parece racional concluir que esse preditor seja mais eficaz para a realização da predição espacial utilizando este modelo proposto (veja as Figuras (5.7) e (5.8)).

Tabela 5.4: Estimativas da predição em Manaus através dos preditores Trimmed (\tilde{Y}_t) e Valor Esperado Marginal (\hat{Y}_t) e seus erros quadráticos (\tilde{e}_t^2 e \hat{e}_t^2).

Ano (t)	Y_t	\tilde{Y}_t	\hat{Y}_t	\tilde{e}_t^2	\hat{e}_t^2
1996	27.48730	27.07562	27.35846	0.16948	0.01660
1997	29.29949	27.98597	28.44204	1.72533	0.73522
1998	27.18544	28.00584	28.46878	0.67306	1.64696
1999	26.73389	26.75642	26.97173	0.00051	0.05657
2000	26.97572	26.73668	26.94325	0.05714	0.00105
2001	27.99775	27.80456	28.18517	0.03732	0.03513
2002	28.21038	28.11881	28.53154	0.00839	0.10314
2003	27.83126	27.75904	28.14060	0.00522	0.09569
2004	27.48351	27.67309	28.07947	0.03594	0.35517
2005	28.35528	28.13642	28.65734	0.04790	0.09124
2006	28.35075	28.43257	29.02039	0.00669	0.44842
2007	27.51074	27.91493	28.35186	0.16337	0.70748
2008	27.58733	28.02481	28.43674	0.19139	0.72150
2009	29.15728	28.77329	29.44032	0.14745	0.08011
2010	28.49291	28.30466	28.84161	0.03544	0.12159
2011	29.00559	28.13926	28.58598	0.75053	0.17607
2012	28.71542	28.08188	28.56523	0.40137	0.02256
2013	28.37200	27.63697	28.02310	0.54027	0.12173
2014	28.72348	28.07423	28.55639	0.42153	0.02792
2015	30.23109	29.78982	30.71394	0.19472	0.23314

Tabela 5.5: Estimativas da predição em Eirunepé através dos preditores Trimmed (\tilde{Y}_t) e Valor Esperado Marginal (\hat{Y}_t) e seus erros quadráticos (\tilde{e}_t^2 e \hat{e}_t^2).

Ano (t)	Y_t	\tilde{Y}_t	\hat{Y}_t	\tilde{e}_t^2	\hat{e}_t^2
1996	25.83609	26.4111	25.6457	0.33064	0.03625
1997	25.97347	27.03833	26.39344	1.13393	0.17637
1998	26.15026	27.05504	26.41186	0.81863	0.06843
1999	25.49104	26.20204	25.36979	0.50552	0.0147
2000	25.28561	26.18002	25.35633	0.79997	0.005
2001	26.28599	26.88636	26.21663	0.36044	0.00481
2002	26.25664	27.08217	26.45207	0.6815	0.03819
2003	25.58015	26.85363	26.18832	1.62175	0.36987
2004	25.71305	26.82147	26.14625	1.22859	0.18766
2005	26.18381	27.11616	26.53745	0.86928	0.12506
2006	26.32000	27.33471	26.78395	1.02964	0.21525
2007	26.37381	26.98698	26.32754	0.37598	0.00214
2008	26.60681	27.02494	26.38743	0.17483	0.04813
2009	26.58366	27.56836	27.06409	0.96963	0.23081
2010	26.04962	27.22678	26.66488	1.38571	0.37854
2011	25.87698	27.09326	26.49219	1.47934	0.37848
2012	26.34092	27.09965	26.47373	0.57567	0.01764
2013	25.96498	26.80241	26.10399	0.70129	0.01932
2014	26.43469	27.05827	26.46706	0.38885	0.00105
2015	27.00142	28.18004	27.90343	1.38915	0.81362

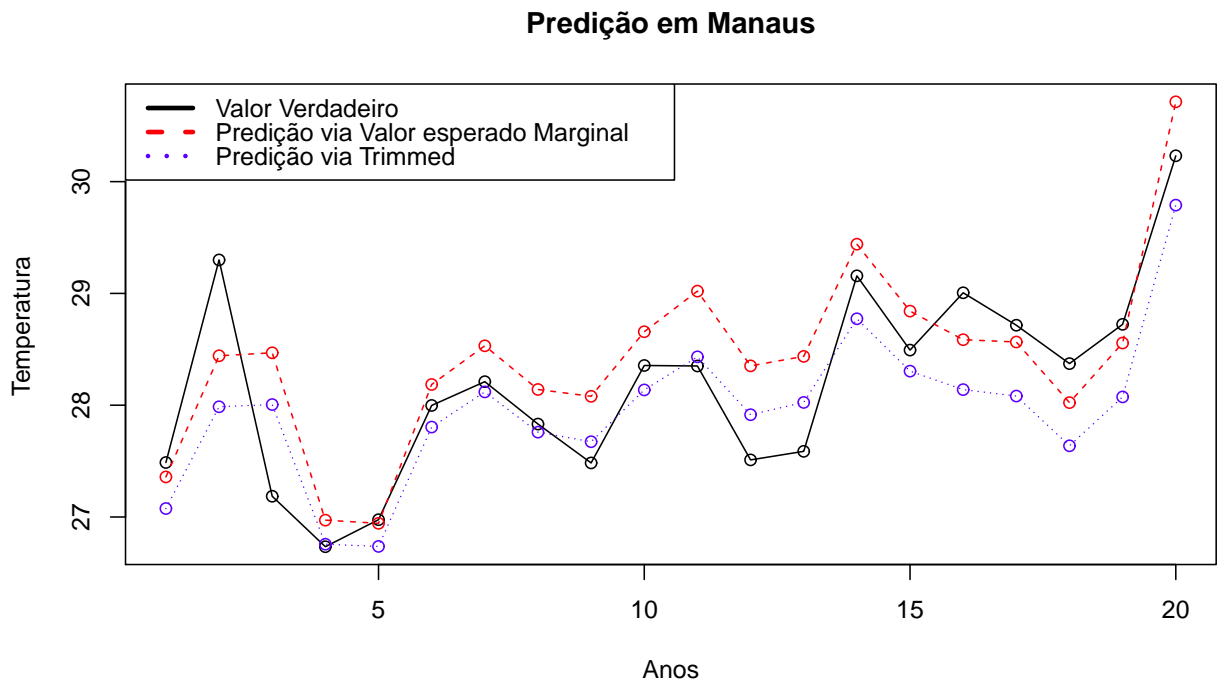


Figura 5.7: Predição simulada em Manaus

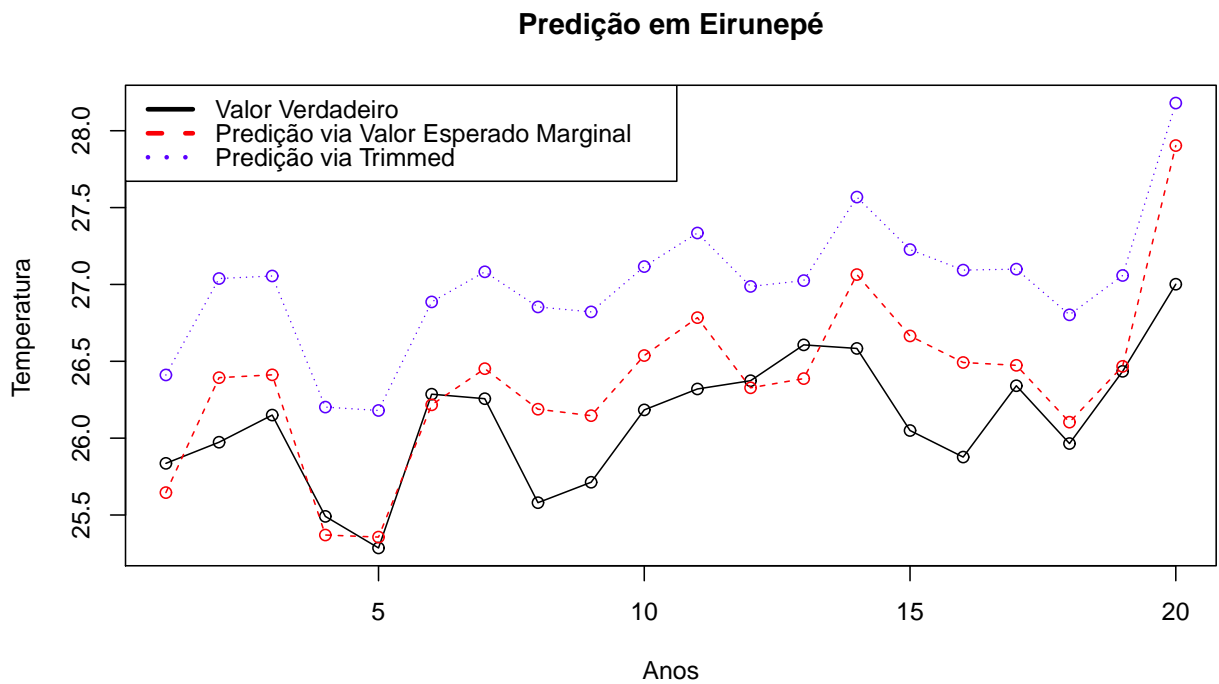


Figura 5.8: Predição simulada em Eirunepé

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta dissertação construímos uma classe de distribuições multivariadas para dados possivelmente correlacionados (por grupos, objetos e/ou indivíduos) chamada Log-Pareto-Exponencializada. A classe foi caracterizada por uma função de excedência Pareto tipo IV e foi construída através de misturas de distribuições α -estáveis positivas. Apresentamos algumas de suas propriedades como, por exemplo, a distribuição do mínimo e a geração de vetores aleatórios por grupos e, além disso, discutimos métodos para a estimação e inferência dos parâmetros. Como um caso particular desta classe, propomos o modelo Log-Poly-Weibull multivariado para a modelagem e previsão espaço-temporal de temperatura. As propriedades deste modelo foram apresentadas de maneira semelhante às do modelo geral e outras foram acrescentadas, todas no contexto espaço-temporal. Os parâmetros desse modelo foram estimados através do algoritmo MCEM e os erros padrões calculados pelo método Bootstrap paramétrico.

O foco da nossa aplicação foi a análise dos dados de temperatura observados nas 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas. O modelo mostrou que houve um aumento médio na temperatura do Estado de aproximadamente 1.25°C durante o período estudado. Além disso, o modelo estimou que a temperatura média poderá subir até 5.27°C ao final do século, se as mesmas condições climáticas forem mantidas. Esta estimativa está de acordo com as feitas por (Nobre, 2001) e (IPCC, 2014).

Para avaliar a capacidade preditiva do modelo proposto, foram realizados dois estudos simulados. Nestes estudos, foram comparados dois preditores para os valores de temperatura: Trimmed e valor esperado marginal. No primeiro estudo percebemos que os preditores Trimmed e valor esperado marginal obtiveram desempenhos similares

quando comparamos seus respectivos erros quadráticos médios de predição, enquanto que no segundo estudo o preditor valor esperado marginal apresentou menor erro quadrático médio de predição. Como no segundo estudo contamos com menos informações vizinhas (ou de dependência espacial), recomendamos o uso do preditor valor esperado marginal na prática.

Com base neste trabalho, algumas abordagens futuras podem ser desenvolvidas:

1. Testar hipóteses e construir intervalos de confiança para os parâmetros do modelo Log-Poly-Weibull através do método Bootstrap paramétrico;
2. Aplicar o modelo Log-Poly-Weibull multivariado para modelar dados de saúde pública e confiabilidade (Análise de Sobrevivência multivariada para dados dependentes);
3. Considerar as observações dependentes tanto no espaço quanto no tempo (série espaço-temporal multivariada);
4. Versão Bayesiana do modelo Log-Poly-Weibull;
5. Comparar nossa abordagem com a de (Cunha et al., 2017).

Apêndice A

Demonstração da Função Densidade por Grupos

Neste apêndice vamos demonstrar a função densidade por grupos dada em (3.12) aplicando derivadas recursivas sucessivamente.

Demonstração. Primeiramente note que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b)}{\partial y_{a,b}} &= \frac{\partial \bar{F}(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b)}{\partial \bar{z}_b} \times \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \nu_{a,b}} \times \frac{\partial \nu_{a,b}}{\partial y_{a,b}} \\ &= -\alpha_b \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \bar{z}_b^{1-\frac{1}{\alpha_b}} e^{-\bar{z}_b}, \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, A_b.\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Agora, vamos usar o método da indução finita sob $A_b \geq 2$ e (Li, 1997).

Para $A_b = 2$, temos que:

$$\begin{aligned}f(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b) &= \frac{\partial^{(2)} \bar{F}(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b)}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial \bar{F}(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b)}{\partial y_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_2} \left(-\alpha_b \delta_{1,b} h(y_{1,b}; \boldsymbol{\theta}) \bar{z}_b^{1-\frac{1}{\alpha_b}} e^{-\bar{z}_b} \right) \quad (\text{por A.1}) \\ &= -\alpha_b \delta_{1,b} h(y_{1,b}; \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\bar{z}_b^{1-\frac{1}{\alpha_b}} e^{-\bar{z}_b} \right) \\ &= -\alpha_b \delta_{1,b} h(y_{1,b}; \boldsymbol{\theta}) \left[\left(\frac{\partial \bar{z}_b^{1-\frac{1}{\alpha_b}}}{\partial y_2} \right) e^{-\bar{z}_b} + \bar{z}_b^{1-\frac{1}{\alpha_b}} \left(\frac{\partial e^{-\bar{z}_b}}{\partial y_2} \right) \right] \\ &= -\alpha_b \delta_{1,b} h(y_{1,b}; \boldsymbol{\theta}) \left[e^{-\bar{z}_b} (\alpha_b - 1) \bar{z}_b^{1-\frac{2}{\alpha_b}} \delta_{2,b} h(y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}) - e^{-\bar{z}_b} \alpha_b \delta_{2,b} \bar{z}_b^{2-\frac{2}{\alpha_b}} h(y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= \alpha_b^2 \left(\prod_{a=1}^2 \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \right) e^{-\bar{z}_b} \bar{z}_b^{1-\frac{2}{\alpha_b}} \left(\frac{1-\alpha_b}{\alpha_b} + \bar{z}_b \right).\end{aligned}$$

Como $Q_2(\bar{z}_b; \alpha_b) = \left(\frac{1 - \alpha_b}{\alpha_b} + \bar{z}_b \right)$, o resultado é válido para $A_b = 2$.
Agora, suponha que o resultado é válido para $A_b = k$, isto é

$$f(y_{1,b}, y_{2,b}, \dots, y_{k,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha_b) = \alpha_b^k \left(\prod_{a=1}^k \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \right) \exp(-\bar{z}_b) \bar{z}_b^{1-\frac{k}{\alpha_b}} Q_k(\bar{z}_b, \alpha_b) \quad (\text{A.2})$$

Devemos mostrar que vale para $A_b = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b) &= \frac{(-1)^{(k+1)} \partial^{(k+1)} \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_{k+1}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \left(\frac{(-1)^k \partial^{(k)} \bar{F}(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b)}{\partial y_1 \dots \partial y_k} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \left(\alpha_b^k \left(\prod_{a=1}^k \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \right) \exp(-\bar{z}_b) \bar{z}_b^{1-\frac{k}{\alpha_b}} Q_k(\bar{z}_b, \alpha_b) \right) \\ &= -\alpha_b^k \left(\prod_{a=1}^k \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \right) \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \left(\exp(-\bar{z}_b) \bar{z}_b^{1-\frac{k}{\alpha_b}} Q_k(\bar{z}_b, \alpha_b) \right) \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \left(e^{-\bar{z}_b} \bar{z}_b^{1-\frac{k}{\alpha_b}} \right) &= \left(\frac{\partial e^{-\bar{z}_b}}{\partial y_{k+1}} \right) \bar{z}_b^{1-\frac{k}{\alpha_b}} + e^{-\bar{z}_b} \left(\frac{\partial \bar{z}_b^{1-\frac{k}{\alpha_b}}}{\partial y_{k+1}} \right) \\ &= \alpha_b \delta_{k+1} h(y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}) \bar{z}_b e^{-\bar{z}_b} \left(\frac{\alpha_b - k}{\alpha_b} - \bar{z}_b \right) \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k(\bar{z}_b, \alpha_b)}{\partial y_{k+1}} &= \frac{\partial Q_k(\bar{z}_b, \alpha_b)}{\partial \bar{z}_b} \times \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial y_{k+1,b}} \times \frac{\partial y_{k+1,b}}{\partial y_{k+1}} \\ &= \frac{\partial Q_k(\bar{z}_b, \alpha_b)}{\partial \bar{z}_b} \left(\alpha_b \delta_{k+1,b} h(y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}) \bar{z}_b^{1-\frac{1}{\alpha_b}} \right) \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas em (A.3), usando os resultados obtidos em (A.4) e (A.5) temos que,

$$f(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}; \boldsymbol{\theta}, \alpha_b) = \alpha_b^{k+1} \left(\prod_{a=1}^{k+1} \delta_{a,b} h(y_{a,b}; \boldsymbol{\theta}) \right) e^{-\bar{z}_b} \bar{z}_b^{1-\frac{k+1}{\alpha_b}} Q_{k+1}(\bar{z}_b, \alpha_b)$$

e, portanto, o resultado é válido para todo $A_b \in \mathbb{N}$. □

Apêndice B

Demonstração das Esperanças

$\mathbb{E}_{m,1}$, $\mathbb{E}_{m,2}$, $\mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$

Neste apêndice vamos demonstrar as seguintes expressões:

1.

$$\mathbb{E}_{m,1} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

2.

$$\mathbb{E}_{m,2} = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

3.

$$\mathbb{E}_{m,3} = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_1(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

4.

$$\mathbb{E}_{m,4} = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_b^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \times \varphi_2(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

Demonstração. Usando a Proposição (4.1) e as funções φ_0 , φ_1 e φ_2 definidas nas equações (4.18), (4.20) e (4.21), temos que

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,1} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty E_m p(\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{E} \\
&= \int_0^\infty E_m p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty E_m \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty E_m \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,2} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m)) = \int_0^\infty \log(E_m) p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty \log(E_m) \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty \log(E_m) \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m) \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,3} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(c(B_m))) = \int_0^\infty \log(c(B_m)) p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty \varphi_1(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty \varphi_1(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_1(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,4} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}}) = \int_0^\infty c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \varphi_2(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \varphi_2(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_2(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}
\end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

- Aban, I. B.; Meerschaert, M. M. and Panorska, A. K. (2006) *Parameter estimation for the truncated Pareto distribution*, Journal of the American Statistical Association, **101(473)**, 270–277.
- Arnold, B. C. *Pareto Distributions*, Fairland, Maryland: International Cooperative Publishing House, 1983.
- Banerjee, S.; Gelfand, A.; Knight, J. and Sirmans, C. (2004). *Spatial modelling of house prices using normalized distance-weighted sums of stationary processes*. J. Bus. Econ. Statist., **22**, 206–213.
- Bela, A. F.; Amol, Kapila.; Maya, R. G. *Introduction to the Dirichlet Distribution and Related Processes*, University of Washington Department of Electrical Engineering (Technical Report UWEETR-2010-006). Retrieved May 2012, 2010.
- Berger, J.O.; Sun, D. (1993). *Bayesian Analysis for the Poly-Weibull Distribution*, Journal of the American Statistical Association, **88(424)** : 1412-1418.
- Bowman, A. W; Azzalini, A. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-Plus Illustrations* 1^aed, Oxford University Press Inc, New York, 1997.
- Blanchet, J.; Davison, A.C. (2011). *Spatial Modeling of extreme snow depth*, Ann. Appl. Stat, **5**: 1699-1725.
- Brillinger, D.R.; Finney, M.A. (2014). *An exploratory in a spreading fire*, Envirometrics, **25**: 443-453.
- Casella, G.; Berger, R. L. *Inferência estatística - tradução da 2a edição norte americana*. Centage Learning, 2010.

- Cooley, D.; Sain, S.R. (2010). *Spatial hierarchical modeling of precipitation extremes from a regional climate model*, J. Agric. Bio. Environ. Statist, **15**: 381-402.
- CPRM(Serviço Geológico do Brasil).*Elementos Que Caracterizam o Clima*.Disponível em: <http://www.cprm.gov.br>.
- Cunha, M.; Garmeman, Dani.; Fuentes, M.; Paez, M.. (2017). *A non-stationary spatial model for temperature interpolation applied to the state of Rio de Janeiro*, Journal of the Royal Statical Society: Applied Statistics Series C, **20**: 0035–9254/17/66000.
- Davidson, JEH., Stepheenson, DB and Turasie AA. (2016). *Time series modeling of paleoclimate data*, Environmetrics, **27**: 55-65.
- Dempster, A. P., Laird, N.M. e Rubin, D.B. (1977). *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society, B, **39**,1-22.
- Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- Forbes, C.; Evans, M.; Hastings, N. and Peacock, B. *Statistical Distributions*, Hoboken, NJ, USA: John Wiley and Sons, Fourth edition, 2011.
- Fougères, A.L.; Nolan, J.P.; Rootzen, H.(2009). *Models for dependent extremes using stable mixtures*, Scand. J. Statist, **36**: 42-59.
- Fuentes, M.; Henry, J.; Reich, B.(2013). *Nonparametric spatial models for extremes: Applications to exeterme temperature data.*, Extremes, **16(1)**: 75-101.
- Gelfand, A.; Diggle, P.; Guttorp, P.; Fuentes, M. *Handbook of spatial statistics*, Chapman Hall/CRC, 2010.
- Gentle, J. E. (2009). Monte carlo methods for statistical inference. In Computational Statistics, pages 417–433. Springer.
- Guttorp, P.; Xu, J.(2011). *Climate change, trends in extremes, and model assessment for a long temperature time serie from Sweden*, Dados de publicação. Envirometrics, **22**: 456-463

- Haylock, M.R. et al.(2005). *Trends in Total and Extreme South American rainfall 1960-2000 and links with sea surface temperatura*. Journal of Climate, **19**, 1940-1512.
- Hogg, R. V.(1979). *Statistical robustness: one view of its use in applications today*. Amer. Statist., **33**, 108-16.
- INMET(Instituto Nacional de Meteorologia).*BDMEP - Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa*.Disponível em: <http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=bdmep/bdmep>.
- IPCC(Intergovernmental Panel on Climate Change). *Climate change 2014: working group II: Impacts, adaptations and vulnerability*. Disponível em: <https://www.ipcc.ch/index.htm>.
- Johnson, N. L.; Kotz, S.; and Balakrishnan, N. *Continuous Univariate Distributions*, Volume 1, 2nd ed. New York: Wiley, 1994.
- Kanter, M.(1975). *Stable Densities Under Change of Scale and Total Variation Inequalities*, Annals of Probability, 3, No. 4, 697-707.
- Krahenmann, S.; Bissolli, P.; Rapp, J. and Ahrens, B. (2011). *Spatial gridding of daily maximum and minimum temperatures*, Meteorol Atmos Phys, **114**: 152-161.
- Leonowicz, Z.; Karvanen, J.; Shishkin, S.L. (2005). *Trimmed estimators for robust averaging of event-related potentials*. J. Neurosciences Methods **142**:17-26.
- Lehmann, E.L. (1953). *The power of rank tests*. Annals of Mathematical Statistics, **24**: 23-43.
- Levine, R.A; Casella, G. (2001). *Implementations of the Monte Carlo EM Algorithm*, Statist. Sci, **23**: 192-195.
- Li, C. L. (1997). *A Model for Informative Censoring*, Ph. D. Dissertation, The University of Alabama at Birmingham.
- Lurgt, M.; López, B.C.; Montoya, J.M.(2012). *Climate change impacts on body size and food web structure on mountain ecosystems*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences, v. **367**, n. 1605, p. 3050-3057.

- Marengo, J.A. et al. *Eventos Extremos em Cenários regionalizados de Clima no Brasil e América do Sul para Século XXI: Projeções de Clima futuro usando três modelos regionais*. Quinto Relatório, Brasília, 2007.
- Margalhães, Marcos N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*, 2nd ed. São Paulo: Edusp, 2006.
- Nobre, Carlos A. (2001). *Mudanças climáticas globais: possíveis impactos nos ecossistemas do país*. Modelos e cenários para a Amazônia: o papel da ciência. **20**.p.239-258.
- Nolan, John P. (2012). *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, Boston; in progress, chapter 1 online at <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>.
- Olmedo, Omar E. (2014). *kriging: Ordinary Kriging*. R package version 1.1. <https://CRAN.R-project.org/package=kriging>.
- Padoan S.A. 2011. (2011). *Multivariate extreme models based on underlying skew-t and skew-normal distributions*, Journal Multivariate Analysis, **102**: 977-991.
- Quadro, Mario F.L et al. *Climatologia de Precipitação e Temperatura*. Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos - CPTEC/INPE. Disponível em: <http://climanalise.cptec.inpe.br/~rcliman1/boletim/cliesp10a/chuesp.html>, acesso: março de 2017.
- Reich, B.J.; Shaby, B.A. (2012). *A Hierarchical Max-Stable Spatial Model For Extreme Precipitation*, *Envirometrics*, **23**: 638-648.
- Reich, B.J.; Shaby, B.A. (2013). *A Hierarchical Max-Stable Spatial Model For Extreme Precipitation*, *Annals of Applied Statistics*, **6 (4)**: 1430-1451.
- R Core Team. (2016). *R: A Language and Enviroment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- Serrão, E.; Santos, C.; Wanzeler, R.; Gonçalves, L.; Lima, A. (2015). *Avaliação da Seca de 2005 e 2010 na Amazônia: Análise da Bacia Hidrográfica do Rio Solimões*, *Rev. Geogr. Acadêmica* v.9, n.2 (xii.2015), **15**:(5 - 20).

- Sidler, Rolf.; Holliger, Klaus. (2003) *Kriging and Conditional Geostatistical Simulation Based on Scale-Invariant Covariance Models*, Department of Earth Sciences, ETH Zurich. Tese de doutorado.
- Shi, D. (1995). *Fisher Information for a multivariate extreme value distribution*, *Biometrika*, **82**: 644-649.
- Stephenson A.G. (2009). *High-dimensional parametric modelling of multivariate extreme events*, *Aus. N.Z.J. Stat.*, **51**: 77-88
- Todd, B.D.; Scott, D.E.; Pechmann, J.H.K.; Gibons, J.W. (2011). *Climate change correlates with rapid delays and advancements in reproductive timing in an amphibian community*, *Proceedings of The Royal Society*, p.2191-2197.
- Wey, C.G.; Tanner, M.A. (1990). *A Monte Carlo Implementation of the EM algorithm and the Poor Man's Data Augmentation Algorithms*, *Journal of the American Statistical Association*, **85**: 699-704.
- Walther, G.R.; Post, E.; Convery, P.; Menzel A.(2002). *Ecological responses to recent climate change*. *Nature*, v. **416**, p. 389-395.
- Zhu, H. and Lee, S. (2001). *Local influence for incomplete-data models*. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **63**, 111-126.
- Zolotarev, V. M. (1986). *One-dimensional Stable Distributions*. *Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs*, Vol. 65. Amer. Math. Soc., Providence, RI. (Transl. of the original 1983 Russian).