

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Estimativas de Altura para Superfícies com Curvatura
Extrínseca Constante Positiva em Espaços Produto*

Cicero Keyson de Moura Pereira

Manaus- 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Estimativas de Altura para Superfícies com Curvatura
Extrínseca Constante Positiva em Espaços Produto*

Cicero Keyson de Moura Pereira

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração Geometria.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Inês Silva de Oliveira Padilha

Manaus- 2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P436e Pereira, Cicero Keyson de Moura
Estimativas de Altura para Superfícies com Curvatura Extrínseca
Constante Positiva em Espaços Produto / Cicero Keyson de Moura
Pereira. 2017
62 f.: il.; 31 cm.

Orientadora: Inês Silva de Oliveira Padilha
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Imersões Isométricas. 2. Espaços Produto. 3. Princípio do
Máximo. 4. Reflexão de Alexandrov. 5. Estimativas de Altura. I.
Padilha, Inês Silva de Oliveira II. Universidade Federal do
Amazonas III. Título

Estimativas de Altura para Superfícies com Curvatura Extrínseca Constante Positiva em Espaços Produto

CICERO KEYSON DE MOURA PEREIRA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração Geometria.

Inês Silva de Oliveira Padilha

Prof^a. Dr^a. Inês Silva de Oliveira Padilha
Universidade Federal do Amazonas

Juliana F.R. de Miranda

Prof^a. Dr^a. Juliana Ferreira Ribeiro de
Miranda
Universidade Federal do Amazonas

Elzimar de Oliveira Rufino

Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino
Universidade Federal de Roraima

Manaus, 20 de Outubro de 2017

A Deus e a minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades, conquistas e por ser o criador do céu e da terra e de tudo que habita neste mundo e dar a vida para o ser humano construir sua história.

A pessoa que mais tenho admiração, gratidão e respeito diante construção deste trabalho é a minha orientadora Inês Padilha, que se comprometeu de forma paciente e atenciosa soube guiar meus passos e fazer meus sonhos tornarem realidade.

Agradeço a minha família que mesmo não estando presentes, possuem a capacidade de transmitir forças para conseguir seguir em frente e acreditar que tudo no final é resolvido.

Meus amigos que não poderiam ficar de forma nenhuma esquecidos. Eles foram os culpados pelos momentos felizes e divertidos durante todo esse tempo. Em Especial quero citar meu irmão Danilo, meus amigos Guilherme Kiss, Jhonata Kiss, Clebes, Vinícius, Érico Barão, Thiago, Juan Carlos, Alex Quadrado, Neiza, Renata, Alice, Milena, Ozana, entre muitos outros. Estas pessoas deixaram meus dias mais proveitosos e descontraídos.

À FAPEAM, pelo auxílio concedido durante os anos de curso, sem o qual a permanência no programa de mestrado seria complicada.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas estimativas de altura para superfícies compactas com curvatura extrínseca constante positiva (K -superfícies) em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathcal{M}^2 denota uma superfície com curvatura de Gauss constante. Mostraremos inicialmente uma estimativa de altura vertical para K -gráficos compactos em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, com bordo em um plano horizontal e posteriormente uma estimativa de altura horizontal para K -superfícies compactas mergulhadas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com bordo em um plano vertical.

Tais resultados foram provados por José Espinar, José Galvez e Harold Rosenberg no artigo intitulado "Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces". As ferramentas utilizadas para demonstrar estas estimativas se baseiam no princípio do máximo de Hopf e no Método de Reflexão de Alexandrov.

Palavras-chaves: Imersões isométricas; Espaços Produto; Princípio do Máximo; Reflexão de Alexandrov; Estimativas de altura.

Abstract

We will present some height estimates for compact surfaces with positive constant extrinsic curvature (K -surfaces) in $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, where \mathcal{M}^2 is a surface with constant Gauss curvature. We will initially show a vertical height estimate for compact K -graphs in $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, with boundary in a slice and later horizontal height estimate for compact, embedded K -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with boundary on a vertical plane. Such results have been proven by José Espinar, José Galvez and Harold Rosenberg in the article entitled "Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces". The tools used to demonstrate these estimates are based on the Hopf Maximum Principle and the Alexandrov Reflection Method.

Keywords: Isometric immersions; Product spaces; Maximum Principle; Alexandrov Reflection; Height estimates.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Uma breve noção sobre imersões isométricas	11
1.2 Complexificação de um Espaço Vetorial	14
2 O conjunto $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$	22
2.1 Variedade Produto	22
2.1.1 Superfícies imersas em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$	28
3 Resultados Auxiliares	31
3.1 O Princípio do Máximo e o Método de Alexandrov	31
3.2 Algumas Equações Fundamentais	36
4 Estimativas de altura	49
4.1 Estimativa de altura vertical	49
4.2 Estimativa de altura horizontal	53
Referências	60

Introdução

Um problema clássico em geometria é tentar obter resultados de classificação, em particular, para superfícies imersas em espaços tridimensionais. As estimativas de altura por sua vez constituem ferramentas essenciais para a obtenção de resultados de propriedades relacionadas ao comportamento geométrico e topológico destas superfícies.

Vale ressaltar que existem muitos trabalhos nesta direção, pela evidente relevância do tema. Tal estudo teve como precursor Heinz [16] em 1969, ele provou que um gráfico compacto com curvatura média constante positiva H em \mathbb{R}^3 e bordo em um plano pode alcançar no máximo a altura $\frac{1}{H}$ do plano.

Posteriormente, Korevaar, Kusner, Meeks e Solomon [26], generalizaram estas estimativas para gráficos com curvatura média constante no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . A partir daí surgiram muitas contribuições adaptando as hipóteses sobre a curvatura da superfície ou o espaço ambiente na qual está imersa. Podemos citar por exemplo os trabalhos de: Rosenberg [20], em que prova a existência de estimativas para superfícies com curvatura de Gauss constante em \mathbb{R}^3 e \mathbb{H}^3 ; Rosenberg e Sa Earp [21], em que encontram estimativas de altura para uma família de superfícies de Weingarten em \mathbb{R}^3 ; Aledo, Espinar e Gálvez [5], em que passam a considerar superfícies com curvatura média constante positiva em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Esta dissertação se baseia no artigo de Espinar, Gálvez e Rosenberg [12] intitulado "Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces", em que são apresentadas estimativas de altura para superfícies compactas com curvatura extrínseca constante positiva em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathcal{M}^2 é uma superfície com curvatura Gaussiana constante.

Recentemente, Folha e Peñafiel [17] encontraram estimativas de altura para superfícies de Weingarten com curvatura extrínseca positiva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, o que mostra que tal tema de pesquisa ainda é bastante atual.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, estabelecemos notações, apresentando algumas definições e resultados de geometria Riemanniana. Além disso, abordamos a complexificação do espaço tangente a uma variedade.

No capítulo 2, apresentamos o espaço ambiente a ser considerado e as propriedades gerais de superfícies imersas em tal conjunto.

No capítulo 3, mostramos alguns resultados auxiliares que serão utilizados no decorrer do trabalho. Descrevemos o Princípio do Máximo de Hopf e o Método de Reflexão de Alexandrov que são ferramentas essenciais na construção da prova dos teoremas principais.

Finalmente, no capítulo 4, exibimos as estimativas de altura, inicialmente para gráficos compactos com curvatura extrínseca constante positiva em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, com bordo em um plano horizontal e em seguida estimativas de altura para superfícies compactas e mergulhadas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com bordo em um plano vertical.

1 Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo apresentar alguns conceitos e notações básicas da teoria de variedades imersas. Assumiremos as definições de variedades diferenciáveis, métricas Riemanniana, conexão Riemanniana.

1.1 Uma breve noção sobre imersões isométricas

Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} variedades diferenciáveis, de dimensões m e n respectivamente, com $m \leq n$ e $f : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^{n=m+k}$ uma imersão entre tais variedades.

Uma aplicação $f : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ é uma imersão isométrica se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \forall u, v \in T_p\mathcal{M} \text{ e } \forall p \in \mathcal{M}. \quad (1.1)$$

Sabemos que se $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma imersão e \mathcal{N} é uma variedade Riemanniana, então a métrica Riemanniana de \mathcal{N} induz uma métrica Riemanniana em \mathcal{M} , expressa pela equação (1.1). Tal métrica definida em \mathcal{M} é conhecida como métrica induzida por f . Como f é localmente um mergulho é possível identificar um aberto $U \subset \mathcal{M}$ com a sua imagem $f(U) \subset \mathcal{N}$ e cada campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ com sua imagem $df(X) \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$, em que $\mathfrak{X}(\cdot)$ denota o conjunto dos campos diferenciáveis e tangentes à variedade indicada.

Assim, fazendo uso desta identificação, podemos escrever para cada $p \in \mathcal{M}$ que

$$\begin{aligned} T_{f(p)}\mathcal{N} &= df_p(T_p\mathcal{M}) \oplus [df_p(T_p\mathcal{M})]^\perp \\ &= T_p\mathcal{M} \oplus [T_p\mathcal{M}]^\perp. \end{aligned}$$

Logo, qualquer $v \in T_{f(p)}\mathcal{N}$ pode ser escrito como $v = v^T + v^\perp$, em que $v^T \in T_p\mathcal{M}$ é chamada a componente tangencial de v e $v^\perp \in (T_p\mathcal{M})^\perp$ é a componente normal de v .

É possível mostrar que se $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \mathcal{N} e se $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, então $\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$, em que \bar{X}, \bar{Y} são quaisquer extensões locais de X, Y em \mathcal{N} , define a conexão Riemanniana associada a métrica induzida de \mathcal{M} .

Definiremos abaixo o tensor curvatura em termos da conexão Riemanniana de Levi-Civita.

Definição 1.1.1. *Seja \mathcal{M} , uma variedade diferenciável de dimensão m , definimos o tensor curvatura $R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, expresso por:*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}). \quad (1.2)$$

A seguir definiremos a segunda forma fundamental e a fórmula de Gauss para uma imersão isométrica $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Definição 1.1.2. *Seja $\alpha : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow (\mathfrak{X}(\mathcal{M}))^\perp$ dada por*

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y,$$

em que \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais de X, Y a \mathcal{N} . A aplicação α é chamada a **segunda forma fundamental da imersão** f (indicada às vezes por II), e a equação $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$ é conhecida como **fórmula de Gauss**.

Das propriedades das conexões Riemannianas $\bar{\nabla}$ e ∇ segue que α é bilinear e simétrica. Para detalhes veja [11].

Sejam $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $\xi \in (\mathfrak{X}(\mathcal{M}))^\perp$. Denotaremos $S_\xi X$ a componente tangencial de $-\bar{\nabla}_X \xi$, ou seja, $S_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^T$.

Observe que $0 = X\langle \xi, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y \rangle$, já que $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $\xi \in (\mathfrak{X}(\mathcal{M}))^\perp$.

Segue da fórmula de Gauss que

$$\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Agora, como α é uma aplicação simétrica, a expressão acima obtida mostra que $S_\xi : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$ é um operador linear e simétrico sobre o anel das funções diferenciáveis em \mathcal{M} , ou seja, $\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle X, S_\xi Y \rangle \forall X, Y \in T_p \mathcal{M}$. A aplicação S_ξ é chamada **operador forma** ou **operador de Weingarten**.

Se a codimensão da imersão isométrica $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é 1, dizemos que \mathcal{M} é uma hipersuperfície. Neste caso, existem apenas 2 escolhas para o vetor normal unitário. Se \mathcal{M} e \mathcal{N} são orientáveis e estão orientadas, então temos uma escolha única para o vetor normal unitário. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal orientada de $T_p \mathcal{M}$, escolhamos ξ de tal forma que $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$ seja uma base ortonormal orientada de $T_{f(p)} \mathcal{N}$.

Como S_ξ é linear e simétrica, então pode ser diagonalizada por uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ com autovalores reais $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, isto é, $S_\xi(e_i) = \lambda_i e_i$. Neste caso, dizemos que e_1, \dots, e_n são as direções principais da imersão e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as curvaturas principais.

Apresentaremos a seguir as equações fundamentais de uma imersão isométrica para codimensão 1. Denotaremos por R e \bar{R} o tensor de curvatura de \mathcal{M} e \mathcal{N} respectivamente e S o operador forma de \mathcal{M} associado ao seu normal unitário ξ . Com

as notações estabelecidas acima, temos que as seguintes equações são válidas para todo campo de vetores X, Y, Z em \mathcal{M} .

- $R(X, Y)Z - \bar{R}(X, Y)Z = \langle SX, Z \rangle SY - \langle SY, Z \rangle SX,$
- $\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = \bar{R}(X, Y)\xi.$

Estas equações são chamadas **equações de Gauss e Codazzi** respectivamente.

Vejam agora algumas definições que serão uteis no decorrer do trabalho.

Definição 1.1.3. *Sejam \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.*

Definimos o gradiente de f , denotado por $\nabla_{\mathcal{M}}f$ como sendo o campo vetorial em \mathcal{M} dado por:

$$\langle \nabla_{\mathcal{M}}f(p), v \rangle = df_p(v),$$

em que df é a diferencial de f , $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p\mathcal{M}$.

Seja $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$ um referencial adaptado de $T_p\mathcal{M}$. Temos por definição que

$$\langle \nabla_{\mathcal{M}}f(p), \partial x_i \rangle = \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}.$$

Como $\nabla_{\mathcal{M}}f(p)$ é um vetor de $T_p\mathcal{M}$, segue que

$$\nabla_{\mathcal{M}}f(p) = \sum_{i=1}^n a_i \partial x_i.$$

Portanto,

$$\langle \nabla_{\mathcal{M}}f(p), \partial x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i \partial x_i, \partial x_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i g_{ij} \text{ e}$$

desta forma $\sum_{i=1}^n a_i g_{ij} = \frac{\partial f(p)}{\partial x_j}$. Assim ,

$$\sum_{i=1}^n g^{kj} g_{ij} a_i = g^{kj} \frac{\partial f(p)}{\partial x_j} \text{ e}$$

somando em j a última equação obtemos que $\sum_{i=1}^n \delta_{ki} a_i = \sum_{j=1}^n g^{kj} \frac{\partial f(p)}{\partial x_j}$. Logo

$$a_k = \sum_{j=1}^n g^{kj} \frac{\partial f(p)}{\partial x_j}.$$

Portanto em coordenadas locais de \mathcal{M} , temos que o gradiente de uma função f pode ser expresso por

$$\nabla_{\mathcal{M}}f(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f(p)}{\partial x_j} \partial x_i.$$

Definição 1.1.4. *Sejam \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e X um campo vetorial \mathcal{M} . Definimos o divergente de X em \mathcal{M} , denotado por $\text{div}_{\mathcal{M}}X$, como*

$$\text{div}_{\mathcal{M}}X = \text{tr}(\nabla X),$$

em que

$$\begin{aligned} \nabla X : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ Y &\mapsto \nabla_Y X. \end{aligned}$$

Definição 1.1.5. *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana. Definimos o **laplaciano** de uma função diferenciável $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por Δf , como sendo a divergência do gradiente da função f , ou seja,*

$$\Delta f = \text{div} \nabla f.$$

Da mesma forma que fizemos para obter uma fórmula para o gradiente de uma aplicação em coordenadas locais, podemos encontrar uma fórmula em coordenadas locais para o divergente de um campo e para o laplaciano de uma função, dadas por:

$$\text{div}_{\mathcal{M}}X = \sum_{i,j,k} g^{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (a_k g_{jk}) - \sum_m a_k g_{km} \Gamma_{ij}^m \right],$$

e

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k \right]. \quad (1.3)$$

A seguir veremos como podemos considerar a complexificação do espaço tangente a uma variedade.

1.2 Complexificação de um Espaço Vetorial

Definição 1.2.1. *Considere \mathbb{E} um espaço vetorial real. A complexificação de \mathbb{E} denotada por $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ é o conjunto cujos elementos são da forma $X + iY$ ($i = \sqrt{-1}$), com $X, Y \in \mathbb{E}$, satisfazendo as condições:*

- a) $X + iY = A + iB$ se, e somente se, $X = A$ e $Y = B$;

$$b) (X + iY) + (A + iB) = (X + A) + i(Y + B);$$

$$c) (a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY) \text{ para } a + ib \in \mathbb{C}.$$

É possível mostrar que $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} e $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}^{\mathbb{C}}$.

Definição 1.2.2. Se $Z = X + iY \in \mathbb{E}^{\mathbb{C}}$, então $\bar{Z} = X - iY$ denotará o conjugado de Z .

Proposição 1.2.1. Sejam \mathbb{E} espaço vetorial de dimensão n e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base de \mathbb{E} sobre \mathbb{R} . Assumindo que os elementos de tal base são vetores de $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ temos que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ também será uma base de $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$.

Demonstração. De fato, para qualquer $X + iY \in \mathbb{E}^{\mathbb{C}}$, temos que

$$\begin{aligned} X + iY &= \sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \text{ em que } \lambda_j = a_j + ib_j. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Além disso, $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$ implica que $\sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j = 0$. Segue que $\sum_{j=1}^n a_j e_j = 0$ e $\sum_{j=1}^n b_j e_j = 0$. Assim $a_j = b_j = 0$, para todo j . Logo $\lambda_j = 0$, para todo j . \square

Definição 1.2.3. Seja $\mathcal{J} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ um homomorfismo linear em que \mathbb{V} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , tal que $\mathcal{J}^2 = Id$, em que Id é a aplicação identidade em \mathbb{V} . Chamamos \mathcal{J} de **estrutura complexa** em \mathbb{V} .

Considere agora \mathbb{E} um espaço vetorial real com uma estrutura complexa \mathcal{J} . Podemos definir o produto de um número complexo $\lambda = x + iy$ por um elemento $Y \in \mathbb{E}$ por $\lambda Y = (x + iy)Y = xY + y\mathcal{J}Y$. Observe que se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de \mathbb{E} sobre \mathbb{C} , então $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ é uma base de \mathbb{E} sobre \mathbb{R} . Disto decorre que se $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{E} = n$, então $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{E} = 2n$.

Dado um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n , seja \mathcal{J} o endomorfismo linear definido por $\mathcal{J}Y = iY$ para todo $Y \in \mathbb{E}$. Se \mathbb{E} é um espaço vetorial real de dimensão $2n$, então \mathcal{J} é a estrutura complexa de \mathbb{E} .

Observação 1.2.1. Podemos estender \mathcal{J} a um endomorfismo linear complexo de $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$, dado por

$$\mathcal{J}(X + iY) = \mathcal{J}X + i\mathcal{J}Y.$$

Além disso, em um espaço vetorial real de dimensão $2n$ com estrutura complexa \mathcal{J} , existem elementos Y_1, \dots, Y_n de \mathbb{E} tal que $\{Y_1, \dots, Y_n, \mathcal{J}Y_1, \dots, \mathcal{J}Y_n\}$ é uma base de \mathbb{E} .

Considerando $Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_k - i\mathcal{J}Y_k)$ e $\bar{Z}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_k + i\mathcal{J}Y_k)$, $k = 1, \dots, n$, temos $\{Z_1, \dots, Z_n, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n\}$ é uma base de $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ desde que $\dim \mathbb{E}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{E} = 2n$ e sendo o conjunto acima linearmente independente.

Temos ainda que $\mathcal{J}(Z_k) = iZ_k$ e $\mathcal{J}(\bar{Z}_k) = -i\bar{Z}_k \forall k$, o que significa que i e $-i$ são autovalores de \mathcal{J} , correspondentes aos autovetores Z_k e \bar{Z}_k , $k = 1, \dots, n$.

Denotaremos $\mathbb{E}^{(1,0)} = \{Z \in \mathbb{E}^{\mathbb{C}}; \mathcal{J}Z = iZ\}$ e $\mathbb{E}^{(0,1)} = \{Z \in \mathbb{E}^{\mathbb{C}}; \mathcal{J}Z = -iZ\}$ os auto-espacos correspondentes aos autovalores i e $-i$ respectivamente.

É possível mostrar que

- (i) $\mathbb{E}^{(1,0)} = \{Y - i\mathcal{J}Y; Y \in \mathbb{E}\}$ e $\mathbb{E}^{(0,1)} = \{Y + i\mathcal{J}Y; Y \in \mathbb{E}\}$;
- (ii) $\mathbb{E}^{\mathbb{C}} = \mathbb{E}^{(1,0)} \oplus \mathbb{E}^{(0,1)}$.

Veja [23] e a dissertação [24] para detalhes.

Os resultados vistos acima podem ser aplicados ao espaço tangente de uma variedade, admitindo sua complexificação.

Definição 1.2.4. Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável real. Um campo de tensores \mathcal{J} em \mathcal{M} é chamado uma estrutura **quase complexa** em \mathcal{M} , se para cada ponto $p \in \mathcal{M}$, \mathcal{J} é um endomorfismo do espaço tangente $T_p\mathcal{M}$, tal que $\mathcal{J}^2 = -Id$.

Se \mathcal{M} admite uma estrutura quase complexa, diremos que \mathcal{M} é uma variedade quase complexa. Se \mathcal{M} for uma variedade complexa com estrutura quase complexa \mathcal{J} em $T_p\mathcal{M}$, tal que \mathcal{J} é um operador ortogonal, paralelo na conexão Riemanniana, então \mathcal{M} é chamada **variedade Kähleriana**.

Com base no que foi visto, podemos definir o espaço tangente complexificado a \mathcal{M} em p por:

$$T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M} = \{X + iY; X, Y \in T_p\mathcal{M}\}.$$

Temos que $T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M} = T_p^{(1,0)}\mathcal{M} \oplus T_p^{(0,1)}\mathcal{M}$, em que $T_p^{(1,0)}\mathcal{M}$ e $T_p^{(0,1)}\mathcal{M}$ denotam os autoespaços associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, ou seja

$$\begin{aligned} T_p^{(1,0)}\mathcal{M} &= \{Y - i\mathcal{J}Y; Y \in T_p\mathcal{M}\} \text{ e} \\ T_p^{(0,1)}\mathcal{M} &= \{Y + i\mathcal{J}Y; Y \in T_p\mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Sejam $f : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade Kähler de dimensão m em uma variedade Riemanniana \mathcal{N}^n e $\alpha : T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M} \times T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M} \rightarrow (T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M})^{\perp}$ a extensão \mathbb{C} -bilinear da 2ª forma fundamental da imersão f , em que $(T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M})^{\perp} = \{X + iY; X, Y \in (T_p\mathcal{M})\}$.

Dados $X = X' + X''$, $Y = Y' + Y'' \in T_p^{\mathbb{C}}\mathcal{M}$, com $X' = \frac{1}{2}(X - i\mathcal{J}X)$, $Y' = \frac{1}{2}(Y - i\mathcal{J}Y) \in T_p^{(1,0)}\mathcal{M}$, $X'' = \frac{1}{2}(X + i\mathcal{J}X)$ e $Y'' = \frac{1}{2}(Y + i\mathcal{J}Y) \in T_p^{(0,1)}\mathcal{M}$ temos que $\alpha = \alpha^{(2,0)} + \alpha^{(1,1)} + \alpha^{(0,2)}$, em que

$$\begin{aligned} \alpha^{(2,0)}(X, Y) &= \alpha(X', Y'), \\ \alpha^{(1,1)}(X, Y) &= [\alpha(X', Y'') + \alpha(X'', Y')], \\ \alpha^{(0,2)}(X, Y) &= \overline{\alpha^{(2,0)}(X, Y)} = \alpha(X'', Y''). \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \alpha^{(1,1)}(X, Y) &= \alpha\left(\frac{1}{2}(X - i\mathcal{J}X), \frac{1}{2}(Y + i\mathcal{J}Y)\right) \\ &+ \alpha\left(\frac{1}{2}(X + i\mathcal{J}X), \frac{1}{2}(Y - i\mathcal{J}Y)\right) \\ &= \frac{1}{4}[\alpha(X, Y) + \alpha(X, i\mathcal{J}Y) + \alpha(-i\mathcal{J}X, Y) \\ &+ \alpha(-i\mathcal{J}X, i\mathcal{J}Y) + \alpha(X, Y) \\ &+ \alpha(X, -i\mathcal{J}Y) + \alpha(i\mathcal{J}X, Y) + \alpha(i\mathcal{J}X, -i\mathcal{J}Y)] \\ &= \frac{1}{2}[\alpha(X, Y) + \alpha(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha^{(2,0)}(X, Y) + \alpha^{(0,2)}(X, Y) &= \alpha\left(\frac{1}{2}(X - i\mathcal{J}X), \frac{1}{2}(Y - i\mathcal{J}Y)\right) \\ &+ \alpha\left(\frac{1}{2}(X + i\mathcal{J}X), \frac{1}{2}(Y + i\mathcal{J}Y)\right) \\ &= \frac{1}{4}[\alpha(X, Y) + \alpha(X, -i\mathcal{J}Y) \\ &+ \alpha(-i\mathcal{J}X, Y) + \alpha(-i\mathcal{J}X, -i\mathcal{J}Y) + \alpha(X, Y) \\ &+ \alpha(X, i\mathcal{J}Y) + \alpha(i\mathcal{J}X, Y) + \alpha(i\mathcal{J}X, i\mathcal{J}Y)] \\ &= \frac{1}{2}[\alpha(X, Y) - \alpha(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y)]. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = \alpha^{(2,0)} + \alpha^{(1,1)} + \alpha^{(0,2)}$. □

No caso particular em que Σ é uma superfície, denotaremos por $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma = \{X + iY; X, Y \in T_p\Sigma\}$, a complexificação do espaço tangente a Σ em p .

Admitindo parâmetros complexos ($z = x + iy$) em Σ podemos definir os seguintes campos coordenados:

$$\partial z = \frac{1}{2}(\partial x - i\partial y) \quad \text{e} \quad \partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial x + i\partial y), \quad (1.5)$$

de modo que $\{\partial z, \partial \bar{z}\}$ é uma base local de $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$.

Também é possível definir as 1-formas complexas $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$ que formam a base dual de $\{\partial z, \partial \bar{z}\}$.

Além disso, para cada p em um aberto de Σ , o conjunto $\{dz \otimes dz, dz \otimes d\bar{z}, d\bar{z} \otimes d\bar{z}\}$ forma uma base para o espaço das aplicações bilineares $\{\beta^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \times T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \rightarrow \mathbb{C}\}$.

Assim, em termos do parâmetro complexo $z = x + iy$, podemos reescrever a primeira e segunda forma fundamental como

$$\begin{aligned} I &= Adz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2 \\ II &= Bdz^2 + 2\rho|dz|^2 + \bar{B}d\bar{z}^2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF), \\ \lambda &= \frac{1}{4}(E + G), \\ \bar{A} &= \frac{1}{4}(E - G + 2iF), \\ B &= \frac{1}{4}(e - g - 2if), \\ \rho &= \frac{1}{4}(e + g), \\ \bar{B} &= \frac{1}{4}(e - g + 2if), \end{aligned}$$

em que E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental, e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental em termos dos parâmetros reais (x, y) .

As expressões abaixo representam as curvaturas de Gauss e média para superfícies expressas em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais

em termos de parâmetros reais.

$$\begin{aligned} K &= \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right). \end{aligned}$$

Daí seguem as expressões de K e H em termos da parametrização definida em um aberto $U \subset \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} K &= \frac{B\bar{B} - \rho^2}{A\bar{A} - \lambda^2} = \frac{|B|^2 - \rho^2}{|A|^2 - \lambda^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{A}B - 2\rho\lambda + \bar{B}A}{A\bar{A} - \lambda^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\bar{A}B - 2\rho\lambda + \bar{B}A}{(|A|^2 - \lambda^2)}. \end{aligned}$$

Além disso, denotando por ∇ a extensão \mathbb{C} -bilinear da conexão de Σ , temos que se $z = x + iy$ e $\partial z, \partial \bar{z}$ são como em (1.5), os símbolos de Christoffel complexos (${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{ij}^k$) associados a parâmetros complexos estão dados por

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial z} \partial z &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \partial \bar{z} \\ \nabla_{\partial z} \partial \bar{z} &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \partial \bar{z} \\ \nabla_{\partial \bar{z}} \partial z &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{21}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{21}^2 \partial \bar{z} \\ \nabla_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z} &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \partial \bar{z}, \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial z} \partial z &= \nabla_{\frac{1}{2}(\partial x - i\partial y)} \frac{1}{2}(\partial x - i\partial y) \\ &= \frac{1}{4} \nabla_{\partial x - i\partial y} (\partial x - i\partial y) = \frac{1}{4} [\nabla_{\partial x} \partial x - 2i \nabla_{\partial x} \partial y - \nabla_{\partial y} \partial y] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\Gamma_{11}^1 - 2i\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1) \partial x + (\Gamma_{11}^2 - 2i\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2) \partial y \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \right] \partial z \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1) \right] \partial \bar{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial z} \partial \bar{z} &= \frac{1}{2} \nabla_{\partial x - i\partial y} \frac{1}{2}(\partial x + i\partial y) = \frac{1}{4} [\nabla_{\partial x} \partial x + i \nabla_{\partial x} \partial y - i \nabla_{\partial y} \partial x + \nabla_{\partial y} \partial y] \\ &= \frac{1}{4} \left[\Gamma_{11}^1 \partial x + \Gamma_{11}^2 \partial y + \Gamma_{22}^1 \partial x + \Gamma_{22}^2 \partial y \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) \partial x + (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2) \partial y \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) (\partial z + \partial \bar{z}) + (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2) (i\partial z - i\partial \bar{z}) \right] \\ &= \frac{1}{4} [\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 + i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)] \partial z + \frac{1}{4} [\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 - i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)] \partial \bar{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial\bar{z}}\partial\bar{z} &= \nabla_{\frac{1}{2}(\partial x + i\partial y)}\frac{1}{2}(\partial x + i\partial y) = \frac{1}{2}\nabla_{\partial x}\frac{1}{2}(\partial x + i\partial y) + \frac{1}{2}\nabla_{\partial y}\frac{1}{2}(\partial x + i\partial y) \\
&= \frac{1}{4}\nabla_{\partial x}\partial x + \frac{1}{4}\nabla_{\partial x}\partial y + \frac{1}{4}\nabla_{\partial y}\partial x - \frac{1}{4}\nabla_{\partial y}\partial y \\
&= \frac{1}{4}(\nabla_{\partial x}\partial x - \nabla_{\partial y}\partial y) + \frac{1}{4}(\nabla_{\partial x}\partial y + \nabla_{\partial y}\partial x) + \\
&= \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^1\partial x + \Gamma_{11}^2\partial y - (\Gamma_{22}^1\partial x + \Gamma_{22}^2\partial y)) + \frac{1}{4}(2(\Gamma_{12}^1\partial x + \Gamma_{12}^2\partial y)) \\
&= \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2i\Gamma_{12}^1)\partial x + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2i\Gamma_{12}^2)\partial y \\
&= \frac{1}{4}\left[(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)\right]\partial z \\
&+ \frac{1}{4}\left[(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\right]\partial\bar{z}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
{}^c\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\right] \\
{}^c\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)\right] \\
{}^c\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 + i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)\right] \\
{}^c\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 - i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)\right] \\
{}^c\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)\right] \\
{}^c\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\right].
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
{}^c\Gamma_{11}^1 &= \overline{{}^c\Gamma_{22}^2} \\
{}^c\Gamma_{11}^2 &= \overline{{}^c\Gamma_{22}^1} \\
{}^c\Gamma_{12}^1 &= \overline{{}^c\Gamma_{12}^2}.
\end{aligned}$$

Também podemos expressar os símbolos de Christoffel complexos em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental associados aos parâmetros complexos.

Vejamos, por exemplo, os valores de ${}^c\Gamma_{11}^1$ e ${}^c\Gamma_{11}^2$.

Como $\nabla_{\partial z}\partial z = {}^c\Gamma_{11}^1\partial z + {}^c\Gamma_{11}^2\partial\bar{z}$, temos que

$$I(\nabla_{\partial z}\partial z, \partial z) = {}^c\Gamma_{11}^1 I(\partial z, \partial z) + {}^c\Gamma_{11}^2 I(\partial\bar{z}, \partial z) = {}^c\Gamma_{11}^1 A + {}^c\Gamma_{11}^2 \lambda.$$

Por outro lado,

$$I(\nabla_{\partial z}\partial z, \partial z) = \frac{1}{2}\partial z I(\partial z, \partial z) = \frac{1}{2}A_z$$

ou seja, ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \lambda = \frac{1}{2} A_z$.

Da mesma forma,

$$I(\nabla_{\partial_z} \partial_z, \partial \bar{z}) = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 I(\partial_z, \partial \bar{z}) + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 I(\partial \bar{z}, \partial \bar{z}) = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \lambda + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \bar{A}$$

e por outro lado:

$$I(\nabla_{\partial_z} \partial_z, \partial \bar{z}) = \partial_z I(\partial_z, \partial \bar{z}) - I(\partial_z, \nabla_{\partial_z} \partial \bar{z}) = \lambda_z - \frac{1}{2} A_{\bar{z}}.$$

Logo, ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \lambda + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \bar{A} = \lambda_z - \frac{1}{2} A_{\bar{z}}$.

Obtemos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \lambda = \frac{1}{2} A_z \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \lambda + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \bar{A} = \lambda_z - \frac{1}{2} A_{\bar{z}} \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2(|A|^2 - \lambda^2)} (\bar{A} A_z - 2\lambda \lambda_z + \lambda A_{\bar{z}}) \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 &= \frac{-1}{2(|A|^2 - \lambda^2)} (A A_{\bar{z}} - 2A \lambda_z - \lambda A_z). \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos os demais símbolos:

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2(|A|^2 - \lambda^2)} (\bar{A} A_{\bar{z}} - \lambda \bar{A}_z) \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2(|A|^2 - \lambda^2)} (A \bar{A}_z - \lambda A_{\bar{z}}) \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2(|A|^2 - \lambda^2)} (\bar{A} \bar{A}_z - 2\bar{A} \lambda_{\bar{z}} + \lambda \bar{A}_{\bar{z}}) \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2(|A|^2 - \lambda^2)} (A \bar{A}_{\bar{z}} - 2\lambda \lambda_{\bar{z}} + \lambda \bar{A}_{\bar{z}}). \end{aligned}$$

2 O conjunto $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados relacionadas a superfícies imersas no conjunto $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$. Iniciaremos relembrando o conceito de variedade produto. Tomamos como referência [11], [13].

2.1 Variedade Produto

Se \mathcal{M} e \mathcal{N} são variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivamente com estruturas diferenciáveis $\{(\mathbf{U}_\alpha, \mathbf{X}_\alpha)\}$ e $\{(\mathbf{V}_\beta, \mathbf{Y}_\beta)\}$, então é possível mostrar que o conjunto

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{(p, q); p \in \mathcal{M} \text{ e } q \in \mathcal{N}\}$$

também é uma variedade diferenciável cuja estrutura diferenciável é dada por $\{U_\alpha \times V_\beta, Z_{\alpha\beta}\}$, em que $Z_{\alpha\beta}(p, q) = (X_\alpha(p), Y_\beta(q))$ com $p \in U_\alpha$ e $q \in V_\beta$. Com esta estrutura diferenciável $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ é chamada a **variedade produto** de \mathcal{M} por \mathcal{N} .

Considerando as projeções naturais $\pi : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\sigma : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, podemos definir uma métrica riemanniana em $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ da seguinte forma:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_{(p,q)}(u), d\pi_{(p,q)}(v) \rangle_p + \langle d\sigma_{(p,q)}(u), d\sigma_{(p,q)}(v) \rangle_q,$$

$\forall (p, q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, e $\forall u, v \in T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = T_p\mathcal{M} \oplus T_q\mathcal{N}$.

A métrica definida acima é chamada **métrica produto**.

Além disso, a conexão Riemanniana do produto $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ é definida por

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla_{Y_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 X_2,$$

$\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$, em que ∇^1 denota a conexão riemanniana de \mathcal{M} e ∇^2 a conexão Riemanniana de \mathcal{N} . Tal conexão chama-se **conexão produto**.

Neste trabalho vamos considerar $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ a variedade produto de dimensão 3, em que \mathcal{M}^2 denota uma superfície Riemanniana de curvatura Gaussiana constante ε .

Assim,

$$\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R} = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} .$$

O caso $\varepsilon = 0$ será omitido no decorrer do trabalho e estaremos interessados no caso em que $\varepsilon = \pm 1$.

Chamaremos \mathcal{M}^2 de superfície **base** e \mathbb{R} de **fibra**.

A partir de agora mostraremos algumas definições e resultados relacionados ao conjunto $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Sejam as projeções naturais dadas por

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}^2 & \text{e } \sigma : \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y, t) &\mapsto (x, y) & (x, y, t) &\mapsto t \end{aligned}$$

chamaremos $\sigma^{-1}(t) = \mathcal{M}^2 \times \{t\}$ de **seções horizontais**, em que t é um ponto da fibra $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}$ de **seções verticais**, em que p é um ponto da base.

Além disso, tem-se que para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\pi|_{\mathcal{M}^2 \times \{t\}}$ é uma isometria, para cada $p \in \mathcal{M}^2$ a aplicação $\sigma|_{\{p\} \times \mathbb{R}}$ é uma isometria, e para cada $(p, t) \in \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ as seções horizontais e verticais são ortogonais em (p, t) .

Definição 2.1.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$ um campo de vetores. Temos que :*

$$X(p, t) = (X^h(p), X^v(t)) \in T_{(p,t)}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}) \equiv T_p\mathcal{M}^2 \times T_t\mathbb{R},$$

em que $X^h = d\pi(X) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$ e $X^v = d\sigma(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Desta forma diremos que $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$ é um **campo horizontal** se $X^v \equiv 0$ e é um **campo vertical** se $X^h \equiv 0$.

Observe que se X é um campo horizontal, então $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$ e de forma análoga, se Y é um campo vertical, então $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$.

Para simplificar a notação denotaremos $\langle, \rangle = g_\varepsilon + dt^2$ a métrica em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que g_ε é a métrica em \mathcal{M}^2 e dt^2 denota a métrica usual em \mathbb{R} . Consideraremos ainda $\bar{\nabla}, \nabla^{\mathcal{M}^2}, \nabla^{\mathbb{R}}$ as conexões de Levi-Civita associadas a $\langle, \rangle, g_\varepsilon$ e dt^2 respectivamente.

Os resultados a seguir poderão ser encontradas em [6], [7] e [13].

Proposição 2.1.1. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Então:*

- (a) $\bar{\nabla}_X Y$ é um campo horizontal e $(\bar{\nabla}_X Y)^h = \nabla_X^{\mathcal{M}^2} Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$;
- (b) $\bar{\nabla}_V W$ é um campo vertical e $(\bar{\nabla}_V W)^v = \nabla_V^{\mathbb{R}} W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$.
- (c) $\bar{\nabla}_V X = \bar{\nabla}_X V = 0$.

Observação 2.1.1. Se $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$ é um campo horizontal, então:

$$\langle \bar{\nabla}\sigma, X \rangle = d\sigma(X) = X\sigma = 0,$$

em que $\bar{\nabla}\sigma$ denota o gradiente de σ com respeito a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim $\bar{\nabla}\sigma \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$, que por simplicidade denotaremos por ∂t . O campo ∂t constitui uma base para $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ e vale que $\langle \partial t, \partial t \rangle = 1$.

Se $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$, então podemos decompor X em sua parte horizontal e vertical. Assim temos:

$$X^h = X - \langle X, \partial t \rangle \partial t, \text{ em que } X^v = \langle X, \partial t \rangle \partial t.$$

Lema 2.1.1. O campo ∂t é um campo paralelo.

Demonstração. De fato, sejam $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$ e $\partial t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ um campo vertical. Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \partial t &= \bar{\nabla}_{X^h + \langle X, \partial t \rangle \partial t} \partial t \\ &= \bar{\nabla}_{X^h} \partial t + \langle X, \partial t \rangle \bar{\nabla}_{\partial t} \partial t. \end{aligned}$$

Mas $\bar{\nabla}_{X^h} \partial t = 0$ (pela proposição (2.1.1)) e $\bar{\nabla}_{\partial t} \partial t = 0$, já que $\langle \bar{\nabla}_{\partial t} \partial t, \partial t \rangle = \frac{1}{2} \partial t \langle \partial t, \partial t \rangle = 0$, em que nesta última igualdade usamos o fato do campo ∂t ser unitário. Assim $\bar{\nabla}_X \partial t = 0$ e portanto ∂t é um campo paralelo. \square

Definição 2.1.2. Dizemos que a curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ é chamada **geodésica** se $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0$, em que $\frac{D}{dt}$ é o operador derivada covariante.

Observação 2.1.2. Quando for possível estender o domínio de definição da geodésica γ para todo \mathbb{R} , então diremos que γ é uma geodésica completa.

A seguir denotaremos \bar{R} , ${}^{\mathcal{M}^2}R$ e ${}^{\mathbb{R}}R$ os tensores curvaturas de $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, \mathcal{M}^2 e \mathbb{R} respectivamente. As demonstrações das proposições enunciadas abaixo podem ser encontradas em [13].

Proposição 2.1.2. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Então vale que:

- (i) $\bar{R}(X, Y)Z$ é um campo horizontal e $(\bar{R}(X, Y)Z)^h = {}^{\mathcal{M}^2}R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$;
- (ii) $\bar{R}(U, V)W$ é um campo vertical e $(\bar{R}(U, V)W)^v = {}^{\mathbb{R}}R(U, V)W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$. Denotando $X^h, Y^h, Z^h \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$ as projeções horizontais dos campos X, Y, Z temos:*

$$\bar{R}(X, Y)Z = \mathcal{M}^2 R(X^h, Y^h)Z^h$$

Observação 2.1.3. *Quando $\mathcal{M}^2 = \mathbb{H}^2$, utilizaremos o modelo do disco de Poincaré dado por*

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\},$$

o bordo no infinito de \mathbb{D} é dado por $\mathbb{S}_\infty^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Podemos orientar \mathbb{H}^2 de modo que seu bordo assintótico esteja orientado no sentido anti-horário.

As geodésicas neste modelo são os semicírculos ortogonais ao bordo assintótico e os diâmetros. Considerando γ uma geodésica completa orientada em \mathbb{H}^2 , temos que $\partial_\infty \gamma = \{\gamma^-, \gamma^+\}$, em que $\gamma^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$ e $\gamma^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$ com t sendo o parâmetro da geodésica.

Definição 2.1.3. *Sejam $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}_\infty^1$. Definimos a **geodésica orientada** ligando θ_1 a θ_2 como a geodésica completa orientada de θ_1 para θ_2 . Tal geodésica será denotada por $\gamma(\theta_1, \theta_2)$.*

Definição 2.1.4. *Seja γ uma geodésica completa orientada em \mathbb{H}^2 . Chamaremos por **domínio exterior** de γ em \mathbb{H}^2 , $ext_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$, a componente conexa de $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma$ para em que aponta $J\gamma'$ (J é o operador de rotação no sentido anti-horário usual) e por **domínio interior** de γ em \mathbb{H}^2 , $int_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$, a outra componente conexa de $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma$.*

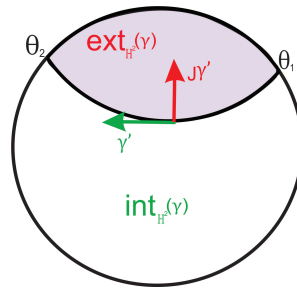


Figura 1 – Domínio exterior e interior de γ em \mathbb{H}^2

Definição 2.1.5. *Seja γ uma geodésica completa em \mathbb{H}^2 . Chamaremos por **plano vertical** o conjunto $\gamma \times \mathbb{R}$ denotado por \mathbb{P} , ou seja, $\mathbb{P} = \gamma \times \mathbb{R}$ e por **planos horizontais** as seções horizontais que são isométricas a \mathbb{H}^2 .*

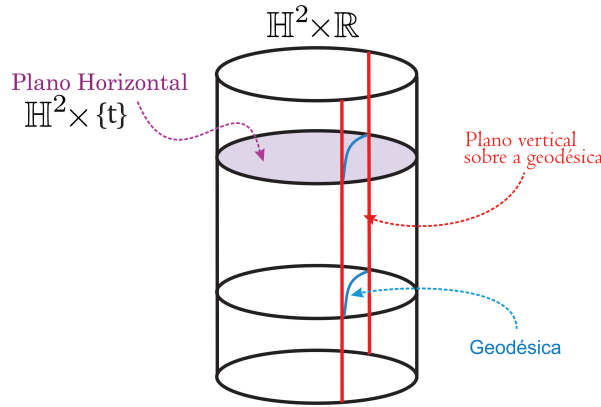


Figura 2 – Planos verticais e horizontais

As noções de domínio interior e exterior de uma geodésica se estendem de maneira natural a planos verticais. Para uma geodésica completa em \mathcal{M}^2 , denotamos domínio exterior e interior do plano $\mathbb{P} = \gamma \times \mathbb{R}$ os conjuntos $\mathbf{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \mathbb{P} = \mathbf{ext}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \times \mathbb{R}$ e $\mathbf{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \mathbb{P} = \mathbf{int}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \times \mathbb{R}$.

Definição 2.1.6 (Folheação por planos verticais). *Seja \mathbb{P} um plano vertical em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e seja γ uma geodésica completa em \mathbb{H}^2 , tal que $\gamma(0) = p_0 \in \mathbb{P}$, $\gamma'(0)$ é ortogonal a \mathbb{P} em p_0 e $\gamma(t) \in \mathbf{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(\mathbb{P})$ para $t > 0$. Definimos **folheação orientada de planos verticais ao longo de γ** , denotada por $\mathbb{P}_\gamma(t)$, o conjunto dos planos verticais ortogonais a $\gamma(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, com $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\gamma(0)$.*

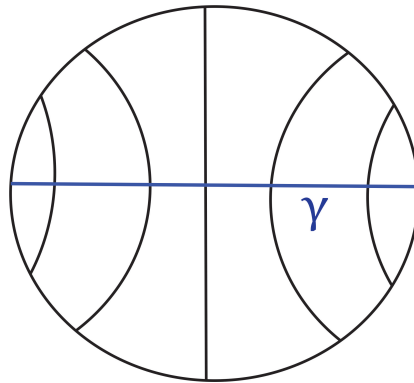


Figura 3 – Folheação por planos verticais

Definição 2.1.7. *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Seja $p \in \mathcal{M}$ e $U \subset \mathcal{M}$ uma vizinhança de p em \mathcal{M} e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow \mathcal{M}$ uma aplicação diferenciável, tal que para cada $p \in U$ a curva $t \rightarrow \varphi(t, p)$ é a trajetória do campo X passando por p em $t = 0$. X é chamado **campo de Killing** se para cada $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ for uma isometria de \mathcal{M} .*

Observação 2.1.4. *Seja X um campo de vetores ao longo de \mathcal{M} . Então X é uma campo de Killing se, e somente se,*

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$$

para cada $Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Definição 2.1.8. *Seja Ω um domínio em um hiperplano geodésico P . Para cada $p \in \Omega$ seja γ_p a única geodésica passando por p ortogonal a P . O **cilindro geodésico** sobre Ω é o conjunto*

$$C(\Omega) = \bigcup_{p \in \Omega} \gamma_p.$$

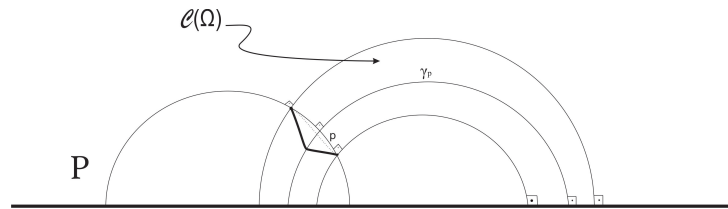


Figura 4 – Cilindro geodésico

Definição 2.1.9. *Considere Ω um domínio em um hiperplano geodésico \mathbb{P} . Seja $p \in \Omega$ e γ_p a única geodésica passando por p ortogonal a \mathbb{P} ; seja q um ponto de Ω e $\eta_p(q)$ a órbita passando por q da translação hiperbólica ao longo de γ_p (isto é, a curva integral do campo de Killing associado a translação hiperbólica). O **cilindro de Killing** sobre Ω com respeito a γ_p é o conjunto*

$$\mathcal{C}(\Omega, \gamma_p) = \bigcup_{p \in \Omega} \eta_p(q).$$

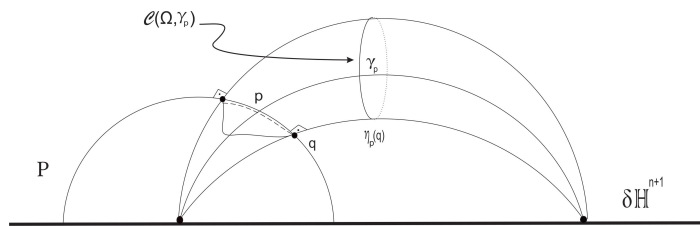


Figura 5 – Cilindro de Killing

Definição 2.1.10. *Um **gráfico de Killing** com respeito a geodésica γ_p é um gráfico no seguinte sistema de coordenadas: seja Ω um domínio em P e seja u uma função real que a cada ponto $q \in \Omega$ associa um ponto em $\eta_p(q)$ à distância hiperbólica $u(q)$ de P .*

2.1.1 Superfícies imersas em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$

Seja $\Sigma \subset \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície orientável e conexa. Consideraremos sobre Σ a métrica induzida, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|\Sigma}$, de $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, que denotaremos por I . Sejam ∇ e R a conexão e o tensor curvatura da superfície Σ e S o operador forma de Σ associado ao normal unitário N da superfície, isto é, $SX = -\bar{\nabla}_X N$, $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Além disso, $II(X, Y) = \langle SX, Y \rangle$ é a 2ª forma fundamental da superfície.

Denotaremos por T a projeção do campo vertical ∂t sobre o espaço tangente a Σ , $\nu = \langle N, \partial t \rangle$ a **componente normal** de ∂t , na qual chamaremos de **função ângulo** da superfície e $h = \sigma|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a **função altura** definida em Σ . Assim ∂t é o gradiente em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ da função t e portanto T é o gradiente de h em Σ .

Teorema 2.1.1. *Seja $\Sigma \subset \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície conexa com normal unitário N e operador forma S . Sejam h e ν as funções altura e ângulo respectivamente da superfície e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Então as seguintes equações são válidas:*

$$K(I) = K + \kappa\nu^2 \quad \textbf{(Gauss)} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] \\ = \kappa\nu(\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y) \end{aligned} \quad \textbf{(Codazzi)} \quad (2.2)$$

$$\nabla_X \nabla h = \nu SX \quad (2.3)$$

$$d\nu(X) = -\langle SX, \nabla h \rangle \quad (2.4)$$

$$\|\nabla h\|^2 + \nu^2 = 1, \quad (2.5)$$

em que $K(I)$ denota a curvatura de Gauss de I , K a curvatura extrínseca, κ a curvatura de Gauss de \mathcal{M}^2 em um ponto $\pi(p)$, $p \in \Sigma$.

Demonstração. Seja o campo ∂t escrito como:

$\partial t = T + \nu N$, em que $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Como $T = \nabla_{\Sigma} h$, temos:

$$1 = \langle \partial t, \partial t \rangle = \langle T + \nu N, T + \nu N \rangle = \|T\|^2 + \nu^2 = \|\nabla h\|^2 + \nu^2.$$

Além disso, usando que ∂t é um campo paralelo e que

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle SX, Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$$

temos

$$\begin{aligned}
0 = \bar{\nabla}_X \partial t &= \bar{\nabla}_X(T + \nu N) = \bar{\nabla}_X \nabla h + X(\nu)N + \nu \bar{\nabla}_X N \\
&= \nabla_X \nabla h + \langle SX, \nabla h \rangle N + d\nu(X)N + \nu \bar{\nabla}_X N \\
&= \nabla_X \nabla h + \langle SX, \nabla h \rangle N + d\nu(X)N - \nu SX \\
&= (\nabla_X \nabla h - \nu SX) + (\langle SX, \nabla h \rangle + d\nu(X))N,
\end{aligned}$$

portanto $\nabla_X \nabla h - \nu SX = 0$ e $\langle SX, \nabla h \rangle + d\nu(X) = 0$.

Agora dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos que as equações de Gauss e Codazzi de uma superfície em um espaço tridimensional são dadas respectivamente por:

$$R(X, Y)Z - \bar{R}(X, Y)Z = \langle SX, Z \rangle SY - \langle SY, Z \rangle SX \quad (2.6)$$

$$\bar{R}(X, Y)N = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y]. \quad (2.7)$$

Usando que $\bar{R}(X, Y)Z = \mathcal{M}^2 R(X^h, Y^h)Z^h$ e usando que o tensor de curvatura de uma superfície imersa em um espaço de curvatura constante pode ser expresso como:

$$\mathcal{M}^2 R(X^h, Y^h)Z^h = \kappa(\langle X^h, Z^h \rangle Y^h - \langle Y^h, Z^h \rangle X^h),$$

em que κ é a curvatura de Gauss de \mathcal{M}^2 , temos que para qualquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= \mathcal{M}^2 R(X^h, Y^h)Z^h = \kappa(\langle X^h, Z^h \rangle Y^h - \langle Y^h, Z^h \rangle X^h) \\
&= \kappa(\langle X, Z \rangle - \langle X, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle)(Y - \langle Y, \partial t \rangle \partial t) \\
&\quad - (\langle Y, Z \rangle - \langle Y, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle)(X - \langle X, \partial t \rangle \partial t) \\
&= \kappa(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X - \langle X, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle Y \\
&\quad + \langle Z, \partial t \rangle \langle Y, \partial t \rangle X + (\langle Y, Z \rangle \langle X, \partial t \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial t \rangle) \partial t),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= \kappa(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X - \langle X, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle Y + \langle Y, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle X \\
&\quad + (\langle Y, Z \rangle \langle X, \partial t \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial t \rangle) \partial t). \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Fazendo $Z = N$ e tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ em (2.8),

$$\bar{R}(X, Y)N = \kappa \nu (\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y).$$

Segue por (2.7), que a equação de Codazzi é satisfeita. Considere agora o produto interno da equação (2.6), por um campo tangente W . Temos:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \kappa(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle \langle Y, W \rangle \\
&\quad + \langle Y, \partial t \rangle \langle Z, \partial t \rangle \langle X, W \rangle + (\langle Y, Z \rangle \langle X, \partial t \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial t \rangle) \langle \partial t, W \rangle). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Tomando $\{X, Y\} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ uma base ortonormal e usando $Z = X$, $W = Y$ em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle &= \kappa(1 - \langle X, \partial t \rangle^2 - \langle Y, \partial t \rangle^2) = \\ &= \kappa(1 - \langle X, \nabla h \rangle^2 - \langle Y, \nabla h \rangle^2) = \kappa(1 - \|\nabla h\|^2) = \kappa\nu^2 \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle = \kappa\nu^2. \quad (2.10)$$

Observe ainda que

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle = K(I) \quad (2.11)$$

e

$$K = \det(S) = \langle SX, X \rangle \langle SY, Y \rangle - \langle SX, Y \rangle \langle SY, X \rangle. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.10) e (2.12) em (2.6), obtemos (2.3) . \square

3 Resultados Auxiliares

3.1 O Princípio do Máximo e o Método de Alexandrov

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes da teoria de operadores lineares elípticos de segunda ordem. Estamos interessados em abordar o princípio do máximo clássico de H. Hopf, além do método de reflexão de Alexandrov. Usaremos [18] como referência básica.

Iniciaremos lembrando que dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, um operador de segunda ordem L em Ω é um operador do tipo

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c, \quad (3.1)$$

em que $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e limitadas, com $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \dots, n$.

Para $f \in C^2(\Omega)$, definimos

$$Lf = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf.$$

O operador L é dito elíptico em $p \in \Omega$ se a matriz $(a_{ij}(p))$ for positiva definida e é elíptico em Ω se o for em todo $p \in \Omega$. Segue do teorema espectral que um operador L como acima é elíptico em $p \in \Omega$ se, e só se, os autovalores da matriz $(a_{ij}(p))$ são todos positivos. Considerando então $\lambda(p)$ e $\mu(p)$ o menor e maior de tais autovalores respectivamente, temos para $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ que

$$\lambda(p)|\xi|^2 \leq a_{ij}x_i x_j \leq \mu(p)|\xi|^2.$$

Além disso, o operador elíptico L é uniformemente elíptico em Ω se a função $p \mapsto \frac{\mu(p)}{\lambda(p)}$ for limitada em Ω . Como os autovalores de uma matriz simétrica dependem continuamente de suas entradas ([19] para detalhes) segue da continuidade dos coeficientes de L em Ω que a função $p \mapsto \frac{\mu(p)}{\lambda(p)}$ é contínua, e portanto localmente limitada em Ω . Portanto, L é uniformemente elíptico em todo $\Omega' \subset \Omega$, isto é, L é localmente uniformemente elíptico em Ω .

Dizemos ainda que o operador L é estritamente elíptico se existir uma constante $\lambda > 0$ tal que $\lambda(p) \geq \lambda, \forall p \in \Omega$.

Enunciaremos abaixo alguns resultados relacionados ao princípio do máximo forte de Hopf no \mathbb{R}^n , cujas demonstrações podem ser encontradas em [18].

Teorema 3.1.1 (Princípio do Máximo de Hopf para o Interior). *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a função $f \in C^2(\Omega)$ satisfaça $Lf \geq 0$. Então f é constante se uma das condições abaixo ocorrerem:*

- $c \equiv 0$ e f atinge seu máximo em Ω .
- $c \leq 0$, f atinge seu máximo em Ω e esse máximo é não negativo.

Teorema 3.1.2 (Princípio do Máximo de Hopf para Fronteira). *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ duas vezes diferenciável. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que:*

1. f é de classe C^1 em x_0 .
2. $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in \Omega$;
3. $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x_0) = 0$, em que η é o normal interior de $\partial\Omega$.

Então f é constante se uma das seguintes condições ocorrerem:

- $c \equiv 0$.
- $c \leq 0$ e $f(x_0) \geq 0$.

Vejamos agora que tal abordagem pode ser estendida a variedades diferenciáveis.

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana, $C^\infty(\mathcal{M})$ o anel das funções reais suaves em \mathcal{M} e $L : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ um operador linear local, isto é, para $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, o valor Lf em $p \in \mathcal{M}$ só depende dos valores de f em uma vizinhança qualquer de $p \in \mathcal{M}$. Considerando $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma carta coordenada em \mathcal{M} , temos associado a φ um operador linear $L_\varphi : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ dado por

$$L_\varphi f = L(f \circ \varphi), \quad \forall f \in C^\infty(\Omega). \quad (3.2)$$

Lema 3.1.1. *Considere $\varphi_i : U \rightarrow \Omega$, $i = 1, 2$, cartas coordenadas em um aberto $U \subset \mathcal{M}$. Se $L : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ é um operador linear local e L_{φ_i} , $i = 1, 2$ são os operadores lineares definidos a partir de L como acima, então L_{φ_1} é um operador diferencial (elíptico) de 2^a ordem, se e só se, L_{φ_2} também for.*

Demonstração. Veja [8]. □

Tal lema permite considerarmos a seguinte

Definição 3.1.1. *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana e $L : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ um operador linear local. O operador L é um operador diferencial linear (elíptico) de segunda ordem em \mathcal{M}^n se, para toda carta coordenada $\varphi : U \rightarrow \Omega$ em \mathcal{M} , o operador linear L_φ definido em (3.2) é um operador diferencial linear (elíptico) de segunda ordem em Ω .*

Definição 3.1.2. *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Dizemos que f é **harmônica** se $\Delta f = 0$; f é **subharmônica** se $\Delta f \geq 0$ e f é **superharmônica** se $\Delta f \leq 0$ em \mathcal{M} .*

Teorema 3.1.3. (Princípio do Máximo) *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana conexa e f uma função em \mathcal{M} subharmônica. Se f assume um máximo num ponto interior do domínio em \mathcal{M} , então f é constante.*

Demonstração. Sejam p_0 ponto de máximo de f , $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ uma parametrização local de \mathcal{M} , em que $\varphi(U)$ é uma vizinhança de p_0 , e $g := f \circ \varphi$. Como $\Delta f \geq 0$, então existe um operador linear uniformemente elíptico $L : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ tal que $Lg \geq 0$, em que L é da forma

$$Lw = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Além disso, fazendo $x_0 = \varphi^{-1}(p_0)$ temos que g assume um máximo local em x_0 , pois

$$g(x) = f(\varphi(x)) \leq f(p_0) = f(\varphi(x_0)) = g(x_0).$$

Assim $Lg \geq 0$ e g atinge um máximo em x_0 , então g é constante em U . Portanto f é constante em $\varphi(U)$ e como \mathcal{M} é conexa segue que f é constante em \mathcal{M} . □

Observação 3.1.1. *O Teorema acima vale de forma análoga no caso em que $\Delta f \leq 0$ e f assume um mínimo.*

Teorema 3.1.4. *Seja $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e subharmônica. Então w é constante.*

Demonstração. Suponhamos que w não seja constante. Logo, existe um $r > 0$ tal que w não é constante em $B_r(0)$.

Como w é subharmônica e não constante em $B_r(0)$, então pelo Princípio do Máximo [18], o máximo de w é atingido na fronteira de $B_r(0)$.

Seja $x_0 \in \partial B_r(0)$ tal que $w(x_0) = \sup_{B_r(0)} w$; assim, $w(0) < w(x_0)$.

Tomamos ρ tal que $0 < \rho < r$. Assim $w(x) < w(x_0)$, $\forall x \in B_\rho(0)$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2)$ tal que $g(x) = a \ln(x_1^2 + x_2^2) + b$ satisfaz

$$\begin{aligned} g(x) &> w(x), \quad \forall x \in \partial B_\rho(0) \\ g(x) &< w(x_0), \quad \forall x \in \partial B_r(0). \end{aligned}$$

Como $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ e w é limitado então $\exists r_1 > r > 0$ tal que $g(x_1, x_2) > w(x_1, x_2)$ para $x_1^2 + x_2^2 > r_1^2$.

Consideramos $v = w - g$. Como w é subharmônica e g é harmônica temos $\Delta w \geq 0$ e $\Delta g = 0$, então $\Delta v = \Delta w - \Delta g \geq 0$, ou seja, v é subharmônica.

Além disso, temos que v é limitada no anel A_{ρ, r_1} de raios ρ e r_1 e centro 0, $v(x) < 0$ para $x \in \partial B_\rho$ e $v(x) < 0$ para $x \in \partial B_{r_1}$.

Portanto, pelo Princípio do Máximo ([18], página 31), $\sup_{A_{\rho, r_1}} v = \sup_{\partial B_\rho \cup \partial B_{r_1}} v < 0$, o que é um absurdo, pois $v(x_0) = w(x_0) - g(x_0) > 0$ e $x_0 \in A_{\rho, r_1}$. \square

No decorrer do trabalho também utilizaremos a versão geométrica do Princípio do Máximo para comparar superfícies.

Para isso vamos considerar $\varphi_j : \Sigma_j \rightarrow \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ imersões isométricas e assumiremos que Σ_j são superfícies com curvatura extrínseca positiva, sendo N_j o campo de vetores normal unitário a Σ_j tal que a segunda forma fundamental seja positiva definida. Seja $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ e assumamos que $N_1(p) = N_2(p)$. Uma vez que $N_1(p) = N_2(p)$, existe uma vizinhança $U_j \subset \Sigma_j$ de p tal que U_j é um gráfico em coordenadas exponenciais de uma função f_j definida em uma vizinhança Ω da origem de $T_p \Sigma_1 = T_p \Sigma_2$ ($T_p \Sigma_j$ é o plano tangente de Σ_j em p), ou seja,

$$U_j = \text{Graf}(f_j) := \{\exp_p(f_j(p))N_j(p); p \in \Omega\}.$$

Como a curvatura extrínseca é positiva, f_j é uma função positiva (para Ω suficientemente pequeno). Dizemos que Σ_1 está acima de Σ_2 e denotamos $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$, em uma vizinhança de p , se $f_1 \geq f_2$ em Ω .

Definição 3.1.3. Dizemos que $U_j = \text{Graf}(f_j)$, $j = 1, 2$ satisfaz o princípio do máximo se a diferença $w = f_1 - f_2$ verifica uma inequação diferencial $Lw \geq 0$ que satisfaça o princípio do máximo (no interior ou fronteira) de Hopf.

De maneira mais precisa enunciaremos a versão geométrica do princípio do máximo:

Teorema 3.1.5. (Princípio do máximo de Hopf) *Seja $\varphi_j : \Sigma_j \rightarrow \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, duas imersões isométricas. Assuma que Σ_j é uma superfície com curvatura extrínseca constante positiva. Seja N_j o campo de vetores normal unitário a Σ_j tal que a segunda forma fundamental associada a Σ_j é positiva definida.*

Suponha que,

(i) Σ_1 e Σ_2 são tangentes em um ponto interior $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, ou

(ii) $\exists p \in \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$ tal que $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$ e $T_p\partial\Sigma_1 = T_p\partial\Sigma_2$.

Além disso, suponha que o campo de vetores normais unitários de Σ_1 e Σ_2 coincidam em p . Se $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ em uma vizinhança $U_j \subset \Sigma_j$ de p , então $\Sigma_1 = \Sigma_2$ em $U_1 = U_2$.

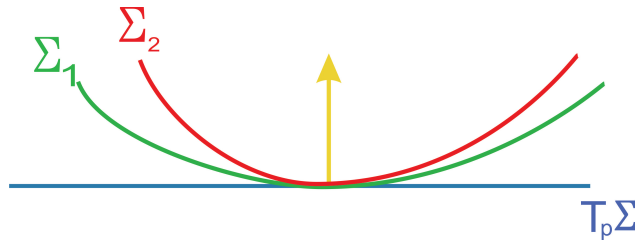


Figura 6 – Princípio do máximo geométrico

É importante ressaltar que muitas famílias de superfícies verificam o princípio de tangência. Exemplos clássicos deste fato são as famílias de superfícies de curvatura média constante $H \neq 0$, superfícies com curvatura extrínseca constante positiva K e de maneira mais geral, superfícies de Weingarten. Veja [13] para detalhes.

Alexandrov em [2] provou que as únicas hipersuperfícies conexas, compactas do espaço Euclidiano com curvatura média constante são as hiperesferas. Tal resultado configura um dos mais importantes trabalhos envolvendo a geometria global de tais hipersuperfícies. As ferramentas utilizadas na demonstração deste teorema foram essencialmente o princípio do máximo de Hopf para equações elípticas e um método geométrico de reflexão por planos que é atualmente conhecido como **Método de Reflexão de "Alexandrov"**.

A ideia de Alexandrov foi tomar uma direção arbitrária do espaço Euclidiano, um hiperplano ortogonal a esta direção que não intersecta \mathcal{M} e mover este hiperplano paralelamente até ele tocar \mathcal{M} pela primeira vez. A partir deste ponto de contato continua a mover o hiperplano e considera a reflexão da porção de \mathcal{M} que fica para trás em relação ao hiperplano. A reflexão inicialmente no interior da região limitada por

\mathcal{M} , e em algum momento a parte refletida tangencia \mathcal{M} . Neste ponto de tangência, \mathcal{M} e a parte refletida tem a mesma curvatura média (constante) e mesmo normal. Usando então o princípio do máximo de Hopf para hipersuperfícies com curvatura média constante, Alexandrov conclui que tais hipersuperfícies coincidem numa vizinhança do ponto de tangência. Em seguida, usando um argumento de conexidade, ele mostra que as hipersuperfícies tomadas coincidem em todos os pontos da reflexão, e portanto o hiperplano é um hiperplano de simetria de \mathcal{M} na direção dada.

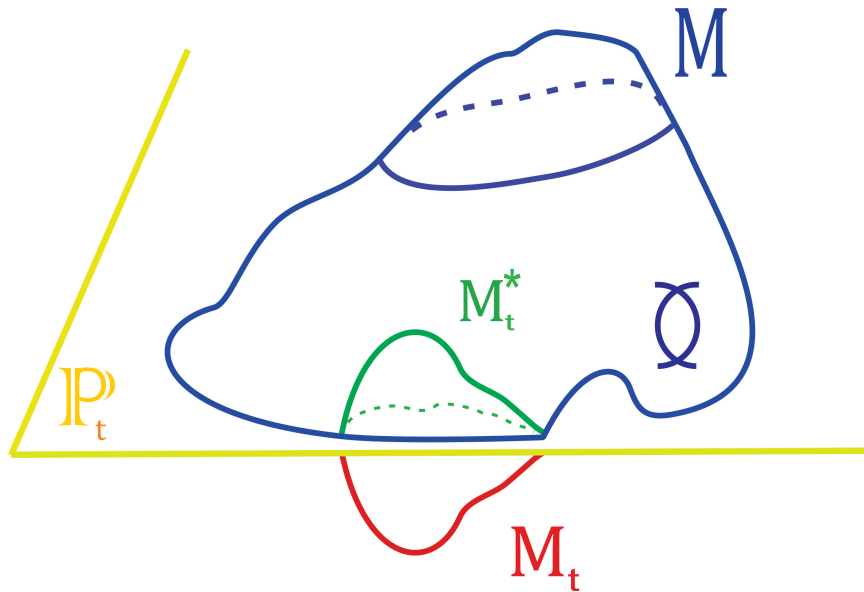


Figura 7 – Reflexão de uma hipersuperfície por hiperplanos

Este método geométrico é conhecido como o método de reflexão de Alexandrov ou técnica de mover planos e ainda é bastante utilizado em diversos problemas geométricos. Vale ressaltar que tal técnica será empregada em uma das estimativas de altura consideradas neste trabalho.

3.2 Algumas Equações Fundamentais

A partir de agora vamos considerar superfícies imersas isometricamente em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, tendo curvatura extrínseca constante positiva. Denotaremos por $\langle \rangle = g_{\mathcal{M}^2} + dt^2$ a métrica de $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ (em que $g_{\mathcal{M}^2}$ é métrica de \mathcal{M}^2 e dt^2 a métrica usual de \mathbb{R}) e $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Como a curvatura extrínseca K é positiva, podemos escolher o campo normal N à Σ de maneira que a segunda forma fundamental seja positiva definida.

Observação 3.2.1. *Relembramos que um sistema de coordenadas é chamado **isotérmico** quando os coeficientes da primeira forma fundamental $I = Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2$ são da forma: $E = G > 0$ e $F = 0$. Já vimos anteriormente que ao considerarmos parâmetros complexos em Σ , podemos escrever a primeira e a segunda forma fundamental como:*

$$\begin{aligned} I &= Adz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2 \\ II &= Bdz^2 + 2\rho|dz|^2 + \bar{B}d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

O parâmetro local $z = x + iy$ será chamado parâmetro conforme para uma métrica Riemanniana se $ds^2 = \mu|dz|^2$, para uma certa função μ positiva.

Tomando um parâmetro conforme z para a segunda forma fundamental, temos que a primeira e a segunda forma fundamental de Σ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} I &= Adz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2 \\ II &= 2\rho|dz|^2, \quad \rho > 0. \end{aligned}$$

A curvatura extrínseca de Σ é dada por $K = -\frac{\rho^2}{D}$, em que $D = |A|^2 - \lambda^2 < 0$ e a curvatura média de Σ é

$$H = -\frac{\rho\lambda}{D} = \frac{K\lambda}{\rho}.$$

Lembrando que o campo $\partial t = T + \nu N$, em que T é a componente tangente do campo ∂t e que $\nabla_{\Sigma} h = T$, podemos escrever T no referencial $\{\partial z, \partial \bar{z}\}$ como:

$$T = \frac{1}{D}(\alpha\partial z + \bar{\alpha}\partial \bar{z}), \quad (3.3)$$

em que $\alpha = \bar{A}h_z - \lambda h_{\bar{z}}$, $\bar{\alpha} = Ah_{\bar{z}} - \lambda h_z$ e $D = |A|^2 - \lambda^2$.

Com base nas considerações feitas para o campo T , encontraremos a seguir algumas identidades que envolvem tal campo.

Lema 3.2.1. *As seguintes equações são válidas:*

$$\langle T, T \rangle = \frac{1}{D}(\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}) \quad (3.4)$$

$$\langle T, T \rangle = \frac{1}{D}(Ah_{\bar{z}}^2 + \bar{A}h_z^2 - 2\lambda|h_z|^2) \quad (3.5)$$

$$h_z = \frac{1}{D}(A\alpha + \lambda\bar{\alpha}) \quad (3.6)$$

$$|h_z|^2 = \|T\|^2\lambda + \frac{|\alpha|^2}{D}. \quad (3.7)$$

Demonstração. A equação (3.4) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\langle T, T \rangle &= \left\langle \frac{1}{D} (\alpha \partial z + \bar{\alpha} \partial \bar{z}), \frac{1}{D} (\alpha \partial z + \bar{\alpha} \partial \bar{z}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{D} \alpha \left\langle \frac{1}{D} (\alpha \partial z + \bar{\alpha} \partial \bar{z}), \partial z \right\rangle + \frac{1}{D} \bar{\alpha} \left\langle \frac{1}{D} (\alpha \partial z + \bar{\alpha} \partial \bar{z}), \partial \bar{z} \right\rangle \\ &= \frac{1}{D} \alpha h_z + \frac{1}{D} \bar{\alpha} h_{\bar{z}} = \frac{1}{D} (\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}).\end{aligned}$$

Para conseguirmos a equação (3.5), basta substituir a expressão de α e $\bar{\alpha}$ na equação que acabamos de encontrar, ou seja, na equação (3.4). Assim

$$\begin{aligned}\langle T, T \rangle &= \frac{1}{D} (\bar{A} h_z - \lambda h_{\bar{z}}) h_z + \frac{1}{D} (A h_{\bar{z}} - \lambda h_z) h_{\bar{z}} \\ &= \frac{1}{D} (\bar{A} h_z^2 - \lambda |h_z|^2 + A h_{\bar{z}}^2 - \lambda |h_z|^2) \\ &= \frac{1}{D} (\bar{A} h_z^2 + A h_{\bar{z}}^2 - 2\lambda |h_z|^2).\end{aligned}$$

Para obter a equação (3.6) usaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha = \bar{A} h_z - \lambda h_{\bar{z}} \\ \bar{\alpha} = A h_{\bar{z}} - \lambda h_z. \end{cases} \quad (3.8)$$

Agora multiplicaremos a primeira equação por A e a segunda por λ e depois somar as duas, sendo assim:

$$\begin{cases} A\alpha = |A|^2 h_z - A\lambda h_{\bar{z}} \\ -\lambda h_z + A\lambda h_{\bar{z}} = \lambda \bar{\alpha}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Somando as duas equações em (3.9)

$$(|A|^2 - \lambda^2) h_z = a\alpha + \lambda \bar{\alpha}, \text{ portanto } h_z = \frac{1}{D} (A\alpha + \lambda \bar{\alpha}).$$

Para a ultima equação, façamos o produto entre α e $\bar{\alpha}$ e obtemos

$$\begin{aligned}\alpha \bar{\alpha} &= (\bar{A} h_z - \lambda h_{\bar{z}}) (A h_{\bar{z}} - \lambda h_z) \\ |\alpha|^2 &= |A|^2 |h_z|^2 - \lambda \bar{A} h_z^2 - \lambda A h_{\bar{z}}^2 + \lambda |h_z|^2 \\ &= |h_z|^2 |A|^2 + |h_z|^2 \lambda^2 - \lambda (\bar{A} h_z^2 + A h_{\bar{z}}^2).\end{aligned}$$

Usando agora a expressão (3.5) na forma $A h_{\bar{z}}^2 + \bar{A} h_z^2 = \|T\|^2 D + 2\lambda |h_z|^2$, obtemos

$$\begin{aligned}|\alpha|^2 &= |h_z|^2 |A|^2 + |h_z|^2 \lambda^2 - \lambda (\|T\|^2 D + 2\lambda |h_z|^2) \\ &= |h_z|^2 |A|^2 - \lambda^2 |h_z|^2 - \lambda D \|T\|^2 \\ |h_z|^2 (|A|^2 - \lambda^2) &= |\alpha|^2 + \lambda D \|T\|^2 \\ \Leftrightarrow |h_z|^2 &= \frac{|\alpha|^2}{D} + \lambda \|T\|^2,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

Apresentaremos a seguir algumas identidades importantes.

Proposição 3.2.1. *Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$. Assuma que Σ tem curvatura extrínseca positiva. Seja N o campo normal unitário tal que a segunda forma fundamental de Σ é positiva definida e z um parâmetro conforme para a segunda forma fundamental. Então as seguintes equações são válidas:*

$$\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} + ({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2) = \kappa\alpha \frac{\nu}{\rho} \quad \text{Equação de Codazzi} \quad (3.10)$$

$$h_{zz} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 h_{\bar{z}} \quad (3.11)$$

$$h_{z\bar{z}} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 h_{\bar{z}} + \nu\rho \quad (3.12)$$

$$\nu_{\bar{z}} = \frac{K\alpha}{\rho} \quad (3.13)$$

em que $\kappa(p)$ denota a curvatura de Gauss de \mathcal{M}^2 em $\pi(\varphi(p))$ e ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{ij}^k$ ($i, j, k = 1, 2$), são os símbolos de Christoffel associados ao parâmetro z .

Demonstração. Como

$$I = Adz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2 \quad \text{e} \quad II = 2\rho|dz|^2,$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_z} \partial z &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \partial \bar{z} \\ \bar{\nabla}_{\partial_z} \partial \bar{z} &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \partial \bar{z} + \rho N \\ -\bar{\nabla}_{\partial_z} N &= -\frac{K}{\rho} (\bar{A} \partial z - \lambda \partial \bar{z}). \end{aligned}$$

A seguir, consideraremos o produto escalar de cada uma destas equações por ∂t . Temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\partial_z} \partial z, \partial t \rangle &= \langle {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \partial z, \partial t \rangle + \langle {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \partial \bar{z}, \partial t \rangle \\ &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 h_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\partial_z} \partial z, \partial t \rangle &= \partial z \langle \partial z, \partial t \rangle - \langle \partial z, \bar{\nabla}_{\partial_z} \partial t \rangle \\ &= \partial z (h_z) \\ &= h_{zz}, \text{ já que } \bar{\nabla}_{\partial_z} \partial t = 0. \end{aligned}$$

Assim $h_{zz} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 h_{\bar{z}}$, que é exatamente a equação (3.11).

Da mesma forma

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z}, \partial t \rangle &= \langle {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \partial z, \partial t \rangle + \langle {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \partial \bar{z}, \partial t \rangle + \langle \rho N, \partial t \rangle \\ &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 h_{\bar{z}} + \rho \nu\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z}, \partial t \rangle &= \partial z \langle \partial \bar{z}, \partial t \rangle - \langle \partial \bar{z}, \bar{\nabla}_{\partial z} \partial t \rangle \\ &= \partial z (h_{\bar{z}}) \\ &= h_{z\bar{z}} = h_{\bar{z}z}.\end{aligned}$$

Logo, $h_{z\bar{z}} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 h_{\bar{z}} + \rho \nu$, que é a equação (3.12).

Considerando agora $\bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} N$, temos

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} N, \partial t \rangle &= \left\langle \frac{K}{\rho} (\bar{A} \partial z - \lambda \partial \bar{z}), \partial t \right\rangle \\ &= \frac{K}{\rho} (\bar{A} h_z - \lambda h_{\bar{z}})\end{aligned}$$

e também,

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} N, \partial t \rangle = \{ \partial \bar{z} \langle N, \partial t \rangle - \langle N, \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial t \rangle \} = \nu_{\bar{z}}.$$

Concluimos que,

$$\begin{aligned}\nu_{\bar{z}} &= \frac{K}{\rho} (\bar{A} h_z - \lambda h_{\bar{z}}) \\ &= \frac{K\alpha}{\rho}, \text{ em que } \alpha = \bar{A} h_z - \lambda h_{\bar{z}},\end{aligned}$$

obtendo a equação (3.13).

Vejamos agora como obter a equação (3.10).

Temos que

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(\partial z, \partial \bar{z}) \partial \bar{z}, N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z} - \bar{\nabla}_{\partial z} \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z} - \bar{\nabla}_{[\partial z, \partial \bar{z}]} \partial \bar{z}, N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z}, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial z} \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, N \rangle.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla} \partial \bar{z} \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z}, N \rangle &= \partial \bar{z} \langle \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z}, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z}, \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} N \rangle \\
 &= \partial \bar{z}(\rho) - \left\langle {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \partial \bar{z} + \rho N, \frac{K}{\rho} (\bar{A} \partial z - \lambda \partial \bar{z}) \right\rangle \\
 &= \rho_{\bar{z}} - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{K}{\rho} \bar{A} A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{K}{\rho} \lambda^2 - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{K}{\rho} \bar{A} \lambda + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{K}{\rho} \lambda \bar{A} \\
 &= \rho_{\bar{z}} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{K}{\rho} (\lambda^2 - |A|^2) + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{K}{\rho} (\lambda \bar{A} - \bar{A} \lambda) \\
 &= \rho_{\bar{z}} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{K}{\rho} (\lambda^2 - |A|^2) = \rho_{\bar{z}} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \left(\frac{-\rho}{D} \right) (\lambda^2 - |A|^2) \\
 &= \rho_{\bar{z}} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \left(\frac{-\rho}{D} \right) (-D) = \rho_{\bar{z}} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \rho \quad \text{e} \\
 \langle \bar{\nabla}_{\partial z} \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, N \rangle &= \partial z \langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, \bar{\nabla}_{\partial z} N \rangle \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, \bar{\nabla}_{\partial z} N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, -\bar{\nabla}_{\partial z} N \rangle.
 \end{aligned}$$

Como

$$\bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \partial \bar{z}$$

e

$$-\bar{\nabla}_{\partial z} N = \frac{\rho}{D} (-\lambda \partial z + A \partial \bar{z}),$$

segue que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla}_{\partial z} \bar{\nabla}_{\partial \bar{z}} \partial \bar{z}, N \rangle &= \left\langle {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \partial \bar{z}, \frac{\rho}{D} (-\lambda \partial z + A \partial \bar{z}) \right\rangle \\
 &= -{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \frac{\rho}{D} \lambda A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \frac{\rho}{D} A \lambda - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \lambda^2 \frac{\rho}{D} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\rho}{D} A \bar{A} \\
 &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\rho}{D} (|A|^2 - \lambda^2) = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\rho}{D} D = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \rho.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(\partial z, \partial \bar{z}) \partial \bar{z}, N \rangle &= \rho_{\bar{z}} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \rho - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \rho \\
 &= \rho_{\bar{z}} + \rho ({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando as propriedades do tensor curvatura \bar{R} , temos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(\partial z, \partial \bar{z}) \partial \bar{z}, N \rangle &= -\langle \bar{R}(\partial z, \partial \bar{z}) N, \partial \bar{z} \rangle \\
 &= \langle \bar{R}(\partial \bar{z}, \partial z) N, \partial \bar{z} \rangle.
 \end{aligned}$$

Como $\bar{R}(\partial \bar{z}, \partial z) N = \kappa \nu ((\partial z, T) \partial \bar{z} - \langle \partial \bar{z}, T \rangle \partial z)$ temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{A}(\partial \bar{z}, \partial z) N, \partial \bar{z} \rangle &= \kappa \nu (h_z \bar{A} - h_{\bar{z}} \lambda) \\
 &= \kappa \nu \alpha, \text{ em que } \alpha = h_z \bar{A} - h_{\bar{z}} \lambda.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} + \left(\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 - \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 \right) = \frac{\kappa\alpha\nu}{\rho}, \text{ que é exatamente a equação (3.10).} \quad \square$$

Lema 3.2.2. *Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma imersão com curvatura extrínseca constante positiva. Considerando z um parâmetro conforme local para a segunda forma II tal que*

$$\begin{aligned} I &= A dz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{A} d\bar{z}^2 \\ II &= 2\rho |dz|^2 \text{ com } \rho > 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

temos que as seguintes equações são válidas:

$$h_{z\bar{z}} = \rho(2K - \kappa(1 - \nu^2)) \frac{\nu}{2K}, \quad (3.15)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = -K\lambda\rho\nu, \quad (3.16)$$

$$A_{\bar{z}} = \frac{-\kappa\rho\nu}{K} h_z. \quad (3.17)$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 &= \frac{\bar{A}A_{\bar{z}} - \lambda\bar{A}_z}{2(|A|^2 - \lambda^2)} = \frac{\bar{A}A_{\bar{z}} - \lambda\bar{A}_z}{2D}, \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\bar{A}A_z - 2\lambda\lambda_z + \lambda A_{\bar{z}}}{2D} \text{ e } \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 = \overline{\mathbb{C}\Gamma_{11}^1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 &= \frac{\bar{A}A_{\bar{z}} - \lambda\bar{A}_z}{2D} + \frac{A\bar{A}_{\bar{z}} - 2\lambda\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{A}_z}{2D} \\ &= \frac{AA_{\bar{z}} + A\bar{A}_{\bar{z}} - 2\lambda\lambda_{\bar{z}}}{2D} \end{aligned}$$

e como

$$D_{\bar{z}} = (|A|^2 - \lambda^2)_{\bar{z}} = (A\bar{A})_{\bar{z}} - 2\lambda\lambda_{\bar{z}} = A_{\bar{z}}\bar{A} + A\bar{A}_{\bar{z}} - 2\lambda\lambda_{\bar{z}}$$

segue que

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 = \frac{D_{\bar{z}}}{2D}. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.10), temos:

$$\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} + \left(\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 - \left(\frac{D_{\bar{z}}}{2D} - \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 \right) \right) = \kappa\alpha \frac{\nu}{\rho},$$

ou seja,

$$2\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 - \kappa\alpha \frac{\nu}{\rho} = \frac{D_{\bar{z}}}{2D} - \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}.$$

Como $K = \frac{-\rho^2}{D}$, temos que $K_{\bar{z}} = \frac{2\rho\rho_{\bar{z}}D + \rho^2D_{\bar{z}}}{D^2}$.

Assim,

$$\frac{K_{\bar{z}}}{2K} = \frac{K_{\bar{z}}}{2\left(\frac{-\rho^2}{D}\right)} = \frac{-2\rho\rho_{\bar{z}}D + \rho^2D_{\bar{z}}}{D^2} \left(\frac{-D}{2\rho^2}\right) = \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} - \frac{D_{\bar{z}}}{2D}$$

e sendo K constante segue que

$$\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} - \frac{D_{\bar{z}}}{2D} = 0.$$

Logo,

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = \kappa\alpha\frac{\nu}{2\rho}.$$

Usando que ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 = \overline{{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1}$, ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = \kappa\alpha\frac{\nu}{2\rho}$, $h_z = \frac{1}{D}(A\alpha + \lambda\bar{\alpha})$ e $K = -\frac{\rho^2}{D}$, vamos obter uma expressão para $A_{\bar{z}}$. Observe que,

$$\begin{aligned} A_{\bar{z}} &= \partial\bar{z}\langle\partial z, \partial z\rangle = 2\langle\nabla_{\partial\bar{z}}\partial z, \partial z\rangle \\ &= 2\langle{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1\partial z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2\partial\bar{z}, \partial z\rangle = 2\left(A{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 + \lambda{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2\right) \\ &= 2\left(A{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 + \lambda\overline{{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1}\right) = \frac{\kappa\nu}{\rho}(A\alpha + \lambda\bar{\alpha}) \\ &= \frac{\kappa\nu}{\rho}(Dh_z) = -\kappa\frac{\nu\rho}{K}h_z. \end{aligned}$$

A seguir, encontraremos uma expressão para $h_{z\bar{z}}$. Para isso usaremos as equações:

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2h_{\bar{z}} + \nu\rho, \quad {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = \kappa\alpha\frac{\nu}{2\rho}, \\ \|T\|^2 &= \frac{1}{D}(\alpha h_z + \bar{\alpha}h_{\bar{z}}) \quad \text{e} \quad K = -\frac{\rho^2}{D}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2h_{z\bar{z}} &= 2\left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1h_z + \overline{{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1}h_{\bar{z}} + \nu\rho\right) = 2\left(\kappa\alpha\frac{\nu}{2\rho}h_z + \kappa\bar{\alpha}\frac{\nu}{2\rho}h_{\bar{z}} + \nu\rho\right) \\ &= \kappa\alpha\frac{\nu}{\rho}h_z + \kappa\bar{\alpha}\frac{\nu}{\rho}h_{\bar{z}} + 2\nu\rho = \frac{\kappa\nu}{\rho}(\alpha h_z + \bar{\alpha}h_{\bar{z}}) + 2\nu\rho \\ &= \frac{\kappa\nu}{\rho}D\|T\|^2 + 2\nu\rho = -\kappa\frac{\nu\rho}{K}\|T\|^2 + 2\nu\rho = -\kappa\frac{\nu\rho}{K}(1 - \nu^2) + 2\nu\rho. \end{aligned}$$

A expressão $h_{z\bar{z}}$ dada em (3.15) é obtida assim:

$$2h_{z\bar{z}} = \frac{\nu\rho}{K}[-\kappa(1 - \nu^2) + 2K]. \quad (3.19)$$

Agora, calculemos $\nu_{z\bar{z}}$. Como

$$\nu_{z\bar{z}} = \frac{\alpha}{\rho}K \quad \text{e} \quad \frac{D_{\bar{z}}}{2D} - \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} = 0,$$

temos

$$\nu_{z\bar{z}} = \alpha_z \frac{K}{\rho} - \frac{\alpha K \rho_z}{\rho} = \alpha_z \frac{K}{\rho} - \frac{\alpha K D_z}{2D\rho}.$$

Assim,

$$\nu_{z\bar{z}} = \alpha_z \frac{K}{\rho} - \frac{\alpha K D_z}{2D\rho}.$$

Por outro lado, como $\alpha = \bar{A}h_z + \lambda h_{\bar{z}}$ e $h_z = \frac{1}{D}(A\alpha + \lambda\bar{\alpha})$, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_z &= \bar{A}_z h_z + \bar{A} h_{zz} - \lambda_z h_{\bar{z}} - \lambda h_{\bar{z}z} \\ &= \partial z \langle \partial \bar{z}, \partial \bar{z} \rangle h_z + \bar{A} h_{zz} - \partial z \langle \partial z, \partial \bar{z} \rangle - \lambda h_{\bar{z}z} \\ &= 2 \langle \partial \bar{z}, \bar{\nabla}_{\partial z} \partial \bar{z} \rangle h_z + \bar{A} h_{zz} - \langle \nabla_{\partial z} \partial z, \partial \bar{z} \rangle - \langle \partial z, \nabla_{\partial z} \partial \bar{z} \rangle - \lambda h_{\bar{z}z} \end{aligned}$$

e considerando $h_{z\bar{z}} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 h_{\bar{z}} + \nu\rho$ e $h_{zz} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 h_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 h_{\bar{z}}$ temos

$$\alpha_z = \alpha({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2) - \nu\rho\lambda.$$

Finalmente, usando que $\nu_{z\bar{z}} = \alpha_z \frac{K}{\rho} - \alpha \frac{K D_z}{\rho 2D}$ e $H = \frac{K}{\rho}\lambda$, obtemos

$$\nu_{z\bar{z}} = \left(\alpha \frac{D_z}{2D} - \nu\rho\lambda \right) \frac{K}{\rho} - \alpha \frac{K D_z}{\rho 2D} = -K\lambda\nu = -\rho H\nu,$$

ou seja,

$$\nu_{z\bar{z}} = -\nu\rho H.$$

□

No referencial $\{\partial z, \partial \bar{z}\}$, o laplaciano das funções h e ν com respeito a $II = 2\rho|dz|^2$, $\Delta^{II}h$ pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} \Delta^{II}h &= g^{11} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial z} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \frac{\partial h}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right) \right) + g^{12} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{\partial h}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right) \right) \\ &+ g^{21} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z} \partial z} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{21}^1 \frac{\partial h}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{21}^2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right) \right) + g^{22} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \frac{\partial h}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right) \right) \end{aligned}$$

e como ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 = 0$, segue que

$$\Delta^{II}h = 2g^{12} \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{2h_{z\bar{z}}}{\rho}.$$

Analogamente o laplaciano da função ν é

$$\begin{aligned} \Delta^{II}\nu &= g^{11} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial z \partial z} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \nu}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} \right) \right) + g^{12} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial z \partial \bar{z}} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \nu}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} \right) \right) \\ &+ g^{21} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \bar{z} \partial z} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{21}^1 \frac{\partial \nu}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{21}^2 \frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} \right) \right) + g^{22} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} - \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \nu}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} \right) \right) \end{aligned}$$

e portanto

$$\Delta^{II}\nu = 2g^{12} \frac{\partial^2 \nu}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{2\nu_{z\bar{z}}}{\rho}.$$

Definição 3.2.1. Dada uma superfície Σ com curvatura extrínseca constante positiva K , definimos a forma quadrática \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = I + g(\nu)dh^2, \quad (3.20)$$

em que I é a primeira forma fundamental, dh é a diferencial da função h , $g(\nu)$ é uma função real analítica dada por

$$g(\nu) = \frac{\nu^2 - 1 + K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-\nu^2)} - 1)}{(1 - \nu^2)^2}, \quad (3.21)$$

e ε é constante igual a 1 ou -1 .

Façamos algumas considerações a respeito da função g . Inicialmente, note que g está bem definida. De modo geral temos que a função $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{g}(t) = \frac{t^2 - 1 + K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)} - 1)}{(1 - t^2)^2}.$$

está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ (em particular para $t = \pm 1$).

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1} \tilde{g}(t) &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 - 1 + K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)} - 1)}{(1 - t^2)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{2t - 2t\varepsilon^2(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)})}{2(1 - t^2)(-2t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{2 - 2(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)}) + \frac{4t^2\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)}}{K}}{-4(1 - t^2) + 8t^2} = \frac{\varepsilon}{2K}, \end{aligned}$$

em que usamos L'Hospital e o fato de que $\varepsilon^2 = 1$. Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{g}(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1 + K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)} - 1)}{(1 - t^2)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t - 2t\varepsilon^2(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)})}{2(1 - t^2)(-2t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 - 2(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)}) + \frac{4t^2\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-t^2)}}{K}}{-4(1 - t^2) + 8t^2} = \frac{\varepsilon}{2K}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\tilde{g}'(t) = \frac{\left[2t - 2t\varepsilon^{\frac{(1-t^2)}{K}}\right] (1 - t^2)^2 - \left[t^2 - 1 + \varepsilon K \left(e^{\frac{(1-t^2)}{K}} - 1\right)\right] (-4t)(1 - t^2)}{(1 - t^2)^4}.$$

Veja que se $\tilde{g}'(t) = 0$ então

$$2t \left[(1-t^2) \left(1 - e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} \right) + 2 \left(t^2 - 1 + \varepsilon K \left(e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} - 1 \right) \right) \right] = 0.$$

Assim, $t = 0$ ou

$$(1-t^2) \left(1 - e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} \right) + 2(t^2 - 1) + 2K\varepsilon \left(e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} - 1 \right) = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} (1-t^2) \left[1 - e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} - 2 \right] + 2K\varepsilon \left(e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} - 1 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(1-t^2) \left[1 + e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} \right] + 2K\varepsilon \left(e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} - 1 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-t^2}{2K\varepsilon} = \frac{e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} - 1}{e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{K}} + 1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Multiplicando e dividindo o segundo membro da equação (3.22) pelo fator $e^{-\varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}}$, obtemos

$$\frac{(1-t^2)}{2K\varepsilon} = \frac{e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}} - e^{-\varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}}}{e^{\varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}} + e^{-\varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}}} = \tanh \left(\frac{\varepsilon(1-t^2)}{2K} \right)$$

e como $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = 1$, podemos escrever

$$\tanh \left(\frac{\varepsilon(1-t^2)}{2K} \right) = \frac{\varepsilon(1-t^2)}{2K}. \quad (3.23)$$

Fazendo $x = \varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}$, a equação (3.23) pode ser reescrita como $\tanh(x) = x$, cuja solução é $x = 0$. Como $x = \varepsilon \frac{(1-t^2)}{2K}$ segue que $t = \pm 1$, já que $K > 0$ e $\varepsilon = \pm 1$.

Temos que:

- $\tilde{g}' > 0$ para $-1 < t < 0$ e $t > 1$
- $\tilde{g}' < 0$ para $t < -1$ e $0 < t < 1$.

daí concluímos que ± 1 são pontos de mínimo de \tilde{g} e 0 é um ponto de máximo de \tilde{g} .

Além disso, \tilde{g} é uma função real analítica para todo $t \in \mathbb{R}$, pois tomando $\varepsilon = 1$ e $u = \frac{1-t^2}{K}$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &= \frac{-uK + K(e^u - 1)}{(uK)^2} = \frac{K(-u + e^u - 1)}{u^2 K^2} \\ &= \frac{-u + e^u - 1}{Ku^2}. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

temos

$$\tilde{g}(u) = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{3!} + \frac{u^2}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(n+2)!}.$$

Veja que esta série está centrada no 0 e seu n -enésimo termo é igual a $a_n = \frac{1}{(n+2)!}$.

O raio de convergência desta série é

$$R = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow -\infty} (n+3) = +\infty.$$

Logo a série converge para todo $u \in \mathbb{R}$ e conseqüentemente para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observe que, a mesma ideia pode ser aplicada tomando $\varepsilon = -1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \phi(\nu) = 1 + g(\nu) \|T\|^2 &= 1 + \frac{[\nu^2 - 1 + K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-\nu^2)} - 1)]}{(1-\nu^2)^2} (1-\nu^2) \\ &= \frac{1-\nu^2 + [\nu^2 - 1 + K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-\nu^2)} - 1)]}{1-\nu^2} \\ &= \frac{K\varepsilon(e^{\frac{\varepsilon}{K}(1-\nu^2)} - 1)}{1-\nu^2}, \end{aligned}$$

satisfaz

$$\begin{aligned} 1 &= \phi(\pm 1) \leq \phi(\nu) && \text{se } \varepsilon = 1 \\ 0 &< K(1 - e^{\frac{-1}{K}}) = \phi(0) \leq \phi(\nu) && \text{se } \varepsilon = -1, \end{aligned}$$

para todo $-1 \leq \nu \leq 1$.

Vejamos agora que $(\lambda + g(\nu)|h_z|^2)|dz|^2$ é a parte (1,1) de \mathcal{A} e que a forma quadrática $Qdz^2 = (A + g(\nu)h_z^2)dz^2$ é a parte (2,0) de \mathcal{A} para a segunda forma fundamental II.

De fato:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= I + g(\nu)dh^2 \\ &= Adz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2 + g(\nu)[h_z^2dz^2 + 2|h_z|^2|dz|^2 + h_{\bar{z}}^2d\bar{z}^2] \\ &= \underbrace{(A + g(\nu)h_z^2)}_{\text{Parte (2,0) de } \mathcal{A}} dz^2 + \underbrace{(\lambda + |h_z|^2g(\nu))}_{\text{Parte (1,1) de } \mathcal{A}} |dz|^2 + \underbrace{(\bar{A} + g(\nu)h_{\bar{z}}^2)}_{\text{Parte (0,2) de } \mathcal{A}} d\bar{z}^2, \end{aligned}$$

em que usamos que $dh = h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z}$.

Como $Q = A + g(\nu)h_z^2$, segue que $\bar{Q} = \bar{A} + g(\nu)h_{\bar{z}}^2$. Logo $|Q|^2 = |A|^2 + g(\nu)Ah_z^2 + g(\nu)\bar{A}h_{\bar{z}}^2 + g^2(\nu)|h_z|^4$.

Observação 3.2.2. Denotaremos (II, \mathcal{A}) um par fundamental em Σ , em que II e \mathcal{A} são formas quadráticas e II é uma métrica Riemanniana . (Veja [29])

A curvatura extrínseca do par (II, \mathcal{A}) é dada por:

$$K(II, \mathcal{A}) = \frac{\det(\mathcal{A})}{\det(II)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} K(II, \mathcal{A}) &= \frac{|Q|^2 - (\lambda + g(\nu)|h_z|^2)^2}{-\rho^2} \\ &= \frac{(\lambda + g(\nu)|h_z|^2) - |Q|^2}{\rho^2} \\ &= \frac{\lambda^2 + 2\lambda g(\nu)|h_z|^2 + g(\nu)(|h_z|^2)^2 - (|A|^2 + g(\nu)Ah_z^2 + g(\nu)\bar{A}h_z^2 + g^2(\nu)|h_z|^2)}{\rho^2} \\ &= \frac{(\lambda^2 - |A|^2) + g(\nu)(2\lambda|h_z|^2 - Ah_z^2 - \bar{A}h_z^2)}{\rho^2} \\ &= \frac{-D + g(\nu)(-||T||^2 D)}{\rho^2} = \frac{1}{K}(1 + g(\nu)||T||^2), \end{aligned}$$

em que usamos que $K = \frac{-\rho^2}{D}$ e $||T||^2 = \frac{1}{D}(Ah_z^2 + \bar{A}h_z^2 - 2\lambda|h_z|^2)$. Em particular, o cálculo anterior nos fornece

$$\begin{aligned} |Q|^2 &= (\lambda + g(\nu)|h_z|^2)^2 + D(1 + g(\nu)||T||^2), \text{ pois} \\ \frac{(\lambda + g(\nu)|h_z|^2)^2 - |Q|^2}{\rho^2} &= \frac{1}{K} - \frac{g(\nu)}{K}||T||^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(\lambda + g(\nu)|h_z|^2)^2}{\rho^2} - \frac{1}{K} - \frac{g(\nu)}{K} &= \frac{|Q|^2}{\rho^2} \\ \Leftrightarrow (\lambda + g(\nu)|h_z|^2)^2 + D(1 + g(\nu)||T||^2) &= |Q|^2. \end{aligned}$$

Tal expressão será utilizada no decorrer da demonstração do primeiro teorema principal.

4 Estimativas de altura

Neste capítulo apresentaremos algumas estimativas de altura para superfícies compactas com curvatura extrínseca constante positiva (K -superfícies) em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathcal{M}^2 é uma superfície com curvatura de Gauss constante.

Inicialmente será mostrada uma estimativa de altura vertical para K -gráficos compactos em $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, com bordo em um plano horizontal e posteriormente consideraremos uma K -superfície compacta e mergulhada em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com bordo em um plano vertical, obtendo estimativas de distância a este plano.

Em geral, estimativas de altura para superfícies com qualquer curvatura constante (média, Gaussiana, extrínseca, dentre outras) em um espaço tridimensional tem revelado propriedades importantes sobre o comportamento geométrico de tais superfícies.

4.1 Estimativa de altura vertical

Teorema 4.1.1. *Seja $\Sigma \subset \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$ um gráfico compacto sobre um domínio $\Omega \subset \mathcal{M}^2$, com curvatura extrínseca constante positiva, cujo bordo está contido no plano horizontal $\mathcal{M}^2 \times \{0\}$. Seja $c(\Sigma)$ o mínimo das curvaturas de Gauss de \mathcal{M}^2 . Então existe uma constante c_K (dependendo apenas de K e $c(\Sigma)$) tal que a função altura h , satisfaz que $h(p) \leq c_K$ para todo $p \in \Sigma$.*

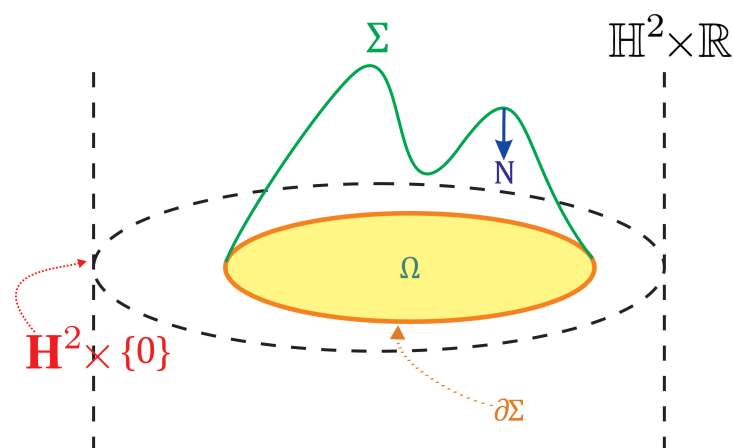


Figura 8 – K -gráfico compacto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Demonstração. A ideia da prova é construir uma função subharmônica $\phi = h + f(\nu)$ sobre Σ tendo valores não positivos no bordo, em que f é uma função real que será tomada convenientemente.

Para isso, vamos inicialmente calcular $\phi_{z\bar{z}}$. Observe que $\phi_{z\bar{z}} = (h + f(\nu))_{z\bar{z}} = h_{z\bar{z}} + f(\nu)_{z\bar{z}}$.

Como já encontramos uma expressão para $h_{z\bar{z}}$ dada na equação (3.15), basta calcularmos $f(\nu)_{z\bar{z}}$, então

$$\begin{aligned} [f(\nu)]_{z\bar{z}} &= [f'(\nu)\nu_z]_{\bar{z}} = f''(\nu)\nu_{\bar{z}}\nu_z + f'(\nu)\nu_{z\bar{z}} \\ &= f''(\nu)|\nu_z|^2 + f'(\nu)\nu_{z\bar{z}}. \end{aligned}$$

Assim usando as equações (3.13), $|h_z|^2 = \|T\|^2\lambda + \frac{|\alpha|^2}{D}$ e (3.16) obtemos:

$$\begin{aligned} f(\nu)_{z\bar{z}} &= f''(\nu)\frac{|\alpha|^2 K^2}{\rho^2} + f'(\nu)(-K\lambda\nu) = f''(\nu)|\alpha|^2\frac{K^2}{\rho^2} - f'(\nu)K\lambda\nu \\ &= f''(\nu)|\alpha|^2\frac{\rho^2}{D^2} - f'(\nu)K\lambda\nu = f''(\nu)\frac{|\alpha|^2}{D}\frac{\rho^2}{D} - f'(\nu)K\lambda\nu \\ &= -f''(\nu)K\frac{|\alpha|^2}{D} - f'(\nu)K\lambda\nu = -f''(\nu)K(|h_z|^2 - \|T\|^2\lambda) - f'(\nu)K\lambda\nu \\ &= -f''(\nu)K(|h_z|^2 - (1 - \nu^2)\lambda) - f'(\nu)K\lambda\nu \\ &= -K(\lambda(\nu f'(\nu) - (1 - \nu^2)) + f''(\nu)|h_z|^2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como a curvatura extrínseca é positiva, podemos escolher o campo normal N de modo que II seja positiva definida. Além disso, Σ é um gráfico compacto que podemos assumir estar contido sobre o plano horizontal $\mathcal{M}^2 \times \{0\}$ e pela escolha da orientação temos que $\nu \leq 0$ em toda parte.

Queremos obter informações a respeito do sinal do laplaciano de ϕ . Vamos supor sem perda de generalidade que $c(\Sigma)$ é -1 , 0 ou 1 . Analisaremos os casos $c(\Sigma) = 0$ e $c(\Sigma) \neq 0$.

Para $c(\Sigma) = 0$:

Neste caso, vamos considerar $f(\nu) = \frac{\nu}{\sqrt{K}}$.

Temos que $f(\nu)_{z\bar{z}} = -K \left(\lambda \left(\frac{\nu}{\sqrt{K}} \right) \right) = -\sqrt{K}\lambda\nu$.

Usando a expressão de $h_{z\bar{z}}$ dada em (3.19), temos

$$\begin{aligned}
 (h + f(\nu))_{z\bar{z}} &= h_{z\bar{z}} + f(\nu)_{z\bar{z}} = \frac{\nu\rho}{2K}(2K - \kappa(1 - \nu^2)) - \sqrt{K}\lambda\nu \\
 &= \frac{-\kappa\nu\rho}{2K}(1 - \nu^2) + \nu\rho - \sqrt{K}\lambda\nu \\
 &= \frac{-\kappa\nu\rho}{2K}(1 - \nu^2) + (\sqrt{-D} - \lambda)\sqrt{K}\nu \\
 &\geq \frac{-\kappa\nu\rho}{2K}(1 - \nu^2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Daí temos que $\Delta^H(\phi) = \frac{2}{\rho}(h + f(\nu))_{z\bar{z}} \geq 0$ em Σ , em que Δ^H é o laplaciano com respeito a segunda forma fundamental. Como ϕ está definida em um compacto ela assume um máximo e pelo Princípio do Máximo aplicado a funções subharmônicas segue que ϕ é constante em Σ . Como $\phi = f \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$, temos que $\phi \leq 0$ em Σ . Assim $h \leq \frac{-\nu}{\sqrt{K}} \leq \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Agora analisaremos o caso $c(\Sigma) \neq 0$.

Sem perda de generalidade podemos assumir $c(\Sigma) = \varepsilon$, em que $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = 1$.

Vamos considerar

$$f'(\nu) = \sqrt{\varepsilon \frac{(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}})}{1 - \nu^2}} = \left(\varepsilon \frac{(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}})}{1 - \nu^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Essa função é real analítica e portanto possui primitiva $f(\nu)$. Temos que

$$\begin{aligned}
 f''(\nu) &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}})}{1 - \nu^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(-2\nu\varepsilon^2) e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} (1 - \nu^2) - \varepsilon(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}})(-2\nu)}{(1 - \nu^2)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2f'(\nu)} \left[\frac{-2\nu\varepsilon e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} (1 - \nu^2) + 2\nu\varepsilon(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}})}{(1 - \nu^2)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{f'(\nu)} \left[\frac{\nu\varepsilon K(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}) - \nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} (1 - \nu^2)}{K(1 - \nu^2)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\nu}{Kf'(\nu)} \left[\frac{\varepsilon K(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}) - (1 - \nu^2)e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{(1 - \nu^2)^2} \right] \\
 &= \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{Kf'(\nu)} \left[\frac{\nu^2 - 1 + \varepsilon K(e^{\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} - 1)}{(1 - \nu^2)^2} \right] \\
 &= \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{K} \frac{g(\nu)}{f'(\nu)}, \text{ em que } g(\nu) = \frac{\nu^2 - 1 + \varepsilon K(e^{\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} - 1)}{(1 - \nu^2)^2}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \nu f'(\nu) - (1 - \nu^2)f''(\nu) &= \nu f'(\nu) - (1 - \nu^2) \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} g(\nu)}{Kf'(\nu)} \\
 &= \frac{K\nu(1 - \nu^2)^2 \left[\frac{\varepsilon(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}})}{1 - \nu^2} \right] - \nu(1 - \nu^2)e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} (\nu^2 - 1 + \varepsilon K(e^{\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} - 1))}{Kf'(\nu)(1 - \nu^2)^2} \\
 &= \frac{K\nu(1 - \nu^2)^2 \left[\varepsilon \left(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \right) \right] - \nu(1 - \nu^2)^2 e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \left(\nu^2 - 1 + \varepsilon K \left(e^{\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} - 1 \right) \right)}{Kf'(\nu)(1 - \nu^2)^3} \\
 &= \frac{K\nu\varepsilon \left(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \right) - \nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \left(\nu^2 - 1 + \varepsilon K \left(e^{\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} - 1 \right) \right)}{Kf'(\nu)(1 - \nu^2)} \\
 &= \frac{K\nu\varepsilon \left(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \right) + \nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} (1 - \nu^2) - \nu\varepsilon K \left(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \right)}{Kf'(\nu)(1 - \nu^2)} \\
 &= \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} (1 - \nu^2)}{Kf'(\nu)(1 - \nu^2)} = \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{Kf'(\nu)}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Assim, usando a expressão de $f(\nu)_{z\bar{z}}$ dada em (4.1), temos

$$\begin{aligned}
 f(\nu)_{z\bar{z}} &= \frac{-\lambda \nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{f'(\nu)} - \nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} \frac{g(\nu)}{f'(\nu)} |h_z|^2 \\
 &= \frac{-\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{f'(\nu)} \left[\lambda + g(\nu) |h_z|^2 \right]
 \end{aligned}$$

Agora como

$$\begin{aligned}
 |Q|^2 &= (\lambda + g(\nu) |h_z|^2)^2 + D(1 + g(\nu)(1 - \nu^2)), \text{ temos que} \\
 (\lambda + g(\nu) |h_z|^2)^2 &= |Q|^2 - D(1 + g(\nu)(1 - \nu^2)), \text{ e portanto} \\
 \lambda + g(\nu) |h_z|^2 &= \pm \sqrt{|Q|^2 + \frac{\rho^2}{K}(1 + g(\nu)(1 - \nu^2))}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$(h + f(\nu))_{z\bar{z}} = \frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} - \frac{\nu e^{-\frac{\varepsilon}{K}(1-\nu^2)}}{f'(\nu)} \sqrt{\frac{\rho^2}{K}(1 + g(\nu)(1 - \nu^2)) + |Q|^2},$$

em que usamos que $\lambda + g(\nu)|h_z|^2 > 0$. Isto é claro já que $K(II, \mathcal{A})$ é positiva devido a equação (3.24). Portanto \mathcal{A} é positiva definida ou negativa definida e conseqüentemente $\lambda + g(\nu)|h_z|^2$ é positiva ou negativa em todos os pontos. Agora note que no ponto mais alto $h_z = 0$ e portanto $(\lambda + g(\nu)|h_z|^2) = \lambda > 0$. Assim $(\lambda + g(\nu)|h_z|^2)$ é positiva em Σ .

Logo

$$\begin{aligned}
 \phi_{z\bar{z}} &\geq \frac{2K - (1 - \nu^2)\kappa}{2K} \nu \rho - \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{f'(\nu)} \sqrt{\frac{\rho^2(1 + g(\nu)||T||^2)}{K}} \\
 &= \left(\frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} - \frac{e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{f'(\nu) \sqrt{\frac{1+g(\nu)||T||^2}{K}}} \right) \nu \rho \\
 &= \left(\frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} - \frac{e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}}{\sqrt{\varepsilon \left(1 - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}}\right)}} \sqrt{\frac{\varepsilon K \left(e^{\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{K}} - 1\right)}{1 - \nu^2}} \right) \nu \rho \\
 &= \left(\frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} - e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{2K}} \right) \nu \rho \\
 &\geq - \left(e^{-\varepsilon \frac{(1-\nu^2)}{2K}} - 1 + \frac{\varepsilon}{2K} (1 - \nu^2) \right) \nu \rho \geq 0,
 \end{aligned}$$

em que usamos o fato do termo entre parênteses ser não negativo (isto porque a função real $e^t - 1 + t$ é não negativa).

Desta forma, tomando $f(\nu) = \int_0^\nu f'(t)dt$, temos que $\Delta^{II}(\phi) = \Delta^{II}(h + f(\nu)) = \frac{2}{\rho}(h + f(\nu))_{z\bar{z}} \geq 0$. Como ϕ está definida em um compacto ela assume um máximo e pelo Princípio do Máximo aplicado a funções subharmônicas segue que ϕ é constante e como $\phi|_{\partial\Sigma} \leq 0$ (já que $f'(\nu) \geq 0$ e $\nu \leq 0$), temos que $\phi \leq 0$ em Σ . Logo $h \leq \int_{-1}^0 f'(t)dt$.

□

4.2 Estimativa de altura horizontal

Agora consideraremos uma K -superfície compacta em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com bordo sobre um plano vertical e obteremos estimativas de altura a este plano.

Teorema 4.2.1. *Considere Σ uma superfície compacta, mergulhada em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura extrínseca constante $K > 0$. Seja \mathbb{P} um plano vertical em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e assumamos que $\partial\Sigma \subset \mathbb{P}$. Então existe uma constante d_K , independente de Σ , tal que $\text{dist}(p, \mathbb{P}) \leq d_K \forall p \in \Sigma$.*

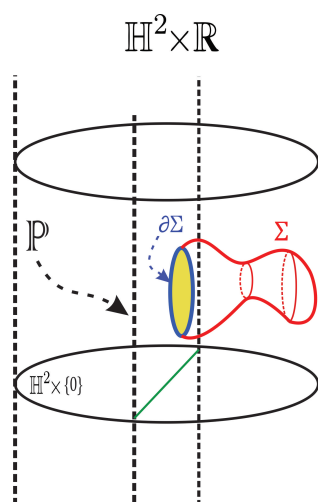


Figura 9 – K -superfície compacta, mergulhada em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com $\partial\Sigma \subset \mathbb{P}$

Demonstração. Como Σ é compacta, podemos considerar $q \in \Sigma$, cuja distância a \mathbb{P} seja máxima e sem perda de generalidade podemos supor que $q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ e $q \in \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(\mathbb{P})$.

Considere $\{\mathbb{P}_\gamma(t)\}_{t \geq 0}$ uma folheação por planos verticais ao longo de γ , com $\mathbb{P}_\gamma(0) = \mathbb{P}$ e $q \in \mathbb{P}_\gamma(h)$. Seja X um campo de Killing horizontal em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, gerado por translações ao longo da geodésica γ (X é tangente a cada $\mathbb{H}^2 \times \{\tau\}$ e é ortogonal aos planos $\mathbb{P}_\gamma(t)$).

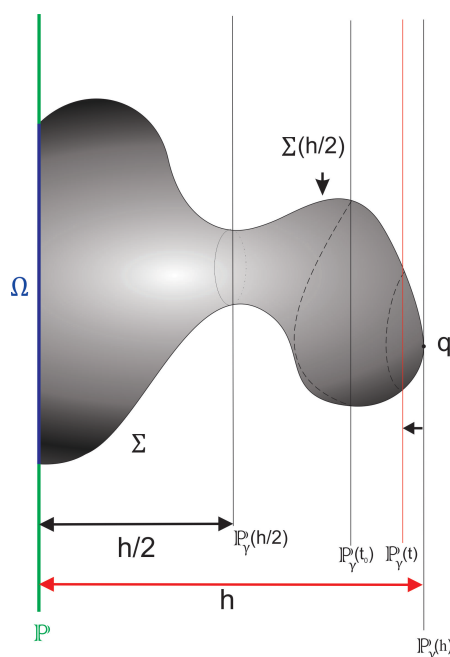


Figura 10 – Aplicação do método de reflexão de Alexandrov
(A figura acima foi retirada de [22])

Usando a técnica de reflexão de Alexandrov com os planos $P_\gamma(t)$, iniciamos em $t = h$ e decrescendo t , temos que para $\frac{h}{2} < t \leq h$ a reflexão de $\Sigma^+(t) = \Sigma \cap \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(\mathbb{P}_\gamma(t))$ por $\mathbb{P}_\gamma(t)$ não toca $\partial\Sigma$, já que $\partial\Sigma \subset \mathbb{P}$. Assim a reflexão de $\Sigma^+(t)$ por $\mathbb{P}_\gamma(t)$ intersecta Σ somente em $\Sigma \cap \mathbb{P}_\gamma(t)$. Além disso, Σ nunca é ortogonal a $\mathbb{P}_\gamma(s)$ para $t \leq s \leq h$. Caso contrário, existiria $\bar{t} \in (\frac{h}{2}, h)$, tal que o espaço tangente de $\Sigma^+(\bar{t})$ é ortogonal a $\mathbb{P}_\gamma(\bar{t})$ com $\partial\Sigma^+(\bar{t}) = \partial\Sigma^-(\bar{t}) \subset \mathbb{P}_\gamma(\bar{t})$. Assim, $\Sigma^-(\bar{t})$ e $\tilde{\Sigma}^+(\bar{t})$ ($\tilde{\Sigma}^+(\bar{t})$ é a componente conexa refletida de $\Sigma^+(\bar{t})$ por $\mathbb{P}(\bar{t})$) possuem um ponto de tangência no bordo e neste ponto de tangência possuem a mesma curvatura extrínseca (constante positiva) e mesmo normal. Segue da versão geométrica do Princípio do Máximo de Hopf que tais componentes coincidem e como consequência teríamos que $\mathbb{P}_\gamma(\bar{t})$ é um plano de simetria de Σ , o que não pode ocorrer.

Agora como X é ortogonal a cada $\mathbb{P}_\gamma(t)$, concluímos que X é transverso a $\Sigma^+(\frac{h}{2})$ e portanto $\Sigma^+(\frac{h}{2})$ é um gráfico sobre um domínio de $\mathbb{P}_\gamma(\frac{h}{2})$.

Assim para provar o teorema é suficiente mostrarmos que " X -gráficos" estão a uma distância limitada de \mathbb{P} , assumindo que o bordo do gráfico está em \mathbb{P} .

Suponha que Σ é um X -gráfico sobre um domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{P}$ e escolhamos $\mathbb{P}_\gamma(t)$ como anteriormente. Denotaremos por Σ_0 a esfera rotacional cuja curvatura extrínseca K é a mesma de Σ e cujo diâmetro é d_0 .

Mostraremos inicialmente a seguinte afirmação.

Afirmação: Para cada $t > d_0$, o diâmetro de qualquer componente conexa limitada por $\Sigma(t) = \Sigma \cap \mathbb{P}_\gamma(t)$ é no máximo d_0 .

Suponha que esta afirmação seja falsa. Assim para alguma componente conexa $C(t)$ de $\Sigma(t)$, existem pontos x, y no interior do domínio $\mathbb{D}(t)$ tal que $\text{dist}(x, y) > d_0$ ($\mathbb{D}(t)$ é um domínio de $\mathbb{P}_\gamma(t)$ limitado por $C(t)$). Sejam Q um domínio em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ limitado por $\Sigma \cup \mathbb{D}$ e β uma curva em $\mathbb{D}(t)$ ligando x a y , tal que $\beta \cap C(t) = \emptyset$.

Considere agora Π o "retângulo" formado pelas órbitas de X ligando β a \mathbb{P} .

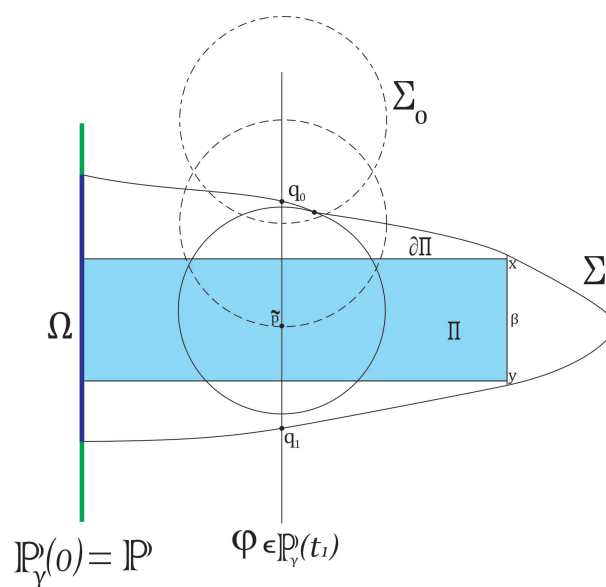


Figura 11 – Σ_0 passando por Π

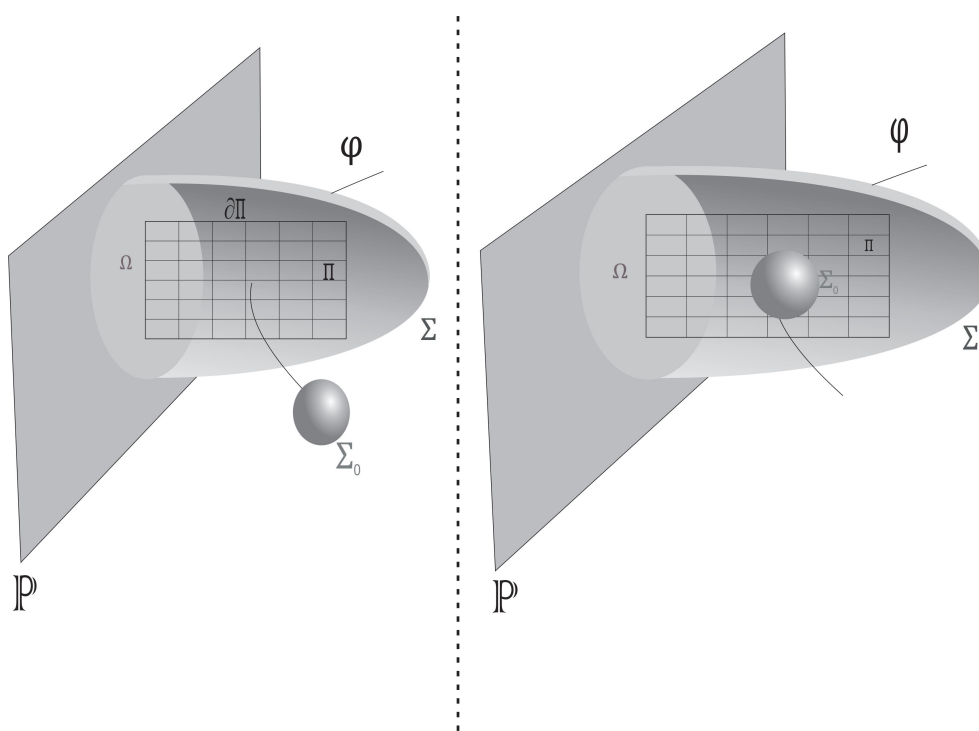


Figura 12 – Σ_0 passando por Σ
(A figura acima foi retirada do artigo [12]).

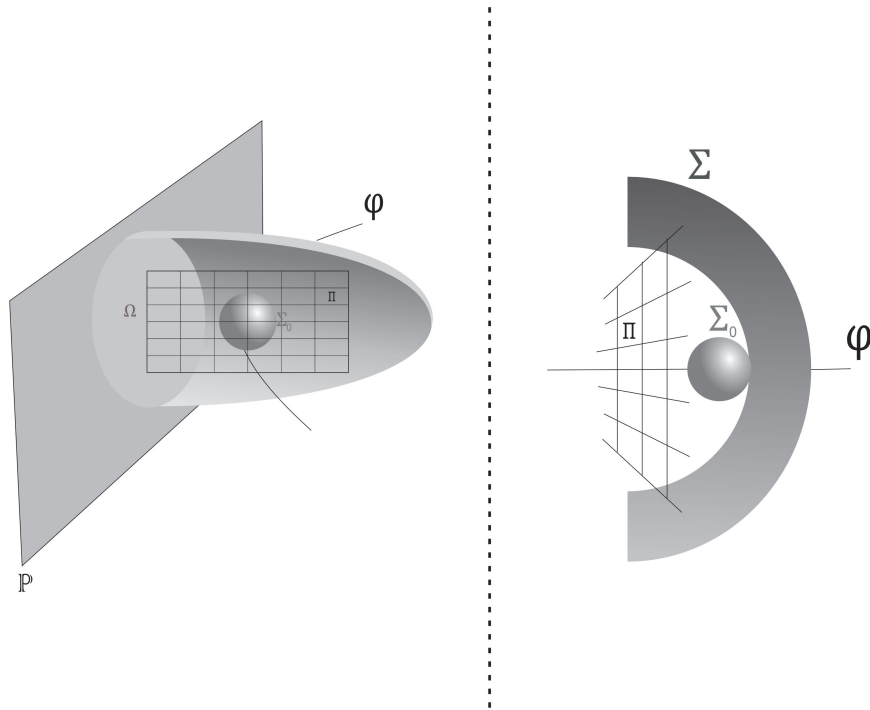


Figura 13 – Σ_0 saindo de Σ
(A figura acima foi retirada do artigo [12]).

Como Σ é um gráfico e β está contida em $\mathbb{D}(t)$, então $\Pi \subset Q$. Seja p um ponto de Π cuja a distância ao $\partial\Pi$ é maior que $\frac{d_0}{2}$. Tal ponto existe pela construção de Π .

Seja φ uma geodésica passando por \tilde{p} , cuja distância de todos os seus pontos ao bordo de Π é maior que $\frac{d_0}{2}$. A menos de isometria do ambiente, podemos supor que φ está em $\mathbb{P}_\gamma(t)$ e $\tilde{p} \in \mathbb{P}_\gamma(t)$. Denotaremos q_0 como o primeiro ponto em que φ intersecta Q e q_1 o último ponto. Vamos agora considerar $\Sigma_0(r)$ a família de esferas centradas em cada ponto de φ , obtidas da esfera rotacional $\Sigma_0 = S_R$, por meio de translações de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então existe uma primeira esfera nesta família, digamos $\Sigma_0(r_0)$, próximo de q_0 que toca Σ em um ponto \tilde{q}_0 . Neste ponto, tais superfícies possuem a mesma curvatura extrínseca (constante positiva). Se os vetores normais destas superfícies coincidem em \tilde{q}_0 , então segue do Princípio do Máximo (Teorema (3.1.5)) que $\Sigma = \Sigma_0(x_0)$, o que é uma contradição.

Agora se os vetores normais são opostos, então continuamos movendo a esfera. Seja $\Sigma_0(r_0)$ a primeira esfera que encontra Π em um ponto interior de Π .

Para cada $r > r_0$, consideramos a parte $\Sigma_0(r)$ da esfera $\Sigma_0(r)$ que passa por Π . É importante observar que nenhuma dessas esferas toca $\partial\Pi$, já que a distância de cada ponto de φ a $\partial\Pi$ é maior que $\frac{d_0}{2}$ e $\Sigma_0(r)$ está centrada em cada ponto de φ .

Agora como estas esferas deixam Q em q_1 , existe um primeiro valor r_1 tal que $\Sigma_0(r_1)$ encontra $\Sigma \cap \partial Q$. Assim aplicando o Princípio do Máximo (Teorema (3.1.5)) a $\Sigma_0(r_1)$ e Σ neste ponto, concluímos que $\Sigma_0(r_1) = \Sigma$, o que é uma contradição.

Portanto $dist(x, y) \leq d_0, \forall x, y$ pertencente ao interior do domínio $\mathbb{D}(t)$.

Vejam os a seguir que a distância de qualquer ponto $p \in \Sigma_i$ de gráfico Σ_i ao plano \mathbb{P} é menor ou igual a d_0 . Agora se o teorema é falso, existe uma sucessão de gráficos Σ_i sobre domínios $\mathbb{D}_i \subset \mathbb{P}$ com $diam(\mathbb{D}_i) < d_0$ e $dist(\Sigma_i, \mathbb{P})$ ilimitada. A menos de isometrias, vamos supor que os domínios \mathbb{D}_i estão contidos em um disco fixado \mathbb{D} e os gráficos Σ_i estão contidos em um cilindro de Killing horizontal \mathcal{C} sobre \mathbb{D} . Construiremos uma nova folheação por planos verticais para mostrar que isto é impossível.

Para isso, vamos considerar sem perda de generalidade que $\gamma = \{0, \pi\}$, \mathbb{P} é o plano vertical sobre a geodésica $\alpha = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$. Tomaremos gráficos Σ_i cujas projeções são assintóticos a 0.

Seja $Q(s_1, s_2) = \{s_1, s_2\} \times \mathbb{R}$ um plano vertical. Observe que para $s_1 = 0$ e $s_2 > 0$ e suficientemente próximo de 0, a parte refletida de $\mathcal{C} \cap int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(0, s_2))$ por $Q(0, s_2)$ não intersecta o plano \mathbb{P} . Em particular, a reflexão de $\Sigma_i \cap int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(0, s_2))$ não toca $\partial \Sigma_i \subset \mathbb{D}$. Da mesma forma, para $s_1 < 0$ e próximo de 0, as mesmas afirmações continuam válidas. Agora veja que a reflexão de $\mathcal{C} \cap int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ sai do cilindro \mathcal{C} e portanto a reflexão de $\Sigma_i \cap int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ também sai de \mathcal{C} para i suficientemente grande.

Considere x e y entre s_1 e s_2 de modo que $Q(x, y) \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

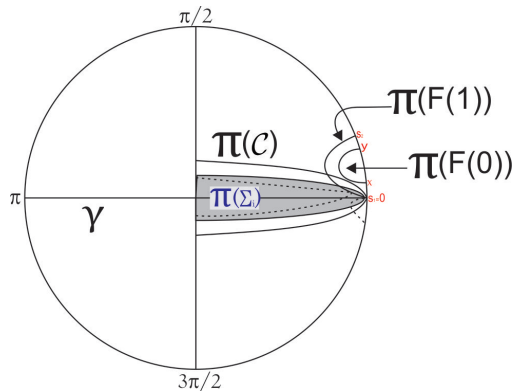


Figura 14 – Folheação por planos verticais

Tomaremos agora uma folheação $F(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) por planos verticais da

região de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ compreendida entre $Q(x, y)$ e $Q(s_1, s_2)$, em que $F(0) = Q(x, y)$ e $F(1) = Q(s_1, s_2)$ e aplicamos novamente a reflexão de Alexandrov com os planos $F(t)$. Vamos tomar i suficientemente grande tal que a reflexão de $(\Sigma_i) \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ tenha pontos fora do cilindro \mathcal{C} . A reflexão desta região de Σ_i por cada $F(t)$ é disjunta de \mathbb{P} e portanto disjunta do $\partial\Sigma_i$, para $0 \leq t \leq 1$. Logo, obtemos a existência de um certo t , suficientemente pequeno, tal que a reflexão de Σ_i com respeito a $F(t)$ toca Σ_i em algum ponto e como consequência disso $F(t)$ deveria ser um plano de simetria de Σ_i , o que é uma contradição. \square

Referências

- [1] Abresch, U. and Rosenberg H. A Hopf Differential for Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.* **193** n°2 (2004), 141-174.
- [2] Alexandrov A. D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I, (Russian) *Vestnik Leningrad Univ. Math.* **11**, (1956) 5-17.
- [3] Aledo, J. A. and Espinar, J. M. and Gálvez, J. A. The Codazzi equation for surfaces. *Advances in Mathematics*, v. 224, n. 6, (2010) p. 2511-2530.
- [4] Aledo, J. A. and Espinar, J. M. and Gálvez J. A. Surfaces with constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Height estimates and representation. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. New Series* **38(4)**, (2007), 533-544.
- [5] Aledo J. A. and Espinar, J. and Galvez, J. A. Height estimates for surfaces with positive constant mean curvature in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois Journal of Math.* Volume **52**, Number 1. Spring (2008), Pages 203-211. S 0019-2082.
- [6] Biezuner, R. J. Notas de Aula Geometria Riemanniana. Universidade Federal de Minas Gerais. Minas Gerais, 2011.
- [7] B. O'Neill,. *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, (1983).
- [8] Caminha, A. Notas de geometria diferencial. Notas de aula. Fortaleza, 2010.
- [9] Cheng, X. and Rosenberg, H.. Embedded positive constant r -mean curvature hypersurfaces in $\mathbb{M}^m \times \mathbb{R}$. *An. Acad.Brasil. Cienc.* **72** (2005). 133-147.
- [10] do Carmo, M. P. do and Roitman, P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática. 6ª ed. Rio de Janeiro, 2014.
- [11] do Carmo , M. P. *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Projeto Euclides 2ª ed. Rio de Janeiro, 1998.
- [12] Espinar, J. and Gálvez, J., A. and Rosenberg, H. Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces. *Comment. Math. Helv.* **84**, (2009), no. 351-386.
- [13] Espinar, J. La ecuación de Codazzi en Superficie. Tese de Doutorado. Universidad de Granada. Espanha, (2008).

-
- [14] Espinar, José M. Maximum Principles and Geometric Applications. Artigo. Universidade de Brasília, (2014).
- [15] Evans, L. C. Partial differential equations. American Mathematical Society Providence, RI, (1998).
- [16] E. Heinz. On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary. Arch. Rational Mech. Anal., **35** (1969). 249-252.
- [17] Folha, Abigail., Peñafiel, Carlos. Weingarten type surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. (2015) arXiv: 1511.08146v2 [math. DG] .
- [18] G. David, and Trudinger, N. S. Elliptic Partial Differential Equations of second order. Springer. EUA, (1998).
- [19] Hoffman, K. and Kunze, R. Linear Algebra Prentice Hall. Inc. Englewood Cliffs, (1961).
- [20] H. Rosenberg, . Hypersurfaces of constant curvature in space forms. Bull. Sc. Math. 2^o série, **117** (1993), 211-239.
- [21] H. Rosenberg and R. Sa Earp. The Geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; e. g. surfaces satisfying $aH + bK = 1$. Where a and b are positive. Duke Math. J. **73** (1994), 291-306.
- [22] Kenmotsu, Katsuei. Surfaces with constant mean curvature. Artigo. American Mathematical Society. EUA, (2003).
- [23] Kobayshi, S. and Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry. Wiley Clasics Library Edition Published, (1996), v.2.
- [24] Miranda, J. F. R. de. Variedades Kählerianas com Pluri-Curvatura média Paralela. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Amazonas. Manaus, (2006).
- [25] Nelli, B. and Rosenberg, H. Simply connected constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Michigan Math. J. **54** (2006). 537-543.
- [26] N. Korevaar, and R. Kusner, and W. Meeks, and B. Solomon. Constant mean curvature surfaces in hyperbolic spac. Amer. J. Math. **114** (1992), 1-43
- [27] Peixoto, Cíntia R. de Araújo. Campos de Killing, Curvatura Média e Translações. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matemática. Porto Alegre, (2005).

-
- [28] Santos, M. R. B. dos. A equação de Codazzi em Superfícies. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Carlos. São Paulo, (2011).
- [29] T. K. Milnor. Abstract Weingarten Surfaces. *J. Diff. Geom.* 15 (1980), 365-380.