Universidade Federal da Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Álgebras de Kac-Moody afim não torcidas como extensão central de álgebras de loop

Alan Kardec Fonseca Maduro Junior

Manaus – AM
Agosto de 2017

Universidade Federal da Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Álgebras de Kac-Moody afim não torcidas como extensão central de álgebras de loop

por

Alan Kardec Fonseca Maduro Junior

sob as orientações de

Prof. Dr. Wilhelm Alexander Steinmetz
(Orientador)

e

Prof. Dr. Vyacheslav Futorny
(Coorientador)

Manaus – AM
Agosto de 2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M183á

Maduro Junior, Alan Kardec Fonseca

Álgebras de Kac-Moody afim não torcidas como extensão central de álgebras de loop / Alan Kardec Fonseca Maduro Junior. 2017

93 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Wilhelm Alexander Steinmetz

Coorientador: Vyacheslav Futorny

Dissertação (Mestrado em Matemática - Álgebra) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Álgebras de Lie. 2. Álgebras de Kac-Moody. 3. Álgebras de Kac-Moody afim. 4. Álgebras de loop. I. Steinmetz, Wilhelm Alexander II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Álgebras de Kac-Moody afim não torcidas como extensão central de álgebras de loop

por

Alan Kardec Fonseca Maduro Junior [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 31 de Agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vyacheslav Futorny – USP
(Orientador)

Prof. Dr. Luis Enrique Ramirez – UFABC
(Examinador Externo)

Germán Benitez Monsalve.

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve – UFAM
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais...

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus, por todas as oportunidades que tem colocado em minha vida, por sempre me socorrer em todos os momentos difíceis e, citando uma música da qual gosto, por me segurar com seu amor de Pai. Agradeço ainda, a Santa Maria, mãe de Jesus, por interceder em meu favor a todo momento.

Sou profundamente grato aos meus orientadores, Prof. Dr. Wilhelm Alexander Steinmetz e Prof. Dr. Vyacheslav Futorny pelas oportunidades, atenção, paciência, incentivo e dedicação, sem os quais este trabalho não poderia ser realizado. Agradeço ao Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve pelas dúvidas sanadas, incentivos e pela contribuição no trabalho.

Agradeço aos meus companheiros e amigos de mestrado Ayana Santana, Bruno Lopes, Fernando Junior, João Raimundo, Rafael Arcos, Teo Felipe, Eduardo Bruno, e tantos outros que dividiram comigo momentos de alegria e diversão, bem como momentos de tristeza e desânimo nesta jornada. Agradeço aos professores Domingos Anselmo Moura da Silva, Roberto Cristóvão Mesquita Silva, Stefan Josef Ehbauer, Dragomir Mitkov, Alfredo Wagner e a todos os professores do PPGM-UFAM, que contribuíram de alguma forma para a minha formação acadêmica e pessoal. Agradeço ainda aos secretário Arístocles e Elclimar, e a todos que, de forma direta ou indireta, colaboraram com este trabalho.

Agradeço aos Profs. Drs. Germán Alonso Benitez Monsalve e Luis Enrique Ramirez, por terem participado da banca examinadora da defesa desta dissertação e pelas sugestões oferecidas.

Agradeço aos meus irmãos Alen Henrique e André Luiz por me darem forças para vencer cada etapa, sou grato a minha namorada Jéssica de Oliveira por me acompanhar nessa jornada e, em muitos momentos, aceitar "me perder" para o estudo de matemática. Eles me ajudaram da forma que puderam e por isso sou agradecido.

Finalmente, vou agradecer aos verdadeiros protagonistas desta história, meus pais Alan Kardec e Maria Stella. Estes que deram, literalmente, sangue e suor para que pudesse estar aqui hoje, não só fisicamente é claro, mas também emocionalmente e intelectualmente, pois, com todas as dificuldades da vida, sempre me incentivaram, respeitaram, constituíram maravilhosos exemplos de bondade e honestidade para mim, e me deram todos os meios e condições para que eu pudesse estudar. Sei que muitas vezes eles abdicaram dos seus sonhos e projetos para que eu pudesse realizar os meus, mais do que isso, fizeram dos meus os deles, e prova de amor maior não há.

Resumo

Na década de 60, Victor G. Kac e Robert V. Moody, com trabalhos independentes, forneceram uma generalização das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita por meio da chamada matriz de Cartan generalizada (MCG). Tais álgebras de Lie, encontradas por Kac e Moody, são denominadas álgebras de Kac-Moody e geralmente são álgebras de dimensão infinita. Basicamente, a dissertação é dedicada ao estudo das álgebras de Kac-Moody afim não torcidas, mais precisamente, o resultado principal deste trabalho é fornecer uma construção (realização) concreta dessas álgebras por meio de uma álgebra de loop onde a álgebra base é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita.

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Álgebras de Kac-Moody, Álgebras de loop.

Abstract

In the 1960s, Victor G. Kac and Robert V. Moody, working independently, provided a generalization of finite semisimple Lie algebras by means of the so-called generalized Cartan matrix (GCM). Such Lie algebras, discovered by Kac and Moody, are called Kac-Moody algebras and are usually infinite-dimensional algebras. This dissertation is devoted to the study of non-twisted affine Kac-Moody algebras, more precisely, the main result of this work is to provide a concrete construction (realization) of these algebras by means of a loop algebra where the base algebra is a finite dimensional simple Lie algebra.

Keywords: Lie algebras, Kac-Moody algebras, Loop algebras.

Sumário

Introdução

As álgebras de Lie foram originalmente introduzidas por S. Lie como estrutura algébrica usada para o estudo dos grupos de Lie, no entanto, as álgebras de Lie também provaram ter propriedades muito interessantes e foram estudadas, de forma independente, por E. Cartan e W. Killing que, durante a década de 1890-1900, classificaram todas as álgebras de Lie simples de dimensões finitas sobre o corpo dos complexos. Conceitos básicos sobre a estrutura e a teoria da representação destas álgebras de Lie também foram investigadas por H. Weyl tempos mais tarde. Desde então, a teoria de Álgebras de Lie encontrou variadas aplicações tanto em matemática quanto em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, em física-matemática..

Dentre as álgebras de Lie de dimensão finita, as álgebras de Lie semissimples possuem propriedades convenientes, como por exemplo, podem ser representadas por uma matriz chamada de matriz de Cartan que, por sua vez, é associada a um grafo que possui as mesmas informações da matriz de Cartan e é chamado de diagrama de Dynkin. Devido ao grande desenvolvimento da teoria de álgebras de Lie semissimples e suas representações, várias tentativas de generalizá-las (preservando suas propriedades) foram feitas, porém, somente na década de 60, Victor G. Kac e Robert V. Moody, com trabalhos independentes, forneceram uma generalização eficaz por meio da chamada matriz de Cartan generalizada (MCG). Tais álgebras de Lie, encontradas por Kac e Moody, são denominadas álgebras de Kac-Moody e geralmente são álgebras de dimensão infinita.

As álgebras de Kac-Moody são divididas em álgebra de Kac-Moody finita, que são exatamente as álgebras de Lie simples de dimensão finita, e em álgebra de Kac-Moody afim, onde esta última divide-se em não torcida e torcida. A teoria de Kac-Moody desenvolveu-se rapidamente desde a sua introdução e resultou em aplicações em muitas áreas da matemática, incluindo a teoria de grupos, combinatória e equações diferenciais. Além disso, as álgebras de Kac-Moody também são a estrutura algébrica por trás de muitas teorias físicas e têm aplicações, por exemplo, na física estatística, equações de Yang-Baxter e teoria das cordas. As álgebras de Kac-Moody são definidas de modo abstrato por meio de geradores e relações na MCG, entretanto, as do tipo afim podem ser obtidas explicitamente por meio da chamada álgebra de loop.

O objetivo principal desta dissertação é fornecer uma realização (construção) explicita das álgebras de Kac-Moody afim **não torcidas** por meio da álgebra de loop de uma álgebra de Lie simples de dimensão finita. Como é esperado, todas as álgebras de Kac-Moody estão associadas a uma MCG, ou equivalentemente a um diagrama de Dynkin. Adicionando uma linha e uma coluna a uma matriz do tipo finito $\dot{A}$, sempre obtemos uma matriz do tipo afim não torcida A e esta é denominada de matriz de Cartan estendida da álgebra de Lie $\dot{\mathfrak{g}}$ associada à matriz $\dot{A}$. Seja $\mathfrak{L} := \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ a álgebra dos polinômios de Laurent, então a álgebra de Kac-Moody afim não torcida associada à matriz A é obtida a partir da álgebra de loop $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) := \mathfrak{L} \otimes \dot{\mathfrak{g}}$.

A dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo, estudaremos basicamente as álgebras de Lie de dimensão finita. Trabalharemos com as álgebras semissimples e ao final apresentaremos todos os possíveis diagramas de Dynkin conexos, que são os diagramas associados às algebras de Lie simples e isto classifica as álgebras de Lie semissimples, pois estas são decompostas em soma direta de simples. No segundo capítulo, vamos definir e classificar as matrizes de Cartan generalizadas bem como as álgebras de Kac-Moody associadas a estas matrizes e trataremos das definições e dos resultados necessários para a prova do teorema principal. Finalmente no capítulo três, vamos definir álgebras de loop e construir uma álgebra de Lie, a partir de uma álgebra de Lie simples de dimensão finita, e provar que esta é exatamente uma álgebra de Kac-Moody afim não torcida.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

Neste capítulo, vamos introduzir a definição de álgebra de Lie e suas propriedades. Vamos trabalhar especificamente com álgebras de dimensão finita, a fim de construir uma boa base de conhecimento e motivar resultados quando estas possuem dimensão infinita. O principal pré-requisito exigido neste capítulo é o conhecimeto razoável de Álgebra Linear. Alguns conceitos de Álgebra Linear podem ser encontrados no apêndice desse trabalho.

1.1 Definição e exemplos

Definição 1.1.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido com um produto (colchete de Lie)*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

que cumpre as seguintes propriedades:

(i) $[\cdot,\cdot]$ *é bilinear,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $[X,X] = 0$,

(iii) $\forall X, Y \in \ \mathfrak{g}$, $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(identidade de Jacobi).*

Observações 1.1.1.

1. *Mais precisamente,* $[\cdot,\cdot]$ *é um produto que dá ao espaço vetorial uma estrutura de álgebra. Geralmente chamaremos as álgebras de Lie apenas de álgebras.*

2. $\forall X \in \mathfrak{g}$, *tem-se* $[0,X] = 0$. *De fato,* $0 = [X,X] = [X+0,X] = [X,X]+[0,X] \Longrightarrow [0,X] = 0$.

3. *O colchete* $[\cdot,\cdot]$ *é anti-simétrico. De fato,* $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ *temos* $0 = [X+Y, X+Y] = [X, X+Y] + [Y, X+Y] = [X,X] + [X,Y] + [Y,X] + [Y,Y] = [X,Y] + [Y,X] \Rightarrow [X,Y] = -[Y,X]$. *No caso em que* $char(\mathbb{K}) \neq 2$, *tem-se*

$$[X,Y] = -[Y,X] \Leftrightarrow (ii).$$

4. *Note que a identidade de Jacobi é uma espécie de operação em ciclo e que pode ser escrita alternativamente de duas formas:*

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] \text{ ou } [[X,Y],Z]] = [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]].$$

5. *Em geral, o colchete de Lie não é associativo, pois em todos os casos* $[[X,X],Y] = 0$*, porém* $[X,[X,Y]]$ *nem sempre é nulo.*

6. *A dimensão de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é a sua dimensão como espaço vetorial. A partir desse momento, salvo dito o contrário, vamos considerar todas as álgebras de Lie com dimensão finita.*

7. *Sabemos que qualquer elemento de* $\mathfrak{g}$ *é escrito como combinação linear dos elementos da base, então para determinar se um dado colchete "transforma" um espaço vetorial numa álgebra de Lie, basta verificar as condições acima apenas para os elementos de uma base do espaço.*

Definição 1.1.2. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *é um subespaço vetorial* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *que é fechado pelo colchete de Lie, isto é,* $[X,Y] \in \mathfrak{h}, \forall X, Y \in \mathfrak{h}$.

Portanto, uma subálgebra de Lie é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, que munido com o mesmo colchete de $\mathfrak{g}$, é uma álgebra de Lie (Relembre a caracterização de um subespaço vetorial).

Exemplo 1.1.1. *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, então o produto vetorial* $(x,y) \mapsto x \wedge y$ *define a estrutura de álgebra de Lie em* $\mathbb{R}^3$*. Com efeito, sejam* $x, y \in \mathbb{R}^3$*, onde* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $y = (y_1, y_2, y_3)$*, definimos em* $\mathbb{R}^3$ *o colchete*

$$[x,y] = x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Então, $\forall x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3), z = (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\forall k \in \mathbb{R}$ *temos:*

(i) $[\cdot,\cdot]$ *é bilinear:*

$$\begin{aligned}
[x, y+z] &= (x_1,x_2,x_3) \wedge (y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3) \\
&= (x_2y_3 + x_2z_3 - x_3y_2 - x_3z_2, x_3y_1 + x_3z_1 - x_1y_3 - x_1z_3, x_1y_2 + x_1z_2 - x_2y_1 - x_2z_1) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1) \\
&= (x \wedge y) + (x \wedge z) = [x,y] + [x,z]
\end{aligned}$$

e

$$[x, ky] = (x_1,x_2,x_3) \wedge (ky_1, ky_2, ky_3) = (kx_2y_3 - kx_3y_2, kx_3y_1 - kx_1y_3, kx_1y_2 - kx_2y_1)$$
$$= k(x \wedge y) = k[x,y].$$

Analogamente, prova-se para a outra coordenada.

(ii) Vale $[x,x] = 0$*:*

$$[x,x] = (x_1,x_2,x_3) \wedge (x_1,x_2,x_3) = (x_2x_3 - x_3x_2, x_3x_1 - x_1x_3, x_1x_2 - x_2x_1) = (0,0,0).$$

(iii) Do mesmo modo como foi feito nos casos anteriores, fazendo as contas verifica-se que também vale a identidade de Jacobi, isto é:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=(x\wedge(y\wedge z))+(y\wedge(z\wedge x))+(z\wedge(x\wedge y))=0.$$

Portanto, o par $(\mathbb{R}^3,\wedge)$ *é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.2. *Um espaço vetorial* V *sobre* $\mathbb{K}$ *munido de um colchete* $[\cdot,\cdot]:V\times V\mapsto V$ *dado por* $[X,Y]:=0,\forall X,Y\in V$ *é uma álgebra de Lie. Álgebras desse tipo são chamadas de* ***Álgebras abelianas*** *e, nesse caso, a estrutura de álgebra de Lie não acrescenta nada à estrutura do espaço vetorial.*

Observação 1.1.1. *Se* $dim(\mathfrak{g})=1$ *então* $\mathfrak{g}$ *é abeliana. Basta ver que* $dim(\mathfrak{g})=1$ *implica que toda base de* $\mathfrak{g}$ *possui apenas um elemanto* $v\in\mathfrak{g}$ *não nulo, portanto,* $\forall X,Y\in\mathfrak{g}$*, tem-se* $X=av$ *e* $Y=bv$*, com* $a,b\in\mathbb{K}$*. Daí,* $[X,Y]=[av,bv]=ab[v,v]=(ab)0=0$*.*

Exemplo 1.1.3. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de dimensão* $\leqslant 2$ *:*

a) Como vimos, se $dim(\mathfrak{g})=1$ *então* $\mathfrak{g}$ *é abeliana.*

b) Se $dim(\mathfrak{g})=2$ *então temos duas possibilidades:*

i) $\mathfrak{g}$ *é abeliana;*

ii) Existe uma base $\{X,Y\}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que,*

$$[X,Y]=Y.$$

Se $\mathfrak{g}$ não é abeliana, então tomemos uma base $\{X',Y'\}$ qualquer de $\mathfrak{g}$. $[X',Y']\neq 0$, caso contrário, $\mathfrak{g}$ seria abeliana, pois o colchete de Lie é bilinear e todo elemento de $\mathfrak{g}$ escreve-se como combinação linear dos elementos da base. Seja $Y''=[X',Y']$, $\{Y''\}$ é linearmente independente e portanto faz parte de uma base de $\mathfrak{g}$. Escolhemos X'' tal que $\{X'',Y''\}$ seja uma base de $\mathfrak{g}$, então $X''=aX'+bY'$, $Y''=cX'+dY'$ e

$$[X'',Y'']=\alpha Y'' \text{ para algum } \alpha\in\mathbb{K}.$$

Como $\{X'',Y''\}$ é base e $\mathfrak{g}$ não é abeliana, temos que $\alpha\neq 0$, logo, tomando $X=\dfrac{1}{\alpha}X''$ e $Y=Y''$ obtemos que $\{X,Y\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$ com $[X,Y]=Y$ e, a partir daí, o colchete de dois elementos quaisquer de $\mathfrak{g}$ é dado por

$$[aX+bY,cX+dY]=(ad-cb)[X,Y]=(ad-cb)Y.$$

Exemplo 1.1.4. *Álgebras de Lie provenientes de álgebras associativas: Seja* A *uma álgebra associativa (isto é,* A *é um anel cujo produto é associativo e, no nosso caso, é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial). Definimos o seguinte colchete, chamado de* ***comutador****:*

$$[X,Y]=XY-YX, \qquad X,Y\in A.$$

Esse colchete define uma estrutura de álgebra de Lie em A*.*

Veja que utilizamos as operações do próprio anel A, principalmente o produto, para definir o comutador. Ou seja, o produto associativo induz uma estrutura de álgebra de Lie em A, com isso, podemos construir vários exemplos de álgebras de Lie, basta considerar uma álgebra associativa (Álgebra onde o anel é associativo) e definir o **comutador**.

Os exemplos a seguir são de extrema importância na contrução da teoria de álgebras de Lie:

Exemplo 1.1.5. *$M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma álgebra associativa, então, pelo exemplo anterior, vamos introduzir o comutador:*

$$[X,Y] = XY - YX, \qquad X,Y \in M_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Como vimos, o par $(M_{n\times n}(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot])$ é uma álgebra de Lie, que denotaremos por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Da mesma forma, o espaço dos operadores lineares de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ ($T : V \mapsto V$), será denotado por $\mathfrak{gl}(V)$ e também assume a estrutura de álgebra de Lie, com o comutador, utilizando a composição de aplicações como produto associativo. Lembre-se que quando $dim(V) = n < \infty$ as transformações lineares identificam-se de maneira natural com as matrizes, portanto, neste caso, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) = \mathfrak{gl}(V)$.

As álgebras envolvendo o espaço das matrizes, aparecerão com grande frequência no decorrer da teoria, então, salvo dito o contrário, quando tratarmos de matrizes estaremos considerando sempre o colchete comutador.

Exemplo 1.1.6. *O conjunto $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : tr(A) = 0\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, em que $tr(A)$ significa o traço da matriz A.*

De fato, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ é fechado nas operações de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ (isto é, o produto e a soma de matrizes com a traço nulo ainda possuem o traço nulo), portanto, é um subespaço vetorial e, como o comutador é definido a partir das operações do anel, concluímos que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ é uma subálgebra.

Quando especificar o corpo não for relevante, denotaremos as álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ por $\mathfrak{gl}(n)$ e $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ por $\mathfrak{sl}(n)$. Claramente existem outras subálgebras de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ porém, somente serão tratadas quando forem necessárias.

1.2 Generalidades algébricas

Assim como em outras estruturas algébricas, vamos definir as noções de homomorfismo, quociente, soma e etc.

■ Homomorfismo

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie com $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ e $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$ são seus respectivos colchetes. Uma aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se:*

i) φ é uma transformação linear (como na álgebra linear);

ii) φ preserva os colchetes, isto é:

$$\varphi([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Observações 1.2.1. *Seja $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo:*

- *φ é um isomorfismo se é invertível. Neste caso, dizemos de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas e denotamos por $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$.*
- *φ é um automorfismo se é um isomorfismo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.*
- *No caso entre álgebras abelianas, os homomorfismos são simplesmente as transformações lineares.*
- *Da mesmo forma, como no homomorfismo de outras estruturas algébricas, podemos definir o núcleo:*

$$ker\varphi := \{X \in \mathfrak{g} : \varphi(X) = 0\}.$$

- *O conjunto imagem de φ:*

$$im(\varphi) := \{Y \in \mathfrak{h} : \exists X \in \mathfrak{g} \ onde \ \varphi(X) = Y\}.$$

■ Constantes de estrutura

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $B = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e considere X_i e X_j dois elementos quaisquer desta base. Note que o colchete $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}$, portanto pode ser escrito como a seguinte combinação linear:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k são denominados de **constantes de estrutura** da álgebra $\mathfrak{g}$ em relação à base B. Em álgebra linear, se queremos determinar uma transformação linear entre espaços vetoriais, basta determinar as imagens dos elementos de alguma base do domínio, no nosso contexto, se queremos que um espaço vetorial se "torne" uma álgebra de Lie, basta determinar o colchete para os elementos de alguma base do espaço, isto é, basta determinar as **constantes de estrutura** em relação à alguma base.

Veremos a seguir que as constantes de estrutura determinam a álgebra de Lie a menos de isomorfimo.

Proposição 1.2.1. *Duas álgebras de Lie são isomorfas se, e somente se, elas possuem as mesmas constantes de estrutura.*

Demontração: Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie e $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ um isomorfismo, e considere $A = \{X_1, ..., X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ (qualquer). Temos de álgebra linear que um isomorfismo "leva base em base", então $B = \{\varphi(X_1), ..., \varphi(X_n)\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$. Daí, para $i, j = 1, ..., n$ temos:

$$\varphi([X_i, X_j]) = [\varphi(X_i), \varphi(X_j)] = [Y_i, Y_j].$$

Por um lado,

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k X_k \quad \text{e} \quad [Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^k Y_k,$$

onde a_{ij}^k e b_{ij}^k são as contantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ em relação às bases A e B respectivamente.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[Y_i, Y_j] = [\varphi(X_i), \varphi(X_j)] = \varphi([X_i, X_j]) &= \varphi(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k X_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(a_{ij}^k X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \varphi(X_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k Y_k\end{aligned}$$

então,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ij}^k Y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k Y_k$, como B é linearmente independente, temos $b_{ij}^k = a_{ij}^k$.

Reciprocamente, suponha que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ possuem as mesmas constantes de estrutura em relação à alguma base, então elas possuem a mesma dimensão. Sejam $A = \{X_1, ..., X_n\}$ e $B = \{Y_1, ..., Y_n\}$ bases de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ respectivamente, tais que as constantes de estruturas de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sejam iguais. Basta contruir a aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ tal que $\varphi(X_i) = Y_i$, isto é "leva base em base", logo φ é um isomorfismo de espaços vetoriais e preserva os colchetes.
De fato, considere c_{ij}^k as constantes de estruturas em relação às bases A e B e $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ e $Y = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} b_t X_t \in \mathfrak{g}$ então,

$$\varphi([X,Y]) = \varphi\left(\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right]\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left[X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right]\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j [X_i, X_j]\right) =$$
$$\varphi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j [X_i, X_j]\right) = \varphi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k\right) = \varphi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j c_{ij}^k X_k\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j c_{ij}^k \varphi(X_k) =$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j c_{ij}^k Y_k = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j [Y_i, Y_j] = \left[\varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i), \varphi(\sum_{j=1}^{n} b_j X_j)\right] = [\varphi(X), \varphi(Y)]$$

□

Note que se duas álgebras possuem as constantes de estrutura iguais para pelo menos uma base, então elas possuem constantes de estrutura iguais para todas as bases. No caso de álgebras de dimensão ≤ 2, a menos de isomorfismo, só existem duas: as abelianas e as que admitem uma base $\{X, Y\}$ tal que $[X, Y] = Y$.

■ Ideais

Definição 1.2.2. *Um subconjunto $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é ideal de $\mathfrak{g}$ se,*

i) $\mathfrak{h}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$;

ii) $\forall X \in \mathfrak{g}$ e $\forall Y \in \mathfrak{h}$ tem-se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Observações 1.2.2. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Então*

- *Todo ideal é uma subálgebra, no entanto, nem toda subálgebra é um ideal.*
- *O núcleo de um homomorfismo é um ideal.*
- *A imagem de um homomorfismo é uma subálgebra.*
- *Sejam* $\mathfrak{h}_1$ *e* $\mathfrak{h}_2$ *ideais, então também são ideais:*

$$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 = \{a + b : a \in \mathfrak{h}_1 \text{ e } b \in \mathfrak{h}_2\} \quad e \quad \mathfrak{h}_1 \bigcap \mathfrak{h}_2.$$

- *Para* $\mathfrak{h}_1$ *e* $\mathfrak{h}_2$ *ideais, definimos o "produto" de dois ideais como sendo o conjunto:*

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] := span_{\mathbb{K}}\{[a, b] : a \in \mathfrak{h}_1 \text{ e } b \in \mathfrak{h}_2\}$$

onde "$span_{\mathbb{K}}$*" significa o conjunto de todas as combinações* $\mathbb{K}$*-lineares (às vezes, quando citar o corpo for desnecessário, escreveremos somente span), isto é, se* $X \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$, *então* $X = \sum_{i=1}^{n} c_i[a_i, b_i]$, *onde* $c_i \in \mathbb{K}$, $a_i \in \mathfrak{h}_1$, $b_i \in \mathfrak{h}_2$, $i = 1, ..., n$. *Veja que* $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ *também é um ideal (para verificar isto basta usar a identidade de Jacobi). Claramente podemos definir o "produto" de quaisquer dois subconjuntos da álgebra, porém, de modo geral, este é um subespaço e não necessáriamente um ideal.*

- *Sejam* $\mathfrak{h}_1$ *um ideal e* $\mathfrak{h}_2$ *uma subálgebra. Os conjuntos* $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ *e* $\mathfrak{h}_1 \bigcap \mathfrak{h}_2$ *são subálgebras, mas não necessariamente ideais.*

■ Quocientes

Definição 1.2.3. *Para* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}$ *um ideal de* $\mathfrak{g}$, *definimos o quociente como:*

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{\overline{X} : X \in \mathfrak{g}\}, \text{ onde } \overline{X} := X + \mathfrak{h} = \{X + h : h \in \mathfrak{h}\}$$

e vamos considerar em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *o seguinte colchete:*

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]},$$

tem-se em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *uma estrutura de álgebra de Lie.*

Assim como em toda construção de quocientes, é necessário verificar se o colchete definido acima independe dos representantes das classes e, é claro, mostrar que define em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ uma estrutura de álgebra de Lie. Poderíamos definir o conjunto quociente sem exigir que $\mathfrak{h}$ seja um ideal de $\mathfrak{g}$, no entanto, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ somente será uma álgebra de Lie, com $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$, mediante essa condição, então no nosso contexto, é bem mais interessante considerar $\mathfrak{h}$ um ideal. Salvo dito o contrário, sempre que tratarmos de álgebras quocientes, estaremos considerando o colchete definido acima.

■ Teoremas de isomorfismo

1) Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie e $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ um homomorfismo, então

$$\mathfrak{g}/ker\varphi \simeq im(\varphi).$$

onde o homomorfismo é dado por $\overline{x} \longmapsto \varphi(x)$.

2) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}$ ideais de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{h}$, então

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}')/(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{h}/\mathfrak{h}'.$$

3) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}$ ideais de $\mathfrak{g}$, então

$$(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')/\mathfrak{h} \simeq (\mathfrak{h}'/(\mathfrak{h} \bigcap \mathfrak{h}').$$

As demonstrações desses teoremas, são análogas às outras estruturas algébricas.

■ Soma direta

Definição 1.2.4. *Sejam $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie, com $[\cdot,\cdot]_i$ o colchete de $\mathfrak{g}_i$, e considere o espaço vetorial*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n = \{(X_1, \ldots, X_n) : X_1 \in \mathfrak{g}_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}_n\}$$

e $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathfrak{g}$. A seguinte expressão

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1]_1, ..., [X_n, Y_n]_n)$$

define em $\mathfrak{g}$ uma estrutura de álgebra de Lie e vamos denotar esta álgebra de Lie por:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n.$$

Antes de mais nada, uma álgebra de Lie é um espaço vetorial, portanto, podemos definir essa soma direta do seguinte modo: sejam Λ um conjunto de índices e $\mathfrak{g}_\lambda$ uma álgebra de Lie com $\lambda \in \Lambda$, então a soma direta é dada por

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{g}_\lambda = \{(X_\lambda)_\lambda : X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda \text{ e } X_\lambda \neq 0 \text{ para um número finito de } \lambda\}.$$

Assim como em álgebra linear, os elementos de $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ podem ser vistos como $X_1 + \cdots + X_n$ onde $X_1 \in \mathfrak{g}_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}_n$ e $(\mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_{i-1} + \mathfrak{g}_{i+1} + \mathfrak{g}_n) \cap \mathfrak{g}_i = \{0\}$.

1.3 Representações

Definição 1.3.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{gl}(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares de V (vimos que $\mathfrak{gl}(V)$ é uma álgebra de Lie com o comutador), e considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma* ***representação de $\mathfrak{g}$ em*** *V é um homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V) \\ & X & \longmapsto & \rho_X. \end{array}$$

Dizemos que V é o espaço da representação e a sua dimensão é a dimensão da representação. Utilizamos as representações para "descrever" as álgebras de Lie como álgebras de transformações lineares, na qual temos bem mais controle.

Uma representação importante é a **representação adjunta** de $\mathfrak{g}$, dada por

$$\begin{array}{rcllcl} ad: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) & & \\ & X & \longmapsto & ad_X: \; \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & & & \qquad\; Y & \longmapsto & ad_X(Y) = [X,Y] \text{ (esse é o colchete de } \mathfrak{g}\text{).} \end{array}$$

A aplicação ad está bem definida, pois pelo fato do colchete de $\mathfrak{g}$ ser $\mathbb{K}$-bilinear, temos que ad_X é $\mathbb{K}$-linear, mais do que isso, ad é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é, é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ como espaço vetorial. Basta verificar que ad é $\mathbb{K}$-linear e preserva o colchete, ou seja, vamos mostrar que $ad_{(X+Y)} \equiv ad_X + ad_Y$, $ad_{(kX)} \equiv k(ad_X)$ com $k \in \mathbb{K}$ e $ad_{[X,Y]} \equiv [ad_X, ad_Y]$ (onde o símbolo "$\equiv$" denota a equivalência ("igualdade") de aplicações[1]). De fato, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $k \in \mathbb{K}$ temos:

- para todo $Z \in \mathfrak{g}$

  $ad_{X+Y}(Z) = [X+Y, Z] = [X,Z] + [Y,Z] = ad_X(Z) + ad_Y(Z)$
  e
  $ad_{kX}(Z) = [kX, Z] = (kad_X)(Z)$.

- Para todo $Z \in \mathfrak{g}$ e utilizando a identidae de Jacobi, tem-se

$$\begin{aligned} ad_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z] &= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = ad_X([Y,Z]) - ad_Y([X,Z]) \\ &= (ad_X \circ ad_Y)(Z) - (ad_Y \circ ad_X)(Z) = [ad_X, ad_Y](Z). \end{aligned}$$

No decorrer da teoria, trocaremos gradualmente "$\equiv$" por "$=$", quando estivermos falando de representações, mas deve-se ficar bem claro que ρ_X, ρ_{X+Y}, $\rho_{[X,Y]}$, por exemplo, são aplicações e, portanto, ao considerar igualdades contendo esses objetos, estamos tratando de igualdade de aplicações. Muitas vezes, representaremos a composição de aplicações $\mu \circ \nu$ simplesmente pelo produto $\mu\nu$.

Para uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ vamos definir, a seguir, alguns conjuntos notáveis:

- O **centro** de $\mathfrak{g}$ é conjunto,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

  de todos os elementos de $\mathfrak{g}$ que comutam com qualquer outro elemento de $\mathfrak{g}$, isto é, $[X,Y] = 0$. Note que $ker(ad) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, portanto, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

- O **centralizador** de um subconjunto $A \subseteq \mathfrak{g}$, é o conjunto

$$C_{\mathfrak{g}}(A) = \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0, \forall Y \in A\},$$

[1] $f \equiv g$, quando $f, g : A \longrightarrow B$ com $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

dos elementos de $\mathfrak{g}$ que comutam com todos os elementos de A. Claramente $\mathfrak{z}(A)$ é uma subálgebra e o centralizador de $\mathfrak{g}$ é o próprio centro de $\mathfrak{g}$ (o que justifica a notação).

- O **normalizador** de um subconjunto $A \subseteq \mathfrak{g}$ é o conjunto,

$$N(A) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] \in A, \forall Y \in A\},$$

dos elementos de $\mathfrak{g}$ que deixam A invariante pelo colchete.

■ Representações equivalentes

Sejam $\rho^1 : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V_1)$ e $\rho^2 : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V_2)$ duas representações de uma mesma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Elas são ditas equivalentes (ou isomorfas) se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $P : V_1 \longmapsto V_2$, tal que

$$\rho^2_X \circ P \equiv P \circ \rho^1_X, \text{ para qualquer } X \in \mathfrak{g},$$

e vice-versa, dados uma representação ρ^1 e um isomorfismo linear P, definindo ρ^2, de acordo com a expressão acima, obtemos uma representação isomorfa a ρ^1. Dizemos que P é um operador de intercâmbio (ou uma aplicação), entre ρ^1 e ρ^2. Em outras palavras, ρ^1 e ρ^2 são isomorfas se para todo $X \in \mathfrak{g}$, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho^1_X} & V_1 \\ {\scriptstyle P}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle P} \\ V_2 & \xrightarrow{\rho^2_X} & V_2 \end{array}$$

■ Soma direta de representações

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\rho^1, ..., \rho^n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, ..., V_n$, respectivamente. Defina a aplicação

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) : X \longmapsto \rho_X = \rho^1_X \oplus \cdots \oplus \rho^n_X$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \rho_X : & (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) & \longrightarrow & (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \\ & Y = (Y_1, ..., Y_n) & \longmapsto & \rho_X(Y) = (\rho^1_X(Y_1), ..., \rho^n_X(Y_n)). \end{array}$$

O fato de cada ρ^i ser linear, garante que ρ é linear e que cada ρ^i preserva o colchete, então garante que ρ também preserva o colchete.

De fato, considere $X = (X_1, ..., X_n)$, $Y = (Y_1, ..., Y_n) \in (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)$, então, $[X, Y] = ([X_1, Y_1], ..., [X_n, Y_n])$, daí

$$\begin{aligned} \rho_{[X,Y]} \equiv (\rho^1_{[X_1,Y_1]}, ..., \rho^n_{[X_n,Y_n]}) &\equiv ([\rho^1_{X_1}, \rho^1_{Y_1}], ..., [\rho^1_{X_n}, \rho^n_{Y_n}]) \\ &\equiv [(\rho^1_{X_1}, ..., \rho^1_{X_n}), (\rho^1_{Y_1}, ..., \rho^n_{Y_n})] \\ &\equiv [\rho_X, \rho_Y]. \end{aligned}$$

Isso mostra que ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)$, denominada de **soma direta das representações** ρ^i. Sabemos que ρ^i e ρ são transformações lineares, então podemos considerar suas matrizes A_i e A, respectivamente, e daí a matriz A é formada pelos blocos A_is na sua diagonal, isto é,

$$\rho = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}.$$

■ Decomposições de representações

Para ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V e um subespaço $V' \subseteq V$, dizemos que V' é **invariante** por ρ se $\rho_X(V') \subseteq V', \forall X \in \mathfrak{g}$. Agora, considere W um subespaço invariante por ρ, e defina a **restrição** de ρ a W como sendo a aplicação:

$$\rho|_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W) : X \longmapsto \rho_X|_W.$$

Nestas condições, $\rho|_W$ define uma representação de $\mathfrak{g}$ em W.

Definição 1.3.2. *Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V.*

- *ρ é dita **irredutível** se os únicos subespaços de V invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e V.*
- *ρ é dita **completamente redutível** se V decompõe-se como*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

com cada $V_i \subseteq V$ invariante por ρ e a restrição de ρ a V_i é irredutível.

A proposição a seguir fornece um critério, bastante utilizado, para verificar se uma representação é completamente redutível.

Proposição 1.3.1. *Se ρ é uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ em V, então, ρ é completamente redutível se, e somente se, todo subespaço invariante admite um complementar invariante, ou seja, para todo $W \subseteq V$ invariante, existe $W' \subseteq V$ também invariante tal que*

$$V = W \oplus W'.$$

Demonstração: Veja [1], Proposição 1.7, p. 34

□

■ Módulos sobre uma álgebra de Lie

Um módulo sobre uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V munido com uma operação de multiplicação (ou ação de $\mathfrak{g}$ em V), dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} \times V & \longrightarrow & V \\ (X, v) & \longmapsto & Xv \text{ (ação de } X \text{ em } v), \end{array}$$

que satisfaz, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}; u, v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades:

1. $(X+Y)v = Xv + Yv$;
2. $X(u+v) = Xu + Xv$;
3. $k(Xv) = X(kv)$;
4. $[X,Y]v = XYv - YXv$.

Neste caso, dizemos que V é um $\mathfrak{g}$-módulo. Em virtude da definição de módulo sobre uma álgebra de Lie, concluímos que os conceitos de **módulo e representação são equivalentes**, isto é, a cada representação de $\mathfrak{g}$ em V associamos um $\mathfrak{g}$-módulo e vice-versa. De fato, considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, e seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Vamos munir V com uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo:

sabemos que $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é $\mathbb{K}$-linear, onde $\rho_X : V \longrightarrow V$ também $\mathbb{K}$-linear, então a aplicação dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times V & \longrightarrow & V \\ (X,v) & \longmapsto & Xv := \rho_X(v) \end{array}$$

define uma multiplicação que torna V um $\mathfrak{g}$-módulo. A verificação vem do fato de que ρ e ρ_X são $\mathbb{K}$-lineares e $\rho_{[X,Y]} \equiv [\rho_X, \rho_Y] \equiv \rho_X\rho_Y - \rho_Y\rho_X$ (lembre que $\rho_X\rho_Y = \rho_X \circ \rho_Y$, isto é, a operação é a composição de aplicações "$\circ$").

Reciprocamente, seja V um $\mathfrak{g}$-módulo, então existe uma multiplicação da forma

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times V & \longrightarrow & V \\ (X,v) & \longmapsto & Xv \end{array}$$

que compre as quatro condições listadas acima, e defina a aplicação

$$\begin{array}{rccccccl} \rho : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V) & & & & \\ & X & \longmapsto & \rho_X : & V & \longrightarrow & V & \\ & & & & v & \longmapsto & \rho_X(v) := Xv & \text{(ação de } X \text{ em } v). \end{array}$$

Decorre das propriedades de módulo, que ρ é um homomorfismo de álgebras de Lie e, portanto, é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V.

1.4 Derivações

Definição 1.4.1. *Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma **derivação** da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, satisfaz:*

$$D[X,Y] = [DX, Y] + [X, DY].$$

De modo geral, uma derivação de uma álgebra é uma transformação linear que satisfaz a regra de Leibniz de derivação de um produto $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Exemplo 1.4.1. *A adjunta dos elementos de uma álgebra (ad_X, para cada X) é um tipo de derivação que frequentemente aparece na teoria. Com efeito, considere $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, então, utilizando a identidade de Jacobi, temos*

$$\begin{aligned} ad_X[Y,Z] = [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] &= [Y,[X,Z]] + [[X,Y],Z] \\ &= [ad_XY, Z] + [Y, ad_XZ]. \end{aligned}$$

1.5 Séries de decomposição

■ Série derivada

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, e lembre que definimos o "produto" de dois ideais como sendo o ideal $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = span\{[a,b] : a \in \mathfrak{g}_1 \text{ e } b \in \mathfrak{g}_2\}$. Para $k \in \mathbb{N}$ definiremos, por indução, os seguintes subconjuntos de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g}, \\
\mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \\
\mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vimos que o produto de ideais é um ideal, portanto todos esses subconjuntos são ideais de $\mathfrak{g}$. Essa sequência de ideais é conhecida como **série derivada** de $\mathfrak{g}$ e cada $\mathfrak{g}^{(i)}$ é chamado de **álgebra derivada** de $\mathfrak{g}$. Comumente representamos $\mathfrak{g}^{(1)}$ e $\mathfrak{g}^{(2)}$ por $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}''$ respectivamente, e note que $\mathfrak{g}^{(i+1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(i)}$, isto é, a série derivada determina uma cadeia decrescente de ideais:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(k)} \supseteq \mathfrak{g}^{(k+1)} \cdots.$$

Exemplo 1.5.1. *Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (exemplo 1.1.6), temos a série derivada da seguinte forma:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}^{(1)} = \cdots = \mathfrak{g}^{(k)} = \cdots,\ k \in \mathbb{N}$$

De fato, todo elemento de $\mathfrak{g}$ pode ser escrito da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

com a,b,$c \in \mathbb{R}$, então as matrizes

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

formam uma base de $\mathfrak{g}$ e

$$\begin{aligned}
&[h,e] = 2e \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}[h,e] = e \quad \Longrightarrow \quad e \in \mathfrak{g}' \\
&[h,f] = -2f \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}[h,f] = f \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathfrak{g}' \\
&[f,e] = h \quad \Longrightarrow \quad h \in \mathfrak{g}',
\end{aligned}$$

daí concluímos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ e, utilizando o mesmo argumento, verificamos que $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ para todo $k > 0$. A mesma afirmação vale para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$, desde que $\mathbb{K}$ seja um corpo de característica diferente de 2.

Listaremos a seguir algumas proposições referentes às séries centrais. A fim de avançar na teoria, omitiremos as demonstrações das proposições[2].

[2]Veja [1], pag.43

Proposição 1.5.1. *O quociente* $\mathfrak{g}^{(k-1)}/\mathfrak{g}^{(k)}$ *é uma álgebra abeliana.*

Proposição 1.5.2. *Se* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie,* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *um ideal e* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *a projeção canônica, então*

$$\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}.$$

Proposição 1.5.3. *Se* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *é uma subálgebra, então*

$$\mathfrak{h}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}.$$

■ Série central descendente

Assim como foi definida a série derivada, definiremos por indução a **série central decendente** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, como sendo:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^1 & = & \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}^2 & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \\ \mathfrak{g}^3 & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2], \\ & \vdots & \\ \mathfrak{g}^k & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}], \\ & \vdots & \end{array}$$

Note que para todo $k \geq 1$, $\mathfrak{g}^k$ é um ideal e $\mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{g}^k$, logo essa série constitui uma cadeia decrescente de ideais, isto é,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \mathfrak{g}^3 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^k \supseteq \mathfrak{g}^{k+1} \cdots.$$

A fim de evitar confusão, é importante salientar que há uma pequena diferença entre as notações de série derivada ($\mathfrak{g}^{(\mathbf{k})}$) e série central descendente ($\mathfrak{g}^{\mathbf{k}}$). Da mesma maneira que fizemos nas séries derivadas, listaremos algumas proposições, das quais omitiremos as demonstrações[3].

Proposição 1.5.4. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Então,*

1. $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$;
2. $\mathfrak{g}^k$ *é o subespaço gerado por todos os possíveis produtos (colchetes) envolvendo* k *elementos de* $\mathfrak{g}$: $[X_1, ..., [X_{k-1}, X_k]...]$;

Proposição 1.5.5. $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ *é uma álgebra abeliana.*

Proposição 1.5.6. *Se* $\pi : \mathfrak{g}^k \longmapsto \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *o homomorfismo canônico, então*

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k.$$

A afirmação seguinte fornece uma comparação, no sentido de inclusão, entre a série derivada e a série central descendente de uma mesma álgebra de Lie.

Proposição 1.5.7. *A série derivada possui decrescimento mais rápido do que a série central descendente, ou seja, para todo* $k \geq 1$ *tem-se*

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}.$$

Segue diretamente da Proposição 1.5.7 que $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$, basta observar a condição de cadeia decrescente da série central descendente:

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{g}^{k-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{g}^1.$$

[3]Veja [1], pag.44

1.6 Álgebras solúveis

Definição 1.6.1. *Uma álgebra é dita* **solúvel** *se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é, se existe $k_0 \geqslant 1$ tal que*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0.$$

Consequentemente, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geqslant k_0$ (entenda "0" como a subálgebra $\{0\}$).

Observação 1.6.1. *Como uma subálgebra é uma álgebra que herda o colchete, então a definição acima também pode ser aplicada às subálgebras. Tal objeto chamaremos de subálgebra solúvel e ideal solúvel, no caso de ideais.*

Proposição 1.6.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, então*

1. *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra, então $\mathfrak{h}$ também é solúvel.*
2. *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ também é solúvel.*

Demonstração:

1. Decorre diretamente da Proposição 1.5.3.
2. Decorre diretamente da Proposição 1.5.2.

□

Uma consequência direta da afirmação 1) é que um ideal de uma álgebra solúvel é também solúvel.

Proposição 1.6.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal, e suponha que tanto $\mathfrak{h}$ quanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sejam solúveis, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: Considere π o homomorfismo canônico, e seja k_1 tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = 0$. Como $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$ para todo $k \geqslant 0$, temos que $0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = \pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) \Longrightarrow \mathfrak{g}^{(k_1)} \subseteq \mathfrak{h}$ (pois $ker(\pi) = \mathfrak{h}$), e é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$, mas $\mathfrak{h}$ é solúvel, então existe k_2 tal que $\mathfrak{h}^{(k_2)} = 0$, como $\mathfrak{g}^{(k_1)} \subseteq \mathfrak{h}$ é uma subálgebra temos que,

$$0 = \mathfrak{h}^{(k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} = \mathfrak{g}^{(k_1+k_2)},$$

portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel.

□

Observação 1.6.2. *Para verificar que $(\mathfrak{g}^{(a)})^{(b)} = \mathfrak{g}^{(a+b)}$, com $a, b \geq 0$, basta considerar a fixo, porém arbitrário, e fazer indução em b.*

A seguir apresentaremos o **Teorema de Lie** que é de grande importância no estudo de álgebras solúveis.

Teorema 1.6.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra solúvel de $\mathfrak{gl}(V)$. Se $V \neq 0$, então V contém um autovetor comum a todos os endomorfismos de $\mathfrak{h}$, isto é, todos os elementos de $\mathfrak{h}$ possuem um autovetor em comum.*

Demonstração: Veja [2], pag. 15.

□

Teorema 1.6.2 (Teorema de Lie). *Se V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra, então existe uma base de V em relação à qual as matrizes de $\mathfrak{g}$ são triangulares superiores.*

Demonstração: Aplicar o Teorema 1.6.1 e fazer indução sobre a dimensão de V.

□

1.7 Álgebras nilpotentes

Definição 1.7.1. *Uma álgebra é dita* ***nilpotente*** *se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é, se existe $k_0 \geqslant 1$ tal que*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = 0.$$

Consequentemente, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geqslant k_0$ (entenda "0" como a subálgebra $\{0\}$).

Proposição 1.7.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente.*

1. *Se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra, então $\mathfrak{h}$ é nilpotente.*

2. *Se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente.*

3. *A imagem homomórfica de qualquer subálgebra nilpotente é nilpotente.*

4. *Se $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

Demonstração: A demonstração de 1), 2) e 3) segue do fato de $\mathfrak{h}^k \subseteq \mathfrak{g}^k$, se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ e se π é um homomorfismo, então $\pi(\mathfrak{g}^k) = (\pi(\mathfrak{g}))^k$ e $\pi([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^k]) = [\pi(\mathfrak{h}), \pi(\mathfrak{h}^k)]$. Para 4), considerando a projeção canônica π, temos que $\pi(\mathfrak{g}^k) = (\pi(\mathfrak{g}))^k$, portanto, $0 + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^k = \mathfrak{g}^k/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Longleftrightarrow \mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{z}(g) \Longrightarrow \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = 0$.

□

Utilizando a Proposição 1.5.7, concluímos que toda álgebra nilpotente é solúvel, no entanto, nem toda solúvel é nilpotente. Uma distinção entre as álgebras solúveis e as nilpotentes é dada pelo centro:

Proposição 1.7.2. *O centro de uma álgebra nilpotente não é trivial.*

Demonstração: Seja k o maior tal que $\mathfrak{g}^k \neq 0$, então $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1} = 0$, o que implica $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

□

No entanto, o centro de uma álgebra solúvel pode se anular.

Definição 1.7.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*

- *Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é dita é uma* ***representação nilpotente*** *ou uma* ***nil-representação****, se para todo $X \in \mathfrak{g}$, ρ_X é nilpotente, ou seja, existe um $k \geq 1$ (k em função de X), tal que $(\rho_X)^k = 0$.*

- *Seja $X \in \mathfrak{g}$. Dizemos que X é* ***ad-nilpotente*** *se ad_X é nilpotente.*

Observações 1.7.1.

1. *De modo geral, um elemento x de um anel é nilpotente se existe $k \geq 1$, tal que $x^k = 0$.*

2. *A condição para $\mathfrak{g}$ ser nilpotente pode ser escrita como segue: para algum n (dependendo somente de $\mathfrak{g}$), tem-se $ad_{X_1} ad_{X_2} \cdots ad_{X_n}(Y) = 0$, para todos $X_i, Y \in \mathfrak{g}$, em particular, $(ad_X)^n = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. De fato, basta ver que se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então $0 = \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-2}]] = \mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, [\cdots [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cdots]]]$ e isso é equivalente a $\underbrace{ad_{\mathfrak{g}} ad_{\mathfrak{g}} \cdots ad_{\mathfrak{g}}}_{n-\text{vezes}}(\mathfrak{g}) = 0$.*

A principal consequência dessa observação é que se uma álgebra é nilpotente então todo elemento é ad-nilpotente.

Lema 1.7.1. *Se V um espaço vetorial de dimensão finita e $X \in \mathfrak{gl}(V)$ nilpotente, então ad_X também é nilpotente.*

Demonstração: Sabemos que

$$X \longmapsto ad_X : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) :\longmapsto ad_X(Y) = [X, Y] = XY - YX,$$

portanto, cada X pode ser associado a $\lambda_X, \mu_X : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, dados por $\lambda_X(Y) = XY$ e $\mu_X(Y) = YX$, ambos são nilpotentes, pois X o é. Como a diferença de nilpotentes é nilpotente, temos que $ad_x = \lambda_X - \mu_X$ é nilpotente.

□

1.8 Álgebras simples e álgebras semissimples

Proposição 1.8.1. *Se $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, então existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Veja [1], Proposição 1.28, p.49.

□

Observe que na definição acima, $\mathfrak{g}$ não precisa ser solúvel, neste caso, $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Definição 1.8.1. *Seja uma $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie. O ideal $\mathfrak{r}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ é chamado de **radical solúvel** de $\mathfrak{g}$ (ou simplesmente radical de $\mathfrak{g}$), e utilizaremos a notação $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ para indicar o radical de $\mathfrak{g}$.*

Podemos definir também o radical nilpotente de uma álgebra, como sendo o ideal que contém todos os ideais nilpotentes da álgebra, porém a demonstração da sua existência requer resultados não citados nesse trabalho.

Definição 1.8.2. *Dizemos que uma álgebra de Lie é **semissimples** se*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0,$$

isto é, $\mathfrak{g}$ não possui ideais solúveis além do 0.

Definição 1.8.3. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita **simples** se:*

1. *Os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são os triviais 0 e $\mathfrak{g}$;*

2. *$dim(\mathfrak{g}) \neq 1$.*

Uma álgebra de $dim(\mathfrak{g}) = 1$ não possui ideais triviais, porém essas não são consideradas álgebras simples, essencialmente para que haja compatibilidade, que veremos abaixo, entre os conceitos de álgebras semissimples e simples.

Afirmamos que toda álgebra simples é semissimples. De fato, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra simples. Se $\mathfrak{g}$ é nula, não há o que provar, então tome $dim(\mathfrak{g}) \geq 2$, como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é um ideal, ele deve ser 0 ou $\mathfrak{g}$, no caso $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ tem-se $\mathfrak{g}$ é semissimples. O segundo caso não pode acontecer, pois suponha que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ então vimos que $\mathfrak{g}$ é solúvel e, portanto, existe um $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$. Considere k o maior tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}^{(k+1)} \neq \mathfrak{g}$, como $\mathfrak{g}^{(k+1)}$ também é um ideal, temos $\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é abeliana. Veja que $\mathfrak{g} \neq 0$, pois $dim(\mathfrak{g}) \geq 2$, e todo subespaço de uma álgebra abeliana é um ideal, então existem ideias que não são os triviais, e isso é uma contradição, portanto, toda álgebra simples é semissimples.

Por outro lado, toda álgebra semissimples é um produto direto de álgebras simples. Isso é consequência de um dos critérios de Cartan que será discutido a seguir.

Observação 1.8.1. *A definição acima também é válida para subálgebras, isto é, definimos subálgebra simples e subálgebra semissimples, em particular, ideal simples e ideal semissimples.*

1.9 Critérios de Cartan

Para determinar se uma álgebra de Lie é semissimples, utilizando apenas a definição, é nessessário verificar se todo ideal, não nulo, não é solúvel, de modo geral, não é uma tarefa simples. Apresentaremos nessa seção, uma maneira prática de determinar se uma álgebra é semissimples ou solúvel, apenas olhando o traço de transformações lineares. A partir de agora vamos considerar somente álgebras sobre corpos algebricamente fechados, de modo prático, sobre o corpo dos complexos.

■ Forma de Cartan-Killing

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dada uma representação ρ de dimensão finita de $\mathfrak{g}$, defini-se em $\mathfrak{g}$ a **forma traço** β_ρ que é a **forma bilinear simétrica** $\beta_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por:

$$\beta_\rho(X, Y) = tr(\rho(X)\rho(Y)).$$

Observe que o produto em questão é a composição de aplicações, no entanto, como ρ tem dimensão finita, podemos considerar o produto de matrizes.

Definição 1.9.1. *No caso em que consideramos a representação adjunta de $\mathfrak{g}$, a forma traço é chamada de **forma de Cartan-Killing**, que vamos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ ou simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$, isto é, é uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por:*

$$\langle X, Y \rangle = tr(ad_X ad_Y).$$

Observação 1.9.1. *Dizemos que uma forma bilinear é **não-degenerada**, quando para todo $X \in \mathfrak{g}$, fixado, vale:*

$$\langle X, Y \rangle = 0, \forall Y \in \mathfrak{g} \Longrightarrow X = 0.$$

Um caso bem conhecido de forma bilinear não-degenerada é o produto interno.

■ Critérios de Cartan

Os critérios de Cartan são condições necessárias e suficientes, em termos da forma de Cartan-Killing, para que $\mathfrak{g}$ seja semissimples ou solúvel. Para apresentá-los, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e suponha que sua forma de Cartan-Killing seja identicamente nula. Então, $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: Veja [1], Lema 3.6, pag. 86.

□

Teorema 1.9.1 (Critérios de Cartan)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a sua forma de Cartan-Killing.*

1. *$\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}^{\perp}$, onde $\mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, \langle X, Y \rangle = 0\}$, em outras palavras,*

$$\mathfrak{g} \text{ é sulúvel} \Longleftrightarrow \forall X \in \mathfrak{g}' \text{ e } \forall Y \in \mathfrak{g} \text{ tem-se } \langle X, Y \rangle = 0.$$

2. *A forma de Cartan-Killing é não-degenerada se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é semissimples.*

Demonstração: Veja [1], pag. 87, Teorema 3.7 e Teorema 3.8.

□

Teorema 1.9.2. *Se $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, então $\mathfrak{g}$ se decompõe em soma direta*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s,$$

com cada $\mathfrak{g}_i$ um ideal simples, e nessa decomposição $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$ e, além do mais,

1. *O ortogonal $\mathfrak{g}_i^{\perp}$ de uma componente simples, em relação a forma de Killing, é a soma das demais componentes.*
2. *Os ideais de $\mathfrak{g}$ são somas de algumas dessas componentes.*
3. *A decomposição é única (a menos de permutação dos índices).*

Demonstração: Veja [1], pag. 90, Teorema 3.10.

□

1.10 Subálgebras de Cartan

Lembre que definimos o normalizador de um subconjunto $A \subseteq \mathfrak{g}$ como sendo $N(A) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] \in A, \forall Y \in A\}$.

Definição 1.10.1. *Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é chamada de subálgebra de Cartan se:*

1. *$\mathfrak{h}$ é nilpotente.*
2. *$\mathfrak{h}$ é o seu próprio normalizador, isto é, $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$.*

Exemplo 1.10.1. *Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, a subálgebra*

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

é uma subálgebra de Cartan. De fato, como $\mathfrak{h}^{(1)} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0$, temos que $\mathfrak{h}$ é abeliana, portanto é nilpotente. Provemos que $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$. Claramente $\mathfrak{h} \subseteq N(\mathfrak{h})$, e como

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

é a base do exemplo 1.5.1, considerando $W \in N(\mathfrak{h})$ temos $[h,W] \in \mathfrak{h}$, mas $W = ae + bh + cf \in \mathfrak{g}$, com $a,b,c \in \mathbb{C}$, portanto,

$$[h,W] = 2ae - 2cf \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow a = c = 0 \Rightarrow W = bh \in \mathfrak{h},$$

isto é, $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$. Por razões semelhantes, a subálgebra das matrizes diagonais de traço nulo é uma subálgebra de Cartan em $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

Definição 1.10.2. *Seja $X \in \mathfrak{g}$. O polinômio característico de ad_X, denotado por p_X, é da forma*

$$p_X(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \cdots + p_1(X)\lambda + p_0(X),$$

*onde $n = dim(\mathfrak{g})$ e cada $p_i(\cdot)$ é um polinômio de grau $n-i$ em X. Nesta condições, definimos o **posto** de uma álgebra de Lie de dimensão finita como sendo o menor índice i em que $p_i \not\equiv 0$. Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é dito **regular** se $p_i(X) \neq 0$, onde i é posto de $\mathfrak{g}$.*

Não trataremos as subálgebras de Cartan com muitos detalhes, mas uma das razões pelas quais se introduz a noção de subálgebra de Cartan é que esse tipo de subálgebra é exatamente o que aparece como $\mathfrak{g}_0$ na decomposição primária de ad_X para X (regular) em $\mathfrak{g}$. Outra razão é o fato de $\mathfrak{h}$ ser nilpotente garantir que sua representação em $\mathfrak{g}$, via representação adjunta, se decompõe em uma soma direta de subálgebras onde a primeira componente é exatamente $\mathfrak{h}$.

Teorema 1.10.1. *Seja $X \in \mathfrak{g}$ e denote por $\mathfrak{g}_0(X)$ o auto-espaço generalizado associado ao autovalor nulo na decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

de ad_X com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalores não-nulos. Então, $\mathfrak{g}_0(X)$ é subálgebra de Cartan se X for regular.

Demonstração: Veja [1], pag. 104, Teorema 4.3.

□

Como os elementos regulares são aqueles que não anulam um polinômio não-nulo, certamente podemos garantir a existência de tais elementos, portanto:

Corolário 1.10.1. *Existem subálgebras de Cartan em álgebras de Lie de dimensão finita.*

1.11 Álgebras semissimples

Nessa seção, mostraremos alguns resultados sobre as subálgebras de Cartan de uma álgebra semissimples, sua representação adjunta e os pesos relacionados a essa representação. Na sequência estudaremos a fórmula de Killing, sistemas simples de raízes e seus diagramas de Dynkin. Salvo dito o contrário, vamos sempre considerar álgebras sobre corpos algebricamente fechados.

1.11.1 Peso de uma representação

Em álgebra linear, trabalhamos com o conceito de autovalores e autovetores de um operador linear fixo, no entanto, podemos estender essa definição para uma família de operadores, no entanto, não é simples saber como generalizar autovalores, porém, dados V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, podemos especificar os autovalores de elementos de A, dando o funcional linear $\lambda : A \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\forall a \in A, \lambda(a)$ é um autovalor de a, isto é, $av = \lambda(a)v$. No caso de autovetor, dizemos que $v \in V$ é um autovetor de A se é um autovetor para cada elemento de A. Vamos utilizar a mesma ideia para definir o conceito de peso e subespaço de peso de uma representação ρ (mais precisamente de $Im(\rho)$).

Definição 1.11.1. *(peso de uma representação) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Um **peso** de ρ é um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que o subespaço V_λ de V definido por*

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \rho_X(v) = \lambda(X)v\}$$

*satisfaz $V_\lambda \neq 0$. O subespaço V_λ é chamado de **subespaço de peso** associado a λ e a dimensão de V_λ é chamada de **multiplicidade** de λ.*

Para cada $X \in \mathfrak{g}$, λ_X é um autovalor de ρ_X, então de modo mais simples, podemos dizer que os pesos de uma representação são, portanto, os autovalores dos elementos da álgebra (isto é, autovalores dos elementos da subálgebra $\rho_\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$), e o subespaço de peso é o conjunto dos elementos que são autovetores de cada ρ_X.

No caso em que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$, e considerando a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ ($ad : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$), existe a seguinte decomposição em subespaços de peso:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_{\alpha_i} \right),$$

onde cada α_i é um peso da representação adjunta e os subespaços de peso são da forma

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha_i(H)X\} \neq 0.$$

Note que $\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial, logo faz sentido considerar a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$.

1.11.2 Subálgebras de Cartan, raízes e a fórmula de Killing

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Considere a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k},$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ é o subespaço de peso, associado a α_i, da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são os pesos não nulos ($\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, onde 0 é o peso nulo). Nesse contexto, chamaremos esses pesos de **raízes** de $\mathfrak{h}$ em relação a $\mathfrak{g}$, o conjunto das raízes será denotado por Δ e os subespaços de pesos $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, serão chamados de **espaços de raízes**. Portanto, conhecer as raízes permite conhecer, consequentemente, toda estrutura da álgebra semissimples.

O funcional nulo é sempre um peso dessa representação, e como o corpo é algebricamente fechado, a representação de $\mathfrak{h}$ dentro de cada $\mathfrak{g}_i$ é dada por matrizes da forma

$$ad_H = \begin{pmatrix} \alpha_i(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_i(H) \end{pmatrix},$$

para cada $H \in \mathfrak{h}$ e, além do mais,

$$[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_j}.$$

Apresentaremos a seguir, uma gama de resultados dos quais omitiremos as demonstrações (para mais detalhes consultar [1], cap. 6). Assim como antes, denotaremos a forma de Cartan-Killing por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição 1.11.1. *São afirmações válidas:*

i) A restrição da forma de Cartan-Killing à subálgebra $\mathfrak{h}$ é não degenerada.

ii) Se α é raiz então $-\alpha$ é raiz.

iii) Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$.

Proposição 1.11.2. *A subálgebra $\mathfrak{h}$ é abeliana.*

Proposição 1.11.3. *O conjunto Δ, das raízes, gera o dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, isto é, $H = 0$ se para toda raiz β, tem-se $\beta(H) = 0$.*

Iremos definir a forma de Cartan-Killing no dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, e para isso, vamos considerar a aplicação $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$, onde $\varphi(H) := \varphi_H = \langle H, \cdot \rangle$. Como a forma de Cartan-Killing, em $\mathfrak{h}$, é não degenerada, pode-se concluir que φ é um isomorfismo, portanto, denotando $\alpha_H = \langle H, \cdot \rangle$, temos que para cada $H \in \mathfrak{h}$, existe um único $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\varphi_H = \alpha$, e reciprocamente, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, existe um único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que, para todo $H \in \mathfrak{h}$, tem-se

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle.$$

Desse modo, podemos definir:

Definição 1.11.2. *(Forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$). Dados $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$ é definida como*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha).$$

O isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$, definido a partir da forma de Cartan-Killing, garante que as raízes $\alpha \in \Delta$ determinam um número finito de elementos H_α em $\mathfrak{h}$ e mais, como $\mathfrak{h}^*$ é gerado por Δ, o conjunto $\{H_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ gera $\mathfrak{h}$.

Lema 1.11.1. *São afirmações válidas:*

i) Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$.

ii) Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$.

iii) Sejam α e β raízes. Então,

$$\langle \beta, \alpha \rangle = q_{\beta\alpha} \langle \alpha, \alpha \rangle$$

com $q_{\beta\alpha} \in \mathbb{Q}$ (Em geral $q_{\beta\alpha} \neq q_{\alpha\beta}$).

iv) Para todo $\alpha \in \Delta, \langle \alpha, \alpha \rangle$ é um racional estritamente positivo, portanto, $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Q}$ para qualquer par de raízes α e β.

v) $dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \Delta$.

vi) Os únicos múltiplos inteiros de uma raiz α que são raízes são α e $-\alpha$.

Definição 1.11.3. *De modo geral, considere α e β dois pesos. A sequência de elementos de $\mathfrak{h}^*$*

$$\ldots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \ldots$$

*é denominada a **α-sequência iniciada em** β.*

É natural perguntar quais desses elementos são também pesos. O próximo teorema responde essa questão.

Teorema 1.11.1. *Os elementos da α-sequência iniciada em β, que são pesos, formam um intervalo contendo β, isto é, existem inteiros $p, q \geqslant 0$ tais que*

$$\beta - p\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + q\alpha$$

*são os **únicos** pesos da forma $\beta + k\alpha$ com $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, vale a seguinte fórmula:*

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

*conhecida como **fórmula de Killing**.*

Na fórmula de Killing α e β não são simétricos, ou seja, os valores de p e q são diferentes se tomarmos a β-sequência iniciada em α. O inteiro

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

é donominado **número de Killing** associado às raízes α e β.

Proposição 1.11.4. *Os únicos múltiplos de uma raiz α que são raízes são $\pm\alpha$ ou zero.*

1.11.3 Sistema simples de raízes

Apresentaremos agora, um conjunto de raízes (subconjunto de Δ), que é base de $\mathfrak{h}^*$ visto como o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ (denotamos por $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$), e ainda, que todos os elementos de Δ sejam escritos como combinações dos elementos dessa base com todos os coeficientes inteiros. Esse conjunto será denominado **sistema simples** de raízes.

Definição 1.11.4. *Vamos introduzir uma **ordem lexicográfica** nos espaços vetoriais racionais. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ e $\{v_1, \ldots, v_l\}$ uma base ordenada desse espaço, então tome dois elementos $v, w \in V$ como combinação dos elementos da base,*

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + \cdots + a_lv_l, \\ w &= b_1v_1 + \cdots + b_lv_l. \end{aligned}$$

Dizemos que $v \leqslant w$ se $v = w$ ou se $a_i < b_i$, para o primeiro índice i tal que $a_i \neq b_i$.

Observações 1.11.1.

i) Essa relação define de fato uma ordem que é compatível com a estrutura de espaço vetorial, isto é,

$$v \leqslant w \Rightarrow v + u \leqslant w + u \qquad e \qquad xv \leqslant xw \text{ se } x > 0 \text{ e } v \leqslant w.$$

ii) Seja $v = a_1v_1 + \cdots + a_lv_l$ um vetor nas condições citadas na definição acima. $v > 0$ se $a_i > 0$, onde i é o primeiro índice tal que $a_i \neq 0$ ($0 = 0v_1 + \ldots + 0v_l$).

Definição 1.11.5. *Fixada uma ordem lexicográfica dada por uma base do espaço vetorial racional $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, uma raiz $\alpha \in \Delta$ é dita **simples**, se*

i) $\alpha > 0$;

ii) Não existem β e γ pertencentes a Δ tais que β e γ são positivas e $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto finito das raízes simples será denotado por Π e será escrito como

$$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}.$$

Note que o conjunto das raízes simples depende diretamante da ordem lexicográfica, em outras palavras, depende da base adotada.

Lema 1.11.2. *$\langle \alpha, \beta \rangle \leqslant 0$ se $\alpha, \beta \in \Pi$ e $\alpha \neq \beta$.*

Definição 1.11.6. *Um subconjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ de Δ é denominado um **sistema simples de raízes**, quando*

i) é uma base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$;

ii) e para todo $\beta \in \Delta$,

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$$

com todos os coeficientes inteiros e de mesmo sinal (obrigatoriamente).

Assim como os nomes sugerem, prova-se que o conjunto das raízes simples, definido acima a partir de uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, é um sistema simples de raízes. Vice-versa, partindo de um sistema simples de raízes Π, pode-se definir em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ a ordem lexicográfica definida por Π, que é uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ e, em relação a essa ordem, o conjunto das raízes simples é exatamente Π, ou seja, qualquer sistema simples de raízes é um conjunto de raízes. Observe que não existe um único sistema simples de raízes, por exemplo, se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ é um sistema simples de raízes, então $\{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_l\}$ também é.

Observações 1.11.2. *Seja Δ o conjunto das raízes, então as afirmações abaixo são verdadeiras:*

*i) Sejam $\Pi = \{\alpha_1, \ldots \alpha_l\}$ o conjunto das raízes simples obtido a partir de uma ordem lexicográfica e $\beta \in \Delta$ uma raíz **positiva** ($\beta > 0$). Então, β escreve-se unicamente como*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l,$$

*com $n_1, \ldots, n_l$ todos **inteiros positivos** ($\geqslant 0$).*

Essa é uma característica do conjunto das raízes simples, isto é, não estamos considerando o fato de ser um sistema simples de raízes, no entanto, vimos qualquer sistema simples de raízes é um conjunto de raízes simples proveniente da ordem lexicográfica definida por ele mesmo, ou seja, a propriedade descrita acima, bem como todas as outras, é válida para qualquer sistema simples de raízes. Veja que a partir dessa observação e da definição de sistema simples, podemos concluir que as raízes negativas possuem todos os coefiecientes inteiros negativos.

ii) Toda raiz positiva γ pode ser escrita como

$$\gamma = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k},$$

onde α_{i_j} é raiz simples de tal maneira que as somas parciais

$$\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_s},$$

com $s = 1, \ldots, k$, são raízes. Pela observação i) acima, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i$ com $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (inteiros não negativos), daí sempre é possível escrever α como uma soma de raízes simples com coeficientes unitários (podendo haver repetições), porém, pode ser que nem todas as raízes façam parte da soma (algum $k_i = 0$), estão indexamos os índices, isto é, tomamos uma espécie de "subsequência" de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_l)$. Também por esse motivo, essa pode parecer uma observação óbvia, no entanto, a soma de raízes não é necessariamente uma raíz, esse resultado garante que escolhida uma posição $i_j > 1$, então toda a soma anterior a essa posição é uma raiz.

iii) Podemos "separar" as raízes em positivas e negativas, isto é, fixando um sistema simples de raízes (ou uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$), pode-se definir

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta : \alpha > 0\} \qquad e \qquad \Delta^- = -\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta : \alpha < 0\}$$

daí,

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^- = \Delta^+ \cup -\Delta^+,$$

portanto, para encontrar todas as raízes, basta encontrar somente as positivas (ou as negativas).

iv) A forma de Cartan-Killing é um produto interno em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ (e em $\mathfrak{h}$, como espaço vetorial racional, também).

Para mais detalhes e demonstrações sobre os sistemas simples de raízes, recomenda-se ao leitor que veja [1], cap. 6, seç. 4.

1.11.4 Matrizes de Cartan

Vimos que se Π é um sistema simples de raízes, então toda raiz positiva é combinação linear de Π com coeficientes inteiros positivos, isto é, é o mesmo que uma soma, com possíveis repetições, de elementos de Π. Um dos objetivos dessa seção será identificar quando uma soma de elementos de Π é uma raiz e, daí, encontar todas as raízes positivas (consequentemente todas as raízes). Para isso, vamos utilizar a fórmula de Killing considerando a quantidade de raízes simples que aparece na expressão de uma raíz positiva.

Definição 1.11.7. *Seja*

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$$

*o sistema simples de raízes fixado. Se β é uma raiz **positiva** tal que*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l, \qquad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

*então o número inteiro positivo $n_1 + \cdots + n_l$ é denominado a **altura** de β.*

Por exemplo, as raízes positivas de altura 1 são exatamente as raízes simples.

Já as raízes positivas de altura 2 são as da forma $\alpha_i + \alpha_j$ $(1\alpha_i + 1\alpha_j)$ com $i \neq j$, pois para uma raiz α, 2α não é raiz, (Lema 1.11.1, item vi). Para verificar quais destas somas são raízes, considere o intervalo da α_i-sequência iniciada em α_j que contém raízes (veja Teorema 1.11.1)

$$\alpha_j - p\alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_j + q\alpha_i, \qquad p, q \geqslant 0.$$

Como todas as raízes, quando escritas no sistema simples, devem possuir os coeficientes do mesmo sinal, temos que $\alpha_i - \alpha_j$ não pode ser raiz, portanto, o intervalo contendo raízes (pesos), deve ser $\alpha_j + 0, \dots, \alpha_j + q\alpha_i$, isto é, $p = 0$. Logo, pela fómula de Killing,

$$-q = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}.$$

Se $q = 0$, então $\alpha_i + \alpha_j$ não pode ser raiz, pois não está no intervalo da sequência que contém raízes (na verdade, somente α_j é raiz na sequência), como queremos os casos em que $\alpha_i + \alpha_j$ é uma raiz, concluímos que q deve ser pelo menos 1, isto é, $q > 0$, daí

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \alpha_j + 2\alpha_i, \ldots, \alpha_j + q\alpha_i$$

são todas raízes. Em termos da fórmula de Killing:

$$q > 0 \text{ se, e somente se, } \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0,$$

assim,

$$\alpha_i + \alpha_j \text{ é raiz positiva} \Leftrightarrow q > 0 \Leftrightarrow \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0.$$

Lembre que se α é raiz, então $\langle \alpha, \alpha \rangle$ é um racional estritamente positivo e que se α, β são raízes do sistema simples (e portanto raízes simples) e $\alpha \neq \beta$, então $\langle \alpha, \beta \rangle \leqslant 0$ (veja Lema 1.11.1, item iv e Lema 1.11.2). Dessa forma, para decidir quais são as raízes de altura 2, basta olhar a tabela

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}, \qquad i, j = 1, \ldots l;$$

dos números de Killing associados às raízes simples.

Seja β uma raíz de altura 3, pela observação 1.11.2, item ii), todas as raízes positivas são da forma $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ com cada $\alpha_i \in \Pi$ (altura 1) e qualquer soma parcial $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s$, $s \leqslant k$, é uma raiz. Fazendo $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}$, temos $\beta = \alpha + \alpha_k$. Como β tem altura 3 e α_k tem altura 1, claramente α deve ter altura 2 (α é positiva, caso contrário, β não seria raiz, pois seus coeficientes teriam sinais diferentes), pelo caso anterior, temos

$$\beta = (\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_k, \text{ com } i \neq j.$$

Como antes, considere a α_k-sequência iniciada em $\alpha_i + \alpha_j$

$$\alpha_i + \alpha_j - p\alpha_k, \ldots, \alpha_i + \alpha_j - \alpha_k, \alpha_i + \alpha_j, \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \ldots, \alpha_i + \alpha_j + q\alpha_k,$$

cuja fórmula de Killing é

$$p - q = \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Há duas possibilidades:

a) $i \neq j \neq k$. Nesse caso, $p = 0$, pois $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$ não é raiz por ser uma combinação linear, do sistema simples, com coeficientes positivos e negativos, assim, como no caso de altura 2, temos $q > 0$ e, portanto,

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \text{ é uma raiz positiva} \Leftrightarrow q > 0 \Leftrightarrow \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0.$$

A forma de Cartan-Killing é um produto interno em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ (observação 1.11.2, item iv)), então

$$-q = \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} + \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle},$$

como as parcelas do lado direito são sempre menores ou iguais a zero, basta que uma delas não seja zero, isto é,

$$q > 0 \Leftrightarrow \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} + \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0 \text{ ou } \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0.$$

b) $i = k$ ou $j = k$. Por exemplo, se $k = j$, então $\beta = \alpha_i + 2\alpha_j$, isto é, a α_k-sequência iniciada em $\alpha_i + \alpha_j$ é parte da α_i-sequência iniciada em α_j. Como $\alpha_i - \alpha_j$ não é raiz, novamente $p = 0$ e para que $\alpha_i + 2\alpha_j$ seja uma raiz simples q deve ser pelo menos 2, isto é, basta olhar

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}.$$

Em todos esses casos, os números de Killing correspondentes às raízes simples determinam as raízes de altura 3.

Por indução, esse argumento se estende ao caso geral, pois, pela observação 1.11.2 item ii), dada uma raiz β de altura $n+1$, ela é da forma $\alpha + \alpha_k$ com α raiz de altura n e $\alpha_k \in \Pi$. Outra vez a fórmula de Killing nos diz quando essa soma é uma raiz. De fato, pela α_k-sequência iniciada em α temos

$$p - q = \frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle},$$

onde p é conhecido, pois $\alpha - \alpha_k, \alpha - 2\alpha_k, \ldots$, se são raízes (é possível, pois α pode possuir alguma parcela contendo α_k e por esse fato terá altura menor que n), são positivas (pois os coeficientes de α são positivos) e de altura menor que n. Se

$$\alpha = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l,$$

então

$$\frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = n_1 \frac{2\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} + \cdots + n_l \frac{2\langle \alpha, \alpha_l \rangle}{\langle \alpha_l, \alpha_l \rangle}$$

e novamente q (o fato de $\alpha + \alpha_k$ ser raiz ou não), é encontrado a partir dos números de Killing correspondentes aos elementos de Π.

Essa discussão permite que se convença que os números de Killing associados aos elementos de um sistema simples determinam todas as raízes de $\mathfrak{h}$ e, portanto, a estrutura da álgebra semisimples. Os números associados às raízes podem ser colocados em forma de matriz, isso nos leva à seguinte definição:

Definição 1.11.8. *(Matriz de Cartan) Seja $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes. Então a matriz $l \times l$*

$$C = \left(\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{i,j=1}^{l}$$

formada pelos números Killing associados às raízes de um sistema simples, recebe o nome de ***matriz de Cartan*** *do sistema simples de raízes.*

Os elementos da diagonal são todos iguais a 2 e os elementos restantes são inteiros (pela fórmula de Killing) negativos. A próxima proposição mostra que as possibilidades para os elementos de fora da diagonal são bastantes restritas.

Note que como a forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ é um produto interno, então podemos falar em ângulo entre elementos de Δ. Daí, podemos considerar $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = |H_\alpha||H_\beta| \cos\theta$ (onde $|\cdot|$ denota a norma), e tudo mais que conhecemos de produto interno.

Proposição 1.11.5. *Sejam α e β raízes (veja que as raízes não são necessariamente simples, isto é, o resultado vale para todas as raízes). Então*

a) Se θ denota o ângulo entre α e β (ou entre H_α e H_β), então

$$\cos\theta = 0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2},$$

isto é, $\theta = \dfrac{k\pi}{6}$ ou $\dfrac{k\pi}{4}$.

b) Os possíveis valores para os números de Killing são

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Demonstração:

a) Pela formula de Killing, podemos concluir que os números

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \text{ e } \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$$

são **inteiros** e, como

$$\langle \alpha, \beta \rangle^2 = |\beta|^2 |\alpha|^2 \cos^2\theta = \langle \beta, \beta \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle \cos^2\theta,$$

temos que

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{4\langle \beta, \alpha \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} = 4\cos^2\theta$$

é **inteiro**. Sabendo que $0 \leqslant \cos^2\theta \leqslant 1$ tem-se $4\cos^2\theta = 0, 1, 2, 3, 4$ e, daí, o $\cos\theta$ é como no enunciado.

b) Pelo item anterior, o número

$$4\cos^2\theta = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$$

é um dos inteiros $0, 1, 2, 3, 4$ e cada um dos fatores é um inteiro. Além do mais, se um deles se anula, então $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ e, portanto, o outro também se anula, daí, cada um desses fatores pode assumir apenas os valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, sendo que ± 4 não ocorre. De fato,

$$\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \pm 4 \Longrightarrow \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = 0, \pm 1,$$

como 0 não é possível, temos

$$4\cos^2\theta = 4 \Longrightarrow \cos\theta = \pm 1 \Longrightarrow \theta = \{0, \pi\} \Longrightarrow \beta = \pm\alpha \Longrightarrow \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \pm 2$$

o que é uma contradição.

□

Como o número de Killing associado às raízes simples, quando estas são distintas, é negativo (pelo Lema 1.11.2), "restringindo" essa proposição a raízes simples, concluímos que os elementos de fora da diagonal da matriz de Cartan assumem apenas os valores $0, -1, -2$ ou -3. Temos ainda que se θ é o ângulo entre duas raízes simples α_i e α_j, então $\theta = 0°$ se as raízes coincidem ou $\theta = 90°, 120°, 135°, 150°$, se as raízes simples são distintas. Com efeito, basta lembrar que para $\alpha, \beta \in \Pi$ e $\alpha \neq \beta$, tem-se

$$\cos\theta = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

e, portanto, $\langle\alpha,\beta\rangle \leqslant 0$ e $\langle\alpha,\alpha\rangle > 0$.

E daí ver que, no caso das raízes simples, $\cos\theta = 0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$. Além do mais, o fato de que $4\cos^2\theta = 0, 1, 2, 3, 4$, para $i \neq j$, garante que se

$$c_{ij} = \frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -2 \text{ ou } -3,$$

então, necessariamente,

$$c_{ji} = \frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -1$$

pois o produto desses dois números de Killing coincide com $4\cos^2\theta$.

Em resumo:

Proposição 1.11.6. *Seja $C = (c_{ij})$ a matriz de Cartan de um sistema simples de raízes. Então*

i) $c_{ii} = 2$ para todo i;

ii) $c_{ij} = 0, -1, -2$ ou -3, para $i \neq j$;

iii) $c_{ji} = -1$, se $c_{ij} = -2$ ou -3;

iv) $c_{ji} = 0 \Longleftrightarrow c_{ij} = 0$.

Observação 1.11.1. *Nem todas as matrizes $l \times l$ satisfazendo essas quatro propriedades são efetivamente matrizes de Cartan de algum sistema simples de raízes.*

Observação 1.11.2. *Recorde que dados* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *e* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ *matrizes diagonais, temos que* $AB = (c_{ij})_{i,j=1}^n$*, tal que* $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = 0$ *se* $i \neq j$ *e* $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$*, ou seja,* AB *também é uma matriz diagonal.*

Exemplo 1.11.1. *Seja* $\mathfrak{h}$ *a subálgebra das matrizes diagonais de traço nulo, vimos no exemplo 1.10.1 que* $\mathfrak{h}$ *é uma subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$*. Para* $i, j = 1, \ldots, n$*, considere* E_{ij} *a matriz* $n \times n$ *cuja única entrada não nula é* $a_{ij} = 1$*, então o conjunto das matrizes* E_{ij} *e* $E_{ii} - E_{jj}$*, para* $i \neq j$*, é uma base de* $\mathfrak{sl}(n)$*. Dado* $H \in \mathfrak{h}$*, escrevemos*

$$H := diag\{a_1, \ldots, a_n\}, \text{ onde } a_1 + \cdots + a_n = 0,$$

e vamos aplicar ad_H *nos elementos da base de* $\mathfrak{sl}(n)$*:*

- *em* $E_{ii} - E_{jj}$*:*

$$\begin{aligned} ad_H(E_{ii} - E_{jj}) = [H, E_{ii} - E_{jj}] &= HE_{ii} - E_{ii}H - HE_{jj} + E_{jj}H \\ &= (a_i - a_i)E_{ii} - (a_j - a_j)E_{jj} = 0; \end{aligned}$$

- *em* E_{ij}*:*

$$ad_H(E_{ij}) = [H, E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = a_iE_{ij} - a_jE_{ij} = (a_i - a_j)E_{ij}.$$

Em outras palavras, as raízes não nulas de $\mathfrak{h}$ *são os funcionais lineares* $\alpha_{ij} := \lambda_i - \lambda_j$*,* $i \neq j$*, onde* $\lambda_i : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ *dado por*

$$H = diag\{a_1, \ldots, a_n\} \longmapsto a_i.$$

Para $H = diag\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathfrak{h}$*, temos*

$$\langle H, H\rangle = tr(ad_H ad_H) = \sum_{i\neq j}(a_i - a_j)^2 = 2\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2 = 2\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2) - 4\sum_{i<j} a_ia_j,$$

mas

$$-4\sum_{i<j} a_ia_j = 2\sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{pois} \quad \sum_{i=1}^n a_i = 0,$$

como cada a_i^2 *é somado* $n - 1$ *vezes, vem que*

$$\langle H, H\rangle = 2n\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Esta igualdade e a fómula de polarização que relaciona uma forma quadrática com a forma bilinear associada, fornece a forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}$*:*

$$\langle H, H'\rangle = 2n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n),$$

onde $H' = diag\{b_1, \ldots, b_n\}$*. Segue daí que os valores da forma de Cartan-Killing nas raízes são os racionais*

$$\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle = \frac{1}{2n}(\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}),$$

onde $\delta_{ij} = 1$ *se* $i = j$ *e* 0 *caso contrário, em particular,*

$$\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle = \frac{1}{n}.$$

Temos ainda, $\langle E_{ij}, E_{rs} \rangle = 0$ *se* $(r, s) \neq (i, j)$, *e* $\langle E_{ij}, E_{ji} \rangle = 2n$.

Para mais detalhes, veja [1], cap. 6, pag. 155. exemplo.

Exemplo 1.11.2. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é a matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}(3)$. *As raízes positivas são obtidas da matriz de Cartan da seguinte forma:*

a) Raízes de altura um, isto é, raízes simples: a matriz de Cartan é 3×3, *portanto, procuramos* 3 *raízes simples. Utilizando o exemplo anterior e a relação da fórmula de Killing com as raízes (discutida anteriormente), vamos procurar as raízes que satisfazem as entradas da matriz (definição 1.11.8), são elas:*

$$\alpha_1 = \alpha_{12},\ \alpha_2 = \alpha_{23} \text{ e } \alpha_3 = \alpha_{34}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \langle \alpha_{12}, \alpha_{23} \rangle = 1/8(\delta_{12} - \delta_{13} - \delta_{22} + \delta_{23}) = -1/8 = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle, \\
\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle &= \langle \alpha_{23}, \alpha_{34} \rangle = 1/8(\delta_{23} - \delta_{24} - \delta_{33} + \delta_{34}) = -1/8 = \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle, \\
\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle &= \langle \alpha_{12}, \alpha_{34} \rangle = 1/8(\delta_{13} - \delta_{14} - \delta_{23} + \delta_{24}) = 0 = \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle, \\
\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= \langle \alpha_2, \alpha_2 = \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 1/4,
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
c_{12} &= \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = -1 = c_{21} \\
c_{23} &= \frac{2\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -1 = c_{32} \\
c_{13} &= \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = 0 = c_{31}.
\end{aligned}$$

b) As raízes de altura dois são somente $\alpha_1 + \alpha_2$ *e* $\alpha_2 + \alpha_3$, *pois a soma* $\alpha_1 + \alpha_3$ *não é raiz, visto que*

$$\frac{2\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle} = 0.$$

c) A única raiz de altura três é $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, já que $\alpha_i+2\alpha_j$ não é raiz para nenhum par de raízes simples α_i e α_j.

Não existem raízes de altura quatro, pois na α_i-sequência iniciada em $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $p=1$ se $i=1$ ou 3 e $p=0$ se $i=2$, já que as rízes de altura dois são $\alpha_1+\alpha_2$ e $\alpha_2+\alpha_3$. Pela matriz de Cartan, vê-se que esses valores coincidem com

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$$

e, portanto, $q=0$.

1.11.5 Diagramas de Dynkin

O diagrama de Dynkin é um diagrama (grafo) que contém as mesmas informações que a matriz de Cartan e é definido a partir de um sistema simples de raízes fixado:

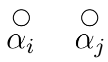
$$\Pi=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}.$$

O diagrama contém l pontos (vértices) representando cada uma das raízes. Os vértices são ligados ou não por um, dois ou três segmentos (arestas) de acordo com as seguintes instruções:

1) Se

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}=0,$$

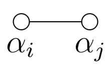
não existe ligação:



2) se

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}=-1,$$

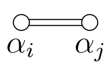
então α_i e α_j são ligados por um segmento:

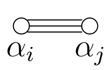


3) se

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\text{ ou }\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$$

é -2 (respectivamente -3) então os vértices são ligados por dois (respectivamente três) segmentos:





Nesse caso o ângulo entre as raízes é 135° (respectivamente 150°), pois $4\cos^2\theta = 2 \Longrightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (respectivamente $4\cos^2\theta = 3 \Longrightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$).

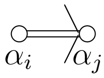
A ideia do diagrama de Dynkin é poder utilizá-lo para obter a matriz de Cartan, então seja $C = (c_{ij})$ a matriz de Cartan. Se construímos o diagrama de acordo com as regras acima, então $c_{ij} = c_{ji} = 0$ quando as raízes α_i e α_j não são ligadas e $c_{ij} = c_{ji} = -1$ se α_i e α_j são ligadas por apenas um segmento. No entanto, quando a ligação é feita por dois ou três segmentos, não fica claro qual das entradas

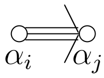
$$c_{ij} = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} \text{ ou } c_{ji} = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle}$$

da matriz de Cartan é -2 ou -3, para distinguir isso, orienta-se a ligação na direção da raiz α_j (o equivalente para α_i) se

$$c_{ji} = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle} = -2 \text{ ou } -3$$

(e, portanto, $c_{ij} = -1$). Obtém-se dessa forma as ligações orientadas:



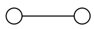


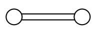
O número de ligações entre duas raízes no diagrama de Dynkin tem a seguinte interpretação geométrica: se θ é o ângulo entre α_i e α_j, então

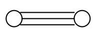
$$4\cos^2\theta = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle}\frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle}$$

e, portanto, este valor é o número de arestas que ligam as raízes pois, se um dos fatores deste produto é nulo o mesmo ocorre com o outro e, caso contrário, pelo menos um deles é 1. Resumindo, o número de ligações entre duas raízes simples e o ângulo que elas formam entre si estão relacionadas pela seguinte tabela:

 $\theta = 90°$

 $\theta = 120°$

 $\theta = 135°$

 $\theta = 150°$

Os exemplos abaixo mostrarão que para encontrar o diagrama a partir da matriz (ou vice-versa), **basta analisar as entradas, da matriz, referentes às posições**

das raízes, já que na diagonal é sempre 2 e as outras entradas da matriz são nulas. A ordem da matriz é a quantidade de raízes.

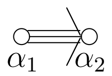
Exemplo 1.11.3. *Dada a matriz de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = -1, \\ c_{21} &= \frac{2\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -3, \end{aligned}$$

e assim a matriz de Cartan acima define o diagrama



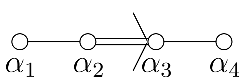
Exemplo 1.11.4. *A matriz de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz 4×4, logo $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Daí

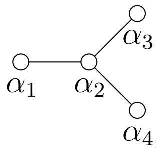
$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = c_{21} = \frac{2\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -1, \\ c_{23} &= \frac{2\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -1, \\ c_{32} &= \frac{2\langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle} = -2, \\ c_{34} &= \frac{2\langle \alpha_3, \alpha_4 \rangle}{\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle} = c_{43} = \frac{2\langle \alpha_4, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_4, \alpha_4 \rangle} = -1 \end{aligned}$$

e, portanto, o diagrama



e a matriz estão associados entre si.

Exemplo 1.11.5. *Seja o diagrama*



logo, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, *a matriz é* 4×4 *e*

$$c_{12} = c_{21} = -1,\ c_{23} = c_{32} = -1 \text{ e } c_{24} = c_{42} = -1.$$

Daí, a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e o diagrama estão associados entre si.

Os diagramas de Dynkin foram construídos a partir de sistemas simples de raízes que, em última instância, são bases de espaços vetoriais racionais com produto interno. A maneira como se associou um diagrama a uma base dependeu apenas da estrutura geométrica da base, ou seja, dos comprimentos e dos ângulos entre seus elementos, dessa forma, os diagramas podem ser considerados sem fazer alusão aos sistemas de raízes.

Vimos que há uma correspondência entre as álgebras de Lie semissimples e os diagramas de Dynkin. Podemos encontrar todos os diagramas de Dynkin possíveis e, consequentemente, a classificação das álgebras semissimples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados. Para encontrar os diagramas de Dynkin é suficiente encontrar os que são conexos, isto é, aqueles em que duas raízes quaisquer podem ser conectadas por um caminho de arestas do diagrama, pois um diagrama qualquer é sempre união disjunta de diagramas conexos, dessa forma, conhecendo-se os diagramas conexos obtêm-se todos os diagramas.

Apresentaremos alguns resultados, dos quais omitiremos as demonstrações, que nos ajudarão a eliminar uma série de possibilidades para os diagramas de Dynkin. Ao final, teremos o Teorema 1.11.2 que apresentará apenas 9 diagramas conexos possíveis (Para mais detalhes, veja [1], cap. 7).

Lema 1.11.3. *Ao retirar de um diagrama alguns vértices juntamente com todas as arestas incidentes a esses vértices, o que se obtém ainda é um diagrama, denominado de subdiagrama.*

Lema 1.11.4. *Num diagrama com* l *vértices, a quantidade de pares conectados (isto é, que não são ortogonais), é menor do que* l.

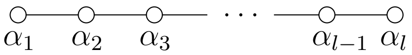
Lema 1.11.5. *Um diagrama não contém ciclos.*

Lema 1.11.6. *A quantidade de arestas incidentes a um vértice de um diagrama é* $\leqslant 3$.

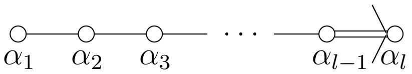
Todos os possíveis diagramas conexos são dados pelo seguinte teorema.

Teorema 1.11.2. *Os diagramas de Dynkin conexos são*

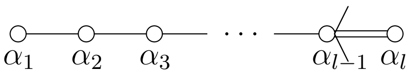
$A_l, l \geqslant 1$



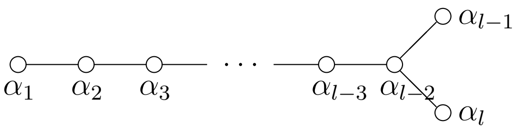
$B_l, l \geqslant 2$



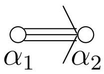
$C_l, l \geqslant 3$



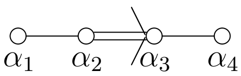
$D_l, l \geqslant 4$



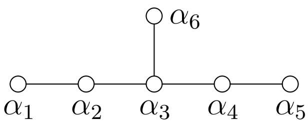
G_2



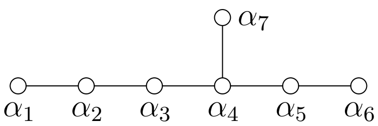
F_4



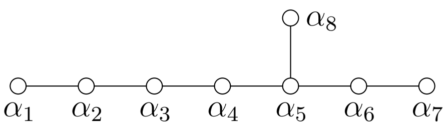
E_6



E_7



E_8



Os diagramas conexos são associados à álgebras de Lie simples, sendo que as componentes conexas de um diagrama para uma álgebra semissimples correspondem aos diagramas de suas componentes simples (veja Teorema 1.9.2). Caso o leitor esteja interessado nas matrizes de Cartan associadas aos diagramas acima, veja [2], cap. 11, pag. 59. (Fique atento para "o nome" das raízes, aqui tomamos uma ordem diferente e essa ordem vai influenciar diretamente na matriz).

Capítulo 2

Álgebras de Kac-Moody

Na década de 60, Victor G. Kac e Robert V. Moody iniciaram, independentemente, o estudo de certas álgebras de Lie, as quais hoje são denominadas Álgebras de Kac-Moody (também conhecidas como álgebras de Kac-Moody Lie). Essas álgebras são uma generalização das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita que preservam quase toda a estrutura original. Uma álgebra de Kac-Moody é uma álgebra de Lie, normalmente de dimensão infinita, que pode ser obtida a partir da generalização da matriz de Cartan. Dentre as álgebras de Kac-Moody estão compreendidas as álgebras de Lie simples de dimensão finita e as chamadas álgebras de Kac-Moody afim, as quais podem ser subdivididas em não torcidas e torcidas. Neste capítulo, a fim de avançar na teoria, apresentaremos muitos resultados dos quais omitiremos as demonstrações, caso o leitor necessite de mais detalhes, consulte [4] e [5].

2.1 Álgebras de Lie associadas a uma matriz quadrática complexa

Nessa seção, vamos associar a qualquer matriz quadrada complexa A uma álgebra de Lie, que denotaremos por $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, e estudaremos algumas de suas propriedades. Estamos particularmente interessados nas álgebras de Lie associadas a um tipo específico de matrizes, as chamadas matrizes de Cartan generalizadas. Por ora, vamos considerar as matrizes de modo geral, portanto, considere $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ uma matriz complexa $n \times n$ de posto (ou rank) l.

Definição 2.1.1. *(Realização de uma matriz). Seja A a matriz descrita acima. Uma* ***realização*** *de A é uma tripla $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$, onde $\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ (dual de $\mathfrak{h}$) e $\Pi^V = \{\alpha_1^V, \ldots, \alpha_n^V\} \subset \mathfrak{h}$ são subconjuntos indexados de $\mathfrak{h}^*$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente, satisfazendo as seguintes condições:*

i) os conjuntos Π e Π^V são linearmente independentes em $\mathfrak{h}^*$ e $\mathfrak{h}$ respectivamente;

ii) $\langle \alpha_i^V, \alpha_j \rangle = a_{ij}$, para $i, j = 1, \ldots, n$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o pareamento[1] natural entre um espaço vetorial e seu dual;

[1]Também conhecido como pairing ou "emparelhamento", $\langle \alpha_i^V, \alpha_j \rangle$ é a notação para $\alpha_j(\alpha_i^V)$. Fique atento, pois muitas vezes vamos utilizar a ordem invertida desta notação, ou seja, $\langle \alpha, X \rangle$ denotará $\alpha(X)$ (um funcional α aplicado em um elemento X).

iii) $dim(\mathfrak{h}) - n = corank(A)$, isto é, $dim(\mathfrak{h}) - n = n - l$

Na verdade, podemos definir a realização de modo geral retirando a condição iii), a tripla descrita acima é conhecida como realização minimal, mas como toda realização admite uma realização minimal, então sem perda de generalidade, podemos considerar a minimal, isto é, quando falarmos em realização estamos considerando a realização minimal.

Definição 2.1.2. *Duas realizações $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ e $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^V)$ são ditas **isomorfas** se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}_1$ tal que $\phi(\Pi^V) = \Pi_1^V$ e $\phi^*(\Pi_1) = \Pi$, onde ϕ^* é a transformação linear transposta de ϕ (veja A.2.2).*

Proposição 2.1.1. *Quaisquer duas realizações de uma matriz complexa quadrada A são isomorfas, isto é, a menos de isomorfismo, existe uma única realização para cada matriz.*

Demonstração: Veja [5], pag. 321, Proposição 14.3.

□

Observações 2.1.1.

i) Se $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ é uma realização de uma matriz A, então $(\mathfrak{h}^*, \Pi^V, \Pi)$ é uma realização de A^t (transposta de A). Faz sentido, pois $\Pi \subset \mathfrak{h}^*$ e como $\mathfrak{h}$ tem dimensão finita, existe um isomorfismo narural entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^{**}$ (isto é, não depende da base adotada), que permite identificar $\mathfrak{h}$ com $\mathfrak{h}^{**}$ e, portanto, escrever $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{**}$, daí $\Pi^V \subset \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{**}$.

ii) Dadas duas matrizes A_1 e A_2, e suas respectivas realizações $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^V)$ e $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^V)$, então podemos obter uma realização da soma direta $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ das duas matrizes:

$$(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \Pi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2, \Pi_1^V \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2^V),$$

*chamada de **soma direta das realizações**.*

Definição 2.1.3. *i) Uma matriz A (e sua realização) é dita **decomponível** se, após reordenar os índices (isto é, efetuar uma permutação de suas linhas e a mesma permutação das colunas), A se decompõe em uma soma direta não trivial. Caso contrário, A é dita **indecomponível**. Sempre podemos reordenar os índices de uma matriz decomponível A, de modo que tenhamos uma decomposição de A em uma soma direta de matrizes indecomponíveis e a sua realização correspondente em uma soma direta das realizações indecomponíveis correspondentes.*

*ii) Assim como no caso de dimensão finita, para os conjuntos da definição 2.1.1, vamos usar as seguintes terminologias: Π é chamado de **base de raízes**, Π^V é chamado de **base de co-raízes** e seus elementos são chamados de **raízes simples** e **co-raízes simples** respectivamente. Definimos também, $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ ($\mathbb{Z}$-módulo gerado por Π) e $Q^V = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i^V$ ($\mathbb{Z}$-módulo gerado por Π^V), chamados, respectivamente, de **reticulado***

de raízes *e* ***reticulado de co-raízes****. Denote por Q_+ o monoide gerado em Q pelas raízes simples, isto é, $Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.*

iii) Para $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \in Q$, o número $ht(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} k_i$ é chamado de ***altura*** *de α. Vamos introduzir também, uma ordem parcial $\geq$ em $\mathfrak{h}^*$ definindo $\lambda \geq \mu$ se $\lambda - \mu \in Q_+$ (portanto, $\alpha > 0$ se $\alpha \in Q_+$ e $\alpha < 0$ se $-\alpha \in Q_+$).*

2.1.1 A álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ associada a uma matriz complexa

Definição 2.1.4. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma matriz complexa $n \times n$ com posto l e seja $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ uma realização de A. A álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, associada à matriz A, é a álgebra de Lie com geradores $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ e $\mathfrak{h}$ que satisfazem, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ e todo $H, H' \in \mathfrak{h}$, as seguintes relações:*

$[e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^V$, *onde δ_{ij} é o* ***delta de Kronecker****;*
$[H, H'] = 0;$
$[H, e_i] = \langle\alpha_i, H\rangle e_i;$
$[H, f_i] = -\langle\alpha_i, H\rangle f_i.$

Observe que $\langle\alpha_i, H\rangle$ é a notação usada para $\alpha_i(H)$, e que por geradores queremos dizer que e_i, f_i e $\mathfrak{h}$ geram $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ com álgebra de Lie, isto é, qualquer elemento de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ é uma combinação linear complexa finita dos elementos de $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$, dos elementos de $\mathfrak{h}$ e de configurações [1] de colchetes entre os elementos desses dois primeiros. Note, que pela unicidade da realização de A, $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ depende apenas da matriz A. Denote por $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ a subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ gerada por $e_1, \ldots, e_n$ e por $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ a subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ gerada por $f_1, \ldots, f_n$ (gerados como álgebras de Lie).

Teorema 2.1.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+$ (soma direta de espaços vetoriais).

ii) $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (respectivamente $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) é livremente gerado por $e_1, \ldots, e_n$ (respectivamente $f_1, \ldots, f_n$). Em outras palavras, não há relações entre os e_is, isto é, cada elemento tem escrita única como combinações dos e_is e das configurações dos colchetes entre eles.

iii) Para $i = 1, \ldots, n$ e $H \in \mathfrak{h}$, a aplicação $e_i \longmapsto -f_i, f_i \longmapsto -e_i, H \longmapsto -H$, pode ser unicamente estendida a uma involução $\tilde{\omega}$ da álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, isto é, $\tilde{\omega} : \tilde{\mathfrak{g}}(A) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}(A)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, tal que $\tilde{\omega} \neq 1$ e $\tilde{\omega}^2 = 1$ (claramente é um isomorfismo).

iv) Com respeito a $\mathfrak{h}$, existe uma ***decomposição em espaços de raízes****:*

[1] $[\cdot,\cdot]$ e $[\cdot,[\cdot,\cdot]]$ e $[[\cdot,[\cdot,\cdot]],[\cdot,\cdot]]$ são exemplos de configurações de colchetes ou palavras de Lie ou monômios de Lie.

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = (\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+ \\ \alpha\neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+ \\ \alpha\neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha})$$

onde $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) : [H, X] = \langle\alpha, H\rangle X$ *para todo* $H \in \mathfrak{h}\}$. *E mais, dim*$(\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha) < \infty$ *e* $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \tilde{\mathfrak{n}}_\pm$, *para* $\pm\alpha \in Q_+$, $\alpha \neq 0$.

v) Dentre os ideais de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ *intersectando* $\mathfrak{h}$ *trivialmente, existe um único ideal maximal* τ*, além disso,*

$$\tau = (\tau \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-) \oplus (\tau \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+) \text{ (soma direta de ideais).}$$

Demonstração: Veja [4], pag. 3, Teorema 1.2.

□

Como cada elemento de $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (respectivamente $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) é combinação linear complexa finita de monômios de Lie em $e_1, \ldots, e_n$ (respectivamente $f_1, \ldots, f_n$), podemos destacar o seguinte:

$$\tilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+ \\ \alpha\neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}\ ,\ \tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+ \\ \alpha\neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \text{ e } \mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{g}}_0$$

daí, $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \tilde{\mathfrak{n}}_+$ e $\tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} \subset \tilde{\mathfrak{n}}_-$, para todo $\alpha \in Q_+$, $\alpha \neq 0$, então são gerados por monômios de Lie em $e_1, \ldots, e_n$ e $f_1, \ldots, f_n$, respectivamente.

2.2 Matrizes de Cartan generalizadas e Álgebras de Kac-Moody

O objetivo dessa seção é definir a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$, obtida a partir de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, e estudar algumas de suas propriedades. Em seguida, vamos definir a matriz de Cartan generalizada e associar a esta matriz a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$. Essa álgebra será chamada de álgebra de Kac-Moody.

2.2.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$

Sejam A uma matriz complexa $n\times n$, $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ uma realização de A, $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ a álgebra Lie associada a A (definição 2.1.4), pelo Teorema 2.1.1, item i), a aplicação natural $\mathfrak{h} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}(A)$ é injetiva, então podemos dizer que $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}(A)$. Seja τ o ideal maximal que intersecta $\mathfrak{h}$ trivialmente (Teorema 2.1.1, item v), definimos então, a álgebra de Lie:

$$\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau.$$

Chamaremos a matriz A de **matriz de Cartan** da álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$, diremos que n é o **posto** de $\mathfrak{g}(A)$ e vamos manter a mesma notação para as imagens de e_i, f_i e $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}(A)$ (ou seja, $\overline{e}_i := e_i$, $\overline{f}_i := f_i$ e $\overline{H} := H$ para $H \in \mathfrak{h}$ pelo homomorfismo natural $X \longmapsto \overline{X}$, portanto, salvo dito contrário, ao usar essa notação estamos nos referindo aos elementos de $\mathfrak{g}(A)$).

Observações 2.2.1. *São importantes:*

i) O quádruplo $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ *é chamado de* ***quádruplo associado à matriz*** A.

ii) Dois quádruplos $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ *e* $(\mathfrak{g}(A_1), \mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^V)$ *são ditos isomorfos, se existe um isomorfismo de álgebras de Lie* $\phi : \mathfrak{g}(A_1) \longrightarrow \mathfrak{g}(A_1)$ *tal que* $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$, $\phi(\Pi^V) = \Pi_1^V$ *e* $\phi^*(\Pi_1) = \Pi$, *onde* ϕ^* *é a transposta de* ϕ.

iii) Como $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}(A)$ *e* $\mathfrak{h} \cap \tau = \{0\}$, *podemos concluir que a aplicação natural* $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}(A)$ *dada por* $H \longmapsto \overline{H}$ *é injetiva e, portanto, podemos escrever* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(A)$. *A subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}(A)$ *é chamada de* ***subálgebra de Cartan*** *e os elementos* e_i, f_i *são chamados de* ***geradores de Chevalley****. Na verdade, eles geram a subálgebra derivada* $\mathfrak{g}'(A) = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$ *de* $\mathfrak{g}(A)$ *(veja seção 1.5) e, além disso,*

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A) + \mathfrak{h}.$$

A decomposição de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, vista no Teorema 2.1.1, item iv, induz uma decomposição em $\mathfrak{g}(A)$, chamada de **decomposição em espaços de raízes** com respeito a $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}(A) : [H, X] = \langle \alpha, H \rangle X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}$ é o espaço de raízes associado a α, com $\mathfrak{g}_\alpha \cong \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha / \tau_\alpha$, $\tau_\alpha = \tau \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, em particular, $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{h}$, pois τ intersecta $\mathfrak{h}$ trivialmente. O número $mult(\alpha) := dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é chamado de **multiplicidade** de α (como $\mathfrak{g}_\alpha \cong \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha / \tau_\alpha$, temos $dim(\mathfrak{g}_\alpha) < \infty$).

Definição 2.2.1. *Um elemento* $\alpha \in Q$ *é chamado de* ***raiz*** *se* $\alpha \neq 0$ *e* $mult(\alpha) \neq 0$. *Uma raiz* $\alpha > 0$ *(respectivamente* $\alpha < 0$*) é chamada* ***positiva*** *(respectivamente* ***negativa****) (veja definição 2.1.3, item iii). Segue de Teorema 2.1.1, item iv), que cada raiz é ou positiva ou negativa, então denotando por* Δ, Δ_+ *e* Δ_- *os conjuntos de todas as raízes, raízes positivas e raízes negativas, respectivamente, temos*

$$\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_- \textit{ (união disjunta).}$$

Note que podemos escrever

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha, \textit{ onde } \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}.$$

Denote por $\mathfrak{n}_+$ a subálgebra de $\mathfrak{g}(A)$ gerada por $e_1, \ldots, e_n$ e por $\mathfrak{n}_-$ a subálgebra de $\mathfrak{g}(A)$ gerada por $f_1, \ldots, f_n$, temos

$$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha \cong \tilde{\mathfrak{n}}_- / \tau \cap \tilde{\mathfrak{n}}_- \text{ e } \mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha \cong \tilde{\mathfrak{n}}_+ / \tau \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+,$$

e daí vem a **decomposição triangular**:

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \text{ (soma direta de espaços vetoriais).}$$

Veja que $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_+$ se $\alpha > 0$ e $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_-$ se $\alpha < 0$, isto é, para $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$), $\mathfrak{g}_\alpha$ é a combinação linear de elementos da forma $[\ldots[[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}]\ldots e_{i_s}]$ (resp. $[\ldots[[f_{i_1}, f_{i_2}], f_{i_3}]\ldots f_{i_s}])$, tal que $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} = \alpha$ (resp. $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} = -\alpha$), ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\alpha &= \sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s}=\alpha} \mathbb{C}[\ldots[[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}]\ldots e_{i_s}] \\
\mathfrak{g}_{-\alpha} &= \sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s}=-\alpha} \mathbb{C}[\ldots[[f_{i_1}, f_{i_2}], f_{i_3}]\ldots f_{i_s}].
\end{aligned}$$

Como exemplo, vamos considerar $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, com $\alpha > 0$, então $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}[[e_1, e_2], e_3]+\mathbb{C}[e_1, [e_2, e_3]]$.

Em particular, $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C}f_i$ e $\mathfrak{g}_{s\alpha_i} = 0$ se $|s| > 1$, para $i = 1, \ldots, n$ (Essa última, basta utilizar o item ii) da definição 1.1.1). Lembre que $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) implica $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i\alpha_i$ (resp. $-\alpha = \sum_{i=1}^n k_i\alpha_i$) com $k_i \in \mathbb{Z}_+$, então, pelo mesmo motivo citado na observação 1.11.2, item ii), indexamos os índices. Note que $e_i \neq 0$ em $\mathfrak{g}(A)$, pois $e_i = 0$ (isto é, $\overline{e_i} = \overline{0}$) $\Rightarrow e_i \in \tau \Rightarrow 0 \neq \alpha_i^V = [e_i, f_i] \in \tau \cap \mathfrak{h}$ e isso é uma contradição, de modo análogo, $f_i \neq 0$ em $\mathfrak{g}(A)$.

Seja $\tilde{\omega}$ o automorfismo involutivo de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ e τ é um ideal maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, então $\tilde{\omega}(\tau)$ também é um ideal maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ e, além disso,

$$\begin{aligned}
H \in \tilde{\omega}(\tau) \cap \mathfrak{h} \Rightarrow H = \tilde{\omega}(X), X \in \tau &\Rightarrow -H = \tilde{\omega}(H) = X \in \tau \\
&\Rightarrow H \in \tau \cap \mathfrak{h} \Rightarrow H = 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\tilde{\omega}(\tau)$ é um ideal maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ que intersecta $\mathfrak{h}$ trivialmente, pela unicidade de τ temos $\tilde{\omega}(\tau) = \tau$. Assim, $\tilde{\omega}$ induz um automorfismo involutivo $\omega : \mathfrak{g}(A) \longrightarrow \mathfrak{g}(A) : \overline{X} \longmapsto \overline{\tilde{\omega}(X)}$, com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&\omega(e_i) = -f_i, \quad \omega(f_i) = -e_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \\
&\omega(H) = -H, \text{ se } H \in \mathfrak{h}.
\end{aligned}$$

O automorfismo involutivo ω, induzido por $\tilde{\omega}$ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$, é chamado de **involução de Chevalley**. O fato de $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ (veja Lema 2.4.2), nos dá $mult(\alpha) = mult(-\alpha)$ e, em particular, $\Delta_- = -\Delta_+$.

As seguintes proposições são muito úteis:

Proposição 2.2.1. *a) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra comutativa (abeliana), $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ elementos de $\mathfrak{g}$ e $\Pi^V = \{\alpha_1^V, \ldots, \alpha_n^V\} \subset \mathfrak{h}$, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ conjuntos linearmente independentes, tais que:*

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^V \in \mathfrak{h} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$
$$[H, e_i] = \langle\alpha_i, H\rangle e_i, [H, f_i] = -\langle\alpha_i, H\rangle f_i, \quad (H \in \mathfrak{h} \quad e \quad i = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Suponha que e_i, f_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ e $\mathfrak{h}$ geram $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie, e que $\mathfrak{g}$ não possui ideais não nulos que cruzam $\mathfrak{h}$ trivialmente. Finalmente, seja $A = (\langle\alpha_i^V, \alpha_j\rangle)_{i,j=1}^n$ e suponha que $dim(\mathfrak{h}) = 2n - posto(A)$. Então, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ é um quádruplo associado à matriz A.

b) Dadas duas matrizes A e A' de ordem n, existe um isomorfismo dos quádruplos associados se, e somente se, A' pode ser obtida de A por uma reordenação do conjunto de índices.

Demonstração: Decorre da Proposição 2.1.1 e do Teorema 2.1.1.

$\square$

A próxima proposição trata de graduações, portanto, relembrando brevemente, dado um grupo abeliano M, a decomposição $V = \bigoplus_{\alpha \in M} V_\alpha$ do espaço vetorial V, em uma soma direta de seus subespaços, é chamada uma M**-graduação** de V. Um subespaço $U \subset V$ é dito **graduado** se $U = \bigoplus_{\alpha \in M}(U \cap V_\alpha)$. Os elementos de V_α são chamados de **homogêneos de grau** α.

Proposição 2.2.2. *Sejam $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie comutativa (isto é, $\mathfrak{h}$ é abeliana) e V um $\mathfrak{h}$-módulo diagonalizável, isto é,*

$$(*) \qquad V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda, \text{ onde } V_\lambda = \{v \in V : H(v) = \lambda(H)v, \, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Então, todo submódulo U de V é graduado com respeito à graduação $(*)$.

Demonstração: Veja [4], pag. 8, Proposição 1.5.

$\square$

Proposição 2.2.3. *O centro da álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$ é igual a*

$$\mathfrak{c} := \{H \in \mathfrak{h} : \langle \alpha_i, H \rangle = 0, \, \forall \; i = 1, \ldots, n\},$$

além disso, dim$(\mathfrak{c}) = n - l$.

Demonstração: Veja [4], pag. 11, Proposição 1.6.

$\square$

2.2.2 Matriz de Cartan generalizada

Definição 2.2.2. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma matriz complexa $n \times n$. A é uma* ***matriz de Cartan generalizada*** *(MCG) se, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, satisfaz as seguintes condições:*

(C1) $\qquad a_{ii} = 2$;

(C2) $\qquad a_{ij} \in \mathbb{Z} \quad e \quad a_{ij} \leqslant 0, \quad se \; i \neq j$;

(C3) $\qquad a_{ij} = 0$ *implica* $a_{ji} = 0$.

Veremos mais adiante que no caso especial em que A é uma matriz de Cartan (def. 1.11.8 e Prop. 1.11.6), a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$, construída por Kac e Moody, coincide com a álgebra de Lie semissimples de dimensão finita. Contudo, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$, em geral, é de dimensão infinita.

Definição 2.2.3. *(Álgebra de Kac-Moody) Seja A uma matriz de Cartan generalizada. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$ associada à matriz A é chamada de* ***álgebra de Kac-Moody****.*

Em outras palavras, uma álgebra de Kac-Moody é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$, onde A é uma matriz de Cartan generalizada.

2.3 Classificação das matrizes de Cartan generalizadas e diagramas de Dynkin

A estrutura da álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$, depende essencialmente da matriz de Cartan generalizada, portanto, vamos verificar quais os possíveis tipos que a MCG pode assumir. Para isto, enunciaremos os princiais resultados que nos levarão à classificação das MCG dos tipos **finito** e **afim**.

Primeiramente, refinando a definição 2.1.3, item i), dizemos que duas MCGs $A = (a_{ij})$ e $A' = (a'_{ij})$ são **equivalentes**, se elas possuem o mesmo grau n e existe uma permutação σ de S_n tal que

$$a'_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}, \qquad \text{para todo } i, j = 1, \ldots, n.$$

Uma MCG A é dita **indecomponível**, se **não** é equivalente a uma soma direta de MCGs menores A_1 e A_2, isto é, A não é equivalente a $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Claramente, se A é uma MCG, então a sua transposta A^t também é uma MCG e, além disso, A é indecomponível se, e somente se, A^t é indecomponível.

Considere uma matriz **real** $A = (a_{ij})$, $n \times n$, com as seguintes propriedades:

(m1) A é indecomponível;

(m2) $a_{ij} \leqslant 0$, para $i \neq j$;

(m3) $a_{ij} = 0$ implica $a_{ji} = 0$.

Note que uma MCG cumpre (m2), (m3) e podemos admitir que satisfaz (m1), pois sem perda de generalidade, pode-se considerar que uma MCG é indecomponível, já que qualquer matriz pode ser decomposta em uma soma de indecomponíveis (isto é, é suficiente estudar as matrizes indecomponíveis).

Observação 2.3.1. *Para um vetor coluna real $u = (u_1, u_2, \ldots)^t$, adotaremos a seguinte notação: escreveremos $u > 0$ se $u_i > 0$ para cada i, e $u \geqslant 0$ se $u_i \geqslant 0$ para cada i.*

Definição 2.3.1. *Seja A uma matriz real $n \times n$ satisfazendo (m1), (m2) e (m3). Definimos:*

*a) A é do tipo **finito** se*

(i) $det(A) \neq 0$;
(ii) existe $u > 0$ tal que $Au > 0$;
(iii) $Au \geqslant 0$ implica $u > 0$ ou $u = 0$.

*b) A é do tipo **afim** se*

(i) $n - posto(A) = 1$; [2]
(ii) existe $u > 0$ tal que $Au = 0$;
(iii) $Au \geqslant 0$ implica $Au = 0$.

*c) A é do tipo **indefinido** se*

(i) existe $u > 0$ tal que $Au < 0$;
(ii) $Au \geqslant 0$ e $u \geqslant 0$ implica $u = 0$.

Teorema 2.3.1. *Seja A uma matriz real $n \times n$ satisfazendo (m1), (m2) e (m3). Então uma, e apenas uma, das três possibilidades descritas na definição 2.3.1 vale para ambas A e A^t.*

Demonstração: Veja [4], pag. 48, Teorema 4.3.

□

Em outras palavras, esse resultado diz que podemos classificar uma MCG indecomponível em ou finito, ou afim, ou indeterminado.

A fim de classificar todas as MCGs do tipo **finito** e **afim**, vamos introduzir, assim como fizemos no caso das álgebras de Lie de dimensão finita semissimples, os chamados diagramas de Dynkin.

Definição 2.3.2. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ uma MCG. Associaremos a A um grafo $S(A)$, chamado o **diagrama de Dynkin** de A, dado da seguinte forma:*

i) Se $a_{ij}a_{ji} \leqslant 4$, então os vértices i e j são conectados por $max\{|a_{ij}|, |a_{ji}|\}$ arestas e, tais arestas, são equipadas com uma flecha apontando para i sempre que $|a_{ij}| > 1$, e apontando para j sempre que $|a_{ji}| > 1$.

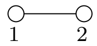
ii) Se $a_{ij}a_{ji} > 4$, os vértices i e j são conectados por uma aresta com o par $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ sobre ela.

Note que A é indecomponível se, e somente se, $S(A)$ é um grafo conectado (conexo). Veja também que a cada MCG A, determinamos um diagrama de Dynkin $S(A)$ que, assim como a sua matriz, acompanha a classificação de tipo ou finito ou afim ou indeterminado e mais, A é determinada pelo diagrama de Dynkin $S(A)$ e uma enumeração de seus vértices.

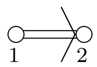
[2] Como defini-se $corank(A) = n - posto(A)$, é comum encontrar tal condição escrita da forma $corank(A) = 1$

Exemplo 2.3.1. *Considere as MCGs e seus respectivos diagramas de Dynkin:*

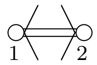
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



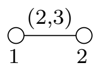
$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$



Note que a ordem da matriz é a quantidade de vértices do diagrama.

A próxima proposição e o próximo teorema, fornecem um resumo dos resultados referentes as MCGs indecomponíveis. Mas antes, relembre que uma matriz da forma $(a_{ij})_{i,j\in S}$, onde $S \subset \{1, \ldots, n\}$, é chamada de uma **submatriz principal** de $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ e denotemos por A_S (uma submatriz é obtida excluindo-se algumas linhas ou colunas de uma matriz original). O determinante de uma submatriz principal é chamado de **menor principal**, em outras palavras, um menor principal é o determinante de uma submatriz de A tal que a sua diagonal principal faz parte da diagonal principal de A.

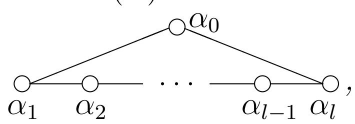
Proposição 2.3.1. *Seja A uma MCG indecomponível.*

i) A é do tipo finito se, e somente se, todos os seus menores principais são positivos.

ii) A é do tipo afim se, e somente se, todos os seus menores principais próprios são positivos e det $A = 0$.

iii) Se A é do tipo finito ou afim, então qualquer subdiagrama próprio de $S(A)$ é uma união (conexão) de diagramas de Dynkin do tipo finito.

*iv) Se A é do tipo finito, então $S(A)$ **não** contém ciclos. Se A é do tipo afim e $S(A)$ contém ciclos, então $S(A)$ é o ciclo*



, onde $l \geqslant 2$.

v) A é do tipo afim se, e somente se, existe $\delta > 0$, tal que $A\delta = 0$; tal δ é único a menos de multiplicação por uma constante.

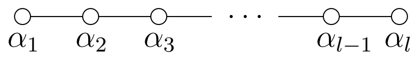
Demonstração: Veja [4], pag. 51, Proposição 4.7.

□

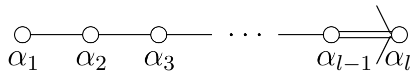
Por meio dos diagramas de Dynkin, podemos listar todas as MCGs do tipo finito e afim, isto é feito no próximo teorema.

Teorema 2.3.2. *a) Os diagramas de Dynkin de todas as MCGs do tipo finito são:*

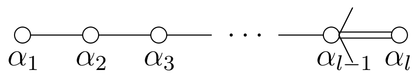
TABELA Fin

$A_l (l \geqslant 1)$ 

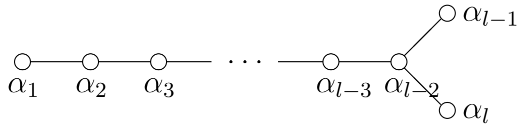
$(l+1)$

$B_l (l \geqslant 2)$ 

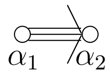
(2)

$C_l (l \geqslant 3)$ 

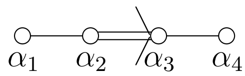
(2)

$D_l (l \geqslant 4)$ 

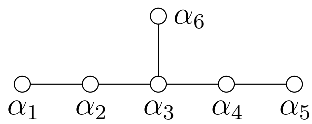
(4)

G_2 

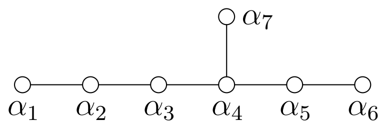
(1)

F_4 

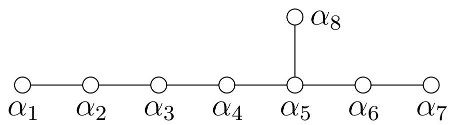
(1)

E_6 

(3)

E_7 

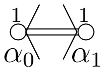
(2)

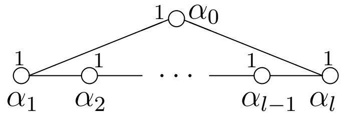
E_8 

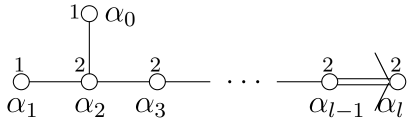
(1)

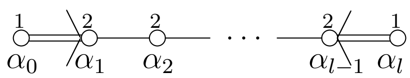
b) Os diagramas de Dynkin de todas as MCGs do tipo afim são:

TABELA Aff 1

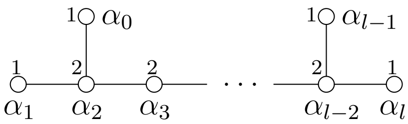
$A_1^{(1)}$ 

$A_l^{(1)} (l \geqslant 2)$ 

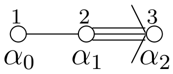
$B_l^{(1)} (l \geqslant 3)$ 

$C_l^{(1)} (l \geqslant 2)$ 

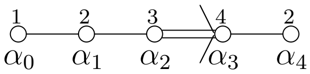
$D_l^{(1)} (l \geqslant 4)$



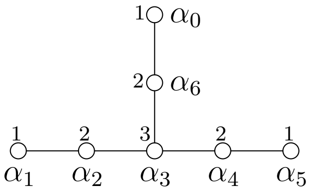
$G_2^{(1)}$



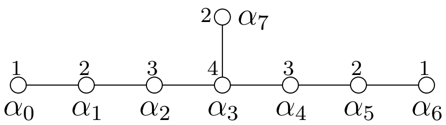
$F_4^{(1)}$



$E_6^{(1)}$



$E_7^{(1)}$



$E_8^{(1)}$

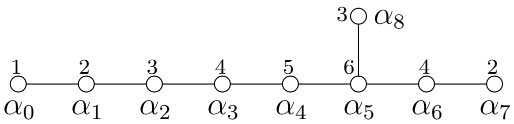
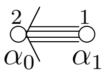
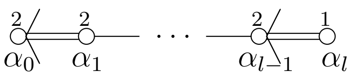


TABELA Aff 2

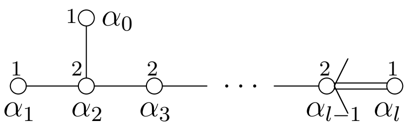
$A_2^{(2)}$



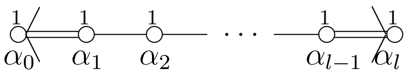
$A_{2l}^{(2)} (l \geqslant 2)$



$A_{2l-1}^{(2)} (l \geqslant 3)$



$D_{l+1}^{(2)} (l \geqslant 2)$



$E_6^{(2)}$

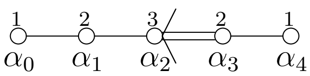
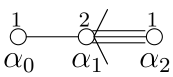


TABELA Aff 3

$D_4^{(3)}$



c) A numeração que aparece nos diagramas do item b) são as coordenadas do único vetor $\delta = (a_1, \dots, a_l)^t$, tal que $A\delta = 0$ e os a_is são inteiros positivos relativamente primos.

Demonstração: Veja [4], pag. 51, Teorema 4.8.

$\square$

Proposição 2.3.2. *Seja A uma MCG indecomponível de ordem n. Então são equivalentes:*

i) A é do tipo finito;

ii) $|\Delta| < \infty$;

iii) $\mathfrak{g}(A)$ é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita;

iv) existe $\alpha \in \Delta_+$ tal que $\alpha + \alpha_i \notin \Delta$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Veja [4], pag. 55, Proposição 4.9.

□

Observações 2.3.1. *Referente aos resultados apresentados podemos comentar que:*

i) A classificação dos diagramas do tipo finito é exatamente a mesma dos diagramas das álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado.

ii) Na tabela Fin, os vértices dos diagramas estão enumerados pelos símbolos $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, e cada diagrama $X_l^{(1)}$ da tabela Aff 1 é obtido do diagrama X_l (da tabela Fin), pela adição de um vértice, enumerado por α_0 e mantendo o restante da enumeração já existente nos vértices originais; na MCG isso é equivalente ao acréscimo de uma linha "0" e uma coluna "0" (veja Proposição 3.2.1). Os vértices dos diagramas das tabelas Aff 2 e Aff 3 estão enumerados pelos símbolos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

iii) Os números em parênteses na tabela Fin são os det A. As etiquetas numéricas nas tabelas Affs são os coeficientes de uma dependência linear entre as colunas de A.

iv) O tipo afim divide-se em duas classes, as não torcidas listadas na tabela Aff 1 e torcidas listadas nas tabelas Aff 2 e Aff 3.

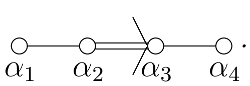
Definição 2.3.3. *Uma raiz de um sistema de raízes finito Δ que satisfaz a condição iv) da Proposição 2.3.2, é chamada **raiz de altura máxima**. Tal raiz é única e é dada pela fórmula*

$$\theta = \sum_{i=1}^{l} b_i \alpha_i,$$

onde b_i são os rótulos (etiquetas) do diagrama de Dynkin estendido referente à posição i da tabela aff 1, e α_i são as raízes em cada vértice do mesmo. Perceba que excluímos a posição "0", já que estamos no contexto de álgebras de tipo finito (vamos generalizar esse conceito mais adiante).

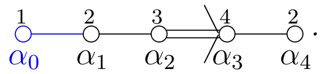
Exemplo 2.3.2. *Consideremos uma matriz A do tipo F_4 da tabela Fin., temos então A e seu respectivo diagrama de Dynkin (exemplo 1.11.4):*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



As entradas que satisfazem a definição 2.3.2 são a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}, a_{34} e a_{43}, a diagonal é toda igual a 2 e as demais entradas são nulas. A matriz B do tipo $F_4^{(1)}$ da tabela Aff 1, é obtida adicionando uma 'linha 0' e uma 'coluna 0' à matriz A, e no diagrama basta adicionar mais um vértice α_0:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Em B, basta analisar a_{01} e a_{10}. Denotando as colunas de B por $c_0, \ldots, c_4$, temos que $1c_0 + 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 2c_4 = 0$, portanto, as etiquetas numéricas são realmente coeficientes de uma dependência linear entre as colunas de B. Veja ainda que A tem posto 4, sendo det $A \neq 0$, já o posto de B também é 4 e det $B = 0$.

Observações 2.3.2. *Sobre a simplicidade de $\mathfrak{g}(A)$ temos:*

- *Se A é do tipo finito, então $\mathfrak{g}(A)$ é simples.*
- *Se A é do tipo afim, então $\mathfrak{g}(A)/Z$ é simples, onde Z é o centro de $\mathfrak{g}(A)$.*

2.4 Sistema de raízes

Nesta seção, damos uma descrição do sistema de raízes Δ de uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$. Nosso principal instrumento é a noção de raiz imaginária, que não tem contrapartida na teoria das dimensões finitas.
Antes de iniciar o estudo do sistema de raízes de uma álgebra de Kac-Moody, precisamos comentar sobre duas ferramentas importantes: a forma bilinear invariante e o grupo de Weyl.

2.4.1 A forma bilinear invariante e o grupo de Weyl

Definição 2.4.1. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Diremos que A é **simetrizável** se existe uma matriz diagonal inversível $D = diag(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ ($\epsilon_i \neq 0$) e uma matriz simétrica $B = (b_{ij})$ tais que*

$$A = DB.$$

*Chamamos a matriz B de **simetrização** de A e $\mathfrak{g}(A)$ de álgebra de Lie **simetrizável**.*

Definição 2.4.2. *Fixe a matriz A da definição acima, e seja $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ uma realização de A. Fixamos o subespaço complementar $\mathfrak{h}''$ do subespaço $\mathfrak{h}' = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}\alpha_i^V$ em $\mathfrak{h}$, e definimos uma **forma bilinear simétrica** $(\cdot \mid \cdot) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$, pelas seguintes equações:*

$(*)$ $\qquad (\alpha_i^V \mid H) = \langle \alpha_i, H \rangle \epsilon_i$, $\forall H \in \mathfrak{h}$, $i = 1, \ldots, n$;

$(**)$ $\qquad (H_1 \mid H_2) = 0$, $\forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}''$.

Como $\alpha_1^V, \ldots, \alpha_n^V$ são linearmente independentes, então $(\cdot \mid \cdot)$ é bem definida (lembre que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$).

De $A = DB$, vem $a_{ij} = \epsilon_i b_{ij} = \epsilon_i b_{ji}$, então por $(*)$ e o item ii), da definição 2.1.1, temos:

$(***)\qquad (\alpha_i^V \mid \alpha_j^V) = \langle \alpha_i, \alpha_j^V \rangle \epsilon_i = a_{ji}\epsilon_i = b_{ij}\epsilon_i\epsilon_j$ para $i, j = 1, \ldots, n$.

Lema 2.4.1. *A respeito de $(\cdot \mid \cdot)$ temos:*

i) O Núcleo da restrição da forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ a $\mathfrak{h}'$ coincide com $\mathfrak{c}$ (centro de $\mathfrak{g}(A)$).

ii) A forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ é não degenerada em $\mathfrak{h}$.

Demonstração: i) Basta ver que o núcleo é da forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ é $\{H \in \mathfrak{h}' : (\alpha_i^V \mid H) = \langle \alpha_i, H \rangle = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n\}$ pois $\{\alpha_1^V, \ldots, \alpha_n^V\}$ é uma base de $\mathfrak{h}'$ (definição A.4.2), e aplicar Proposição 2.2.3. Em ii), veja que para todo $H \in \mathfrak{h}$, $(\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i^V \mid H) = \sum_{i=1}^n c_i(\alpha_i^V \mid H) = \sum_{i=1}^n c_i\epsilon_i\langle \alpha_i, H \rangle = \langle \sum_{i=1}^n c_i\epsilon_i\alpha_i, H \rangle$ (lembre que $c_i\epsilon_i\langle \alpha_i, H \rangle = c_i\epsilon_i\alpha_i(H) = \alpha_i(c_i\epsilon_i H)$).

□

Observação 2.4.1. *Como a forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ é não degenerada em $\mathfrak{h}$, podemos considerar o isomorfismo $\nu : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ definido por $H \longmapsto \nu(H) = (H \mid \cdot)$, isto é,*

$$\nu(H)(H') = \langle \nu(H), H' \rangle = (H \mid H'),\ H, H' \in \mathfrak{h},$$

ou ainda, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ existe um único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha = (H_\alpha \mid \cdot)$. Agora podemos induzir uma forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ em $\mathfrak{h}^*$, para isso basta tomar o caminho natural $(\alpha \mid \beta) := (\nu^{-1}(\alpha) \mid \nu^{-1}(\beta)) = (H_\alpha \mid H_\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$.

Por $(*)$, temos $\nu(\alpha_i^V)(H) = (\alpha_i^V \mid H) = \langle \alpha_i, H \rangle \epsilon_i = \epsilon_i\alpha_i(H)$, o que implica $\nu(\alpha_i^V) = \epsilon_i\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$.

A partir de $(***)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, deduzimos

$$(\alpha_i \mid \alpha_j) = \langle \alpha_i, \alpha_j^V \rangle \epsilon_j^{-1} = a_{ji}\epsilon_j^{-1} = b_{ij} = a_{ij}\epsilon_i^{-1}. \tag{2.3}$$

Teorema 2.4.1. *Seja $\mathfrak{g}(A)$ uma álgebra de Lie simetrizável, onde A é a matriz da definição 2.4.1. Então, existe uma forma bilinear simétrica não degenerada em $\mathfrak{g}(A)$, a valores em $\mathbb{C}$, denotada por $(\cdot \mid \cdot)$, tal que* [3]*:*

a) $(\cdot \mid \cdot)$ é invariante, ou seja, $([X, Y] \mid Z) = (X \mid [Y, Z])$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}(A)$.

b) $(\cdot \mid \cdot)$ restrita a $\mathfrak{h}$ é definida por $(*)$ e $(**)$ e é não degenerada.

c) $(\mathfrak{g}_\alpha \mid \mathfrak{g}_\beta) = 0$, sempre que $\alpha + \beta \neq 0$.

[3] Não confundir com a forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ em $\mathfrak{h}$ definida anteriormente, porém podemos estendê-la a uma desse tipo em $\mathfrak{g}(A)$.

d) $(\cdot \mid \cdot)$ *restrita a* $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *é não degenerada para* $\alpha \neq 0$*, e consequentemente* $\mathfrak{g}_\alpha$ *e* $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ *são pareados de forma não degenerada por* $(\cdot \mid \cdot)$.

e) $[X, Y] = (X \mid Y)\nu^{-1}(\alpha)$*, para* $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$.

Demonstração: Veja [4], pag. 17, Teorema 2.2.

□

Supondo que $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma MCG simetrizável, podemos fixar uma decomposição

$$A = diag(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)(b_{ij})_{i,j=1}^n, \tag{2.4}$$

onde os ϵ_i's são números racionais positivos e (b_{ij}) é uma matriz racional simétrica. Tal decomposição sempre existe e, além disso, se A é indecomponível, então a matriz $diag(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, a menos de um fator constante, é unicamente determinada.

Observações 2.4.1.

i) Fixe uma forma bilinear simétrica não degenerada $(\cdot \mid \cdot)$ *associada à decomposição* (2.4) *conforme na definição 2.4.2. Por* (2.3)*, para* $i, j = 1, \ldots, n$*, temos:*

$$\begin{aligned}
(\alpha_i \mid \alpha_i) &= a_{ii}\epsilon_i^{-1} = 2\epsilon_i^{-1} > 0; \\
(\alpha_i \mid \alpha_j) &= a_{ij}\epsilon_i^{-1} \leqslant 0 \quad para \quad i \neq j; \\
\alpha_i^V &= \nu^{-1}(\alpha_i\epsilon_i) = \epsilon_i\nu^{-1}(\alpha_i) = \frac{2}{(\alpha_i \mid \alpha_i)}\nu^{-1}(\alpha_i).
\end{aligned}$$

Com as relações acima, obtemos a expressão usual para a MCG:

$$A = \left(\frac{2(\alpha_i \mid \alpha_j)}{(\alpha_i \mid \alpha_i)}\right)_{i,j=1}^n.$$

ii) Estendemos a forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ *de* $\mathfrak{h}$ *para uma forma bilinear invariante simétrica* $(\cdot \mid \cdot)$ *em toda a álgebra de Kac Moody* $\mathfrak{g}(A)$*, pelo Teorema 2.4.1, tal forma existe e satisfaz todas as propriedades descritas lá. Prova-se também, que essa forma estendida é única.*

iii) A forma bilinear $(\cdot \mid \cdot)$ *em* $\mathfrak{g}(A)$*, do Teorema 2.4.1 , que satisfaz* $(\alpha_i \mid \alpha_i) > 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$*, é chamada de* ***forma bilinear invariante padrão***.

Apresentaremos a seguir, a noção de grupo de Weyl de uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$. Mas antes precisamos definir a reflexão[4] fundamental.

Definição 2.4.3. *Seja* $\mathfrak{g}(A)$ *uma álgebra de Kac-Moody com* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$*. Para cada* $i = 1, \ldots, n$*, definimos a* ***reflexão fundamental*** r_i *do espaço* $\mathfrak{h}^*$ *por*

$$r_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^V \rangle \alpha_i, \ \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

[4]Veja A.3.

Em particular, $r_i(\alpha_j) = \alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i^V \rangle \alpha_i = \alpha_i - a_{ij}\alpha_i \in Q$ $(r_i(\alpha_i) = -\alpha_i)$, *o que nos dá* $r_i Q \subset Q$.

Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ é linearmente independente, podemos completá-lo para obter uma base de $\mathfrak{h}^*$, então para cada i fixado, escrevendo a matriz A_i de r_i nessa base, teremos $det\ A_i = -1$ e ela é sua própria inversa, portanto, $r_i^2 = 1$. O conjunto de pontos fixos $T_i = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \langle \lambda, \alpha_i^V \rangle = 0\}$ de r_i, é um hiperplano de $\mathfrak{h}^*$, somando-se ao fato de $r_i(\alpha_i) = -\alpha_i$, conclui-se que realmente r_i é uma reflexão, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definição 2.4.4. *O subgrupo W dos automorfismos*[5] *de $\mathfrak{h}^*$ gerados por todas as reflexões fundamentais é chamado de **grupo de Weyl** de $\mathfrak{g}(A)$. Escreveremos $W(A)$ quando for necessário enfatizar a dependência de A.*

2.4.2 Raízes reais e raízes imaginárias

Definição 2.4.5. *Uma raiz $\alpha \in \Delta$ é chamada **raiz real** se existe $w \in W$ tal que $w(\alpha)$ é uma raiz simples ($w(\alpha) \in \Pi$). Denotamos por Δ^{re}, Δ_+^{re} e Δ_-^{re} o conjunto das raízes reais, raízes reais positivas e raízes reais negativas, respectivamente.*

Como os elementos de W são isomorfismos, temos que se $\alpha \in \Delta^{re}$, então $\alpha = w(\alpha_i)$ para algum $\alpha_i \in \Pi$ e $w \in W$. Podemos definir a reflexão r_α com respeito a $\alpha \in \Delta^{re}$ por

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^V \rangle \alpha,\ \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Proposição 2.4.1. *Seja α uma raiz **real** de uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$. Então,*

(a) $mult(\alpha) = 1$.

(b) $k\alpha$ é uma raiz se, e somente se, $k = \pm 1$.

(c) Se $\beta \in \Delta$, então existem inteiros não negativos p e q relacionados pela equação

$$p - q = \langle \beta, \alpha^V \rangle,$$

tais que $\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ se, e somente se, $-p \leqslant k \leqslant q$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Suponha que A é simetrizável e seja $(\cdot \mid \cdot)$ a forma bilinear invariante padrão em $\mathfrak{g}(A)$. Então,

i) $(\alpha \mid \alpha) > 0$;

ii) $\alpha^V = 2\nu^{-1}(\alpha)/(\alpha \mid \alpha)$;

iii) se $\alpha = \sum_i k_i\alpha_i$, então $k_i(\alpha_i \mid \alpha_i) \in (\alpha \mid \alpha)\mathbb{Z}$.

(e) Devido $\pm\alpha \notin \Pi$, existe i tal que

[5] Lembre que cada r_i é um isomorfismo.

$$|ht\ r_i(\alpha)| < |ht\ \alpha|.$$

Demonstração: Veja [4], pag. 59, Proposição 5.1.

□

Sejam A uma MCG simetrizável e $(\cdot \mid \cdot)$ a forma bilinear invariante padrão (veja observação 2.4.1, item iii)). Então, dada uma raiz real α, temos $|\alpha|^2 = (\alpha \mid \alpha) = (w(\alpha_i) \mid w(\alpha_i)) = (\alpha_i \mid \alpha_i) = |\alpha_i|^2$, para alguma raiz simples α_i.

Definição 2.4.6. *Diremos que α é uma raiz real **curta** (respectivamente **longa**), se*

$$(\alpha \mid \alpha) = min_i(\alpha_i \mid \alpha_i)$$

(respectivamente $(\alpha \mid \alpha) = max_i(\alpha_i \mid \alpha_i)$). Esses não dependem da escolha da forma padrão.

Definição 2.4.7. *Uma raiz α que não é real é chamada de **raiz imaginária**. Denotamos por Δ^{im}, Δ^{im}_+ e Δ^{im}_- o conjunto das raízes imaginárias, raízes imaginárias positivas e raízes imaginárias negativas, respectivamente.*

Por definição, temos

$$\Delta = \Delta^{re} \sqcup \Delta^{im} \text{ (união disjunta)},$$

além disso, $\Delta^{re} = \Delta^{re}_+ \sqcup -\Delta^{re}_+$ e $\Delta^{im} = \Delta^{im}_+ \sqcup -\Delta^{im}_+$.

Proposição 2.4.2. *As raízes imaginárias possuem as seguintes propriedades:*

i) O conjunto Δ^{im}_+ é W-invariante, isto é, para todo $w \in W$ tem-se $w(\Delta^{im}_+) \subset \Delta^{im}_+$.

ii) Se A é simetrizável e $(\cdot \mid \cdot)$ é a forma bilinear invariante padrão, então uma raiz α é imaginária se, e somente se, $(\alpha \mid \alpha) \leqslant 0$.

Demonstração: Veja [4], pag. 61, Proposição 5.2.

□

Definição 2.4.8. *Para $\alpha = \sum_i k_i\alpha_i \in Q$, definimos o **suporte** de α (denotaremos por $supp(\alpha)$), como sendo o subdiagrama de $S(A)$ que consiste dos vértices i tais que $k_i \neq 0$, e de todas as arestas que ligam esses vértices. O $supp(\alpha)$ é conectado, para toda raiz α de $\mathfrak{g}(A)$.*

Teorema 2.4.2. *Seja A uma MCG indecomponível. Então,*

i) Se A é do tipo finito, então o conjunto Δ^{im} é vazio, isto é, a álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ não possui raízes imaginárias.

ii) Se A é do tipo afim, então

$$\Delta^{im}_+ = \{n\delta(n = 1, 2, \ldots)\},$$

onde $\delta = \sum_{i=0}^{l} b_i\alpha_i$*, e os* b_i*s são as etiquetas de* $S(A)$ *nas tabelas Affs e* α_i *os respectivos vértices de* $S(A)$*.*

iii) Se A *é do tipo indeterminado, então existe uma raiz imaginária positiva* $\alpha = \sum_i k_i\alpha_i$ *tal que* $k_i > 0$ *e* $\langle \alpha, \alpha_i^V \rangle < 0$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$*.*

Demonstração: Veja [4], pag. 64, Teorema 5.6.

□

Considere agora, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ uma álgebra de Kac-Moody associada a uma matriz A do tipo afim (tabelas *Aff 1*, *Aff 2* e *Aff 3*). De $\mathfrak{g}(A)$, sejam $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\} \subset \mathfrak{h}^*$ o conjunto das raízes simples, $\Pi^V = \{\alpha_0^V, \ldots, \alpha_l^V\} \subset \mathfrak{h}$ o conjunto das coraízes simples, Δ o sistema de raízes, Q e Q^V o reticulado de raízes e o reticulado de coraízes, respectivamente.
Denote por $\dot{\mathfrak{g}}$ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada pelos e_i's e f_i's (como álgebras de Lie). Veja que $\dot{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Kac-Moody associada à matriz $\dot{A}$, obtida retirando a linha 0 e a coluna 0 da matriz A. Com relação a $\dot{\mathfrak{g}}$, os elementos e_i e f_i $(i = 1, \ldots, l)$ são os geradores de chevalley, $\dot{\mathfrak{h}} = \dot{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan, $\dot{\Pi} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \dot{\mathfrak{h}}^*$ é a base de raízes, $\dot{\Pi}^V = \{\alpha_1^V, \ldots, \alpha_l^V\} \subset \dot{\mathfrak{h}}$ é a base de coraízes. Pela Proposição 2.3.2, $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\dot{A})$ é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita cujo diagrama de Dynkin $S(\dot{A})$ é obtido removendo o vértice 0 de $S(A)$.

O conjunto $\dot{\Delta} = \Delta \cap \dot{\mathfrak{h}}^*$ é o sistema de raízes de $\dot{\mathfrak{g}}$, este é finito e consiste de raízes reais. $\dot{\Delta}_+ = \dot{\Delta} \cap \Delta_+$ é o conjunto das raízes positivas e denote por $\dot{\Delta}_s$ e $\dot{\Delta}_l$ as raízes curtas e raízes longas de $\dot{\Delta}$, respectivamente, e coloque $\dot{Q} = \mathbb{Z}\dot{\Delta}$.
Do Teorema 2.4.2, item ii), temos que o conjunto de raízes imaginárias e raízes imaginárias positivas da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são da forma:

$$\Delta^{im} = \{\pm\delta, \pm 2\delta, \ldots\} \text{ e } \Delta_+^{im} = \{\delta, 2\delta, \ldots\}.$$

A seguinte proposição descreve o conjunto das raízes reais Δ^{re} e raízes reais positivas Δ_+^{re} de álgebra de Lie associada à uma MCG do tipo afim em termos de $\dot{\Delta}$ e δ.

Proposição 2.4.3. *Seja a álgebra de Kac-Moody* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$*, onde* A *pertence à tabela Aff* r*. Então,*

i) $\Delta^{re} = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \dot{\Delta},\ n \in \mathbb{Z}\}$ *se* $r = 1$*.*

ii) $\Delta^{re} = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \dot{\Delta}_s,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + nr\delta : \alpha \in \dot{\Delta}_l,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *se* $r = 2$ *ou* 3*, mas* A *não é do tipo* $A_{2l}^{(2)}$*.*

iii) $\Delta^{re} = \{\frac{1}{2}(\alpha + (2n-1)\delta) : \alpha \in \dot{\Delta}_l,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + n\delta : \alpha \in \dot{\Delta}_s,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + 2n\delta : \alpha \in \dot{\Delta}_l,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *se* A *é do tipo* $A_{2l}^{(2)}$*.*

iv) $\Delta^{re} + r\delta = \Delta^{re}$*.*

v) $\Delta_+^{re} = \{\alpha \in \Delta^{re} \text{ com } n > 0\} \cup \dot{\Delta}_+$*.*

Demonstração: Veja [4], pag. 83, Proposição 6.3.

□

Definição 2.4.9. *Utilizando o mesmo δ visto acima, vamos introduzir o seguinte elemento importante:*

$$\theta = \delta - b_0\alpha_0 = \sum_{i=1}^{l} b_i\alpha_i \in \dot{Q}.$$

Considerando o isomorfismo da observação 2.4.1, podemos destacar:

$$\theta = b_0\nu(\theta^V), \quad |\theta^V|^2 = 2b_0^{-1} \quad e \quad \alpha_0^V = \nu^{-1}(\delta - \theta),$$

e além disso, no caso em que A é do tipo da tabela Aff 1, tem-se $b_0 = 1$ e daí $\theta = \nu(\theta^V)$ e $|\theta^V|^2 = 2$.

Proposição 2.4.4. *a) Se A é da tabela Aff 1 ou do tipo $A_{2l}^{(2)}$, então $\theta \in (\dot{\Delta}_+)_l$ e θ é a única raiz em $\dot{\Delta}$ de altura máxima.*

b) Se A é da tabela Aff 2 ou 3 e não é do tipo $A_{2l}^{(2)}$, então $\theta \in (\dot{\Delta}_+)_s$ e θ é a única raiz em $\dot{\Delta}$ de altuta máxima.

Demonstração: Veja [4], pag. 85, Proposição 6.4.

□

Salvo indicação em contrário, no caso de uma matriz de tipo finito A, vamos normalizar a forma padrão invariante $(\cdot \mid \cdot)$ em $\mathfrak{g}(A)$ pela condição

$$(\alpha \mid \alpha) = 2, \text{ se } \alpha \in \Delta_l,$$

e chamaremos de forma invariante normalizada.

O próximo lema fornece alguns resultados que vamos utilizar com frequência no capítulo seguinte.

Lema 2.4.2. *Considere a decomposição em espaços de raízes de uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha$. Então:*

1. *$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in Q$.*
2. *Seja ω a involução de Chevalley e $\alpha \in Q$. Então, $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$.*
3. *$(\mathfrak{g}_\alpha \mid \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$, para todo $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq 0$. Consequentemente, no caso em que $\alpha \in \Delta^{re}$, para $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, com $X, Y \neq 0$, tem-se $(X \mid Y) \neq 0$.*

Demonstração:

1. Sejam $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ quaisquer, então para todo $H \in \mathfrak{h}$, $[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X$ e $[H, Y] = \langle \beta, H \rangle Y$. Utilizando a identidade de Jacobi, temos:

$$\begin{aligned} [H,[X,Y]] = [[Y,H],X] + [[H,X],Y] &= -[\langle \beta, H\rangle Y, X] + [\langle \alpha, H\rangle X, Y] \\ &= \langle \beta, H\rangle [X,Y] + \langle \alpha, H\rangle [X,Y] \\ &= \langle \alpha+\beta, H\rangle [X,Y]. \end{aligned}$$

Isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$.

2. Para $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, tem-se $[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Então,

$$\begin{aligned}[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X \Rightarrow \omega([H, X]) = \omega(\langle \alpha, H \rangle X) &\Rightarrow [\omega(H), \omega(X)] = \langle \alpha, H \rangle \omega(X) \\ &\Rightarrow [-H, \omega(X)] = \langle \alpha, H \rangle \omega(X) \\ &\Rightarrow [H, \omega(X)] = \langle -\alpha, H \rangle \omega(X).\end{aligned}$$

   Portanto, $\omega(X) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$.

3. Do Teorema 2.4.1, item d), temos que a forma $(\cdot \mid \cdot)$ restrita à $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$ é não degenerada e, por consequência, $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ são pareados de forma não degenerada por $(\cdot \mid \cdot)$. De fato, seja $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $(X \mid W) = 0$ para todo $W \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então para todo $Y + Z \in \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$, vem que $(X \mid Y + Z) = (X \mid Y) + (X \mid Z) = 0$, pois $(X \mid Z) = 0$ por hipótese, e $(X \mid Y) = 0$ pelo fato de $\alpha + \alpha \neq 0$ (Teorema 2.4.1, item c)). Claramente $X \in \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$, logo $X = 0$ e, portanto, $(\mathfrak{g}_\alpha \mid \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$. Quando α é uma raiz real, a Proposição 2.4.1, item a), garante $dim(\mathfrak{g}_\alpha) = dim(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = 1$, então considere $\{X\}$ e $\{Y\}$ as bases de $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, respectivamente. Necesariamente, $(X \mid Y) \neq 0$, caso contrário $\mathfrak{g}_\alpha = 0$. Então, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, com $X, Y \neq 0$ implica $(X \mid Y) \neq 0$.

$\square$

Este Lema completa a breve introdução que fizemos sobre as álgebras de Kac-Moody. Caso o leitor esteja interessado num estudo mais aprofundado, ou detalhes sobre o que apresentamos neste trabalho, recomendamos [4] e [5].

Capítulo 3

Álgebras de loop e álgebras de Kac-Moody afim não torcidas

Para σ é um automorfismo de ordem finita de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, Victor Kac introduziu a álgebra de loop $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ de $\mathfrak{g}$ determinada por σ, onde $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ é dita não torcida se $\sigma = Id$, e torcida caso contrário. Kac estava interessado em álgebras de loop, desde que, no caso em que a álgebra de base $\mathfrak{g}$ é simples de dimensão finita, as álgebras de loop fornecem construções explícitas (ou realizações) de álgebras de Kac-Moody afim sobre o corpo dos complexos. Neste capítulo, focaremos na construção das álgebras de Kac-Moody afim **não torcidas**, isto é, vamos construir tais álgebras por meio de álgebras de loop, cuja álgebra base é uma álgebra Lie simples de dimensão finita e, este, é o resultado principal deste trabalho.

3.1 Álgebras de loop

Nesta seção, vamos introduzir o conceito geral de álgebras de loop e apresentar o chamado princípio das álgebras de loop.

Antes de começar, relembre que num corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ de característica nula, a equação $z^n - 1 = 0$, com $n = 1, 2, \ldots$, possui exatamente n raízes distintas em $\mathbb{K}$ e, tais raízes, são conhecidas como raízes n-ésimas da unidade. Qualquer raiz n-ésima da unidade $z \in \mathbb{K}$, com $z \neq 1$, chama-se **raiz n-ésima primitiva da unidade** (ou raiz primitiva das raízes n-ésimas da unidade), quando n é o menor inteiro positivo não nulo tal que $z^n = 1$ ou, equivalentemente, quando $z, z^2, \ldots, z^{n-1}, z^n$ são **todas** as raízes n-ésimas da unidade (obviamente $z^n = 1$). Em outras palavras, todas as outras raízes n-ésimas da unidade são potências da n-ésima raiz primitiva da unidade. Note ainda que, conforme as potências aumentam, as raízes comportam-se de modo cíclico.

Denotaremos por $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero e, a menos que seja explicitamente mencionado, $\otimes$ denotará o produto tensorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Fixemos a família $(\zeta_n)_{n\geq 1}$, onde ζ_n denota a n-ésima raíz primitiva da unidade em $\mathbb{K}^{\times}$ e, antes de definir álgebras de loop, precisamos introduzir $R \subset S_m \subset \hat{S}$, que são três anéis dados por:

$$R := \mathbb{K}[t^{\pm 1}] = \mathbb{K}[t, t^{-1}];$$
$$S_m := \mathbb{K}[t^{\pm 1/m}] = \mathbb{K}[t^{1/m}, t^{-1/m}];$$
$$\hat{S} := \varinjlim \hat{S_m}.$$

Apesar da aparente hostilidade, este último anel possui uma interpretação bem mais simples. Como um $\mathbb{K}$-espaço[1], $\hat{S}$ pode ser naturalmente identificado com $\bigoplus_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{K}t^q$, onde a multiplicação de seus elementos é dada pela extensão bilinear de $t^p t^q = t^{p+q}$.

Uma **álgebra de loop**, é obtida por meio de um par (A, σ), que consiste de uma $\mathbb{K}$-álgebra A e um $\mathbb{K}$-automorfismo σ de A, de ordem finita m (menor natural não nulo tal que $\sigma^m = id_A$). Neste momento, não estabelecemos nenhuma suposição sobre a natureza da álgebra A. Dito isto, definimos:

Definição 3.1.1. *(Álgebra de loop) Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra A e $\sigma \in Aut_{\mathbb{K}}(A)$ (automorfismos de A) de ordem $m < \infty$. Considere a decomposição em autoespaços (veja A.1):*

$$A = \bigoplus_{i=0}^{m-1} A_{\bar{i}}, \text{ com } A_{\bar{i}} = \{a \in A : \sigma(a) = \zeta_m^i a\},$$

*onde $^{-} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (projeção canônica). Então, definimos a **álgebra de loop** de (A, σ) por*

$$L(A, \sigma) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_{\bar{i}} \otimes t^{i/m} \subset A \otimes S_m \subset A \otimes \hat{S}.$$

Um elemento $X \in L(A, \sigma)$, é escrito da forma $X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i$, com $c_i \in A_{\bar{i}} \otimes t^{i/m}$, de tal modo que apenas um número finito de c_i's são não nulos. Uma álgebra de loop possui a estrutura natural de $\mathbb{K}$-álgebra (de dimensão infinita sempre que $A \neq 0$), e mais, se A é algum dos "tipos" usuais de álgebras, como por exemplo: associativa, Lie, Jordan e etc, então $L(A, \sigma)$ também é.

Exemplo 3.1.1. *Dizemos que $L(A, \sigma)$ é **trivial** se $L(A, \sigma) \simeq A \otimes R$ (isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras). Vejamos que $L(A, Id_A) = A \otimes R$: de fato, um elemento de $L(A, Id_A)$ é composto por somatórios finitos de elementos da forma $a_i \otimes t^j$, com $i, j \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in A$, por outro lado, um elemento de $A \otimes R$ é um somatório finito de elementos da forma $a_i \otimes P_n$, com $i, n \in \mathbb{Z}$, $a_i \in A$ e $P_n \in R$, mas usando a $\mathbb{K}$-bilinearidade do produto tensorial, temos que tal elementos $a_i \otimes P_n$ é composto por somatórios finitos de elementos da forma $a_i \otimes t^j$, com $i, j \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in A$, portanto, concluímos que $L(A, Id_A) = A \otimes R$.*

Sobre isomorfismo de álgebras de loop

É natural questionar quando duas álgebras de loop, proveniente de dois automorfismos, são isomorfas. Levando em consideração esta pergunta, evidências empíricas

[1]Lembre-se que comumente nossos objetos de estudo são módulos sobre um corpo $\mathbb{K}$, isto é, são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e, como é esperado, utilizaremos os conhecimentos de álgebra linear.

sugerem que as álgebras de loop tendem a comportar-se de acordo com o seguinte princípio:

O princípio das álgebras de loop: *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Existe um subgrupo normal $Int(A)$ de $Aut_{\mathbb{K}}(A)$, com a propriedade de que para quaisquer dois automorfismos de ordem finita σ e τ de A, tem-se*

$$L(A,\sigma) \simeq_{\mathbb{K}-alg} L(A,\tau) \Leftrightarrow \overline{\sigma} \sim \overline{\tau}^{\pm 1},$$

onde $^{-} : Aut_{\mathbb{K}}(A) \longrightarrow Aut_{\mathbb{K}}(A)/Int(A)$ *é a projeção canônica.*

Este pricípio permite determinar se duas álgebras de loop são isomorfas somente olhando os automorfismos e, caso tenha-se informações sobre uma das álgebras de loop, podemos obter informações sobre a outra sem apresentar explicitamente a sua forma.

Aqui, e no decorrer da teoria, o simbolo "$\sim$" denota a conjugação[2] no grupo abstrato em questão, no presente caso, $Aut_{\mathbb{K}}(A)/Int(A)$ é o grupo considerado (o grupo $Aut_{\mathbb{K}}(A)/Int(A)$ corresponde ao grupo de automorfismos do diagrama de Dynkin como objeto geométrico).

O princípio das álgebras de loop ainda não possui uma demonstração para um grupo genérico de álgebras, no entanto, existem certos tipos específicos de álgebras onde o princípio é verificado. Neste ponto, a relação entre as álgebras de Kac-Moody e as álgebras de loop começa a se fazer presente, pois quando consideramos uma álgebra de Kac-Moody associada à MCG simetrizável indecomponível, o princípio das álgebras de loop é válido, em particular, também é válido para álgebras de Lie simples de dimensão finita. Pode-se encontrar a demonstração geral desse fato em [8], porém, caso o leitor queira a demonstração apenas no caso de álgebras de Lie simples, pode encontrar em [9].

3.2 Álgebras de Kac-Moody como extensão central de álgebras de loop

Nesta seção, vamos considerar o caso de uma álgebra de Kac-Moody associada a uma MCG A do tipo afim. Lembre-se que esta é uma matriz cujos menores principais são positivos, mas $det\ A = 0$ (A é então automaticamente indecomponível). Uma álgebra de Kac-Moody associada a uma MCG do tipo afim é chamada de álgebra afim (ou álgebra de Kac-Moody afim, ou ainda, álgebra de Lie afim). Mais precisamente, manteremos nosso foco na construção explícita (ou realização) das álgebras de Kac-Moody afim não torcidas, aquelas associadas às matrizes da tabela *Aff* 1. Tal construção será realizada por meio de álgebras de loop. Salvo dito o contrário, vamos considerar álgebras sobre o corpo dos complexos.

[2]Sejam G um grupo e $a, b \in G$. $a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $gag^{-1} = b$. Esta é uma relação de equivalência, onde a classe de equivalência $\overline{a} := cl(a) = \{b \in G : a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G, gag^{-1} = b\} = \{gag^{-1} : g \in G\}$, é chamada de classe de conjugação de a.

3.2.1 Preliminares

Considere $\mathfrak{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ a álgebra dos polinômios de Laurent[3] na variável t, isto é, um polinômio $P \in \mathfrak{L}$ é da forma $P = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i t^i$, onde $c_i \neq 0$ para apenas um número finito de c_i's. Considere também, a derivada de P como sendo o polinômio $\frac{dP}{dt} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} ic_i t^{i-1}$ (note que ic_i ocupa a posição $i-1$ em $\frac{dP}{dt}$ e que valem todas as regras vistas no cálculo).

Definição 3.2.1. *Seja $P = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i t^i$ um polinômio de Laurent. Definimos o **resíduo** de P, e donotamos por $Res\ P$, como sendo o coeficiente que corresponde a posição -1, ou seja, $Res\ P = c_{-1}$. $Res\ P$ é um funcional linear em $\mathfrak{L}$ com as seguintes propriedades:*

$$Res\ t^{-1} = 1 \quad e \quad Res\ \frac{dP}{dt} = 0.$$

Definição 3.2.2. *A partir do resíduo de um polinômio, vamos definir uma função bilinear $\varphi : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\varphi(P, Q) = Res\ \frac{dP}{dt}Q.$$

Utilizando que $\frac{d(PQ)}{dt} = \frac{dP}{dt}Q + P\frac{dQ}{dt}$ e $Res\ \frac{dP}{dt} = 0$, prova-se que, para $P, Q, R \in \mathfrak{L}$, φ possui as seguintes propriedades:

$(*)$ $\varphi(P, Q) = -\varphi(Q, P)$;

$(**)$ $\varphi(PQ, R) + \varphi(QR, P) + \varphi(RP, Q) = 0$ (aplicações em ciclos).

Definição 3.2.3. *Seja $\dot{A} = (\dot{a}_{ij})_{i,j=1}^{l}$ uma matriz do tipo X_l (matriz da tabela Fin.) e $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\dot{A})$ a álgebra de Lie simples de dimensão finita associada à matriz $\dot{A}$. Considere $\theta = \sum_{i=1}^{l} b_i\alpha_i$ a raiz de altura máxima de $\dot{\mathfrak{g}}$ e a co-raiz $\theta^V = \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i^V$ de θ. Podemos definir uma MCG do tipo afim $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{l}$, a partir de $\dot{A}$, adicionando uma coluna e uma linha "0" da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \dot{a}_{ij} \quad se \quad i, j = 1, \ldots, l; \\ a_{i0} &= -\sum_{j=1}^{l} b_j\dot{a}_{ij} \quad se \quad i = 1, \ldots, l; \\ a_{0j} &= -\sum_{i=1}^{l} c_i\dot{a}_{ij} \quad se \quad j = 1, \ldots, l; \\ a_{00} &= 2. \end{aligned}$$

[3]Quando $\mathbb{K}$ é qualquer corpo algebricamente fechado com $char(\mathbb{K}) = 0$ denotamos $R = \mathbb{K}[t, t^{-1}]$, no caso especial do corpo dos complexos, denotaremos $\mathfrak{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

Proposição 3.2.1. *A matriz A, do modo como foi definida acima, é uma MCG da tabela Aff 1, onde* $\dot{A} = X_l$ *e* $A = X_l^{(1)}$ $(X = A, B, C, D, E, F, G)$.

Demonstração: Veja [5], pag. 416, Proposição 18.1.

□

Definição 3.2.4. *A álgebra de Lie afim associada à matriz de MCG do tipo* $X_l^{(1)}$*, da tabela Aff 1, é chamada de* ***álgebra de Kac-Moody afim não torcida****. Uma matriz A do tipo* $X_l^{(1)}$ *com* $X = A, B, \ldots, G$ *nada mais é que a chamada* ***matriz de Cartan estendida*** *da álgebra de Kac-Moody de dimensão finita* $\dot{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}(\dot{A})$*, cuja matriz* $\dot{A}$ *é do tipo finito* X_l*, obtida de A removendo a coluna e linha "0". (Qualquer matriz da tabela Aff 1 é sempre uma "extensão" de alguma matriz da tabela Fin, acrescentando uma linha e uma coluna "0").*

3.2.2 Resultado principal

Passaremos agora para a construção da álgebra de Lie afim não torcida propriamente dita. Caso o leitor não tenha familiaridade com o produto tensorial de espaços vetoriais, recomenda-se que veja A.5.

Considere a **álgebra de loop** de $\dot{\mathfrak{g}}$

$$\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) := \mathfrak{L} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}},$$

que é a álgebra de Lie complexa de dimensão infinita cujo colchete de Lie, denotado por $[,]_0$, é dado por

$$[P \otimes X, Q \otimes Y]_0 = PQ \otimes [X, Y] \ (P, Q \in \mathfrak{L}; X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}).$$

É suficiente definir para os elementos da forma $P \otimes X$, pois $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ é composto por somas finitas e arbitrárias desses elementos. Utilizando as propriedades do produto tensorial de espaços vetoriais, para $P \in \mathfrak{L}$ e $X \in \dot{\mathfrak{g}}$, temos

$$P \otimes X = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i t^i\right) \otimes X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i t^i \otimes X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (t^i \otimes (c_i X)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (t^i \otimes X_i),$$

portanto, um elemento de $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ é uma soma finita e arbitrária de elementos da forma $\sum_i (t^i \otimes X_i)$, com $i \in \mathbb{Z}$ e $X_i \in \dot{\mathfrak{g}}$. Daí, podemos apresentar uma definição equivalente do colchete de Lie em $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ da seguinte forma:

$$[t^m \otimes X, t^n \otimes Y]_0 = t^{m+n} \otimes [X, Y] \ (m, n \in \mathbb{Z}; X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}).$$

Novamente é suficiente definir apenas para os elementos da forma $t^m \otimes X$ e usar a bilinearidade.

Observe que consideramos a $\mathbb{C}$-álgebra de Kac-Moody de dimensão finita $\dot{\mathfrak{g}}$, e obtemos a álgebra de loop $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{L} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}}$, onde $\mathfrak{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Veja que $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ é a álgebra de loop do par $(\dot{\mathfrak{g}}, Id_{\dot{\mathfrak{g}}})$, isto é, $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) = L(\dot{\mathfrak{g}}, Id_{\dot{\mathfrak{g}}})$ (veja exemplo 3.1.1).

Fixemos uma forma bilinear simétrica invariante não degenerada $(\cdot \mid \cdot)$ em $\dot{\mathfrak{g}}$, a valores em $\mathbb{C}$, tal forma existe e é única até multiplicação por escalar (veja Teorema 2.4.1). Por bilinearidade, estendemos esta forma a uma forma bilinear simétrica não degenerada $(\cdot \mid \cdot)_t$ em $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$, a valores em $\mathfrak{L}$, da seguinte forma:

$$(P \otimes X \mid Q \otimes Y)_t = PQ(X \mid Y) \ (P, Q \in \mathfrak{L}; X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}).$$

Assim como fizemos antes, podemos considerar uma definição equivalente:

$$(t^m \otimes X \mid t^n \otimes Y)_t = t^{m+n}(X \mid Y) \ (m, n \in \mathbb{Z}; X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}).$$

Veja que $(\cdot \mid \cdot)_t$ é invariante em $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$. De fato, sejam $P, Q, R \in \mathfrak{L}$ e $X, Y, Z \in \dot{\mathfrak{g}}$, então pelo fato de $(\cdot \mid \cdot)$ ser invariante em $\dot{\mathfrak{g}}$, tem-se

$$\begin{aligned}
([P \otimes X, Q \otimes Y]_0 \mid R \otimes Z)_t &= (PQ \otimes [X, Y] \mid R \otimes Z)_t = PQR \otimes ([X, Y] \mid Z) = \\
&= PQR \otimes (X \mid [Y, Z]) = (P \otimes X \mid QR \otimes [Y, Z])_t = \\
&= (P \otimes X \mid [Q \otimes Y, R \otimes Z]_0)_t.
\end{aligned}$$

Estendemos também, cada derivação D da álgebra $\mathfrak{L}$ (veja definição 1.4.1), a uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ por

$$D(P \otimes X) = D(P) \otimes X, \ (P \in \mathfrak{L}; X \in \dot{\mathfrak{g}}).$$

Ou ainda,

$$D(t^m \otimes X) = D(t^m) \otimes X, \ (m \in \mathbb{Z}; X \in \dot{\mathfrak{g}}).$$

Definição 3.2.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um 2-**cociclo**[4] sobre $\mathfrak{g}$, a valores em $\mathbb{C}$, é uma função bilinear ψ em $\mathfrak{g}$, a valores em $\mathbb{C}$, satisfazendo, para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, as seguintes condições:*

(Co1) $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$;

(Co2) $\psi([X, Y], Z) + \psi([Y, Z], X) + \psi([Z, X], Y) = 0$ *(aplicação em ciclo).*

Definição 3.2.6. *Defina a função* $\psi : \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \times \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \longrightarrow \mathbb{C}$, *dada por*

$$\psi(a, b) = Res\left(\frac{da}{dt} \mid b\right)_t.$$

A fim de esclarecer a definição da função ψ, vamos destacar:

i) $\dfrac{d}{dt}$ é uma derivação de $\mathfrak{L}$, portanto faz sentido falar em $\dfrac{da}{dt}$ quando $a \in \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$, basta estender a derivação.

ii) $\dfrac{da}{dt}$, $b \in \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$, então também faz sentido falar em $\left(\dfrac{da}{dt} \mid b\right)_t$.

[4]Conceito proveniente da teoria de cohomologia.

iii) $(\cdot \mid \cdot)_t$ assume valores em $\mathfrak{L}$ e isto justifica $Res\left(\frac{da}{dt} \mid b\right)_t$.

A função ψ, da definição 3.2.6, é um 2-cociclo na álgebra $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ a valores em $\mathbb{C}$, e isto pode ser provado sem muitas dificuldades, basta utilizar $(*)$ e $(**)$ (definição 3.2.2). Para ilustrar e fixar o que foi visto anteriormente, provaremos uma delas:

(Co1) Sejam $a = P \otimes X$ e $b = Q \otimes Y$, com $P, Q \in \mathfrak{L}$ e $X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}$. Então,

$$\begin{aligned}
\psi(a,b) &= \psi(P \otimes X, Q \otimes Y) = Res\left(\frac{d(P \otimes X)}{dt} \mid Q \otimes Y\right)_t = \\
&= Res\left(\frac{dP}{dt} \otimes X \mid Q \otimes Y\right)_t = Res\left(\frac{dP}{dt} Q (X \mid Y)\right) = \\
&= (X \mid Y) Res\left(\frac{dP}{dt} Q\right) = (X \mid Y)\varphi(P,Q).
\end{aligned}$$

Por $(*)$ e pela simetria de $(\cdot \mid \cdot)$ em $\dot{\mathfrak{g}}$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(a,b) &= (X \mid Y)\varphi(P,Q) = -(X \mid Y)\varphi(Q,P) = -(Y \mid X) Res\left(\frac{dQ}{dt} P\right) = \\
&= -Res\left(\frac{dQ}{dt} P (Y \mid X)\right) = -Res\left(\frac{dQ}{dt} \otimes Y \mid P \otimes X\right)_t = \\
&= -Res\left(\frac{d(Q \otimes Y)}{dt} \mid P \otimes X\right)_t = -\psi(Q \otimes Y, P \otimes X) = -\psi(b,a).
\end{aligned}$$

E isto mostra a validade de (Co1).

Antes de continuar, precisamos definir a extensão central de uma álgebra de Lie. Primeiramente, a sequência de homomorfismos de álgebras de Lie,

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathfrak{t} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g},$$

com i injetiva e π sobrejetiva, é dita uma **sequência exata curta**, se $ker(\pi) = Im(i)$, nesse contexto, dizemos que **$\mathfrak{t}$ é uma extensão central de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$**, se $ker(\pi) \subset Z(\mathfrak{t})$ (centro de $\mathfrak{t}$). Observe que $\mathfrak{h} \cong Im(i) = ker(\pi) \subset Z(\mathfrak{t})$, logo $\mathfrak{h}$ é abeliana.
Sempre podemos construir uma extensão central de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a partir de um 2-cociclo ψ definido em $\mathfrak{g}$. De fato, considere um espaço vetorial[5] unidimensional $\mathfrak{h} := \mathbb{C}K$, onde K é um símbolo. Fazemos $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K$, e definimos o seguinte colchete em $\mathfrak{g}'$:

$$[G_1 + \lambda K, G_2 + \mu K] = [G_1, G_2]_{\mathfrak{g}} + \psi(G_1, G_2)K.$$

Utilizando as propriedades do colchete $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ e do 2-cociclo ψ, prova-se que o colchete acima, define em $\mathfrak{g}'$ uma estrutura de álgebra de Lie. Daí, vamos considerar a seguinte sequência exata curta:

$$\mathbb{C}K \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$$

[5]Todo espaço vetorial é uma álgebra de Lie com o colchete trivial, isto é, $[\cdot,\cdot] = 0$.

com a inclusão $i(\lambda K) = 0 + \lambda K$ e a projeção $\pi(G_1 + \lambda K) = G_1$. Claramente, $\ker(\pi) = \mathbb{C}K$ e $[\mathbb{C}K, \mathfrak{g} + \mathbb{C}K] = 0$, portanto, $\ker(\pi) \subset Z(\mathfrak{g}')$, isto é, $\mathfrak{g}'$ é uma extensão central de $\mathfrak{g}$ por $\mathbb{C}K$.

Agora podemos retomar a construção. Vamos denotar por $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ a extensão central da álgebra de Lie $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ por um centro unidimensional associado ao cociclo ψ. Explicitamente, $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}K$ (soma direta de espaços vetoriais), onde K é um elemento central de $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$, e definimos um colchete dado por

$$[a + \lambda K, b + \mu K] = [a, b]_0 + \psi(a, b)K, \text{ com } a, b \in \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}); \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Lema 3.2.1. $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ *é uma álgebra de Lie com respeito ao colchete definido acima.*

Demonstração: Como ψ é bilinear, $[,]_0$ é bilinear em $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ e ambas são anti-simétricas, então claramente o colchete definido em $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ é bilinear, anti-simétrico e vale $[x, x] = 0$ para todo $x \in \tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$. Para concluir a identidade de Jacobi, basta ver que para $a + \lambda K, b + \mu K, c + \gamma K \in \tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$, tem-se

$$[[a + \lambda K, b + \mu K], c + \gamma K] = [[b + \mu K, c + \gamma K], a + \lambda K] - [[c + \gamma K, a + \lambda K], b + \mu K].$$

□

Considere agora o operador linear $d : \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ dado por

$$d(t^m \otimes X) = mt^m \otimes X, \text{ com } m \in \mathbb{Z}; X \in \dot{\mathfrak{g}}.$$

O operador definido acima satisfaz a regra de Leibniz de derivação de produto em relação ao colchete de $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$, então d é uma derivação de $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$. Com efeito, sejam $t^m \otimes X, t^n \otimes Y$ com $m, n \in \mathbb{Z}; X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}$, então

$$\begin{aligned}
[d(t^m \otimes X), t^n \otimes Y]_0 + [t^m \otimes X, d(t^n \otimes Y)]_0 &= [mt^m \otimes X, t^n \otimes Y]_0 + [t^m \otimes X, nt^n \otimes Y]_0 \\
&= mt^{m+n} \otimes [X, Y] + nt^{m+n} \otimes [X, Y] \\
&= (mt^{m+n} + nt^{m+n}) \otimes [X, Y] \\
&= (m + n)t^{m+n} \otimes [X, Y] \\
&= d(t^{m+n} \otimes [X, Y]) = d[t^m \otimes X, t^n \otimes Y]_0.
\end{aligned}$$

Veja ainda que para $t^m \otimes X$ com $m \in \mathbb{Z}; X \in \dot{\mathfrak{g}}$, tem-se

$$\left(t\frac{d}{dt} \otimes 1\right)(t^m \otimes X) = t\frac{d(t^m)}{dt} \otimes X = tmt^{m-1} \otimes X = mt^m \otimes X = d(t^m \otimes X),$$

portanto, $d = t\dfrac{d}{dt}$.

Finalmente, denote por $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ a álgebra de Lie que é obtida pela adjunção à $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ de uma derivação d em $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ que age em $\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ como $t\dfrac{d}{dt}$, e que "mata"K (isto é, $d = t\dfrac{d}{dt}$ é a derivação vista acima estendida à $\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ de modo que $d(K) = 0$). Em outras palavras, $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ é o espaço vetorial complexo

$$\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) = \underbrace{\mathfrak{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}K}_{\tilde{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})} \oplus \mathbb{C}d,$$

onde, para $X, Y \in \dot{\mathfrak{g}}; \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, o colchete é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&[t^m \otimes X \oplus \lambda K \oplus \mu d, t^n \otimes Y \oplus \lambda_1 K \oplus \mu_1 d] = \\ &= (t^{m+n} \otimes [X,Y] + \mu n t^n \otimes Y - \mu_1 m t^m \otimes X) \oplus m\delta_{m,-n}(X \mid Y)K,\end{aligned}$$

com $\delta_{m,-n}$ o delta de Kronecker.

Considere $\dot{\mathfrak{g}}$ a álgebra de Lie associada à matriz $\dot{A}$ da definição 3.2.4 ($\dot{A}$ é uma matriz de ordem l do tipo finito e, portanto, $det(\dot{A}) \neq 0$, mas isto é equivalente a $posto(\dot{A}) = l$). Sejam $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ e $\{H_1, \ldots, H_l\}$ a base de raízes e co-raízes, respectivamente, $\dot{\mathfrak{h}} \subset \dot{\mathfrak{g}}$ a subálgebra de Cartan, e E_i, F_i $(i = 1, \ldots, l)$ os geradores de Chevalley de $\dot{\mathfrak{g}}$, considere θ a raiz de altura máxima do sistema de raízes $\dot{\Delta} \subset \dot{\mathfrak{h}}^*$ de $\dot{\mathfrak{g}}$ (veja Proposição 2.3.2 e definição 2.3.3), e seja ainda $\dot{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta} \cup 0} \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$ a decomposição de $\dot{\mathfrak{g}}$ em espaço de raízes (recorde que $(\alpha \mid \alpha) \neq 0$ e $dim(\dot{\mathfrak{g}}_\alpha) = 1$ para $\alpha \in \dot{\Delta}$ Teorema 2.4.2 e Proposição 2.4.1). Por fim, seja $\dot{\omega}$ a involução de Chevalley de $\dot{\mathfrak{g}}$.

Agora vamos escolher $F_0 \in \dot{\mathfrak{g}}_\theta = \{X \in \dot{\mathfrak{g}} : [H, X] = \langle \theta, H \rangle X, \forall H \in \dot{\mathfrak{h}}\}$ tal que

$$(F_0 \mid \dot{\omega}(F_0)) = -2/(\theta \mid \theta) \text{ e } E_0 = -\dot{\omega}(F_0).$$

De fato existe tal F_0, basta tomar $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\theta$ tal que $(X|\dot{\omega}(X)) \neq 0$ (Lema 2.4.2, itens 2 e 3), então

$$0 \neq \frac{(X \mid \dot{\omega}(X))(\theta \mid \theta)}{-2} = \lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(X \mid \dot{\omega}(X)) = \frac{-2}{(\theta \mid \theta)} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X \mid \dot{\omega}(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X)) = \frac{-2}{(\theta \mid \theta)}.$$

Claramente $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X \in \mathfrak{g}_\theta$, assim podemos tomar $F_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}X$, e mais, $F_0 \in \mathfrak{g}_\theta \Rightarrow E_0 = -\omega(F_0) \in \mathfrak{g}_{-\theta}$ (Lema 2.4.2, item 2), então, pelo Teorema 2.4.1, item e) e Proposição 2.4.1, item d), vem que

$$[F_0, E_0] = (F_0 \mid E_0)\nu^{-1}(\theta) = -(F_0 \mid \dot{\omega}(F_0))\nu^{-1}(\theta) = 2/(\theta \mid \theta)\nu^{-1}(\theta) = \theta^V,$$

logo,

$$[E_0, F_0] = -\theta^V. \tag{3.1}$$

Sobre $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ podemos destacar:

i) O conjunto $1 \otimes \dot{\mathfrak{g}}$ é uma subálgebra de $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ e podemos identificar $\dot{\mathfrak{g}}$ com esta subálgebra por $X \longmapsto 1 \otimes X$, portanto, dizemos que $\dot{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$. Em particular, $\dot{\mathfrak{h}} \subset \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$.

ii) Por i), podemos definir o conjunto $\mathfrak{h} := \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$, que é uma subálgebra comutativa (abeliana) em $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ e tem dimensão $l+2$, pois $\dot{\mathfrak{h}}$ é comutativa e $dim(\dot{\mathfrak{h}}) = l$ (lembre que $\dot{A}$ tem posto máximo l). Estendemos $\lambda \in \dot{\mathfrak{h}}^*$ a um funcional linear em $\mathfrak{h}$ definindo $\langle \lambda, K \rangle = \langle \lambda, d \rangle = 0$, de tal modo que $\dot{\mathfrak{h}}^*$ é identificado com um subespaço em $\mathfrak{h}^*$, e denotamos por δ o funcional linear em $\mathfrak{h}$ definido por $\delta|_{\dot{\mathfrak{h}}+\mathbb{C}K} = 0$, $\langle \delta, d\rangle = 1$. Temos ainda

$$e_0 = t \otimes E_0, \quad f_0 = t^{-1} \otimes F_0,$$

$$e_i = 1 \otimes E_i, \quad f_i = 1 \otimes F_i, \quad (i = 1, \ldots, l),$$

e de (3.1) deduzimos:

$$[e_0, f_0] = \frac{2}{(\theta \mid \theta)} K - \theta^V. \tag{3.2}$$

Basta ver que

$$[e_0, f_0] = 1 \otimes [E_0, F_0] + (E_0 \mid F_0)K = 1 \otimes (-\theta^V) - (F_0 \mid \dot{\omega}(F_0))K = 1 \otimes (-\theta^V) + \frac{2}{(\theta \mid \theta)} K.$$

iii) Podemos descrever o sistema de raízes e a decomposição em espaço de raízes com respeito a $\mathfrak{h}$:

$$\Delta = \{j\delta + \gamma, \text{ onde } j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \dot{\Delta}\} \cup \{j\delta, \text{ onde } j \in \mathbb{Z} - 0\},$$

$$\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_\alpha), \text{ onde}$$

$$\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_{j\delta+\gamma} = t^j \otimes \dot{\mathfrak{g}}_\gamma, \quad \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_{j\delta} = t^j \otimes \dot{\mathfrak{h}}.$$

iv) Construímos os seguintes conjuntos:

$$\Pi = \{\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\},$$

$$\Pi^V = \{\alpha_0^V := \frac{2}{(\theta|\theta)} K - 1 \otimes \theta^V, \alpha_1^V := 1 \otimes H_1, \ldots, \alpha_l^V := 1 \otimes H_l\}.$$

Lema 3.2.2. *Afirmamos que $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ é uma realização da matriz afim não torcida A, ou seja, $\mathfrak{h}, \Pi$ e Π^V satisfazem as condições descritas na definição 2.1.1.*

Demonstração: De fato,

- $2n - rank(A) = 2(l+1) - l = l + 2 = dim(\mathfrak{h})$.
- Provemos que $\Pi = \{\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ é linearmente independente (LI) em $\mathfrak{h}^*$. Sabemos que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ é LI, assim, basta provar que α_0 não é combinação dos demais, então suponha que $\delta - \theta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_l\alpha_l$, como $\theta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l$, temos

$$\delta = (b_1 - a_1)\alpha_1 + \cdots + (b_l - a_l)\alpha_l.$$

Para todo $H \in \dot{\mathfrak{h}}$ tem-se $0 = \delta(H) = (b_1 - a_1)\alpha_1(H) + \cdots + (b_l - a_l)\alpha_l(H)$, isto é,

$$(b_1 - a_1)\alpha_1 + \cdots + (b_l - a_l)\alpha_l = 0 \quad \overset{LI}{\Longrightarrow} \quad b_1 = a_1, \cdots, b_l = a_l,$$

logo, $\delta = 2\theta$. Para todo $H \in \dot{\mathfrak{h}}$, escolhemos $X = H + \lambda K + 0d \in \mathfrak{h}$, então

$$0 = \delta(X) = 2\theta(H) \Longrightarrow \theta(H) = 0 \ \forall H \in \dot{\mathfrak{h}} \Longrightarrow \theta = 0. \text{ Contradição!}$$

Daí, Π é LI. As raízes e co-raízes simples estão relacionadas pelo isomorfismo ν da observação 2.4.1, portanto, Π^V também é LI em $\mathfrak{h}$.

- Note que θ é o mesmo da definição 2.3.3 [6], então utilizando a definição 3.2.3, temos
$$A = (\langle \alpha_j, \alpha_i^V \rangle)_{i,j=0}^l.$$
Com efeito, claramente $\langle \alpha_i, \alpha_i^V \rangle = a_{ij}$, para todo $i, j = 1, \ldots, l$, portanto, basta verificar nos outros casos. Primeiramente, tome $\theta = \sum_{i=1}^l b_i \alpha_i$ e $\theta^V = \sum_{i=1}^l c_i H_i$ e relembre que estendemos os funcionais de $\dot{\mathfrak{h}}$ para $\mathfrak{h}$, então

  para $i \neq 0$, tem-se
$$\langle \alpha_0, \alpha_i^V \rangle = \langle \delta - \theta, H_i \rangle = -\langle \theta, H_i \rangle = -\sum_{j=1}^{l} b_j \langle \alpha_j, H_i \rangle = -\sum_{j=1}^{l} b_j \dot{a}_{ij} = a_{i0},$$
e para $j \neq 0$, tem-se
$$\langle \alpha_j, \alpha_0^V \rangle = \langle \alpha_j, \frac{2}{(\theta \mid \theta)} K - \theta^V \rangle = -\langle \alpha_j, \theta^V \rangle = -\sum_{i=1}^{l} c_i \langle \alpha_j, H_i \rangle = -\sum_{i=1}^{l} c_i \dot{a}_{ij} = a_{0j}.$$
Finalmente,
$$\langle \alpha_0, \alpha_0^V \rangle = \langle \alpha_0, \frac{2}{(\theta \mid \theta)} K - \theta^V \rangle = \langle \theta, \theta^V \rangle = (\theta^V \mid \theta^V) = 2 = a_{00}.$$

□

Agora com todas esses ferramentas, podemos apresentar o resultado central do trabalho. Resumindo os passos até o momento, tomamos inicialmente uma matriz A da tabela *Aff 1*, que claramente, está relacionada a alguma álgebra de Kac-Moody afim não torcida. A pergunta é: qual? Como toda matriz da tabela *Aff 1* é uma matriz estendida de alguma matriz da tabela *Fin*, retirando a linha e coluna "0" obtemos a matriz $\dot{A}$ da tabela *Fin* e, a partir daí, fizemos a construção. O próximo teorema, garante que a álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$, que construímos utilizando uma álgebra de loop que tem como álgebra base uma álgebra de Lie simples de dimensão finita $\dot{\mathfrak{g}}$, é a álgebra de Kac-Moody afim não torcida associada à matriz A.

Teorema 3.2.1 (Kac). *Seja $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\dot{A})$ uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre os complexos, e seja A a matriz de Cartan estendida de $\dot{\mathfrak{g}}$ (isso significa que A pertence a tabela Aff 1). Então $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ é a álgebra de Kac-Moody associada a matriz A, $\mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan, Π e Π^V são as bases de raízes e co-raízes, respectivamente, e $e_0, \ldots, e_l, f_0, \ldots, f_l$ são os geradores de Chevalley. Em outras palavras, o quádruplo $(\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}}), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ está associado à matriz A.*

Demonstração: A prova é feita basicamente utilizando a Proposição 2.2.1 item a), então basta verificar se os objetos, definidos sobre $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$, estão de acordo com as hipóteses de lá. Antes de mais nada, devemos salientar que $\dot{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Kac-Moody e, portanto, cumpre todos o requisitos da Proposição 2.2.1. Provaremos o teorema em algumas etapas:

[6]Veja também definição 2.4.9

- Pelo Lema 3.2.2, $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ é uma realização de A.
- As relações (2.1) e (2.2): para todo $i = 1, \ldots, l$, temos

$$[e_i, f_j] = [1 \otimes E_i, 1 \otimes F_i] = 1 \otimes [E_i, F_j] = 1 \otimes \delta_{ij} H_i = \delta_{ij}(1 \otimes H_i) = \delta_{ij}\alpha_i^V.$$

Para e_0 e f_0: pelo fato de $F_0 \in \dot{\mathfrak{g}}_\theta$, $E_0 \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\theta}$ e θ ser a raiz de altura máxima, concluímos que

$$[e_0, f_i] = 0 = \delta_{0i}\alpha_0^V \quad \text{e} \quad [e_i, f_0] = 0 = \delta_{i0}\alpha_i^V \quad (i = 1, \ldots, l),$$

e por (3.2)

$$[e_0, f_0] = \frac{2}{(\theta \mid \theta)} K - 1 \otimes \theta^V = \delta_{00}\alpha_0^V.$$

Portanto, $[e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^V$, pata todo $i, j = 0, 1, \ldots, l$, e isto prova (2.1).

No caso de (2.2), considere $H = t^0 \otimes \dot{H} + c_1 K + c_2 d \in \mathfrak{h}$ qualquer ($\dot{H} \in \dot{\mathfrak{h}}$). Para $i = 1, \ldots, l$, tem-se

$$[H, e_i] = [t^0 \otimes \dot{H} + c_1 K + c_2 d, t^0 \otimes E_i] = t^0 \otimes [\dot{H}, E_i] = 1 \otimes \langle \alpha_i, \dot{H} \rangle E_i,$$

por outro lado, $\alpha_i \in \dot{\mathfrak{h}}$ é estendido de modo que $\langle \alpha_i, K \rangle = \langle \alpha_i, d \rangle = 0$, então

$$\langle \alpha_i, H \rangle e_i = (\langle \alpha_i, \dot{H} \rangle + \langle \alpha_i, c_1 K + c_2 d \rangle)(1 \otimes E_i) = 1 \otimes \langle \alpha_i, \dot{H} \rangle E_i.$$

Logo, $[H, e_i] = \langle \alpha_i, H \rangle e_i$, para todo $i = 1, \ldots, l$.

Para e_0:

$$\begin{aligned} [H, e_0] = [t^0 \otimes \dot{H} + c_1 K + c_2 d, t \otimes E_0] &= t \otimes [\dot{H}, E_0] + c_2 t \otimes E_0 \\ &= t \otimes ([\dot{H}, E_0] + c_2 E_0). \end{aligned}$$

Recordando que $\theta \in \dot{\mathfrak{h}}^* \Rightarrow \langle \theta, K \rangle = \langle \theta, d \rangle = 0$ e que $\delta|_{\dot{\mathfrak{h}} + \mathbb{C}K} = 0$, $\langle \delta, d \rangle = 1$, por outro lado temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha_0, H \rangle e_0 &= \langle \delta - \theta, 1 \otimes \dot{H} + c_1 K + c_2 d \rangle e_0 \\ &= (-\langle \theta, 1 \otimes \dot{H} \rangle - \langle \theta, c_1 K + c_2 d \rangle + \langle \delta, 1 \otimes \dot{H} + c_1 K \rangle + \langle \delta, c_2 d \rangle)(t \otimes E_0) \\ &= (-\langle \theta, 1 \otimes \dot{H} \rangle + c_2)(t \otimes -\omega(F_0)) = t \otimes (\langle \theta, \dot{H} \rangle \omega(F_0) - c_2 \omega(F_0)). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4.2, item 2), $\omega(F_0) \in \mathfrak{g}_{-\theta}$, isto é, $[\dot{H}, \omega(F_0)] = -\langle \theta, \dot{H} \rangle \omega(F_0)$, portanto,

$$\langle \alpha_0, H \rangle e_0 = t \otimes ([\dot{H}, -\omega(F_0)] - c_2 \omega(F_0)) = t \otimes ([\dot{H}, E_0] + c_2 E_0).$$

Daí $[H, e_0] = \langle \alpha_0, H \rangle e_0$. Logo, $[H, e_i] = \langle \alpha_i, H \rangle e_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, l$ e, de modo análogo, prova-se que $[H, f_i] = -\langle \alpha_i, H \rangle f_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, l$.

- Não existe ideal $\tau \neq 0$ tal que $\tau \cap \mathfrak{h} = 0$: com efeito, suponha que exista tal ideal, então pela Proposição 2.2.2, τ é graduado em relação a decomposição em espaços de raízes de $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$, ou seja, $0 \neq \tau = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \tau \cap \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_\alpha$ implicando que $\tau \cap \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_\alpha \neq 0$ para algum $\alpha \in \Delta$. Tome $0 \neq a \in \tau \cap \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_\alpha$, isto é, $a = t^m \otimes X$, para algum $m \in \mathbb{Z}$ e $X \in \dot{\mathfrak{g}}_\gamma$, $X \neq 0$, $\gamma \in \dot{\Delta} \cup \{0\}$. Escolhendo $Y \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\gamma}$ tal que $(X \mid Y) \neq 0$ (Lema 2.4.2, item 3), pelo Lema 2.4.2, item 1), $[X, Y] \in \dot{\mathfrak{g}}_0 = \dot{\mathfrak{h}}$, portanto, $[t^m \otimes X, t^{-m} \otimes Y] = 1 \otimes [X, Y] + m(X \mid Y)K \in \mathfrak{h} \cap \tau$, como $\tau \cap \mathfrak{h} = 0$, deve acontecer $m = 0$, mas então $\gamma \neq 0$, pois caso contrário $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_\alpha = t^m \otimes \dot{\mathfrak{g}}_\gamma = 1 \otimes \dot{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$, e daí $\tau \cap \mathfrak{h} \neq 0$. Como $\gamma \neq 0$ e $(X \mid Y) \neq 0$, pelo Teorema 2.4.1, item e), temos $0 \neq (X \mid Y)\nu^{-1}(\gamma) = [X, Y] \in \dot{\mathfrak{h}}$, assim, $0 \neq 1 \otimes [X, Y] = [t^m \otimes X, t^{-m} \otimes Y] \in \tau \cap \mathfrak{h}$ e isto é uma contradição.

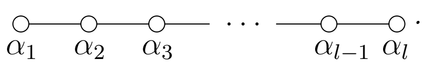
- $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ é gerada como álgebra de Lie por $e_i, f_i, \mathfrak{h}$: considere a subálgebra $\mathfrak{B} \subset \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ gerada por e_i, f_i e $\mathfrak{h}$ $(i = 0, 1, \ldots l)$. Vamos mostrar que $t^k \otimes \hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, ou melhor, $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{B}$. De fato, como E_i, F_i geram $\dot{\mathfrak{g}}$ $(i = 1, \ldots l)$ e cada $1 \otimes E_i, 1 \otimes F_i \in \mathfrak{B}$, temos que $1 \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$. Seja $I := \{X \in \dot{\mathfrak{g}} : t \otimes X \in \mathfrak{B}\}$, provemos que I é um ideal não nulo de $\dot{\mathfrak{g}}$: primeiramente, veja que $e_0 = t \otimes E_0 \in \mathfrak{B}$ e consequentemente $0 \neq E_0 \in I$. Agora tome $X \in I$ e $Y \in \dot{\mathfrak{g}}$, então $t \otimes X \in \mathfrak{B}$ e vimos que $1 \otimes Y \in \mathfrak{B}$, daí
$$t \otimes [X, Y] = [t \otimes X, 1 \otimes Y] \in \mathfrak{B},$$
isto é, $[X, Y] \in I$ o que faz de I um ideal, mas como $\dot{\mathfrak{g}}$ é simples e $I \neq 0$, concluímos que $I = \dot{\mathfrak{g}}$, em outras palavras, $t \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$. Afirmamos que $t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$, $k > 0$. Para verificar esse fato, vamos fazer indução em k: suponha que $t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$, do mesmo modo de antes, vamos definir $J := \{X \in \dot{\mathfrak{g}} : t^{k+1} \otimes X \in \mathfrak{B}\}$. Por hipótese de indução, $t^k \otimes X \in \mathfrak{B}$ para todo $X \in \dot{\mathfrak{g}}$, em particular, considere $X \in \dot{\mathfrak{g}}_\gamma$ e $Y \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\gamma}$, com $\gamma \neq 0$, tais que $(X \mid Y) \neq 0$ (veja Lema 2.4.2, item 3)), pelo Teorema 2.4.1, item e), obtemos $[X, Y] \neq 0$ e $[X, Y] \in J$, pois $t^{k+1} \otimes [X, Y] = [t^k \otimes X, t \otimes Y] \in \mathfrak{B}$. Por fim, seja $X \in J$ e $Y \in \dot{\mathfrak{g}}$, temos $t^{k+1} \otimes X \in \mathfrak{B}$ e $1 \otimes Y \in \mathfrak{B}$, daí
$$t^{k+1} \otimes [X, Y] = [t^{k+1} \otimes X, 1 \otimes Y] \in \mathfrak{B}$$
e, outra vez, $J = \dot{\mathfrak{g}}$ e, consequentemente, $t^{k+1} \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$, provando que $t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$ para todo $k > 0$. Analogamente, prova-se que $t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{B}$ para todo $k < 0$ e isto completa a demonstração, pois o fato de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{B}$ implica que K e d também pertencem a $\mathfrak{B}$.

$\square$

De modo mais simples, toda álgebra de Kac-Moody afim não torcida poder ser obtida explicitamente por meio de uma álgebra de loop e, portanto, sempre podemos "resgatar" a álgebra de Kac-Moody a partir de sua matriz. Além disso, tal construção permite o estudo das álgebras de Kac-Moody afim não torcidas por meio de álgebras de loop. Para exemplificar, vamos construir as álgebras de Kac-Moody associadas às matrizes $A_1^{(1)}$ e $A_2^{(1)}$ do tipo *Aff 1*, que são "extensões" das matrizes A_1 e A_2 do tipo *Fin.*

Observação 3.2.1. *Em geral, o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{sl}(l+1)$ é da forma*

$A_l, l \geqslant 1$



Exemplo 3.2.1. *Considere a matriz* $A := A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ *da tabela Aff 1. Claramente, removendo-se a linha e coluna "0", obtemos a matriz* $A_1 := \dot{A} = (2)$ *da tabela Fin, que está associada à álgebra de Lie simples de dimensão finita* $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2)$*. Pelos exemplos 1.10.1 e 1.11.1, temos que*

$$\dot{\mathfrak{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(2)$*,* $\dot{\Delta} = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1\}$ *é o sistema de raízes e, considerando os conjuntos*

$$\dot{\Pi} = \{\alpha = \lambda_1 - \lambda_2\} \text{ e } \dot{\Pi}^V = \left\{ \alpha^V = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}^7,$$

prova-se facilmente que $(\dot{\mathfrak{h}}, \dot{\Pi}, \dot{\Pi}^V)$ *é uma realização de* $\dot{A}$*. O próximo passo é encontrar os geradores de Chevalley, então considere as matrizes*

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$$

tais que $[H, E] = \langle \alpha, H \rangle E$ *e* $[H, F] = -\langle \alpha, H \rangle F$*, para todo* $H \in \mathfrak{h}$*. Em particular,*

$$[\alpha^V, E] = \langle \alpha, \alpha^V \rangle E \Rightarrow \alpha^V E - E\alpha^V = 2E \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2E_2 \\ -2E_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E_1 & 2E_2 \\ 2E_3 & 2E_4 \end{pmatrix},$$

isto implica $E_1 = E_3 = E_4 = 0$ *e* $E_2 \in \mathbb{C}$*, e da mesma forma encontra-se* $F_1 = F_2 = F_4 = 0$ *e* $F_3 \in \mathbb{C}$*. Tomando* $E_2 = F_3 = 1$*, temos* $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *os geradores de Chevalley de* $\dot{\mathfrak{g}}$*. Note que* $\{E, \alpha^V, F\}$ *é exatamente a base obtida no exemplo 1.5.1, e que temos a decomposição triangular*

$$\dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{n}}_+ \oplus \dot{\mathfrak{h}} \oplus \dot{\mathfrak{n}}_-$$

onde $\dot{\mathfrak{n}}_+ = \mathbb{C}E$*,* $\dot{\mathfrak{h}} = \mathbb{C}\alpha^V$ *e* $\dot{\mathfrak{n}}_- = \mathbb{C}F$*.*

A raiz $\theta = \alpha = \lambda_1 - \lambda_2$ *é a raiz de altura máxima de* $\dot{\mathfrak{g}}$ *e claramente* $\theta^V = \alpha^V$*. Como* $\mathfrak{g}_\alpha = \sum \mathbb{C}[\dots[[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}]\dots e_{i_s}]$*, sempre que* $\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$ *e* $\alpha > 0$*, concluímos que* $\dot{\mathfrak{g}}_\theta = \mathbb{C}E$ *e o mesmo para* $\dot{\mathfrak{g}}_{-\theta} = \mathbb{C}F$*, dito isto, vamos considerar* $F_0 = bE \in \dot{\mathfrak{g}}_\theta$ *com* $b \in \mathbb{C}$*, então* $E_0 = -\omega(F_0) = bF \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\theta}$*. O elemento* F_0 *deve satisfazer* $(F_0 \mid \dot{\omega}(F_0)) = -2/(\theta \mid \theta)$*, portanto, vamos fixar a forma bilinear em* $\dot{\mathfrak{g}}$ *dado pelo traço, isto é,* $(X \mid Y) = tr(ad_X ad_Y)$ *e, pelo isomorfismo entre* $\dot{\mathfrak{h}}$ *e* $\dot{\mathfrak{h}}^*$ *dado por* $H_\alpha \longmapsto \alpha = (H_\alpha \mid \cdot)$*, induzimos uma forma bilinear em* $\dot{\mathfrak{h}}^*$ *definindo* $(\alpha \mid \beta) = (H_\alpha \mid H_\beta)$*.*

Para encontrar F_0*, e consequentemente encontrar* E_0*, vamos verificar para qual* b *a relação* $(F_0 \mid \dot{\omega}(F_0)) = -2/(\theta \mid \theta)$ *é satisfeita, para isso, conside* $H_\theta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$*, temos as seguintes matrizes na base* $B = \{E, \alpha^V, F\}$*:*

[7] Note que $\alpha^V = E_{11} - E_{22}$, vistos no exemplo 1.11.1.

$$ad_{H_\theta} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} \quad e \quad ad_{\alpha^V} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

daí, $2 = \langle \theta, \alpha^V \rangle = (H_\theta \mid \alpha^V) = tr(ad_{H_\theta} ad_{\alpha^V}) = 8a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$*, então*

$$ad_{H_\theta} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad e \quad (H_\theta \mid H_\theta) = tr(ad_{H_\theta} ad_{H_\theta}) = 1/2,$$

e isto resolve um dos lados da igualdade, pois $-2/(\theta \mid \theta) = -2/(H_\theta \mid H_\theta) = -4$*. Para trabalhar no outro lodo da igualdade, precisamos das seguintes matrizes na base* B*:*

$$ad_{F_0} = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad ad_{\dot\omega(F_0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 0 \end{pmatrix},$$

então, $-4 = -2/(\theta \mid \theta) = (F_0 \mid \dot\omega(F_0)) = tr(ad_{F_0} ad_{\dot\omega(F_0)}) = -4b^2 \Rightarrow b = \pm 1$*. No caso em que* $b = 1$ *tem-se* $F_0 = E$*, logo é preferível tomar* $b = -1$*.*

Finalmente, pelo Teorema 3.2.1, a álgebra

$$\mathfrak{g}(A) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

é a álgebra de Kac-Moody associada à matriz $A_1^{(1)}$*, onde* $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ *é uma realização de tal matriz, com*

- $\mathfrak{h} = \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$*;*
- $\Pi = \{\alpha_0 = \delta - (\lambda_1 - \lambda_2), \alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2\}$ *e*

  $$\Pi^V = \{\alpha_0^V = 4K - 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_1^V = 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\};$$

- *Geradores de Chevalley:*

  $$e_0 = t \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_1 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f_0 = t^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; e \; f_1 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.2.2. *Considere a matriz* $A := A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *da tabela Aff 1. Removendo-se a linha e coluna "0", obtemos a matriz* $A_2 := \dot{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *da tabela Fin, que está associada à álgebra de Lie simples de dimensão finita* $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(3)$*. Novamente pelos exemplos 1.10.1 e 1.11.1, temos que*

$$\dot{\mathfrak{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & -a_1 - a_2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(3)$, e considerando os conjuntos

$$\dot{\Pi} = \{\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3\} \text{ e}$$

$$\dot{\Pi}^V = \left\{ H_1^V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, H_2^V = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

prova-se facilmente que $(\dot{\mathfrak{h}}, \dot{\Pi}, \dot{\Pi}^V)$ é uma realização de $\dot{A}$. Utilizando a mesma estratégia do exemplo anterior obtemos os geradores de Chevalley:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A raiz $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 = (\lambda_1 - \lambda_3)$ é a raíz de altura máxima de $\dot{\mathfrak{g}}$ e, pelo mesmo motivo citado no exemplo anterior, concluímos que $\dot{\mathfrak{g}}_\theta = \mathbb{C}[E_1, E_2]$ e $\dot{\mathfrak{g}}_{-\theta} = \mathbb{C}[F_1, F_2]$, dito isto, vamos considerar $F_0 = b[E_1, E_2] \in \dot{\mathfrak{g}}_\theta$ com $b \in \mathbb{C}$, então $E_0 = -\omega(F_0) = -b[F_1, F_2] \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\theta}$, e o elemento F_0 deve satisfazer $(F_0 \mid \dot{\omega}(F_0)) = -2/(\theta \mid \theta)$. Fixando novamente a forma traço, e diferente do exemplo anterior, dessa vez vamos utilizar as relações vistas no exemplo 1.11.1:

$$(\alpha_{ij} \mid \alpha_{ij}) = 1/n \quad e \quad (E_{ij} \mid E_{ji}) = 2n \qquad (i \neq j).$$

Então, por um lado,

$$F_0 = b[E_1, E_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = bE_{13} \quad e \quad \dot{\omega}(F_0) = b[F_1, F_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} = -bE_{31},$$

o que implica $(F_0 \mid \dot{\omega}(F_0)) = -b^2(E_{13} \mid E_{31}) = -6b^2$.

Por outro lado,

$$(\theta \mid \theta) = (\lambda_1 - \lambda_3 \mid \lambda_1 - \lambda_3) = 1/3 \Rightarrow -2/(\theta \mid \theta) = -6,$$

e daí, $b = \pm 1$. Tomando $b = 1$, temos

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \theta^V = [F_0, E_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 3.2.1, a álgebra

$$\mathfrak{g}(A) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(3) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

é a álgebra de Kac-Moody associada à matriz $A_2^{(1)}$, onde $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^V)$ é uma realização de tal matriz, com

- $\mathfrak{h} = \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$;

- $\Pi = \{\alpha_0 = \delta - (\lambda_1 - \lambda_3), \alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3\}$ e

$\Pi^V = \{\alpha_0^V = 6K - 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_1^V = 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
$\alpha_2^V = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\};$

- *Geradores de Chevalley:*

$$e_0 = t \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0 = t^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apêndice A

Álgebra linear

A.1 Decomposição em autoespaços

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$, e considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é chamado de **autovalor** de T se existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** de T associado a λ, nessas condições, considere o conjunto de todos os autovetores de T associados a λ união com $\{0\}$:

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\},$$

tal conjunto é chamado de **autoespaço** de T associado a λ. Note que cada V_λ é um subespaço vetorial de V e que $V_\lambda = ker(T - \lambda Id_V)$.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e T um operador linear de V. Considerando a família (V_λ), onde λ é um autovalor de T e V_λ é o autoespaço associado a λ, então existe a **decomposição em autoespaços**:

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda.$$

Seja V como acima, e considere $\sigma : V \longrightarrow V$ um automorfismo de ordem m, isto é, m é o menor natural não nulo tal que $\sigma^m = id_V$. Dado λ um autovalor de σ arbitrário, então para todo natural k e $v \in V$, tem-se $\sigma^k(v) = \lambda^k v$, em particular

$$v = id_V(v) = \sigma^m(v) = \lambda^m v,$$

daí,

$$\lambda^m(v) - v = 0 \Rightarrow (\lambda^m - 1)v = 0 \Rightarrow \lambda^m = 1,$$

como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, essa equação possui exatamente m raízes distintas. Em outras palavras, os autovalores de σ são exatamente as raízes da unidade $1, \zeta, \ldots, \zeta^{m-1}$ em $\mathbb{K}$, onde ζ é a m-ésima raiz primitiva da unidade, isto é, todas as outras são potências dela (de modo cíclico). Nesse contexto, a decomposição em autoespaços pode ser escrita da seguinte forma:

$$V = \bigoplus_{i=0}^{m-1} V_i, \text{ onde } V_i = \{v \in V : \sigma(v) = \zeta^i v\}.$$

A.2 Espaço dual

Definição A.2.1. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. O* ***espaço dual*** *de V, denotado por V^*, é o espaço de todas as transformações lineares de V em $\mathbb{K}$, isto é, é o conjunto de todos os funcionais lineares de V.*

Considere a base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de V. Para cada b_i associamos o funcional linear f_i determinado por $\langle f_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ onde δ_{ij} é o **delta de Kronecker**, isto é,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

No caso da dimensão finita, o conjunto $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de V^*. Daí, V e V^* possuem a mesma dimensão, portanto, são isomorfos. Se o espaço possui um produto interno, então existe um isomorfismo natural entre V e V^* que permite identificar o espaço com o seu dual, isto é, podemos escrever $V = V^*$

Definição A.2.2. *(**Transposta**). Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dada uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$, a aplicação $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ definida como $T^t(f) = f \circ T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ para cada $f \in W^*$ é denominada de transposta de T.*

A.3 Reflexão

Definição A.3.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dado um elemento não-nulo $\alpha \in E$, uma* ***reflexão*** *em relação a α é uma transformação linear inversível $r_\alpha : E \longrightarrow E$ que satisfaz:*

i) $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$;

ii) o conjunto $F_{r_\alpha} = \{\beta \in E : r_\alpha(\beta) = \beta\}$ dos pontos fixos de r_α é um hiperplano[1] *de E.*

Evidentemente, F_{r_α} é um subespaço complementar à reta gerada por α e, é claro, que cada hiperplano complementar define uma reflexão em relação a α. Como r_α restrito a F_{r_α} é a identidade e $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$, r_α é involutivo, isto é, $r_\alpha^2 = 1$.

A.4 Formas Bilineares

Definição A.4.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$.*

(i) Dizemos que B é uma forma Bilinear definida em V, quando $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação bilinear, isto é, linear nas duas coordenadas.

Nesse caso, define-se a matriz de B, em relação a uma base $\{e_1, \ldots e_n\}$ de V, como sendo $(a_{ij})_{n \times n}$ onde $a_{ij} = B(e_i, e_j)$.

[1]Seja V um espaço vetorial não-nulo, e W um subespaço V. Então W é **hiperplano** de V se, e somente se, existe um funcional linear não-nulo $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $ker(\varphi) = W$.

*(ii) B é dita **simétrica** quando vale* $B(u,v) = B(v,u) \quad \forall u, v \in V$.

*(iii) A forma B diz-se **não degenerada** (ou **não singular**), se ocorrer qualquer uma das seguintes condições equivalentes:*

1. *Para qualquer* $0 \neq u \in V$ *tem-se* $B(u,.) \not\equiv 0$, *isto é,* $\forall u \in V - \{0\}, \exists v \in V$ *tal que* $B(u,v) \neq 0$.
2. *A matriz de B em relação a qualquer base de V é invertível (ou não singular).*
3. *A matriz de B em relação a uma base dada de V é invertível (ou não singular).*

Ou ainda,

B é não degenerada se, e somente se, $posto(B) = n$.

*(iv) Considere B uma forma bilinear simétrica. Uma **forma quadrática** associada a B é uma função* $\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que,*

$$\phi(u) = B(u,u) \quad \forall u \in V.$$

Se $\mathbb{K}$ *é um subcorpo do corpo dos números complexos, a forma bilinear simétrica B é completamente determinada por sua forma quadrática associada, de acordo com a seguinte identidade, conhecida por **identidade de polarização**:*

$$B(u,v) = \frac{1}{4}\phi(u+v) - \frac{1}{4}\phi(u-v)$$

Definição A.4.2. *Seja* $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ *uma forma bilinear. O **núcleo** (ou **kernel**) de B é definido como:*

$$ker(B) = \{v \in V : B(u,v) = 0, \text{ para todo } u \in V\},$$

ou equivalentemente,

$$ker(B) = \{v \in V : B(e_i, v) = 0, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\}.$$

Onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base de V.*

A.5 Produto tensorial de espaços vetoriais

A noção de produto tensorial de espaços vetoriais é relevante em diversas áreas do conhecimento e no desenvolver da teoria discutida neste trabalho. Apresentaremos a seguir uma definição sucinta e mais intuitiva.

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ (de característica zero), com V^* e W^* seus respectivos duais. Dados $v \in V$ e $w \in W$, denote por $v \otimes_{\mathbb{K}} w : V^* \times W^* \to \mathbb{K}$ o funcional bilinear cujo valor em $(\alpha, \beta) \in V^* \times W^*$ é dado por

$$(v \otimes_{\mathbb{K}} w)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(w).$$

Definição A.5.1. *O* ***produto tensorial*** *entre os* $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais* V *e* W*, denotado por* $V \otimes_{\mathbb{K}} W$*, é o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial*[2] *composto por todas as somas finitas de elementos da forma* $v \otimes_{\mathbb{K}} w$ *com* $v \in V$ *e* $w \in W$*, isto é,*

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_{\mathbb{K}} w_i : n \in \mathbb{N} \textit{ arbitrário e } v_i \in V, w_i \in W, \textit{ também arbitrários} \right\}.$$

Para $v, v_i \in V$; $w, w_i \in W$, $k \in \mathbb{K}$ e utilizando $(v \otimes_{\mathbb{K}} w)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(w)$, podemos destacar:

$$\begin{aligned} v \otimes_{\mathbb{K}} w_1 + v \otimes_{\mathbb{K}} w_2 &= v \otimes_{\mathbb{K}} (w_1 + w_2); \\ v_1 \otimes_{\mathbb{K}} w + v_2 \otimes_{\mathbb{K}} w &= (v_1 + v_2) \otimes_{\mathbb{K}} w; \\ k(v \otimes_{\mathbb{K}} w) = (kv) \otimes_{\mathbb{K}} w &= v \otimes_{\mathbb{K}} (kw). \end{aligned}$$

Esta última, justifica o fato de aparecer "composto por" e não simplesmente "gerado por" na definição A.5.1. Pode-se estender o produto por escalar a qualquer elemento de $V \otimes_{\mathbb{K}} W$, da seguinte forma:

$$k(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_{\mathbb{K}} w_i) = \sum_{i=1}^{n} (kv_i) \otimes_{\mathbb{K}} w_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_{\mathbb{K}} (kw_i).$$

Quando não for relevante especificar o corpo $\mathbb{K}$, escreveremos somente $\otimes$ em vez de $\otimes_{\mathbb{K}}$. Os elementos de $V \otimes W$ são genericamente denominados **tensores de ordem 2** (ou **rank 2**). A seguir comentaremos os tensores de ordem maior.

Baseado no que foi feito anteriormente, vamos estender para o caso de uma coleção finita de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $V^1, \ldots, V^m$. Considerando o funcional multilinear denotado por $v^1 \otimes \cdots \otimes v^m : (V^1)^* \times \cdots \times (V^m)^* \to \mathbb{K} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1(v^1) \cdots \alpha_m(v^m)$, onde $v^i \in V^i$ para $i = 1, \ldots, m$. Definimos o produto tensorial $V^1 \otimes \cdots \otimes V^m$ como sendo o $\mathbb{K}$-espaço vetorial cujos elemetos são da forma de somas finitas de elementos como $v^1 \otimes \cdots \otimes v^m$, ou seja,

$$V^1 \otimes \cdots \otimes V^m = \left\{ \sum_{l=1}^{n} v_l^1 \otimes \cdots \otimes v_l^m : n \in \mathbb{N} \text{ e } v_l^i \in V^i, \text{ arbitrários} \right\}.$$

Observações A.5.1. *Para todo* $v^i \in V^i$ *com* $i = 1, \ldots, m$ *e* $k \in \mathbb{K}$*, valem:*

1) $$(v^1 \otimes \cdots \otimes v^{j-1} \otimes v^j \otimes v^{j+1} \otimes \cdots \otimes v^n) + (v^1 \otimes \cdots \otimes v^{j-1} \otimes w \otimes v^{j+1} \otimes \cdots \otimes v^n) = \\ = v^1 \otimes \cdots \otimes v^{j-1} \otimes (v^j + w) \otimes v^{j+1} \otimes \cdots \otimes v^n$$

para todo $w \in V^i$*, para algum* $j = 1, \ldots, m$*.*

2) O vetor nulo de $V^1 \otimes \cdots \otimes V^m$ *é* $\underbrace{0 \otimes \cdots \otimes 0}_{m-vezes}$ *e identificamos*

$$0 \otimes \cdots \otimes 0 = 0 \otimes v^2 \otimes \cdots \otimes v^n = \cdots = v^1 \otimes v^2 \otimes \cdots \otimes v^{n-1} \otimes 0.$$

[2] Claramente o conjunto de todos os funcionais bilineares $\varphi : V^* \times W^* \to \mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ é um subespaço vetorial deste.

3) $k(\sum_{l=1}^{n} v_l^1 \otimes \cdots \otimes v_l^m) = \sum_{l=1}^{n}(kv_l^1) \otimes v_l^2 \otimes \cdots \otimes v_l^m = \cdots = \sum_{l=1}^{n} v_l^1 \otimes \cdots \otimes v_l^{m-1} \otimes (kv_l^m).$

4) Pelo que vimos, para $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{K}$ *tem-se*

$$(k_1 \cdots k_m)(v^1 \otimes v^2 \otimes \cdots \otimes v^n) = (k_1 v^1) \otimes (k_2 v^2) \otimes \cdots \otimes (k_n v^n).$$

5) Frequentemente usamos a notação $V^{\otimes_{\mathbb{K}} m}$*, ou simplesmente* $V^{\otimes m}$*, para denotar* $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m-vezes}$.

É conveniente definir $V^{\otimes_{\mathbb{K}} m}$*, para* $m = 0$*, como sendo o corpo* $\mathbb{K}$*. Assim como no caso anterior, os elementos* $V^1 \otimes \cdots \otimes V^m$ *são genericamente denominados tensores de ordem* m *(ou rank* m*).*

6) Seja V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Faz sentido considerar* $\mathbb{K} \otimes \mathbb{V}$*, pois* $\mathbb{K}$ *é claramente um espaço vetorial sobre si mesmo. É natural identificar* $\mathbb{K} \otimes \mathbb{V}$ *com* V *através do isomorfismo* $k \otimes v \longmapsto kv$*, para todo* $k \in \mathbb{K}$ *e* $v \in V$*.*

7) Dadas duas coleções finitas $V^1, \ldots, V^m$ *e* $W^1, \ldots, W^n$ *de espaços vetoriais sobre um mesmo corpo* $\mathbb{K}$*, podemos definir os espaços vetoriais produto*

$$A = (V^1 \otimes \cdots \otimes V^m) \otimes (W^1 \otimes \cdots \otimes W^n) \quad e \quad B = V^1 \otimes \cdots \otimes V^m \otimes W^1 \otimes \cdots \otimes W^n.$$

Esses espaços são isomorfos, basta considerar o isomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$ *dado de modo natural por*

$$\psi((v^1 \otimes \cdots \otimes v^m) \otimes (w^1 \otimes \cdots \otimes w^n)) = v^1 \otimes \cdots \otimes v^m \otimes w^1 \otimes \cdots \otimes w^n.$$

Esse isomorfismo é chamado de ***isomorfismo canônico*** *entre* A *e* B*. Isso mostra que* $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ *é canonicamente isomorfo a* $V^{\otimes m+n}$*.*

Referências Bibliográficas

[1] L.A.B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 2010.

[2] J.E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, 1972.

[3] K. Erdmann and M.J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. Undergraduate Mathematics Series. Springer, Verlag London, 2006.

[4] V.G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[5] R. Carter. *Lie algebras of Finite and Affine type*. Cambridge University Press, 2005.

[6] A. Pianzola. *Vanishing of H^1 for Dedekind rings and applications to loop algebras*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005), 633-638.

[7] A. Pianzola. *Twisted loop algebras and Galois cohomology*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, volume 248 (2006), 292-304.

[8] B. Allison, S.Berman and A.Pianzola. *Covering algebras II: Isomorphism of loop algebras*. J. Reine Angew. Math. 571 (2004) 39-71.

[9] A. Pianzola, *Affine Kac-Moody Lie algebras as torsors over the punctured line*. Indag. Math. 13 (2002), 249-257.

[10] M.G. Alves. *Realização de Campos Livres de Álgebras de Kac-Moody Afim*. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

[11] M.T. Semensato. *Álgebras de Lie, grupos de Lie e aplicações à teoria de ações de semigrupos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 2010.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*. Ed. Unv. de S. Paulo e Polígono, S. Paulo, 1970.