

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

*SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UMA ABORDAGEM MAIS APROFUNDADA PARA
O ENSINO MÉDIO*

Joseldo Alasson Moreira Araújo

MANAUS

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Joseldo Alasson Moreira Araújo

*SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UMA ABORDAGEM MAIS APROFUNDADA PARA
O ENSINO MÉDIO*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A663s	Araujo, Joseldo Alasson Moreira Sequências e séries : Uma abordagem mais aprofundada para o Ensino Médio / Joseldo Alasson Moreira Araujo. 2017 99 f.: il. color; 31 cm.
	Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.
	1. Sequências. 2. Séries. 3. Progressões Aritmética e geométrica. 4. Limites. 5. Aplicações. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

JOSELDO ALASSON MOREIRA ARAÚJO

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UMA ABORDAGEM MAIS APROFUNDADA
PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 27 de Setembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

Presidente



Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

Membro



Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto

Membro

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todas as bênçãos recebidas, tudo que tenho e sou.

Aos meus pais, João da Silva Araújo (*in memoriam*) e Lindinalva da Silva Moreira, que sempre estiveram ao meu lado, ensinando e apoiando nos momentos em que precisei.

Ao meu filho Tiago Alasson e à minha esposa, Daniele Santos Neves, pela paciência, pelo carinho, por terem suportado a minha ausência nas viagens que foram necessárias fazer.

Aos meus colegas de PROFMAT, especialmente à Celiomar Machado, Fábio Costa e Vinícius Paulo pelo companheirismo.

Aos meus professores de PROFMAT pelos ensinamentos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela paciência e destreza na condução da orientação, apresentando suas sugestões pertinentes, visando a melhoria do trabalho final, sabendo ouvir quando necessário. Obrigado pela confiança.

À CAPES, pela ajuda financeira importantíssima durante o curso.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo um estudo sucinto, porém, mais aprofundado dos conteúdos relativos a sequências e séries do que aqueles geralmente abordados no ensino médio. Fizemos uma revisão bibliográfica com os fundamentos básicos teóricos dos assuntos estudados nos três primeiros capítulos, esses por sua vez, reforçados da teoria encontrada nos apêndices A e B. No capítulo 4, apresentamos vários exemplos resolvidos que podem servir de suporte para os interessados em aprofundar o estudo dos conteúdos, sejam estes professores ou alunos. Neste trabalho, apresentamos também, através de uma linguagem clara e concisa, algumas aplicações das sequências reais que não precisam de estudos avançados na área para serem compreendidas, por exemplo, a demonstração geométrica da convergência de uma série geométrica. São também apresentados alguns teoremas sobre a teoria de limites, sequências, séries e critérios de convergência. Com isso, acreditamos está contribuindo para a melhoria do ensino básico em matemática.

Palavras-chave: Sequências, Séries, Progressões aritmética e geométrica, Limites, Aplicações.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a succinct but more detailed study of sequence and series contents than those generally covered in high school. We have done a bibliographical review with the basic theoretical foundations of the subjects studied in the first three chapters, these in turn, reinforced by the theory found in appendices A and B. In chapter 4, we present several solved examples that can serve as support for those interested in deepening the study of the contents, be these teachers or students. In this work, we also present, through a clear and concise language, some applications of the real sequences that do not need advanced studies in the area to be understood, for example, the geometric demonstration of the convergence of a geometric series. Also presented are some theorems about the theory of limits, sequences, series and convergence criteria. With this, we believe it is contributing to the improvement of basic education in mathematics.

Keywords: Sequences, Series, Arithmetic and geometric progressions, Limits, Applications.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^+	Conjunto dos números reais positivos.
$ x $	Valor absoluto de x .
$=$	Igual.
\neq	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
\geq	Maior ou igual.
\leq	Menor ou igual.
$\sum_{i=1}^n$	Somatório variando de 1 a n .
\overline{AB}	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
\widehat{ABC}	Medida do ângulo ABC.
x_n	Termo geral da sequência x_n .
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	Limite de x_n com n tendendo ao infinito.
$\max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$	Maior elemento de $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.
\in	Pertence
\notin	Não pertence.
\forall	Para todo.
\square	Indica o fim de uma demonstração.

Sumário

Introdução	1
1 Sequências	3
1.1 Sequências	3
1.2 Sequências de números reais	3
1.3 Formas de definir uma sequência	4
1.4 Representação gráfica de uma sequência	6
1.5 Sequências monótonas	9
1.6 Sequências Limitadas	10
1.6.1 Limite de uma sequência	10
1.6.2 Operações com limites de sequências	17
1.6.3 Limites infinitos	22
2 Sequências Elementares	24
2.1 Progressões Aritméticas	24
2.1.1 Fórmula do Termo Geral	25
2.1.2 Classificação das Progressões Aritméticas	28
2.1.3 Representação gráfica de uma progressão aritmética	29
2.1.4 Interpolação Aritmética	31
2.1.5 Propriedades das Progressões Aritméticas	31
2.1.6 Soma dos termos de uma PA	32
2.2 Progressões Geométricas	36
2.2.1 Fórmula do termo geral	37
2.2.2 Classificação das progressões geométricas	39
2.2.3 Representação gráfica de uma progressão geométrica	41
2.2.4 Interpolação geométrica	43
2.2.5 Propriedades das progressões geométricas	44
2.2.6 Soma dos termos de uma PG finita	44
2.2.7 Soma dos termos de uma PG infinita	47
2.2.8 Uma demonstração geométrica para a soma dos termos de uma PG in- finita de $ q < 1$	48

3	Séries Numéricas	50
3.1	Séries Numéricas	52
3.1.1	Propriedades dos somatórios	53
3.1.2	Propriedades das séries convergentes	54
3.2	Algumas séries interessantes	55
3.2.1	Série Aritmética	55
3.2.2	Série Geométrica	56
3.2.3	Séries Telescópicas	57
3.2.4	Série Harmônica	58
3.3	Testes de Convergência	59
4	Algumas Aplicações de Sequências	61
	Considerações Finais	71
	Referências Bibliográficas	72
A	O conjunto \mathbb{N} dos Números Naturais	74
A.1	Os números naturais e os Axiomas de Peano	74
A.2	Princípio de Indução Matemática	75
A.2.1	Princípio de indução - primeira versão	75
A.2.2	Princípio de indução - segunda versão	75
A.3	Adição em \mathbb{N}	76
A.4	Multiplicação em \mathbb{N}	78
A.5	A ordenação do conjunto \mathbb{N} dos números naturais	80
A.5.1	Princípio da boa ordenação	81
B	O conjunto \mathbb{R} dos Números Reais	82
B.1	Propriedades algébricas dos números reais	82
B.2	O conjunto \mathbb{R} é um conjunto ordenado	86
B.3	Valor absoluto de um número real	87
B.4	Propriedade Arquimediana	88
B.5	Propriedades de completude de \mathbb{R}	89
B.5.1	Supremo e Ínfimo	89

Introdução

Em um mundo com tantos atrativos tecnológicos, torna-se cada vez mais difícil obter a atenção de nossos alunos em uma sala. No ônibus, em um shopping, na rua, é comum nos depararmos cotidianamente com situações-problemas que poderiam ser tranquilamente usadas como exemplos de aplicações da matemática ao cotidiano, porém, na maioria das vezes, não conseguimos associar tais encontros aos temas em questão. Isso significa que é necessário um trabalho de ensino para o desenvolvimento de uma intuição matemática nos alunos. Sabemos que textos de alguns especialistas em educação enfatizam estes aspectos intuitivos, fundamentalmente através de um maior uso dos recursos visuais, da contextualização, do conhecimento aplicado à vida real, como podemos encontrar em [15], (p.111):

“Aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.”

Pensando nisso, traremos neste trabalho de uma forma mais aprofundada, algumas propostas voltadas de forma especial para o ensino médio, com intuito de mostrar a importância de sequências e séries, suas relações com outros temas e aplicações.

No Capítulo 1, fazemos uma abordagem mais ampla sobre sequências, apresentando neste contexto, a relação entre limites e sequências, sequências monótonas e convergência.

No Capítulo 2, damos uma atenção especial ao que chamamos de sequências elementares, são as progressões, geralmente estudadas no ensino médio e abordadas de modo bem simples, sem contextualização e com uma quantidade exagerada de fórmulas prontas sem apresentar um argumento que justifique tais resultados. Buscando uma abordagem diferenciada de trabalho, apresentamos como proposta a construção de gráficos e apresentação de demonstrações com o apelo visual.

No Capítulo 3, fazemos uma pequena abordagem sobre séries, enfatizando a ideia de somas infinitas.

No capítulo 4, apresentamos uma coletânea de problemas, todos resolvidos, com base na teoria dos capítulos anteriores. Procurou-se mostrar ao leitor que é possível através de um

tema escolhido, estabelecer conexões com vários outros temas da matemática ou áreas afins, facilitando a contextualização e a aplicação dos mesmos.

Capítulo 1

Sequências

Neste capítulo, por uma questão de ordem, que acreditamos ser pertinente, iniciaremos falando sobre sequências e seus conceitos, para posteriormente, com mais informações, apresentarmos os conceitos e aplicações sobre séries.

1.1 Sequências

Informalmente podemos dizer que uma sequência é uma lista ordenada de objetos, números ou elementos.

Exemplo 1.1. *Quando vamos a um banco e solicitamos os serviços de atendimento ao cliente, observamos que para sermos atendidos precisamos de uma senha. Esta senha tem como objetivo, estabelecer uma ordem de atendimento que ficará condicionada ao momento de chegada do cliente ao banco e à solicitação da senha. Temos, neste caso, um exemplo claro de aplicação de uma sequência no cotidiano. Pois, quanto mais cedo o cliente retirar sua senha, mais cedo será atendido.*

Podemos citar outros exemplos, como quando subimos os degraus de uma escada, quando observamos a sequência das fases da lua, das estações do ano, quando executamos uma música e observamos a ordem dos acordes, como estão dispostos os meses do ano no calendário, entre outros.

1.2 Sequências de números reais

Uma sequência numérica (finita ou infinita) é qualquer listagem ordenada de números reais.

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais.*

Se $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência, costuma-se usar a notação (x_n) em lugar de $x(n)$ para denotar seu valor em $n \in \mathbb{N}$. Os valores x_n são chamados os termos ou elementos da sequência.

Todo termo é classificado de acordo com a sua ordem na sequência. Vejamos o esquema abaixo:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \end{array}$$

Existem outras notações que são usadas frequentemente, por exemplo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n \geq 1}$, como formas alternativas de representar a sequência x . A escolha da letra x para representar uma sequência é arbitrária.

Vejamos alguns exemplos de sequências numéricas:

Exemplo 1.2. Os números $(3, 8, 4, 5)$ formam uma sequência finita de 4 números. Nesse caso $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 5$.

Exemplo 1.3. A sequência dos números naturais $(1, 2, 3, 4, \dots)$ formam uma sequência infinita de números.

Exemplo 1.4. A sequência $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ é uma sequência infinita de números, onde $x_n = 0$ quando n é ímpar e $x_n = 1$ quando n é par.

Neste último exemplo, podemos observar de forma bem clara que, embora o número de termos da sequência seja infinito, o conjunto formado pelos seus termos é finito, pois como vemos possui apenas dois elementos: 0 e 1.

1.3 Formas de definir uma sequência

Existem várias formas de definir uma sequência:

✓ **Por uma propriedade que cumpram os termos dessa sequência**

Exemplo 1.5. A sequência dos números pares: $(2, 4, 6, 8, \dots)$.

Exemplo 1.6. A sequência dos números ímpares: $(1, 3, 5, 7, \dots)$.

Exemplo 1.7. A sequência dos cubos dos números naturais: $(1, 8, 27, 64, \dots)$.

Exemplo 1.8. A sequência dos números primos: $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.

✓ Por uma fórmula posicional do n -ésimo termo

Exemplo 1.9. $x_n = 2n - 2$

Usando a expressão acima, podemos encontrar os termos da sequência, substituindo n pelos quatro primeiros números naturais, obtemos os quatro primeiros termos da sequência. Assim, teremos:

$$x_1 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$x_2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$x_3 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$x_4 = 2 \cdot 4 - 2 = 6$$

Exemplo 1.10. $y_n = n^3 - 1$

Usando o mesmo procedimento adotado no exemplo anterior, ou seja substituindo n pelos números naturais. temos:

$$y_1 = 1^3 - 1 = 0$$

$$y_2 = 2^3 - 1 = 7$$

$$y_3 = 3^3 - 1 = 26$$

$$y_4 = 4^3 - 1 = 63$$

⋮

✓ Por uma lei de recorrência

Neste caso, temos uma expressão que permite obter um termo a partir do outro. Muitas sequências são definidas dessa forma, como afirma [1], (p. 65.):

“Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s)”.

Exemplo 1.11. A sequência de números $(1, 5, 9, 13, \dots)$ pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 4$, com $x_1 = 1$.

Exemplo 1.12. Dada a sequência recorrente $x_n = x_{n-1} + 2$ com $x_1 = 1$, encontraremos os quatro primeiros termos. Assim,

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= x_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\x_3 &= x_2 + 2 = 3 + 2 = 5 \\x_4 &= x_3 + 2 = 5 + 2 = 7 \\&\vdots\end{aligned}$$

Exemplo 1.13. A sequência dos números $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ formam a famosíssima sequência de Fibonacci.¹

Ela é obtida pela lei de recorrência $x_1 = x_2 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Observação 1.1. Nos Exemplos 1.11 e 1.12, podemos observar com facilidade que, para obtermos a sequência de números desejada, necessitamos inicialmente apenas do primeiro termo x_1 da sequência e a lei de recorrência. No exemplo 1.13, temos uma diferença, pois, além do primeiro termo e da lei de recorrência, necessitamos do segundo termo.

Concluimos então que, nos Exemplos 1.11 e 1.12, temos sequências recorrentes de primeira ordem e no exemplo 1.13, temos uma sequência recorrente de segunda ordem.

Para verificarmos qual é a ordem de uma sequência recorrente, basta fazermos a diferença entre o maior e o menor índices dos termos que pertencem a lei de recorrência.

Exemplo 1.14. Dada a sequência definida recursivamente por $x_{n+2} = x_{n+1} + 3 \cdot x_n$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. A ordem de recorrência desta sequência é $n + 2 - n = 2$. Portanto, a sequência é de segunda ordem ou de ordem dois.

1.4 Representação gráfica de uma sequência

A representação gráfica de uma sequência nos ajuda a entender melhor o seu comportamento quando n assume valores muito grandes. Esse recurso é muito usado nos estudos sobre limites. Mostraremos aqui as duas formas mais usadas para representar graficamente uma sequência numérica. A primeira delas consiste em marcarmos os pontos (n, x_n) no plano cartesiano OXY e a segunda é quando destacamos os pontos x_1, x_2, x_3, \dots sobre uma reta real.

Vejamos alguns exemplos:

¹Matemático Italiano (1170-1250) - também conhecido como Leonardo de Pisa, pois nasceu em Pisa na Itália. Tornou-se na época o matemático mais importante da Europa Medieval. Viajou por muitos países africanos e absorveu muito da cultura árabe. Por conta dessas experiências, acabou desenvolvendo o gosto e aprimorando seu conhecimento sobre matemática. Quando retornou em 1202 para sua terra natal, escreveu o livro *Liber Abaci* que significa Livro do Ábaco.

Exemplo 1.15. Representação gráfica da sequência definida por $x_n = n + 2$.

Marcando os pontos (n, x_n) no plano cartesiano $0XY$.

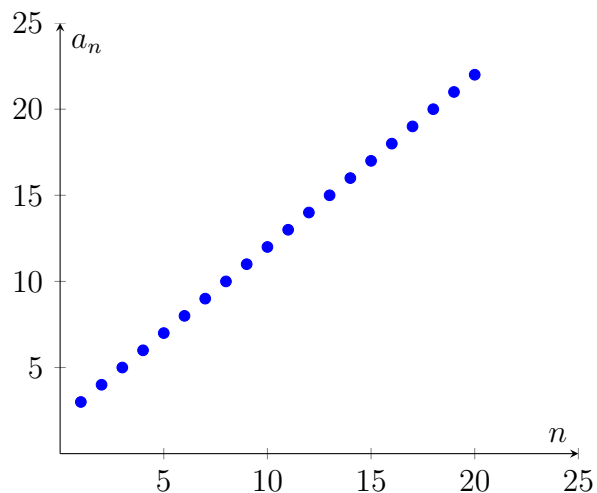


Figura 1.1: Gráfico da sequência de termo geral $x_n = n + 2$

ou destacando os pontos x_1, x_2, x_3, \dots , sobre uma reta real.

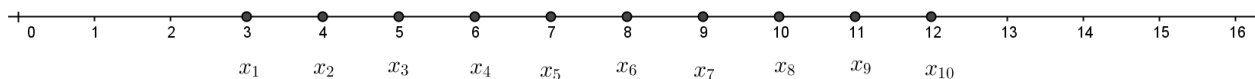


Figura 1.2: 2ª forma do gráfico da sequência $x_n = n + 2$.

Nos gráficos acima, através de uma análise simplesmente visual podemos perceber com facilidade, que à medida que n cresce os valores x_n também crescem.

Exemplo 1.16. Representação gráfica da sequência definida por $x_n = \frac{1}{n}$.

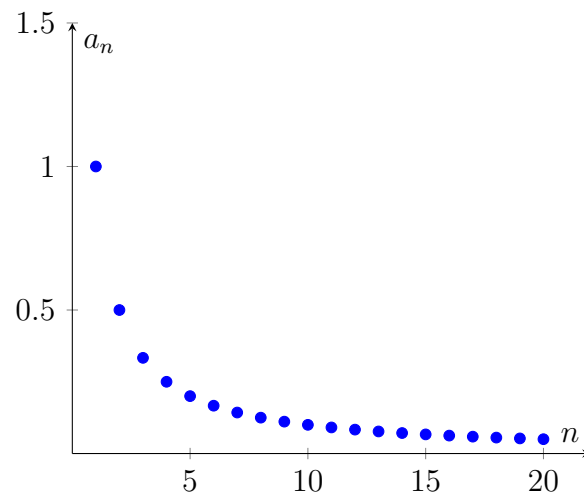


Figura 1.3: Gráfico da sequência de termo geral $x_n = \frac{1}{n}$

ou

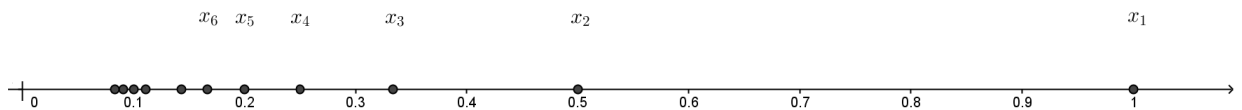


Figura 1.4: 2ª forma do gráfico da sequência $x_n = \frac{1}{n}$.

Neste exemplo, podemos observar que à medida que n cresce os valores x_n decrescem aproximando-se de zero.

Exemplo 1.17. Representação gráfica da sequência definida por $x_n = (-1)^n$.

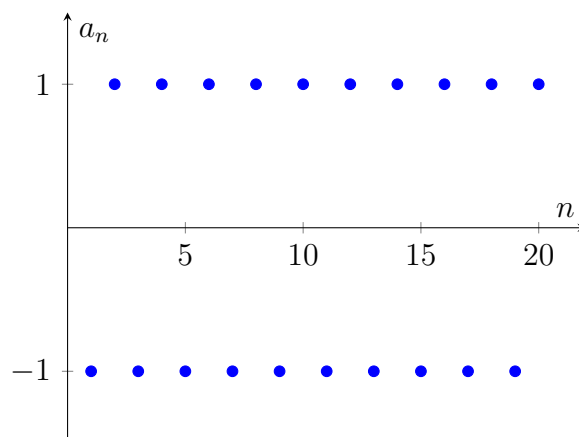


Figura 1.5: Gráfico da sequência de termo geral $x_n = (-1)^n$

Neste último gráfico, os valores x_n alternam entre -1 e 1 à medida que n cresce. É fácil concluir que $x_n = -1$ quando n é ímpar e $x_n = 1$ quando n é par.

1.5 Sequências monótonas

Definição 1.2. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Diz-se que (x_n) é **monótona** quando se verifica as seguintes propriedades:

✓ Quando $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso diremos que a sequência é monótona *não-decrescente*. Assim temos

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$

✓ Quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso diremos que a sequência é monótona *não-crescente*. Assim temos

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$$

✓ Quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso diremos que a sequência é monótona *crescente*. Assim temos

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

✓ Quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso diremos que a sequência é monótona *decrescente*. Assim temos

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$$

Exemplo 1.18. *Mostre que a sequência definida por $x_n = 2^n$ é monótona crescente.*

Solução: Temos que $x_n = 2^n$ e $x_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$. Fazendo a diferença entre dois termos consecutivos, temos:

$$x_{n+1} - x_n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $x_{n+1} - x_n > 0$, temos $x_{n+1} > x_n \iff x_n < x_{n+1}$. Logo, (x_n) é monótona crescente.

Exemplo 1.19. *Verifique se a sequência definida por $x_n = \frac{1}{n}$ é monótona crescente ou decrescente.*

Solução: Usando um procedimento análogo ao do exemplo anterior, temos que $x_n = \frac{1}{n}$ e $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Fazendo a diferença entre dois termos consecutivos, temos:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n \cdot (n+1)} = \frac{-1}{n \cdot (n+1)} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $x_{n+1} - x_n < 0$, temos $x_{n+1} < x_n$. Portanto, (x_n) é monótona decrescente.

1.6 Sequências Limitadas

1.6.1 Limite de uma sequência

A principal característica que se estuda em uma sequência é o seu comportamento para valores muito grandes de n , isto é, a tendência dos termos da sequência para um determinado valor limite. Como podemos encontrar em [3], (p. 99):

“Os limites de sequências de números reais são os mais simples,[...] sugerimos ao leitor pensar numa sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de números reais como uma sequência de pontos da reta e no seu limite[...] como um ponto do qual os pontos x_n tornam-se e permanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice n suficientemente grande”.

Esta propriedade se denomina convergência. A seguir apresentaremos a definição de limite de uma sequência convergente, algumas condições básicas para a existência do mesmo, assim como suas propriedades e técnicas que nos fornecerão as ferramentas necessárias para calculá-lo e aplicá-lo.

Exemplo 1.20. *Consideremos a sequência definida por $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ e então avaliemos os valores de seus termos à medida que n vai crescendo.*

Para $n = 1$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{1} = 2 + 1 = 3.$$

Para $n = 2$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2} = 2 + 0,5 = 2,5.$$

Para $n = 3$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{3} = 2 + 0,333\dots = 2,333\dots$$

Para $n = 4$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{4} = 2 + 0,25 = 2,25.$$

Para $n = 5$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{5} = 2 + 0,2 = 2,2.$$

Para $n = 20$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{20} = 2 + 0,05 = 2,05.$$

Para $n = 50$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{50} = 2 + 0,02 = 2,02.$$

Para $n = 100$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{100} = 2 + 0,01 = 2,01.$$

Para $n = 1000$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{1000} = 2 + 0,001 = 2,001.$$

Para $n = 10000$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{10000} = 2 + 0,0001 = 2,0001.$$

Para $n = 1000000$, temos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{1000000} = 2 + 0,000001 = 2,000001.$$

Percebemos que, à medida que os valores de n vão se tornando maiores, ou seja, n cresce, os termos x_n se aproximam cada vez mais de 2.

Mas, se n cresce infinitamente, poderíamos garantir que o limite de (x_n) é igual a 2? Essa resposta será dada adiante.

Definição 1.3. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite da sequência (x_n) se para todo número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe um número natural N tal que $|x_n - L| < \epsilon$ para todo $n > N$. Neste caso, escreve-se $\lim x_n = L$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ e dizemos que (x_n) é convergente e converge para L .

Observação 1.2. Observe que $|x_n - L| < \epsilon$ é equivalente a

$$-\epsilon < x_n - L < \epsilon,$$

ou também a

$$L - \epsilon < x_n < L + \epsilon,$$

que significa que $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$, quando $n > N$.

Dizemos então, que se uma sequência (x_n) possui limite, ela é *convergente*. A sequência que não é convergente se denomina *divergente*.

Observação 1.3. Toda sequência constante (x_n) em que $x_n = K$ com $K \in \mathbb{R}$ tem $\lim x_n = \lim K = K$, pois qualquer intervalo contendo K , irá conter também todos os termos da sequência (neste caso, $N = 1$), pois todos eles são iguais a K .

Exemplo 1.21. Seja (x_n) uma sequência constante definida por $x_n = 2$, dizemos que (x_n) converge para o número 2 ou tem limite igual a 2 ou representamos simplesmente por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Exemplo 1.22. A sequência definida por $x_n = (-1)^n$ não é convergente.

Solução: Os elementos dessa sequência são $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$. Como $x_n = -1$ se n é ímpar e $x_n = 1$ se n é par, dizemos então que (x_n) é divergente. Para provarmos que (x_n) é divergente, suponhamos, por absurdo, que (x_n) é convergente e vamos mostrar que chegaremos a uma contradição. Se a sequência tiver um limite L , então, pela Definição 1.3, para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|x_n - L| < \epsilon$.

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então,

$$|x_n - L| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x_n - L < \frac{1}{2}.$$

Como $x_n = -1$ se n é ímpar e $x_n = 1$ se n é par, temos,

$$-\frac{1}{2} < -1 - L < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2}. \quad (1.1)$$

Daí, considerando somente a primeiras das desigualdades acima

$$-1 - L > -\frac{1}{2} \implies -L > -\frac{1}{2} + 1 \implies -L > \frac{1}{2}$$

Mas se $-L > \frac{1}{2}$, então $1 - L > \frac{3}{2}$ e assim, não pode ser menor do que $\frac{1}{2}$ o que contraria a segunda das desigualdades 1.1 acima destacadas. Logo temos uma contradição e concluímos que a sequência é divergente.

Exemplo 1.23. Use a Definição 1.3 para verificar se a sequência definida por $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ tem limite igual a 2.

Solução: Ao final desta verificação, responderemos a pergunta que deixamos em aberto no Exemplo 1.20. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural N tal que

$$\left| 2 + \frac{1}{n} - 2 \right| < \epsilon$$

para todo $n > N$ com $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\left| 2 + \frac{1}{n} - 2 \right| < \epsilon \iff \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < n \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Portanto, o limite de $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ é igual a 2, para todo $n > \frac{1}{\epsilon}$ e $\epsilon > 0$.

Exemplo 1.24. O $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Solução: Suponhamos dado um $\epsilon > 0$ arbitrário. De acordo com a Propriedade Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{N} < \epsilon$. Logo para todo $n > N$, tem-se

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Portanto, $\frac{1}{n}$ converge para 0.

Exemplo 1.25. O $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$.

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{N} < \epsilon$. Logo, para todo o $n > N$, tem-se

$$\left| \frac{1}{n^2 + 1} - 0 \right| = \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Logo, o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$.

Proposição 1.1. *Se uma sequência (x_n) converge, o seu limite é único, ou seja, se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$ e $b \neq a$ vamos tomar $\epsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$ temos que os intervalos $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ são disjuntos, pois se houvesse x tal que $|a - x| < \epsilon$ e $|x - b| < \epsilon$ somando as desigualdades teríamos $|a-x| + |x-b| \leq 2\epsilon = |b-a|$ e pela desigualdade triangular $|b-a| \leq |a-x| + |x-b| < |b-a|$ o que é absurdo, portanto, temos que os intervalos são disjuntos. Como $\lim x_n = a$ temos que existe n_0 tal que para $\forall n > n_0$ vale $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $x_n \notin (b - \epsilon, b + \epsilon)$, logo $\lim x_n \neq b$. \square

Definição 1.4. *Uma sequência (x_n) é dita:*

★ limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_n \in (-\infty, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

★ limitada inferiormente quando existe um número real a tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_n \in [a, +\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

★ limitada quando é limitada superior e inferiormente, ou seja, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é equivalente a dizer que uma sequência x_n é limitada, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

★ ilimitada quando não é limitada.

Teorema 1.1. *Toda sequência de números reais convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência que converge para L . Dado $\epsilon = 10$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N \Rightarrow L - 1 < x_n < L + 1$, assim, $x_n \in (L - 1, L + 1)$, $\forall n > N$. Consideremos o conjunto finito $M = \max\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N, L - 1, L + 1\}$. Seja c o menor e m o maior elemento de M . Então garantimos que todos os termos (x_n) da sequência estarão contidos no intervalo $[c, m]$. Logo, (x_n) é limitada. \square

Observação 1.4. *A recíproca do Teorema 1.1 é falsa. De fato, consideremos como contra exemplo a sequência usada no Exemplo 1.17, de termo geral $x_n = (-1)^n$, é limitada, pois $a = -1$ é cota inferior e $b = 1$ é cota superior, porém, é divergente.*

Proposição 1.2. *Seja (x_n) uma sequência de números reais.*

1. *Se (x_n) é monótona não-decrescente, então, está limitada inferiormente.*

2. *Se (x_n) é monótona não-crescente, então, está limitada superiormente.*

Demonstração: 1. Como (x_n) é monótona não-decrescente, então, tem-se que $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$

Se tomarmos $a = x_1$ deduzimos que $a \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada inferiormente.

2. Como (x_n) é monótona não-crescente, então, tem-se que $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$. Se tomarmos $b = x_1$ deduzimos que $b \geq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada superiormente. \square

Exemplo 1.26. A sequência definida por $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é limitada, pois $a = -1$ é cota inferior para esta sequência e $b = 0,5$ é cota superior para ela. Observe que $a = -1$ é o primeiro termo de (x_n) e $b = \frac{1}{2}$ é o segundo termo desta sequência. Assim, neste exemplo, todos os termos da sequência ficam restritos ao intervalo $[a, b]$ compreendido entre o primeiro e segundo termos da sequência, conforme podemos visualizar através da Figura 1.6. Neste caso, $c = 1$.

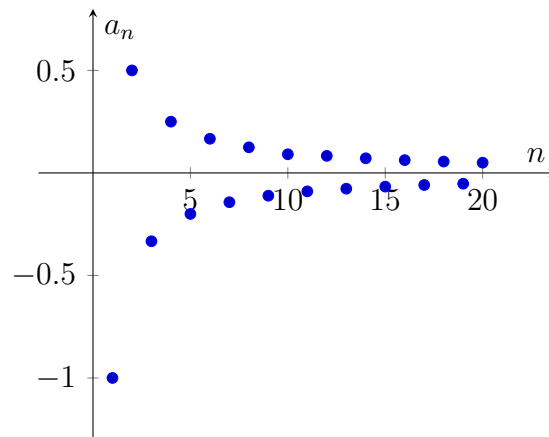


Figura 1.6: Gráfico da sequência de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Teorema 1.2. Toda sequência (x_n) monótona limitada é convergente.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona não decrescente limitada. Consideremos $a = \sup X$ onde $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, como $a - \epsilon < a$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto X . Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_N$. Como a sequência (x_n) é monótona, $n > N \implies x_N \leq x_n$ e, daí, $a - \epsilon < x_n$. Como $x_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$, percebemos que $n > N \implies a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Portanto, temos que $\lim x_n = a$. \square

Exemplo 1.27. Considere a sequência (a_n) definida pela relação de recorrência $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1)$. Mostre por indução que (a_n) é monótona crescente e limitada superiormente por 1.

Solução: Faremos inicialmente a verificação se (a_n) é monótona crescente usando indução, ou seja, $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, temos $a_1 = 0 < \frac{1}{2} = a_2$ (verdade!).

Supondo $a_n < a_{n+1}$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, iremos mostrar que é verdade para $a_{n+1} < a_{n+2}$. Usando a hipótese de indução, temos

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n + 1 < a_{n+1} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_n + 1) < \frac{1}{2}(a_{n+1} + 1) \Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Tem-se que (a_n) é monótona crescente. Faremos agora a verificação se (a_n) é limitada superiormente por 1.

Para $n = 1$, temos $a_1 = 0 < 1$ (verdade!).

Supondo $a_n < 1$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ iremos mostrar que $a_{n+1} < 1$ é verdade. Usando a hipótese de indução, temos

$$a_n < 1 \Rightarrow a_n + 1 < 1 + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_n + 1) < \frac{1}{2}(1 + 1) \Rightarrow a_{n+1} < 1.$$

Portanto, a_n é limitada superiormente por 1. Dessa forma, como a_n é monótona crescente e limitada superiormente, a_n é convergente.

Definição 1.5. Dada uma sequência (x_n) de números reais, uma **subsequência** de (x_n) é a restrição dessa função a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$ dos números naturais \mathbb{N} , isto é,

$$(x_{n_i}), n_i \in \mathbb{N}', \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}, \mathbb{N}' \text{ um conjunto infinito.}$$

Proposição 1.3. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, para toda (x_{n_k}) subsequência de (x_n) .

Demonstração: Considere uma subsequência (x_{n_k}) qualquer da sequência limitada (x_n) .

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um número natural N tal que

$$|x_n - a| < \epsilon, \text{ sempre que } n > N.$$

Como o conjunto $\mathbb{N}' = \{n_k \in \mathbb{N}; n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ é infinito, existe algum índice $n_i > N$. Consequentemente,

$$n_k > n_i \implies |x_{n_k} - a| < \epsilon, \text{ pois } n_k > n_i \implies n_i > N.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Exemplo 1.28. Dado $(x_n) = \frac{1}{n}$ uma sequência de números reais, logo $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots)$. Assim (x_{2^n}) é uma subsequência de (x_n) , pois, $(x_{2^n}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$.

Observação 1.5. O exemplo a seguir apresenta uma aplicação do Teorema 1.2, que permite que calculemos valores aproximados das raízes quadradas de números positivos. Assim, sendo $a > 0$ um número real, mostraremos que a sequência (x_n) converge a \sqrt{a} , ou seja, quando n tende ao infinito, (x_n) tende a \sqrt{a} .

Exemplo 1.29. Seja $a > 0$ escolhido arbitrariamente e uma sequência (x_n) definida recursivamente por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $x_1 = k > 0$. Mostrar que (x_n) é convergente.

Solução: Devemos mostrar que (x_n) converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$. Mostraremos primeiramente que (x_n) é monótona limitada. É claro que $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $a > 0$ e $x_1 > 0$. Em seguida observemos que $x_n^2 > a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \left[\frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \right]^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} \right) - a \\ &= \frac{x_{n-1}^4 + 2ax_{n-1}^2 + a^2}{4x_{n-1}^2} - a = \frac{(x_{n-1}^2 - a)^2}{4x_{n-1}^2} = \left(\frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Segue que

$$x_n^2 > a.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = x_n - \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0 \\ x_n &> x_{n+1} \end{aligned}$$

Logo (x_n) é decrescente e limitada $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como (x_n) é monótona decrescente e limitada inferiormente, conseqüentemente é convergente. Chamemos L o seu limite, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$, substituindo na sequência, teremos $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right) \Rightarrow 2L = L + \frac{a}{L} \Rightarrow L = \frac{a}{L} \Rightarrow L^2 = a \Rightarrow L = \pm\sqrt{a}$, como $x_n > 0$, então $L = \sqrt{a}$.

1.6.2 Operações com limites de seqüências

Teorema 1.3. Sejam (x_n) e (y_n) duas seqüências tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ então vale as propriedades abaixo:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a + b$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot (x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = c \cdot a$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$ e $y_n \neq 0$.

Demonstração: 1. Fixemos $\epsilon > 0$. Assim existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon/2$, $n \geq n_1$. Da mesma forma existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - b| < \epsilon/2$, $n \geq n_2$. Tomando $N = \max\{n_1, n_2\}$, resulta que para cada $n \geq N$ tem-se $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a + b$

2. Considerando a igualdade $x_n \cdot y_n - a \cdot b = (x_n - a)(y_n - b) + a(y_n - b) + b(x_n - a)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a(y_n - b) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b(x_n - a) = 0$, basta provar então que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)(y_n - b) = 0$. Seja $\epsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$, aplicando a definição de limite, para o número positivo $\sqrt{\epsilon} > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \sqrt{\epsilon}$. Por outro, como $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - b) = 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - b| < \sqrt{\epsilon}$. Fazendo $N = \max\{n_1, n_2\}$ resulta que para cada $n \geq N$ tem-se $|(x_n - a)(y_n - b)| = |x_n - a||y_n - b| < \sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon} = \epsilon$. Conclui-se assim que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)(y_n - b) = 0$. Voltando a igualdade apresentada no início da demonstração, aplicando limites, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n - a \cdot b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)(y_n - b) + \lim_{n \rightarrow \infty} a(y_n - b) + \lim_{n \rightarrow \infty} b(x_n - a) = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$.

3. Se $c = 0$ o resultado é imediato. Supondo que $c \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, para o número $\frac{\epsilon}{|c|} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$, $n \geq n_1$. Logo, $|c \cdot x_n - c \cdot a| = |c||x_n - a| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$ se $n \geq N$.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot (x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = c \cdot a$.

4. Já que $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ e sabendo que o limite do produto é o produto dos limites, como vimos no item 2 desta demonstração, basta então provarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. Para isso, aten-temos que $\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|}$. Como o numerador desta fração tende a zero, avaliemos o denominador. Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ e $\frac{|b|}{2} > 0$, aplicando a definição de limite, determinaremos um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$, $n \geq n_1$. Então $||y_n| - b| \leq |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$, isto é,

$$-\frac{|b|}{2} < |y_n| - |b| < \frac{|b|}{2}. \quad (1.2)$$

Somando $|b|$ ao resultado obtido em 1.2, temos $\frac{|b|}{2} < |y_n| < 3\frac{|b|}{2}$. Usando a informação que $\frac{|b|}{2} < |y_n|$, temos que para cada $n \geq n_1$, $\frac{|b|}{2} < |y_n| \implies \frac{1}{y_n} < \frac{2}{|b|}$.

Seja $\epsilon > 0$, aplicando a definição de limite, para $\frac{\epsilon \cdot |b|^2}{2} > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{\epsilon \cdot |b|^2}{2}$, para $n \geq n_2$. Fazendo agora $N = \max\{n_1, n_2\}$ temos que, para $n \geq N$,

$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} = |y_n - b| \frac{1}{y_n} \frac{1}{b} < \frac{\epsilon |b|^2}{2} \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} = \epsilon$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

□

Exemplo 1.30. Se $|q| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Solução: Se $q = 0$, o resultado é trivial. Suponhamos $0 < |q| < 1$, então $\frac{1}{|q|} > 1$. Chamemos $\frac{1}{|q|} - 1 = h$, com $h > 0$. Aplicando a desigualdade de Bernoulli, temos:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo $1 + h = \frac{1}{|q|}$, substituindo,

$$\left(\frac{1}{|q|} \right)^n \geq 1 + nh \implies 0 < |q|^n \leq \frac{1}{1 + nh}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nh} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} h} = \frac{0}{0 + h} = 0$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Teorema 1.4. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ e, além disso, $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \implies a - \epsilon < x_n < a + \epsilon.$$

Semelhantemente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_2 \implies a - \epsilon < y_n < a + \epsilon.$$

Tomando $N = \max\{n_1, n_2\}$, adicionalmente à hipótese de que $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$n > N \implies a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon,$$

isto é,

$$n > N \implies |z_n - a| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

□

Teorema 1.5 (Bolzano-Weierstrass). *Mostre que toda sequência limitada possui uma sub-sequência convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência limitada, isto é, suponhamos que existam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_n \in [\alpha, \beta], \quad \text{para todo natural } n.$$

Agora, considere os intervalos fechados $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ e $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$. Um destes dois intervalos possui a sequência (x_n) para uma infinidade de índices naturais n . Denotemos por $[\alpha_1, \beta_1]$ o intervalo com tal propriedade. De maneira semelhante, um dos intervalos $[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]$ e $[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$ possui a sequência (x_n) para uma infinidade de índices n , denotemos tal intervalo por $[\alpha_2, \beta_2]$. Podemos tal processo indefinidamente, de forma que (x_n) pertença a $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \dots$, para uma infinidade de índices n e

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots \supset [\alpha_k, \beta_k] \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

e

$$\beta_k - \alpha_k = \frac{\beta - \alpha}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Vamos construir agora a subsequência de (x_n) convergente. Para este fim, relembremos que (x_n) pertence a $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Escolhamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$. Como $[\alpha_2, \beta_2]$ contém (x_n) para uma infinidade de índices n , podemos escolher $n_2 \in \mathbb{N}$, com $n_1 < n_2$ e $x_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$. Agora, prossigamos tal processo, obtendo $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ satisfazendo

$$x_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

e $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Portanto, (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) .

Finalmente, mostraremos que (x_{n_k}) converge. As sequências (α_k) e (β_k) são monótonas (crescente e decrescente, respectivamente) e limitadas, logo são convergentes. Suponhamos que $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$ e $M = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k$. Então, pela equação 1.3, temos

$$M - L = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{2^k} = 0.$$

Portanto, $L = M$. Da equação 1.4 vemos que

$$\alpha_k \leq x_{n_k} \leq \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

e pelo Teorema 1.4, (x_{n_k}) converge para $L = M$. □

Definição 1.6. *Uma sequência (x_n) de números reais é convergente se, e somente se, (x_n) é*

uma sequência de Cauchy.

Demonstração: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \implies |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} m, n > N \implies |x_m - x_n| &= |(x_m - a) + (a - x_n)| \\ &< |x_m - a| + |a - x_n| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. □

(\Leftarrow) Duas afirmações sobre sequências de Cauchy.

(1) Toda sequência de Cauchy é limitada.

(2) Se (x_{n_k}) é uma subsequência de uma sequência (x_n) de Cauchy com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Agora, por (1), como (x_n) é limitada, então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

e, pela afirmação (2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

como queríamos demonstrar.

Vamos colocar as afirmações (1) e (2) como exemplos.

Exemplo 1.31. *Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.*

Solução: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Dado $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$m, n > N \implies |x_m - x_n| < 1.$$

Em particular, tomando $m = N + 1$, como número fixo, a desigualdade acima continua verdadeira, isto é,

$$n > N \implies |x_n - x_N| < 1,$$

ou ainda em termos de intervalo aberto,

$$n > N \implies x_n \in (1 - x_N, 1 + x_N).$$

Agora, considere o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \dots, x_N, 1 - x_N, 1 + x_N\}$, e sejam $\alpha =$

$\min F$ e $\beta = \max F$, então todos os valores assumidos para sequência (x_n) estão no conjunto F , isto é,

$$\alpha \leq x_n \leq \beta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto, (x_n) é limitada.

Exemplo 1.32. *Mostre que se x_{n_k} é uma subsequência de uma sequência (x_n) de Cauchy com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.*

Solução: Dado $\epsilon > 0$, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon/2.$$

Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, logo existe $N_k \in \mathbb{N}'$, onde \mathbb{N}' é o subconjunto infinito dos números naturais dos índices da subsequência, tal que

$$n_k > N_k \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon/2.$$

Como conjunto \mathbb{N}' é um subconjunto infinito dos números naturais, escolhamos um $N_i \in \mathbb{N}'$ tal que $n_i > n_k$ e $n_i > N$. Agora,

$$\begin{aligned} n > N \implies |x_n - a| &\leq |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - a| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Exemplo 1.33. *Seja $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais tais $n_k < n_{k+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Use indução para mostrar que $n_k \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Solução: Como

$$n_1 \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Agora suponhamos que $n_k \geq k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então

$$n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k + 1.$$

Portanto, $n_k \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

1.6.3 Limites infinitos

Na maioria das vezes quando se analisa uma sequência, espera-se que seja possível calcular o seu limite, no entanto, algumas vezes a sequência analisada pode não ter um limite.

Definição 1.7. Seja (a_n) uma sequência de números reais. Diremos que o limite da sequência (a_n) é mais infinito ou que diverge a mais infinito e o denotaremos por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, se para cada número real $M > 0$ existe um número $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ se $n > N$.

Diremos que o limite da sequência (a_n) é menos infinito ou que diverge a menos infinito e o denotaremos por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, se para cada número real $M > 0$ existe um número $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < -M$ se $n > N$.

Diremos que o limite da sequência (a_n) é infinito ou que diverge e o denotaremos por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, se para cada número real $M > 0$ existe um número $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > M$ se $n > N$.

Proposição 1.4. (a) Se (a_n) é uma sequência divergente e $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $\frac{1}{a_n}$ converge para zero.

(b) Se (a_n) é uma sequência convergente a zero e $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $\frac{1}{a_n}$ diverge.

Demonstração: (a) Fixemos $\epsilon > 0$, como a_n tende ao infinito pois é divergente, para o número $\frac{1}{\epsilon} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$ temos $|a_n| > \frac{1}{\epsilon}$. Então:

$$\frac{1}{|a_n|} < \epsilon, \text{ se } n > N.$$

(b) Fixemos $M > 0$, como a_n tende a zero, para o número $\frac{1}{M} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$ temos $|a_n| < \frac{1}{M}$. Então:

$$\frac{1}{|a_n|} > M, \text{ se } n > N.$$

Exemplo 1.34. O $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

Solução: Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}$. Já vimos que o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, portanto, de acordo com a Proposição 1.3, a sequência é divergente $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

Exemplo 1.35. O $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.

Solução: Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{0}{2+0} = 0$.

Conseqüentemente, de acordo com a Proposição 1.4, concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n+1 = +\infty$.

Capítulo 2

Sequências Elementares

Neste capítulo, considerando o que já foi discutido no capítulo anterior, faremos com mais tranquilidade a apresentação das propriedades e características de algumas sequências que por apresentarem uma infinidade de aplicações relacionadas ao cotidiano, terão uma atenção especial neste capítulo.

Essas sequências geralmente são estudadas no ensino médio, apresentam padrões de comportamentos bem característicos e singulares e, são conhecidas como sequências **elementares**.

2.1 Progressões Aritméticas

A primeira das sequências elementares a ser estudada neste capítulo será a progressão aritmética, ou simplesmente PA.

Definição 2.1. *Uma **progressão aritmética** ou PA é qualquer sequência (a_n) de números reais (finita ou infinita) em que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de **razão** da progressão aritmética e a denotamos pela letra **r**.*

Assim temos,

$$a_{n+1} - a_n = r, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.1. *A sequência formada pelos números naturais $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ é uma progressão aritmética, já que a diferença entre cada termo com o anterior é constante e igual 1.*

Exemplo 2.2. *A sequência formada pelos números pares $\{2, 4, 6, \dots\}$ é uma progressão aritmética de razão 2.*

Uma outra forma de definir uma progressão aritmética, seria enunciando que cada termo a partir do segundo, se obtém somando ao anterior a diferença r . Logo:

$$a_{n+1} = a_n + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Podemos chegar a conclusão, conforme a equação 2.2 que, uma progressão aritmética é um caso particular de uma sequência recorrente, onde sabido os valores de a_1 e r , torna-se perfeitamente determinada e podemos obter os demais termos, usando a fórmula de recorrência $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Convém salientar que em uma progressão aritmética, conhecermos apenas a razão mas não o primeiro termo desta, não a tornará completamente definida. Essa condição só será satisfeita se conhecermos o primeiro termo e a razão, caso contrário, teremos para a equação de recorrência várias progressões aritméticas condicionadas ao valor inicial.

2.1.1 Fórmula do Termo Geral

De acordo com a equação , admitindo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão r , podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ a_5 &= a_4 + r \\ a_6 &= a_5 + r \\ a_7 &= a_6 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando membro a membro as $n - 1$ igualdades, teremos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + a_2 + r + a_3 + r + a_4 + r + a_5 + r + \dots + a_{n-1} + r$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{n-1} + \underbrace{r + r + \dots + r}_{(n-1) \text{ vezes}}$$

Somando $-(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{n-1})$ a ambos os membros, obteremos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \tag{2.3}$$

O termo a_n apresentado na equação 2.3 é conhecido como o **termo geral da progressão aritmética**.

Teorema 2.1. Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão de r , então $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Usaremos o princípio de indução para fazermos a demonstração. Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r = a_1 + 0 = a_1$. Temos que para $n = 1$ a sentença é verdadeira.

Supondo que a fórmula seja válida para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Mostraremos que é válida para $n + 1$:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n - 1) \cdot r + r = a_1 + [(n - 1) + 1] \cdot r = a_1 + [(n + 1) - 1] \cdot r$$

Portanto, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.3. Determinar o 15º termo da PA $(1, 4, 7, \dots)$

Solução: Sabemos que $a_1 = 1$ $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 3$. De acordo com a equação (2.3) temos:

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1) \cdot r = a_1 + 14 \cdot r = 1 + 14 \cdot 3 = 1 + 42 = 43.$$

Logo, o 15º da PA é 43.

Exemplo 2.4. Um maratonista visando preparar-se para uma prova de 41 km, resolveu iniciar o treinamento correndo 3 km no primeiro dia de treino e, a partir desse aumentar 2 km a cada dia de treinamento. Sabendo que o maratonista conseguiu seguir o planejamento definido inicialmente, quantos dias de treinamento foram necessários para que ele corresse em um dia os 41 km?

Solução: Fazendo n como o número de dias de treinamento, concluímos de forma imediata que $a_1 = 3$ e $r = 2$. Assim teremos,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \\ 41 &= 3 + (n - 1) \cdot 2 \\ 41 - 3 &= 2n - 2 \\ 38 + 2 &= 2n \\ 2n &= 40 \\ n &= 20 \end{aligned}$$

Portanto, serão necessários 20 dias de treinamento para que o maratonista alcance os 41 km em um dia de treinamento.

Exemplo 2.5. Prove que, se (a_n) é uma PA de termos positivos verifica-se a relação

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

Solução: Iniciaremos racionalizando cada parcela da soma, assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} = \\ & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} \cdot \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} \cdot \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}} + \dots \\ & + \frac{1}{\sqrt{a_{n-2}} + \sqrt{a_{n-1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} \cdot \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}} = \\ & \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}}{a_3 - a_4} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2} - a_{n-1}} + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} \end{aligned}$$

Como (a_n) é uma PA, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_1 - r} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_2 - r} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}}{a_3 - a_3 - r} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2} - a_{n-2} - r} + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_{n-1} - r} = \\ & \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-r} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{-r} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}}{-r} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1}}}{-r} + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{-r} = \\ & -\frac{1}{r}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_4} + \dots + \sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}) = \\ & -\frac{1}{r}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}) \end{aligned}$$

Racionalizando novamente,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}) &= -\frac{1}{r} \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n} \cdot \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{a_1 - a_n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \right) = \\ -\frac{1}{r} \left(\frac{a_1 - a_1 - (n-1)r}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \right) &= -\frac{1}{r} \left(\frac{-(n-1)r}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \right) = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \end{aligned}$$

Portanto, se (a_n) é uma PA a relação é válida. \square

Observação 2.1. Temos casos particulares da equação 2.3, por exemplo, quando se faz necessário encontrar a_n a partir de um termo a_p , com $p \neq 1$ e conhecida a razão r . Neste caso, usaremos a fórmula $a_n = a_p + (n-p) \cdot r$.

Demonstração: Tem-se da fórmula do termo geral que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Assim,

$$a_p = a_1 + (p-1) \cdot r \Rightarrow a_1 = a_p - (p-1) \cdot r \Rightarrow a_1 = a_p - p \cdot r + r.$$

Substituindo este último resultado na equação 2.3, obteremos,

$$\begin{aligned}a_n &= a_p - p \cdot r + r + (n - 1) \cdot r = a_p - p \cdot r + r + n \cdot r - r = a_p - p \cdot r + n \cdot r \\a_n &= a_p + (n - p) \cdot r\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.6. *Encontre o vigésimo termo da PA, cujo quarto termo é igual a 5 e razão 3.*

Solução: Do problema tem-se que $a_4 = 5$ e $r = 3$, logo

$$a_{20} = a_4 + (20 - 4) \cdot 3 = 5 + 16 \cdot 3 = 5 + 48 = 53.$$

Portanto, o vigésimo termo é igual a 53.

Observação 2.2. *Algumas vezes em problemas de PA é conveniente trocar a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ por $a_n = a_0 + n \cdot r$.*

Exemplo 2.7. *Um carro popular novo custa R\$ 40 000,00 em uma concessionária. Seu valor diminui R\$3 000,00 a cada ano de uso. Qual será o valor desse carro após completar 6 anos de uso?*

Solução: Seja n o número de anos de uso do carro. Neste caso o carro apresenta um valor inicial antes de ser usado e é conveniente que escrevamos $a_n = a_0 + nr$, onde a_0 é o valor inicial do carro e a_n é o valor do carro após n anos de uso. Como o carro é desvalorizado em R\$ 3000,00 a cada ano de uso, teremos $r = -3000$. Assim,

$$\begin{aligned}a_n &= a_0 + n \cdot r \\a_6 &= 40000 + 6 \cdot (-3000) \\a_6 &= 40000 - 18000 = 22000\end{aligned}$$

Portanto, após 6 anos de uso, o valor do carro será de R\$ 22 000.

2.1.2 Classificação das Progressões Aritméticas

Classificamos as progressões aritméticas como:

1. **Crescentes** - são aquelas em que cada termo é maior que o anterior. Isso acontece quando $r > 0$.

Demonstração: De acordo com a Definição 1.2, uma sequência é crescente se,

$$a_{n+1} > a_n. \tag{2.4}$$

Da equação 2.2, para uma PA tem-se $a_{n+1} = a_n + r$, substituindo esse resultado na desigualdade 2.4, temos:

$$a_n + r > a_n \iff a_n + r - a_n > 0 \iff r > 0.$$

Portanto, uma PA é crescente se e, somente se, $r > 0$. □

2. **Constantes** - são aquelas em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior. Isso acontece quando $r = 0$.

Demonstração: Se cada termo é igual ao anterior, então

$$a_{n+1} = a_n \iff a_{n+1} - a_n = 0$$

Assim temos,

$$a_n + r - a_n = 0 \iff r = 0$$

Portanto, uma PA é constante se e, somente se, $r = 0$. □

3. **Decrescentes** - são aquelas em que cada termo é menor que o anterior. Isso acontece quando $r < 0$.

Demonstração: De acordo com a Definição 1.2, uma sequência é decrescente se,

$$a_{n+1} < a_n \tag{2.5}$$

Para uma PA temos $a_{n+1} = a_n + r$, substituindo essa informação na desigualdade 2.5, tem-se

$$a_n + r < a_n \iff a_n + r - a_n < 0 \iff r < 0.$$

Portanto, uma PA é decrescente se e, somente se, $r < 0$. □

Observação 2.3. *Sejam $a, r \in \mathbb{R}$. Considere $x_1 = a, x_2 = a+r, x_3 = a+2r$, de maneira geral, $x_n = a + (n - 1)r$. Dessa forma a sequência (x_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo “ a ” e razão “ r ”.*

Se $r = 0$, então (x_n) é constante e, portanto, limitada. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Se $r > 0$, então (x_n) é crescente e, portanto, limitada inferiormente.

Se $r < 0$, então (x_n) é decrescente e, portanto, limitada superiormente.

2.1.3 Representação gráfica de uma progressão aritmética

Seja (a_n) uma progressão aritmética, marcando os pontos (n, a_n) no plano, verifica-se com facilidade que os termos da PA são igualmente espaçados sobre uma reta e os pontos (n, a_n) são colineares no plano, conforme podemos observar através dos gráficos abaixo:

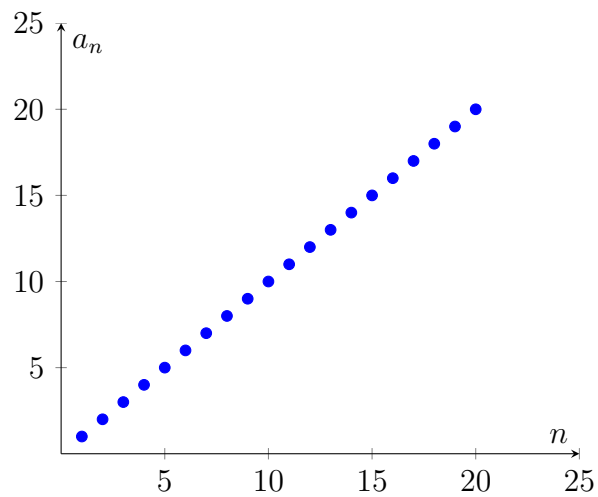


Figura 2.1: Gráfico de uma PA crescente de termos positivos

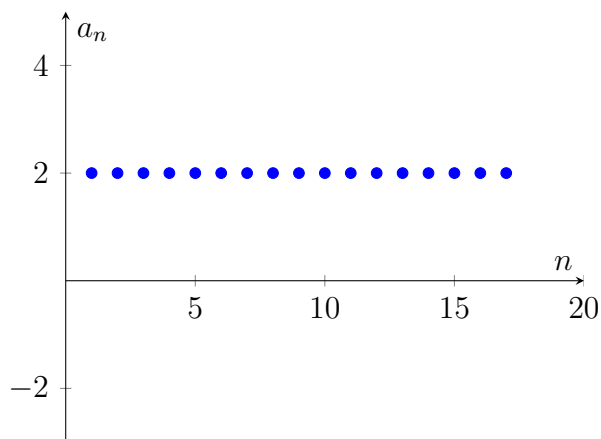


Figura 2.2: Gráfico de uma PA constante de termos positivos

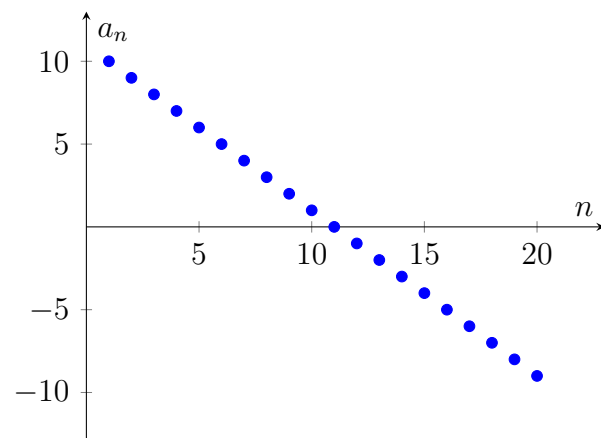


Figura 2.3: Gráfico de uma PA decrescente

Observação 2.4. *Pela visualização dos gráficos acima, percebe-se com facilidade que uma PA é uma restrição da função afim ao conjunto \mathbb{N} dos números naturais. Pois, pensando em uma*

progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n , o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função afim.

Proposição 2.1. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n .

Demonstração: Analisemos o desenvolvimento do termo geral da PA. Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = a_1 + nr - r \Rightarrow a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$ o polinômio é de grau 1, se $r = 0$ o polinômio é de grau menor que 1.

Portanto, se (a_n) é uma progressão aritmética, onde $a_n = an + b$, então $a = r$ e $b = a_1 - r \Rightarrow a_1 = a + b$. \square

2.1.4 Interpolação Aritmética

Em toda sequência finita $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são denominados extremos e os demais termos são chamados de meios.

Interpolar k meios aritméticos entre os extremos A e B , consiste em determinar quais k números devem ser inseridos entre A e B de forma que se tenha uma PA de $k + 2$ termos. Assim podemos considerar $a_1 = A$ e $a_{k+2} = B$.

De forma geral, se desejamos inserir k meios aritméticos entre os extremos A e B , teremos a PA $(A, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}, B)$. Da equação (2.3), temos: $B = A + (k + 1) \cdot r$, isolando r , temos:

$$r = \frac{B - A}{k + 1}. \quad (2.6)$$

Exemplo 2.8. Interpole 5 meios aritméticos entre -4 e 20 .

Solução: Sabendo que $k = 5$, $A = -4$ e $B = 20$ a PA ficará totalmente determinada quando encontrarmos o valor de r , assim:

$$r = \frac{20 - (-4)}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4.$$

Interpolando os 5 meios aritméticos teremos a PA $(-4, 0, 4, 8, 12, 16, 20)$.

2.1.5 Propriedades das Progressões Aritméticas

1. Uma sequência (a_n) de números reais é uma progressão aritmética se e, somente se, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Demonstração: Seja a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$. Temos que a_n, a_{n+1} e a_{n+2} são termos consecutivos dessa progressão. Da Definição 2.1. temos,

$$\begin{aligned} r &= a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \\ a_{n+1} + a_{n+1} &= a_n + a_{n+2} \Rightarrow \\ 2 \cdot a_{n+1} &= a_n + a_{n+2} \Rightarrow \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + a_{n+2}}{2} \end{aligned}$$

□

2. Se m, p, q e k são índices de termos de uma progressão aritmética (a_n) não constante, então $m + p = q + k$ se e, somente se, $a_m + a_p = a_q + a_k$.

Demonstração: Seja r a razão da PA em que $a_m + a_p = a_q + a_k$. Teremos:

$$\begin{aligned} a_m + a_p &= a_q + a_k \\ a_1 + (m-1) \cdot r + a_1 + (p-1) \cdot r &= a_1 + (q-1) \cdot r + a_1 + (k-1) \cdot r \Rightarrow \\ (m-1) \cdot r + (p-1) \cdot r &= (q-1) \cdot r + (k-1) \cdot r \Rightarrow \\ (m-1 + p-1) \cdot r &= (q-1 + k-1) \cdot r \Rightarrow \\ m + p - 2 &= q + k - 2 \Rightarrow \\ m + p &= q + k \end{aligned}$$

□

2.1.6 Soma dos termos de uma PA

Há uma estória bem conhecida sobre Carl Friedrich Gauss¹ dele ainda criança, por volta dos seus 10 anos. Seu professor de matemática com intuito de manter a classe ocupada, pediu-lhes que calculassem a soma dos números de 1 a 100 $(1+2+3+\dots+99+100)$ e que ao terminarem deixassem sobre sua mesa, Gauss imediatamente apresentou a resposta 5050.

O professor não acreditando no garoto, pela rapidez com que havia se levantado nem olhou para sua resposta. Depois de algum tempo, após todos terem deixado seus cálculos sobre a mesa, o professor constatou que o único que havia dado a resposta certa era Gauss e surpreso, perguntou-lhe: Como fez o cálculo tão rápido?

Gauss lhe disse que tinha percebido que se somasse o primeiro com o último número teria a soma igual a 101, adicionando o segundo com o penúltimo o resultado também seria 101, o mesmo para a adição do terceiro com o antepenúltimo, e assim por diante até chegar aos

¹Famoso físico e matemático alemão (1777-1855) - conhecido como o Príncipe da matemática, contribuiu muito em diversas áreas da ciência. Em 1801 lançou uma das suas mais importantes publicações: *Disquisitiones Arithmeticae*, um livro dedicado a teoria algébrica dos números.

números intermediários 50 e 51, que também, quando somados resulta em 101. Percebeu que tinham 50 parcelas de 101, então multiplicou 101 por 50 para obter o resultado de 5050.

Aquele menino de dez anos, talvez não soubesse, mas havia calculado mentalmente a soma da progressão aritmética $(1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100)$.

Observação 2.5. Usando a ideia de Gauss podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Assim seja (a_n) uma progressão aritmética e S_n a soma de seus termos. Podemos então escrever:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n. \quad (2.7)$$

Usando a propriedade comutativa da adição, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_4 + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2.8)$$

Adicionando membro a membro as equações (2.6) e (2.7), teremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observemos ainda que

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_1.$$

Logo,

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\Rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Teorema 2.2. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Demonstração: Faremos a demonstração por indução em n .

Para $n = 1$, temos $S_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$ (verdade!)

Supondo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ seja verdadeira para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, faremos a verificação da validade para $n + 1$. Temos que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} = \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + 2 \cdot a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2}.$$

Lembrando que $a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$, teremos

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + (a_1 + n \cdot r) + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n+1) + n(a_n + r) + a_{n+1}}{2}.$$

Por outro lado temos que $a_{n+1} = a_n + r$, assim

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n+1) + n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n+1) + (n+1) \cdot a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n+1)}{2}.$$

Portanto, $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.9. Um médico recomenda ao seu paciente em tratamento que tome uma dose diária de certo medicamento. A dosagem será administrada da seguinte forma: no primeiro dia tomará 100 mg do medicamento, no segundo dia 95 mg, no terceiro 90 mg e assim será a cada dia de tratamento, reduzindo a dosagem de 5 mg em relação ao dia anterior.

Sabendo que o tratamento durou doze dias, qual foi a dosagem total ingerida por esse paciente?

Solução: Devemos encontrar a soma da quantidade em mg de medicamento tomada pelo paciente durante os doze dias. O problema em questão é uma PA de 12 termos, onde $a_1 = 100$ e $r = -5$, assim teremos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{12} = a_1 + 11r = 100 + 11 \cdot (-5) = 100 - 55 = 45$$

Por outro lado, temos,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12})12}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{(100 + 45)12}{2} \Rightarrow S_{12} = (145) \cdot 6 = 870.$$

Logo, o paciente, ao final do tratamento, terá tomado 870 mg do medicamento.

Exemplo 2.10. Em uma embalagem plástica há 1500 balas de menta. Retiram-se 15 balas na primeira vez, 20 na segunda, 25 na terceira, e assim sucessivamente.

a) Determinar quantas balas sobrarão na caixa após a 15ª retirada.

b) Seguindo esse padrão, no máximo, quantas retiradas podem ser feitas?

Solução: a) Como na primeira retirada, retirou-se 15 balas, na segunda 20, na terceira 25, e assim sucessivamente. Podemos associar a quantidade de balas em cada retirada, como uma sequência do tipo $(15, 20, 25, \dots, a_n)$, onde esta sequência é uma PA finita de primeiro termo $a_1 = 15$ e razão 5. Para saber quantas balas sobrarão após a 15ª retirada, devemos encontrar primeiramente a soma dos quinze primeiros termos desta PA. Temos que $a_{15} = a_1 + 14r = 15 + 14 \cdot 5 = 15 + 70 = 85$ balas. Daí $S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})15}{2} = \frac{(15 + 85)15}{2} = \frac{100 \cdot 15}{2} = 50 \cdot 15 = 750$ balas. Como inicialmente haviam 1500 balas e após a 15ª retirada, haviam sido retiradas 750 balas, restarão $1500 - 750 = 750$ balas.

b) Seguindo esse padrão, devemos encontrar um n , que equivale ao número máximo de retiradas que podem ser feitas com a quantidade de balas existentes na embalagem. O n -ésimo termo desta PA é $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 5 = 15 + 5n - 5 = 5n + 10$. O número total de balas inicialmente era de 1500, portanto, $s_n = 1500$. Assim temos que $s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(15 + 5n + 10)n}{2} = \frac{5n^2 + 25n}{2} \Rightarrow 1500 = \frac{5n^2 + 25n}{2} \Rightarrow 5n^2 + 25n - 3000 = 0$. Resolvendo a equação obtemos $n' = 22, 12$ e $n'' = -27, 12$. Como n é um número natural, $n'' = -27, 12$ não serve como resposta, teremos então que analisar $n = 22, 12$. Há duas possibilidades $n = 22$ ou $n = 23$. Se $n = 23$, seguindo o padrão definido, faltarão bolas para serem retiradas. Portanto, serão feitas no máximo 22 retiradas.

Observação 2.6. A soma $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é uma restrição da função quadrática em n .

Proposição 2.2. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por um polinômio em n .

Demonstração: Analisemos o desenvolvimento de S_n , assim

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r)n}{2} = \frac{(2a_1 + nr - r)n}{2} = \frac{2a_1n + n^2r - rn}{2}.$$

Logo,

$$S_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n.$$

□

Se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio de grau 2 em n sem termo independente, se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Portanto, se $S(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, então $a = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 2a$ e $b = a_1 - \frac{r}{2} \Rightarrow a_1 = b + \frac{r}{2} = a + b$.

2.2 Progressões Geométricas

Os primeiros indícios de tal progressão datam por volta de 1650 a.C. no Egito e encontram-se registrados no Papiro de Rhind² (do escriba Ahmes).

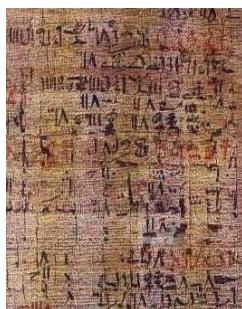


Figura 2.4: Papiro de Rhind

Neste papiro há um curioso problema cujo enunciado e a sua interpretação pode ser encontrado em [11]. O enunciado diz:

“7 Casas, 49 Gatos, 343 Ratos, 2401 Espigas de trigo, 16 807 Hecates³

O enunciado pode ser associado a uma progressão geométrica de razão 7 e a soma de seus cinco primeiros termos é 19 607. Acredita-se que o escriba tivesse tentando descrever um problema bem conhecido do cotidiano. A interpretação segue abaixo:

“Em cada casa há 7 gatos; cada gato come 7 ratos; cada rato comeu 7 espigas de trigo e cada espiga produz 7 medidas de grãos.”

As progressões geométricas foram tratadas de forma rigorosa pela primeira vez, por **Euclides**⁴, em sua obra *Os Elementos*. Esta obra era composta de 13 livros, a maioria deles tratava sobre geometria, mas o nono desses livros teve um espaço destinado à Teoria dos números, onde foi apresentado o que Euclides definia como *proporções continuadas*. Também em [11] encontramos o enunciado da proposição 35 deste livro, que diz:

“Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem.”

O enunciado equivale a proporção:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}. \quad (2.9)$$

²Recebeu esse nome por conta do egiptólogo escocês Alexander Henry Rhind que o comprou em 1858, na cidade de Luxor à margem do Rio Nilo.

³Unidade de volume muito comum na época, usada para medir uma quantidade de grãos.”

⁴Matemático grego (c. 300 a.C.)

A partir dela podemos obter a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG como é estudada nos dias atuais.

Definição 2.2. *Uma progressão geométrica ou simplesmente PG é qualquer sequência (a_n) de números reais (finita ou infinita) em que cada termo, a partir do segundo, se obtém multiplicando ao termo anterior uma constante q chamada razão.*

Assim temos,

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

ou de forma equivalente

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Concluimos que a equação 2.10 é um caso particular de uma sequência recorrente, onde sabido os valores de a_1 e q , torna-se perfeitamente determinada e podemos obter os demais termos da sequência.

De maneira análoga às progressões aritméticas, podemos concluir que se conhecemos apenas a razão, mas não o primeiro termo desta, a progressão não estará completamente definida e assim teremos várias progressões geométricas que dependerão do termo inicial para tornarem-se totalmente definida.

2.2.1 Fórmula do termo geral

De acordo com a equação 2.10, admitindo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q , podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ a_5 &= a_4 \cdot q \\ a_6 &= a_5 \cdot q \\ a_7 &= a_6 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as $n - 1$ igualdades, teremos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_7 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot q \cdot a_2 \cdot q \cdot a_3 \cdot q \cdot a_4 \cdot q \cdot a_5 \cdot q \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot q$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n-1) \text{ vezes}}$$

Dividindo ambos os membros por $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$, obteremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (2.12)$$

A equação 2.12 é conhecida como a fórmula do **termo geral da progressão geométrica**.

Teorema 2.3. *Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão de q , então*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Usaremos o princípio de indução para fazermos a demonstração. Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1$. Portanto, para $n = 1$ a sentença é verdadeira.

Supondo que a fórmula seja válida para algum $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Mostraremos que é válida para $n + 1$. Tem-se que,

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{[(n-1)+1]} = a_1 \cdot q^{[(n+1)-1]}$$

Portanto, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação 2.7. *Há casos particulares da equação 2.12, por exemplo, quando se faz necessário encontrar a_n a partir de um termo a_p , com $p \neq 1$ e conhecida a razão q . Neste caso, usaremos a fórmula $a_n = a_p \cdot q^{n-p}$.*

Demonstração: Usando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos que $a_p = a_1 \cdot q^{p-1} \Rightarrow a_1 = \frac{a_p}{q^{p-1}}$. Substituindo este último resultado em (2.10), temos,

$$a_n = \frac{a_p}{q^{p-1}} \cdot q^{n-1} = a_p \cdot q^{n-1-p+1}$$

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p} \quad (2.13)$$

Exemplo 2.11. Sabendo que 2048 é o décimo termo de uma PG de razão 2. Determine o primeiro termo dessa PG.

Usando o termo geral da PG sabendo que $a_{12} = 2048$ e $q = 2$, temos

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} \Rightarrow 2048 = a_1 \cdot 2^{11} \Rightarrow 2^{11} = a_1 \cdot 2^{11} \Rightarrow a_1 = \frac{2^{11}}{2^{11}} = 1.$$

Portanto, o primeiro termo da PG é 1.

Exemplo 2.12. Qual é o 7º termo de uma PG de razão 3 cujo 2º termo é igual a 4?

Usando a equação (2.11), temos $a_7 = a_2 \cdot q^{7-2} = 4 \cdot 3^5 = 4 \cdot 243 = 972$.

Portanto, o 7º termo da PG é igual 972.

Observação 2.8. Algumas vezes em problemas de PG é conveniente trocar a fórmula do termo geral $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Exemplo 2.13. Uma certa variedade de bactérias foi objeto de estudo por um cientista que estimou no início das observações um número de 200 bactérias em uma amostra. Observou que a cada 30 minutos, a quantidade de bactérias triplicava. Supondo que as observações do cientista estejam corretas, quantas bactérias haveria após 3 horas de observação?

Solução: A quantidade de bactérias no início era 200 e, após 30 minutos triplicou, temos então a PG (200, 600, ...), onde $q = 3$. Ao final de 3 horas, teremos passados 180 minutos, equivalente a 6 intervalos de 30 minutos. Assim, queremos obter o 6º termo da PG. Usando a equação da observação 2.8, temos

$$a_n = a_0 \cdot q^n \Rightarrow a_6 = a_0 \cdot q^6 = 200 \cdot 3^6 = 200 \cdot 729 = 145800$$

2.2.2 Classificação das progressões geométricas

As progressões geométricas classificam-se em:

1. **Crescentes** - são aquelas em que cada termo é maior que o anterior. Isso acontecerá de duas formas:

a) PG com termos positivos, temos

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

logo,

$$\frac{a_n \cdot q}{a_n} > 1 \Leftrightarrow q > 1.$$

b) PG com termos negativos, temos

$$0 > a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow 0 > a_n \cdot q > a_n \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

Portanto, as PG's crescentes têm razão $q > 1$ quando os seus termos são positivos e razão $0 < q < 1$ quando os seus termos são negativos.

2. **Constantes** - são aquelas em que cada termo é igual ao anterior.

Se cada termo é igual ao anterior, então

$$a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow a_n \cdot q = a_n \Leftrightarrow q = 1$$

Portanto, uma PG é constante se $q = 1$.

3. **Decrescentes** - são aquelas em que cada termo é menor que o anterior. Isso acontecerá de duas formas:

a) PG com termos positivos, temos

$$0 < a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow 0 < a_n \cdot q < a_n \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

b) PG com termos negativos, temos

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_n \cdot q < a_n \Leftrightarrow q > 1$$

Portanto, as PG's decrescentes têm razão $0 < q < 1$ quando os seus termos são positivos e razão $q > 1$ quando os seus termos são negativos.

4. **Alternantes ou oscilantes** - são aquelas em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior.

Isso ocorre quando $q < 0$.

2.2.3 Representação gráfica de uma progressão geométrica

Seja (a_n) uma progressão geométrica. Fazemos a localização dos pontos (n, a_n) no plano e comparamos ao gráfico de uma função exponencial. Abaixo seguem alguns gráficos que representam o comportamento de PG's à medida que n cresce:

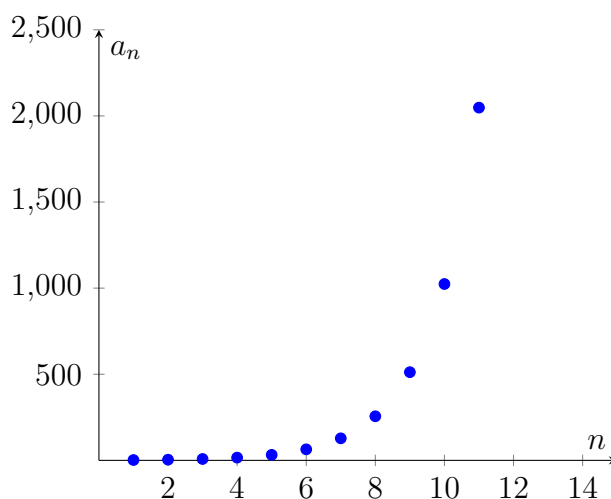


Figura 2.5: PG crescente de termos positivos. Nesse caso tem-se $a_1 > 0$ e $q > 1$.

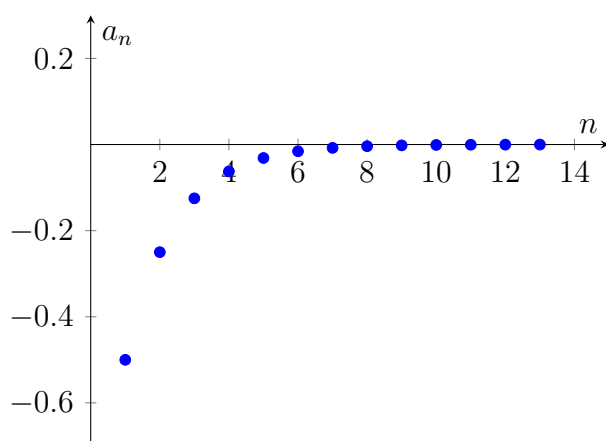


Figura 2.6: PG crescente de termos negativos. Nesse caso tem-se $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

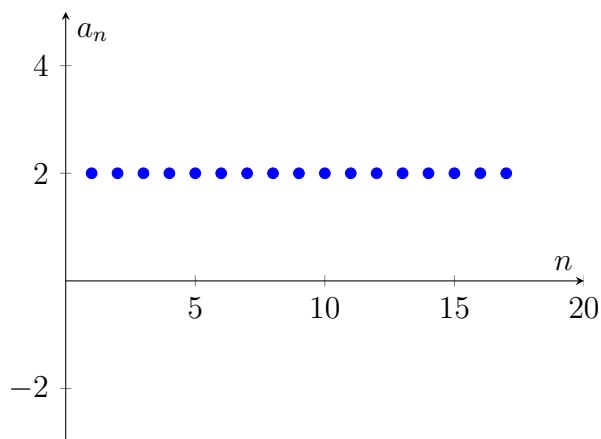


Figura 2.7: PG constante de termos positivos. Nesse caso $a_1 > 0$ e $q = 1$.

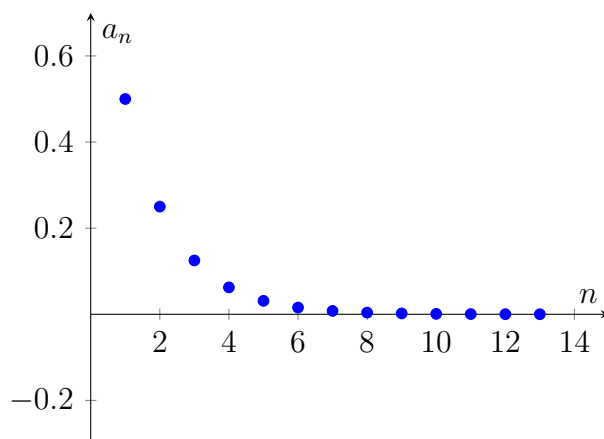


Figura 2.8: PG decrescente de termos positivos. Nesse caso $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$.

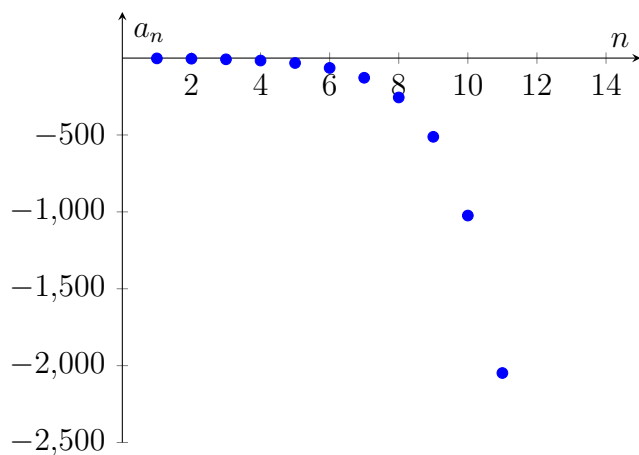


Figura 2.9: PG decrescente de termos negativos. Nesse caso $a_1 < 0$ e $q > 1$.

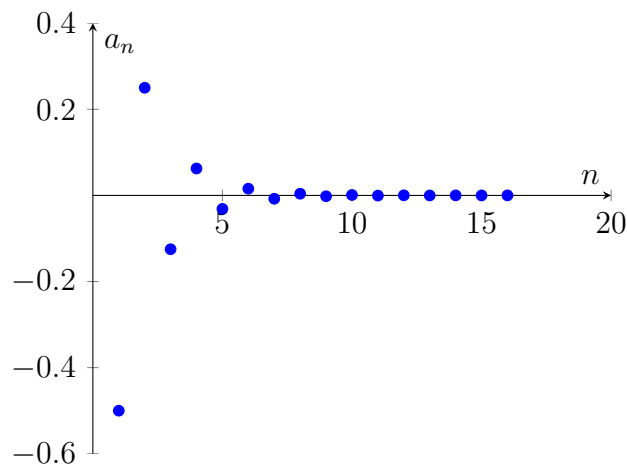


Figura 2.10: PG alternante. Nesse caso $a_1 < 0$ e $-1 < q < 0$.

Observação 2.9. A curva característica que podemos visualizar usando como recurso os gráficos acima, facilita e nos permite chegar à conclusão que a PG é uma restrição da função exponencial ao conjunto \mathbb{N} dos números naturais.

Logo, ao pensarmos em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n , conforme visto nos gráficos acima, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

2.2.4 Interpolação geométrica

O problema da interpolação geométrica consiste em dados dois termos conhecidos de uma PG escrever os termos intermediários. Assim interpolar k meios geométricos entre os extremos A e B , consiste em determinar quais k números devem ser inseridos entre A e B de forma que se tenha uma PG de $k + 2$ termos.

Utiliza-se sempre a fórmula do termo geral para obtermos q . Considerando $a_1 = A$ e $a_{k+2} = B$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 a_{k+2} &= a_1 \cdot q^{k+1} \\
 B &= A \cdot q^{k+1} \\
 q^{k+1} &= \frac{B}{A} \\
 q &= \sqrt[k+1]{\frac{B}{A}}
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.14. Interpolar 4 meios geométricos reais entre 3 e 729.

Solução: Para resolvermos este problema devemos encontrar o valor da razão q . Temos $k = 4$, $A = 3$ e $B = 729$, logo:

$$q = \sqrt[4+1]{\frac{729}{3}} = \sqrt[5]{\frac{729}{3}} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

Portanto, os termos existentes da PG entre 3 e 729, são 9, 27, 81 e 243.

2.2.5 Propriedades das progressões geométricas

1. Uma sequência (a_n) de números reais não nulos é uma PG se e, somente se $a_{n+1}^2 = a_{n+2} \cdot a_n$.

Demonstração: De acordo com a equação 2.11, temos

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dots = q$$

Daí resulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1}^2 = a_{n+2} \cdot a_n.$$

2. Se m , p , r e k são índices de termos de uma progressão geométrica (a_n) , então $a_m \cdot a_p = a_r \cdot a_k$ se e, somente se, $m + p = r + k$.

Demonstração: Seja q a razão da PG em que $a_m \cdot a_p = a_r \cdot a_k$. Teremos:

$$\begin{aligned} a_m \cdot a_p = a_r \cdot a_k &\Leftrightarrow a_1 \cdot q^{m-1} \cdot a_1 \cdot q^{p-1} = a_1 \cdot q^{r-1} \cdot a_1 \cdot q^{k-1} \\ &\Leftrightarrow q^{m-1} \cdot q^{p-1} = q^{r-1} \cdot q^{k-1} \\ &\Leftrightarrow q^{m-1+p-1} = q^{r-1+k-1} \Leftrightarrow m + p - 2 = r + k - 2 \\ &\Leftrightarrow m + p = r + k. \end{aligned}$$

□

2.2.6 Soma dos termos de uma PG finita

Seja (a_n) uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q . Podemos deduzir fórmulas que nos permitem calcular a soma S_n dos n primeiros termos de (a_n) . Podemos então

escrever:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (2.14)$$

Se $q = 1$, então teremos $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a_n$. Logo,

$$S_n = n \cdot a_1 \quad (2.15)$$

Supondo $q \neq 1$, assim multiplicando os dois membros da igualdade 2.14 pela razão q , teremos

$$\begin{aligned} S_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \\ S_n \cdot q &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Fazendo a diferença membro a membro entre as igualdades 2.16 e 2.14, temos:

$$\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1} - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ S_n \cdot q - S_n &= a_{n+1} - a_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_{n+1} - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1 = a_1 \cdot (q^n - 1). \end{aligned}$$

Resultando em

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (2.17)$$

Teorema 2.4. A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Faremos a demonstração por indução em n . Para $n = 1$, temos

$$S_1 = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(q - 1)}{q - 1} = a_1 \quad (\text{verdade!}).$$

Suponhamos que S_n seja verdadeira para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Faremos a verificação para $n + 1$. Assim

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} + a_1 \cdot q^n = \frac{a_1(q^n - 1) + a_1 \cdot q^{n+1} - a_1 \cdot q^n}{q - 1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 q^n - a_1 + a_1 \cdot q^{n+1} - a_1 \cdot q^n}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

Portanto, $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.15. Numa PG de razão $q = 2$, a soma dos 6 primeiros termos é igual a 63. Determine o primeiro termo dessa PG.

Solução: Como $q = 2$ e $S_6 = 63$, usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos

$$S_6 = \frac{a_1(2^6 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 63 = a_1 \cdot (64 - 1) \Rightarrow a_1 = \frac{63}{63} = 1.$$

O primeiro termo da PG é 1.

Exemplo 2.16. Todas as lendas sobre a origem do xadrez coincidem em relatar o fascínio de um rei pelo jogo inventado. O rei impressionado com o jogo quis premiar o inventor, um sacerdote hindu chamado Sessa, oferecendo-lhe o que quisesse. O inventor disse ao rei que se conformava com um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando a quantidade de grãos até chegar a casa 64 do tabuleiro de xadrez.

O rei não tendo ideia de quantos grãos de trigo se tratava, achou o pedido bastante simples e ordenou a seu vizir que preparasse o prêmio solicitado. Este então ao fazer os cálculos, se deu conta que era impossível cumprir a ordem do rei, já que o trigo produzido em todos os campos da Índia não dariam, em muitos anos, a quantidade exigida por Sessa.

Quantos grãos de trigo o rei teria que conseguir para atender ao pedido do inventor do xadrez?

O problema em questão consiste em calcular a soma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$. Temos uma progressão geométrica de 64 termos, onde o primeiro termo é igual a 1 e razão 2. Assim temos

$$S_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

O rei teria que conseguir 18 quintilhões, 446 quadrilhões, 744 trilhões, 73 bilhões, 709 milhões, 551 mil e 615 grãos de trigo.

2.2.7 Soma dos termos de uma PG infinita

Conforme visto no Teorema 2.4, a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite infinito quando $n \rightarrow \infty$. Como nesse caso $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (2.18)$$

Observação 2.10. Se $|q| \geq 1$, então S_n é divergente.

A equação 2.18 tem uma grande variedade de aplicação. A seguir apresentaremos alguns exemplos que nos permitirão estas aplicações.

Exemplo 2.17. Encontrar a fração geratriz de $0,333\dots$

Solução: Observemos que

$$0,333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Chamemos S_n a soma infinita da PG de primeiro termo $\frac{3}{10}$ e razão $\frac{1}{10}$. Como $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$, a fração geratriz será dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a fração geratriz de $0,333\dots$ é $\frac{1}{3}$.

Exemplo 2.18. A partir de um triângulo equilátero ABC constrói-se uma sequência de triângulos em que cada novo triângulo tem seus vértices nos pontos médios dos lados do triângulo anterior. Supondo que essa sequência continue indefinidamente, calcule o limite da soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência, sabendo que $AB = 6$.

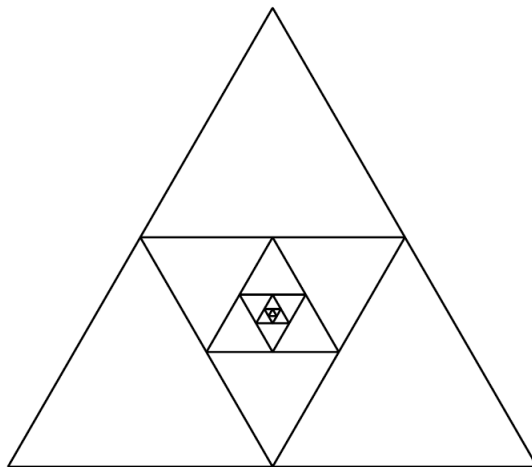


Figura 2.11: Triângulo de divisões sucessivas

Solução: O primeiro triângulo tem perímetro $3 \cdot 6 = 18$, o segundo tem perímetro $3 \cdot 3 = 9$, o terceiro $3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, e assim sucessivamente. Seja S_n a soma dos perímetros dos triângulos gerados, queremos calcular o limite de S_n . Temos que

$$S_n = 18 + 9 + \frac{9}{2} + \dots$$

Portanto, trata-se da soma dos infinitos termos de uma PG de primeiro termo 18 e razão $\frac{1}{2}$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{18}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{18}{\frac{1}{2}} = 36.$$

O limite da soma dos perímetros dos triângulos é 36.

2.2.8 Uma demonstração geométrica para a soma dos termos de uma PG infinita de $|q| < 1$.

A figura abaixo foi idealizada de forma que tivéssemos um recurso visual para uma demonstração da soma dos termos de um PG infinita de $|q| < 1$. É uma adaptação do exemplo que está no livro “Proofs Without Words”, página 120, referenciado como de autoria de Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens. É uma amostra excelente de prova visual, isto é, sem argumentação, só com o uso de palavras para justificar os passos lógicos, no entanto, seu entendimento é completo usando como recurso semelhança de triângulos.

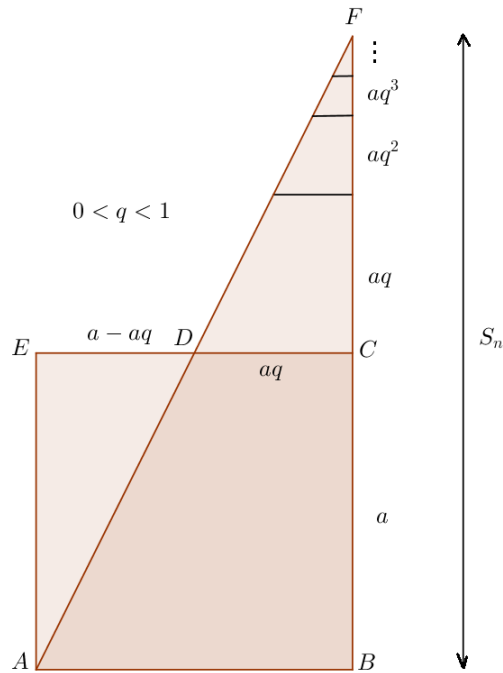


Figura 2.12: Prova visual da soma dos termos de uma PG infinita de razão $0 < q < 1$.

Demonstração: Olhando para o triângulo FBA , temos que

$$\overline{FB} = S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

Encontrar um valor que corresponda a essa soma infinita equivale a encontrar a medida do cateto \overline{FB} do triângulo FBA . Como a é a medida do lado do quadrado $ABCE$, então $a > 0$. Por outro lado temos que $a - aq$ é medida de um dos catetos do triângulo AED , consequentemente, $a - aq > 0$. Dessa última afirmação temos, $a > aq$ e como $a > 0$, temos $1 > q$, daí $q < 1$. Do trapézio $ABCD$, temos que aq é a medida da base menor. Como $a > 0$ e $aq > 0$, tem-se $q > 0$. Portanto, $0 < q < 1$.

Do quadrado $ABCE$, tem-se que $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$. Dos triângulos AED e CDF , temos $\hat{E}DA = \hat{F}DC$, pois são opostos pelo vértice. Como \overline{EC} é paralelo \overline{AB} , tem-se que $\hat{F}AB = \hat{F}DC$. Assim, os triângulos AED e FBA são semelhantes pelo critério AA. Logo, usando semelhança de triângulos temos que

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{S_n}{a} = \frac{a}{a - aq} \Rightarrow S_n = \frac{a^2}{a(1 - q)} \Rightarrow S_n = \frac{a}{1 - q}.$$

□

Capítulo 3

Séries Numéricas

Neste capítulo faremos uma abordagem sucinta sobre séries numéricas. Apresentaremos a definição de uma série, condições para que elas sejam ou não convergentes, alguns exemplos de quando convergem ou não e ao final mostraremos algumas séries especiais com características bem distintas.

A operação adição faz parte dos conteúdos em matemática desde os nossos primeiros anos escolares. Quando adicionamos dois números reais, o resultado obtido é um número real que chamamos de soma. As somas que aprendemos nos nossos primeiros anos de escola, consistem em fazer uso da operação adição para quantidades ou parcelas finitas de números. Estudamos essas somas finitas por uma boa parte da nossa vida escolar.

Quando chegamos ao ensino médio e estudamos progressões geométricas, um dos temas abordados é a soma dos termos de uma PG infinita, tema este já apresentado no capítulo anterior. Muitas dúvidas surgem. Os professores são indagados: como somar uma quantidade infinita de termos?

Intuitivamente, podemos cometer erros de grandes proporções ao quisermos calcular somas infinitas como se fossem finitas, pois, seria óbvio que, ao pensarmos em “somas infinitas” de números a resposta seria “infinito”.

Embora algumas vezes esta seja a resposta correta, não podemos generalizar tal conclusão, pois, temos situações em que “somas infinitas” de números reais é um número real, ou ainda, que não seja possível definir um resultado.

Esse fascínio em encontrar resultados para “somas infinitas” vêm de muito tempo atrás. Vejamos a seguir um problema que foi discutido pela primeira vez na Grécia antiga, apresentado por Zenão de Eleia (490-425 a.C.), tido como um de seus paradoxos. Este paradoxo é conhecido como *a Dicotomia*. O seu enunciado é encontrado em [11], (p. 51), diz o seguinte:

[...] antes que um objeto possar percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões.”

Dado esta ideia de regressão infinita, acredita-se que Zenão queria mostrar que o espaço e

o tempo não podem ser subdivididos indefinidamente, chegando à conclusão de que tal movimento é impossível.

Na época de Zenão, não tinham ainda elaborado um modelo para o conjunto dos números reais com suas propriedades, muito menos as ferramentas que hoje são usadas no cálculo diferencial. Com essas informações, hoje podemos concluir com tranquilidade que “sommas infinitas” só fazem sentido se fizermos a aplicação de limites de seqüências nestas somas.

Faremos aqui uma adaptação do paradoxo de Zenão para um movimento progressivo infinito, supondo que fiquemos a um metro de distância de um determinado objeto e que queremos nos aproximar dando passos da seguinte forma: cada passo dado tem como comprimento exatamente igual a metade da distância que nos separa do destino, conforme podemos visualizar na Figura 3.1. Portanto, se fôssemos capazes de dar passos “tão pequenos”, é razoável pensarmos que, por maior que seja a quantidade de passos, sempre existirá um passo a mais para ser dado. De forma semelhante, pode-se concluir que mesmo não sabendo quantos passos deverão ser dados, a distância a ser percorrida é igual a um metro.



Figura 3.1: Exemplificação visual do Paradoxo da Dicotomia de Zenão.

Logo teremos uma “soma infinita” da forma como segue abaixo, onde s é a distância total a ser percorrida:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (3.1)$$

Intuitivamente podemos concluir que a soma infinita 3.1 é igual a 1, mas como podemos garantir que este é o resultado correto da soma?

Essa resposta será apresentada mais tarde neste capítulo.

3.1 Séries Numéricas

Seja (a_n) uma sequência de números reais. Consideremos a sequência (s_n) associada à sequência (a_n) , onde:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ s_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aos termos de (s_n) dá-se o nome de sequência das somas parciais de (a_n) ou reduzidas da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o *n-ésimo termo* ou termo geral da série.

Como vimos acima, as somas parciais formam uma nova sequência, denotada por (s_n) , que como qualquer outra sequência, pode ou não ser convergente.

Exemplo 3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$

De onde temos que $s_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}} = n$, logo $(s_n) = (1, 2, 3, \dots, n, \dots)$.

Exemplo 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$

De onde temos que $s_1 = -1, s_2 = -1 + 1 = 0, s_3 = -1 + 1 - 1 = -1, s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$, logo $s_n = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$ e escrevemos $(s_n) = (-1, 0, -1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$.

Exemplo 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

De onde temos que $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$, logo $(s_n) = \left(1, 3, 6, \dots, \frac{(n+1)n}{2}, \dots\right)$.

Exemplo 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$

De onde temos que $s_n = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, logo $(s_n) = (2, 6, 14, \dots, 2^{n+1} - 2, \dots)$.

Definição 3.1. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se existir $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Dessa forma, dizemos que

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ é a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Se uma série não é convergente, então ela é divergente, e, nesse caso não existe a soma da série.

Observação 3.1. Às vezes faz sentido considerarmos as séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, em que o primeiro termo é a_0 .

Exemplo 3.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$, onde $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, e assim sucessivamente.

3.1.1 Propriedades dos somatórios

Veremos agora algumas propriedades dos somatórios que nos ajudarão com os cálculos de alguns limites.

Propriedade 3.1. Definimos $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$. Supondo definido $\sum_{k=1}^1 a_k$, para $k > 1$, temos como

definição por recorrência a igualdade $\sum_{k=1}^{p+1} a_k = \sum_{k=1}^p a_k + a_{p+1}$.

Propriedade 3.2. $\sum_{k=1}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=1}^p b_k$.

Demonstração:

$$\sum_{k=1}^p (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_p + b_p)$$

$$\sum_{k=1}^p (a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_p)$$

$$\sum_{k=1}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=1}^p b_k.$$

□

Propriedade 3.3. $\sum_{k=1}^p c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^p a_k.$

Demonstração:

$$\sum_{k=1}^p c \cdot a_k = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \dots + c \cdot a_p$$

$$\sum_{k=1}^p c \cdot a_k = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p)$$

$$\sum_{k=1}^p c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^p a_k$$

□

3.1.2 Propriedades das séries convergentes

Propriedade 3.4. *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes de somas U e V , respectivamente, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é $U + V$.*

Demonstração: Seja s_n a soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n)$. Sejam u_n e v_n , as somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Logo $u_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ e $v_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas convergentes de somas U e V , respectivamente, então $U = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ e $V = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Usando a propriedade da soma de limites de seqüências, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = U + V$$

Por outro lado temos,

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$s_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

$$s_n = u_n + v_n$$

Deste modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = U + V.$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é $U + V$. □

Propriedade 3.5. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de soma S e c um número real, então

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ é convergente e sua soma é $c \cdot S$.

Demonstração: Seja s_n a soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, então $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

e seja u_n a soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, então $u_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \dots + c \cdot a_n$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de soma S , então $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Por outro lado temos $u_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \dots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = c \cdot s_n$. Usando as propriedades de limites, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot s_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c \cdot S$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ é convergente e sua soma é $c \cdot S$. □

Teorema 3.1. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demonstração: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e seja s_n a sua soma parcial, então existe um número real s tal que $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Por outro lado temos, $s_n - s_{n-1} = a_n$ e como s_n e s_{n-1} convergem para o mesmo limite. Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0. \quad \square$$

Veremos adiante, que a recíproca do teorema acima não é verdadeira, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, nada se pode concluir.

Observação 3.2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

3.2 Algumas séries interessantes

3.2.1 Série Aritmética

Já vimos no capítulo anterior que o termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ e que a soma de seus n primeiros termos é dada por $s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Assim, representando a_1

simplesmente por a , podemos reescrever s_n da forma como segue abaixo:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{(a + a_n)n}{2} \\ s_n &= \frac{[a + a + (n-1)r]n}{2} \\ s_n &= \frac{[2a + (n-1)r]n}{2}. \end{aligned}$$

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ em que a_n representa o termo geral de uma PA, teremos as seguintes possibilidades:

- a) diverge a $+\infty$ se $r > 0$ ou $r = 0$ e $a > 0$.
- b) diverge a $-\infty$ se $r < 0$ ou $r = 0$ e $a < 0$.
- c) converge se $a = 0$ e $r = 0$.

3.2.2 Série Geométrica

Se $a \neq 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$ se denomina série geométrica de termo inicial a e razão q . O termo geral dessa série representa uma PG.

Conforme visto no capítulo anterior, a soma dos n primeiros termos de uma PG com as características acima é $s_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

Assim temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ é:

- a) convergente e converge para $\frac{a}{1 - q}$ se $|q| < 1$;
- b) divergente se $|q| \geq 1$.

Exemplo 3.6. Verificar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge. Caso sim, calcular sua soma.

Solução: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica, assim podemos reescrevê-la da seguinte

forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Da soma dos n -ésimos termos da série, temos $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$, em que $a = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. Como $q = \frac{1}{2} \Rightarrow |q| < 1$, logo a série é conver-

gente e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$. Concluimos dessa forma que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente e converge para 1.

Observação 3.3. A série acima é equivalente ao problema apresentado no início do capítulo, onde foi feita uma adaptação ao problema de Zenão. Concluímos, que de fato a soma das distâncias percorridas equivale a $1m$.

Exemplo 3.7. Calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{3}{4^n} \right)$.

Solução: Usando as propriedades algébricas das séries, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{3}{4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$. Fazendo $a_n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ e $b_n = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$, observamos então que (a_n) e (b_n) são progressões geométricas. De (a_n) temos uma PG de primeiro termo $\frac{5}{2}$ e $q = \frac{1}{2} \Rightarrow |q| < 1$, de (b_n) temos uma PG de primeiro termo $\frac{3}{4}$ e $q = \frac{1}{4} \Rightarrow |q| < 1$, logo as duas séries de termos gerais a_n e b_n são convergentes. Calculando a soma da série, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{3}{4^n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{3}{4^n} \right) &= 5 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

3.2.3 Séries Telescópicas

Uma série telescópica é da forma $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k-1})$. Assim, definindo a_n como $b_n - b_{n-1}$, dizemos que a n -ésima soma parcial desta série é:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) \\ s_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n) \\ s_n &= (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n-1}) \end{aligned}$$

Reagrupando, temos

$$\begin{aligned} s_n &= -b_0 + (b_1 - b_1) + (b_2 - b_2) + (b_3 - b_3) + \dots + (b_{n-1} - b_{n-1}) + b_n \\ s_n &= b_n - b_0 \end{aligned}$$

Portanto, temos que o $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b_0)$. Se esse limite existe, s_n converge.

Exemplo 3.8. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente de soma 1.

Solução: Usando decomposição em frações parciais, devemos encontrar A e B , tais que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) - Bn}{n(n+1)} = \frac{(A-B)n + A}{n(n+1)}.$$

Por comparação temos $A = 1$ e $A - B = 0 \Rightarrow A = B = 1$. Reescrevendo, temos $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Encontraremos agora a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

A série em questão é uma série telescópica, assim

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ s_n &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite em s_n , temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$.

Concluimos assim que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente de soma 1.

3.2.4 Série Harmônica

A história da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, também conhecida como série harmônica, é bem intrigante, pois por muito tempo acreditou-se que ela era convergente, até Oresme provar que não era. O que ocorre, é que a série harmônica diverge de uma maneira muito lenta, conforme encontramos em [13] (p. 129):

“[...] se fôssemos capazes de somar cada termo da série em um segundo de tempo, como um ano tem aproximadamente 31 557 600 segundos, nesse período de tempo seríamos capazes de somar a série até $n = 31557600$, obtendo para a soma um valor pouco superior a 17; em 10 anos a soma chegaria a pouco mais de 20; em 100 anos, a pouco mais de 22. Como se vê, esses números são muito pequenos para indicar divergências da série, não somente isso, mas depois de 100 anos já estaríamos somando algo muito pequeno, da ordem de $3 \cdot 10^{-9}$. É claro que é impossível efetuar essas somas para valores muito grandes de n .”

Exemplo 3.9. A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ diverge.

Solução: Vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty$, portanto (S_n) não pode convergir.

De fato,

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_{2^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right) \\ S_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right) \\ &\vdots \\ S_{2^n} &> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \dots + 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right) = 1 + n \left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + n \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty.$$

Tendo (S_n) uma subsequência ilimitada, então (S_n) é ilimitada, portanto, não converge.

Este exercício mostra que a condição $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ do Teorema 3.1 é necessária para uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ser convergente, mas não é suficiente, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ não é convergente.

3.3 Testes de Convergência

Definição 3.2. Se $a_n > 0$ e (S_n) é limitada, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Prova Como $a_n > 0$, então $S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1}$. Sendo (S_n) crescente e limitada, então (S_n) é convergente. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Teorema 3.2. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos para os quais $a_n \leq b_n$ quando $n > n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Então

(a) se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.

(b) se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.

Demonstração: (a) Denotemos por s_n e S_n as somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente, então

$$s_n \leq S_n,$$

para todo $n > n_0$.

As seqüências (S_n) e (s_n) são crescente, pois seus termos a_n e b_n são positivos.

Além disso, se $\sum b_n$ converge, então (S_n) é crescente e limitada, isto é, existe $S \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n > n_0$, temos

$$S_n \leq S \Rightarrow s_n \leq S.$$

Portanto, $\sum a_n$ converge.

(b) Se $\sum a_n$ diverge, então a sua parcial $s_n \rightarrow \infty$, e como $s_n \leq S_n$, então $S_n \rightarrow \infty$, e portanto, $\sum b_n$ diverge. \square

Exemplo 3.10. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pelo teste da comparação.

Solução: Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (Exercício 1), então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ também converge. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + n = n(n+1) \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}.$$

Assim, como $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ converge, pelo teste da comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemplo 3.11. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge pelo teste da comparação.

Solução: Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$n \geq \sqrt{n} = n^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge, então } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \text{ diverge,}$$

pelo teste da comparação.

Capítulo 4

Algumas Aplicações de Sequências

Neste capítulo apresentaremos uma coletânea de problemas extraídos de olimpíadas de matemática e de algumas das obras que usamos como referência bibliográfica. O objetivo, neste caso, é aplicar a teoria dos temas abordados neste trabalho na resolução desses problemas.

1. Encontre o valor da soma $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.

Solução: O problema refere-se à soma dos 999 primeiros termos de uma sequência de termo geral $\frac{1}{n(n+1)}$.

Observando que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$, concluímos que $S = \sum_{n=1}^{999} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right)$, daí usando somas telescópicas, temos:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{999} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) \\ S &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{998} - \frac{1}{999} \right) + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \right) \\ S &= 1 - \frac{1}{1000} = \frac{1000 - 1}{1000} = \frac{999}{1000} \end{aligned}$$

Logo, o valor da soma S é $\frac{999}{1000}$.

2. (EUA) Encontre a soma $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{255 \cdot 257}$.

Solução: Analisando o primeiro número do denominador de cada parcela, chegamos à conclusão que eles formam uma progressão aritmética finita $(a_n) = (1, 3, 5, \dots, 255)$. De forma análoga concluímos que o segundo número do denominador de cada parcela, corresponde a progressão aritmética finita $(b_n) = (3, 5, 7, \dots, 257)$. Logo, $a_n = 2n - 1$ e $b_n = 2n + 1$. As sequências (a_n) e (b_n) possuem o mesmo número de termos $n = 128$, para isso basta substituir a_n ou b_n pelo último termo da sequência, respectivamente, para

encontrar n . Podemos agora reescrever a soma da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{128} \frac{1}{a_n \cdot b_n} = \sum_{n=1}^{128} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{255 \cdot 257}$$

Usando somas telescópicas, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{128} \frac{1}{a_n \cdot b_n} &= \sum_{n=1}^{128} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{128} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{128} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{255} - \frac{1}{257} \right) \right] \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{128} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{257} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{257} = \frac{128}{257} \end{aligned}$$

3. Deixa-se cair uma bola de tênis de uma altura de 8 m. Após se chocar com o solo, ela recupera $3/4$ da altura anterior e retorna ao solo chocando-se novamente. Esse processo continuará indefinidamente. Determine a distância vertical total percorrida pela bola.

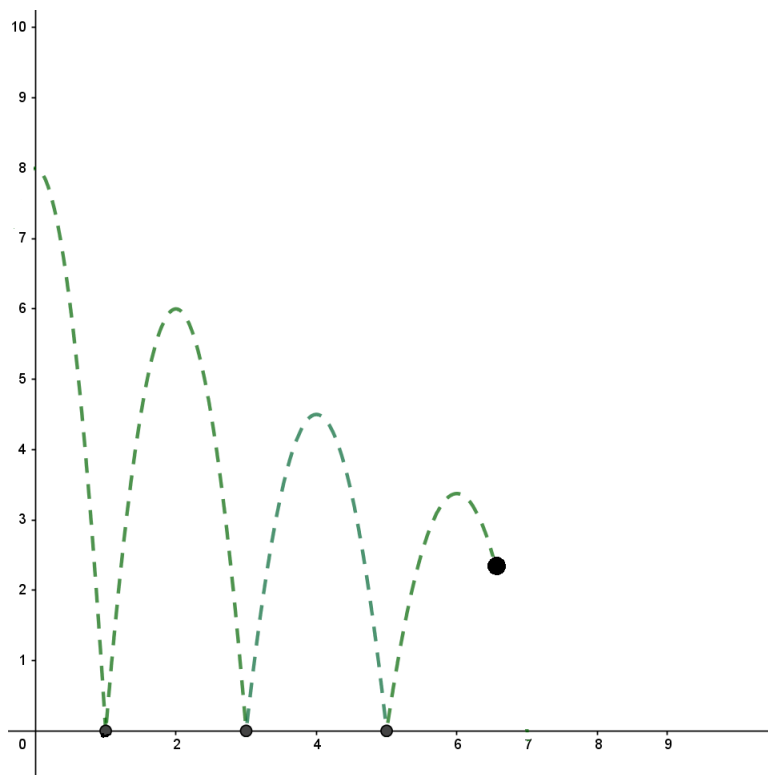


Figura 4.1: Movimento de queda da bola

Solução: Quando a bola toca o solo pela primeira vez ela já percorreu uma distância $s_1 = 8$ m. Para tocar o solo pela segunda vez ela deverá subir $3/4$ de s_1 e retornar ao solo

percorrendo os mesmos $3/4$ de s_1 , o que é equivalente a distância $s_2 = 2 \cdot \frac{3}{4}s_1 = 16 \cdot \frac{3}{4}$ m. Para tocar o solo pela terceira vez ela deverá subir $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ de s_1 e retornar ao solo percorrendo os mesmos $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ de s_1 , o que é equivalente a distância $s_3 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}s_1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 8 \text{ m} = 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ m.

Continuando este processo, a distância vertical total percorrida pela bola é dada por

$$S = 8 + 16 \cdot \frac{3}{4} + 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

$$S = 8 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $3/4$, portanto, é convergente. Seu primeiro termo é $3/4$. Assim

$$S = 8 + 16 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 8 + 16 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 8 + 48 = 56$$

A distância vertical total percorrida pela bola foi de 56 m.

4. (ITA) Provar que se uma P.A. é tal que a soma dos seus n primeiros termos é igual a $n + 1$ vezes a metade do n -ésimo termo, então $r = a_1$.

Solução: Dado que a sequência é uma PA, temos que $a_n = a_1 + (n - 1)r$ e $s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n - 1)r)n}{2} = \frac{rn^2 + (2a_1 - r)n}{2}$. Por outro lado, tem-se que $s_n = (n + 1) \frac{a_n}{2} = (n + 1) \frac{a_1 + (n - 1)r}{2} = \frac{a_1n + (n - 1)nr + a_1 + (n - 1)r}{2} = \frac{a_1n + rn^2 - rn + a_1 + rn - r}{2} = \frac{rn^2 + a_1n + a_1 - r}{2}$. De onde temos a igualdade:

$$\frac{rn^2 + (2a_1 - r)n}{2} = \frac{rn^2 + a_1n + a_1 - r}{2}$$

Que é verdadeira, se $a_1 - r = 0 \Rightarrow a_1 = r$ e $2a_1 - r = a_1 \Rightarrow a_1 = r$. Portanto, $a_1 = r$ em qualquer um dos casos.

5. Calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 3\sqrt{\frac{1}{2^n}}$.

Solução: Podemos reescrever a série como

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\sqrt{\frac{1}{2^n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

Onde a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de primeiro termo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e razão $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |q| < 1$, portanto a série é convergente.

Seja s a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 3\sqrt{\frac{1}{2^n}}$, então,

$$s = 3 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = 3(\sqrt{2}+1).$$

6. O conjunto de Cantor¹, é construído usando o intervalo fechado da reta $[0, 1]$, onde retiramos o seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, restando os intervalos fechados $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Repetimos agora essa operação com cada um desses intervalos que restaram, e assim por diante. Seja s_n a soma dos comprimentos dos intervalos que foram retirados depois de n dessas operações.

a) Mostre que $s_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Calcule o valor para o qual s_n se aproxima quando n cresce indefinidamente.

Solução: a) Após a 1ª operação, foi retirado um intervalo medindo $1/3$ de comprimento, assim, $s_1 = \frac{1}{3}$. Após duas operações realizadas, foram retirados um intervalo de $1/3$ e mais dois intervalos de $1/3^2$ de comprimento, assim, $s_2 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2}$. De forma análoga, concluímos que após a terceira operação teremos $s_3 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3}$. Logo, na n -ésima operação, tem-se $s_n = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}$. Trata-se portanto da soma parcial de uma série geométrica de termo geral $a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$. Logo

$$s_n = \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

b) Fazendo s_n tender ao infinito, temos, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1$

¹Renomado Matemático Alemão (1845-1918) - conhecido por ter elaborado a teoria moderna dos conjuntos.

7. Considere a sequência definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n \cdot a_n}$. Calcule a_{2017} .

Solução: Usando o recurso de manipulação algébrica, teremos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n \cdot a_n} &\Rightarrow \frac{1 + na_n}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n \\ &\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n \end{aligned}$$

Daí tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} &= 1 \\ \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} &= 2 \\ \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} &= 3 \\ \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_4} &= 4 \\ &\vdots \\ \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &= n \end{aligned}$$

Somando membro a membro cada uma das parcelas e usando somas telescópicas obtemos: $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{1}{a_1}$. Substituindo os valores, tem-se $\frac{1}{a_{2017}} = \frac{(2016+1)2016}{2} + \frac{1}{1} = \frac{2017 \cdot 2016}{2} + 1 = 2017 \cdot 1008 + 1 = 2033137$.

Portanto, $a_{2017} = \frac{1}{2033137}$.

8. (a) Seja a sequência definida por $a_n = \frac{3n}{2n+1}$. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$.

(b) Achar a partir de que termo a diferença $|a_n - 3/2|$ é menor que 0,001.

Solução: (a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$, então para todo real $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - 3/2| < \epsilon$ sempre que $n > N$. Assim $|a_n - 3/2| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3n}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{6n - 6n - 3}{4n+2} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{4n+2} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < 4n+2 \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 2 < 4n \Leftrightarrow \frac{3-2\epsilon}{4\epsilon} < n \Leftrightarrow n > \frac{3-2\epsilon}{4\epsilon}$.

Portanto, fazendo $N = \frac{3-2\epsilon}{4\epsilon}$, tem-se $|a_n - 3/2| < \epsilon$ e se $n > N$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$.

(b) Para $\epsilon = 0.001$, temos $N > \frac{3 - 0,002}{0,004} = \frac{2,998}{0,004} = 749,5$. Logo a partir do termo a_{750} , teremos $|a_n - 3/2| < 0,001$.

9. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Solução: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$, então para todo real $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$, tal que $|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| < \epsilon$ sempre que $n > N$. Então $|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Logo para que se tenha $|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| < \epsilon$ basta que $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{4\epsilon^2}$. Fazendo $N > \frac{1}{4\epsilon^2}$, tem-se $|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| < \epsilon$ e se $n > N$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

10. Usando as propriedades conhecidas calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4 &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4 = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5)} \right)^4 = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n^2} \right)} \right)^4 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4 &= \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} \right)^4 = \left(\frac{1 + 0}{3 + 0} \right)^4 = \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4 = \frac{1}{81}$.

11. Estudar a monotonicidade da sequência $a_n = \frac{7^n}{n!}$.

Solução: Temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{7^{n+1} \cdot n!}{7^n \cdot (n+1)!} = \frac{7^n \cdot 7 \cdot n!}{7^n \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{7}{n+1}$.

Analisando a razão obtida, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos:

Se $n < 6$, então $a_{n+1} > a_n$.

Se $n = 6$, então $a_{n+1} = a_n$;

Se $n > 6$, então $a_{n+1} < a_n$.

Portanto, a_n é decrescente se $n > 6$ e crescente se $n < 6$.

12. Considere a sequência (a_n) definida recursivamente por $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.

a) Mostre por indução em n que $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

b) Mostrar que (a_n) é monótona crescente;

c) Mostrar que (a_n) está limitada superiormente;

d) Calcular o limite de (a_n) caso seja convergente.

Solução: a) Usando indução em n , temos que para $n = 1$, $a_1 \geq 0$, portanto é verdadeira a afirmação. Supondo $a_n \geq 0$ para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$. Mostraremos que vale $a_{n+1} \geq 0$. Da hipótese de indução temos $a_n \geq 0$, logo $6 + a_n \geq 0 \Rightarrow \sqrt{6 + a_n} \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq 0$. Portanto, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Temos que mostrar que $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Usando indução, para $n = 1$, temos $a_2 = \sqrt{6} > 0 = a_1$. Suponhamos $a_{n+1} > a_n$ para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, mostraremos que $a_{n+2} > a_{n+1}$. Temos:

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

Portanto, (a_n) é crescente.

c) Como $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > a_n \geq 0$, tem-se que $6 + a_n \geq a_n^2$, que equivale a escrevermos $-a_n^2 + a_n + 6 = (3 - a_n)(2 + a_n) \geq 0$. Desta última desigualdade, tem-se $0 \leq a_n \leq 3$, logo 3 é cota superior de (a_n) .

d) Dos itens b) e c) temos que (a_n) é monótona crescente e limitada superiormente, portanto, convergente. Seja L o seu limite, então teremos $L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 = 6 + L \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow (L - 3)(L + 2) = 0 \Rightarrow L' = 3$ ou $L'' = -2$. Como $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

13. Dada a série $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots$, ache o termo geral e a escreva na forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solução: Facilmente podemos encontrar $a_n = \frac{2n - 1}{2^n}$, então escrevemos a série na forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 1}{2^n}$.

14. (Retirado de [1]) Na figura 4.2, temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, determine:

- a) o comprimento da espiral.
b) a abscissa do ponto P , ponto assintótico da espiral.

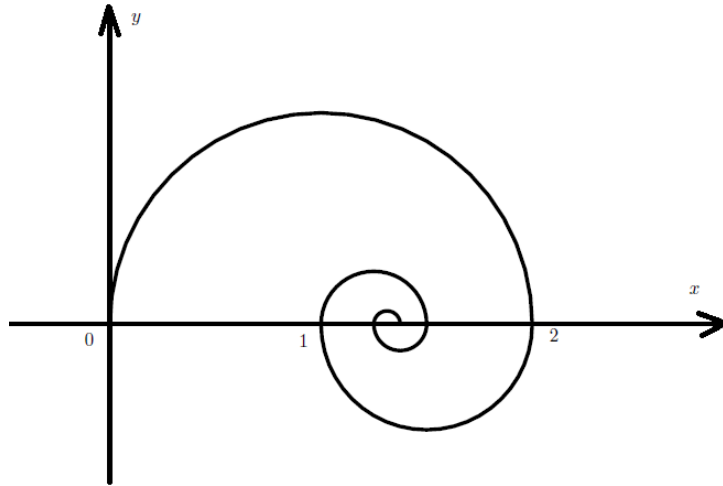


Figura 4.2: Espiral formada por semicírculos

Solução: a) Como a espiral é formada por semicírculos, o primeiro semicírculo tem comprimento π , o segundo tem comprimento $\frac{\pi}{2}$, o terceiro $\frac{\pi}{4}$, assim sucessivamente. Temos então uma série geométrica convergente de primeiro termo $a_1 = \pi$ e razão $\frac{1}{2}$, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{1 - 1/2} = 2\pi.$$

Portanto, o comprimento da espiral é igual a 2π .

b) Como os centros dos semicírculos variam no eixo das abcissas, temos que o primeiro semicírculo sai de $x = 0$ para $x = 2$, o segundo sai de $x = 2$ para $x = 1$, o terceiro de $x = 1$ para $x = 3/2$ e assim sucessivamente. Portanto, a abscissa do ponto P , será dada por

$$P = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}.$$

15. Constrói-se um quadrado $ABCD$ de lado 4 cm. Unindo os pontos médios dos lados, obtemos um novo quadrado $MNOP$ inscrito em $ABCD$. Unindo os pontos médios dos lados de $MNOP$, obtemos um novo quadrado e, assim sucessivamente, conforme Figura 4.3.

- a) Ache a área dos três primeiros quadrados dessa sequência. Qual o termo geral?
 b) Escrever a sequência formada pelo comprimento dos lados;
 c) Calcule a soma das áreas de todos os quadrados gerados desta forma?

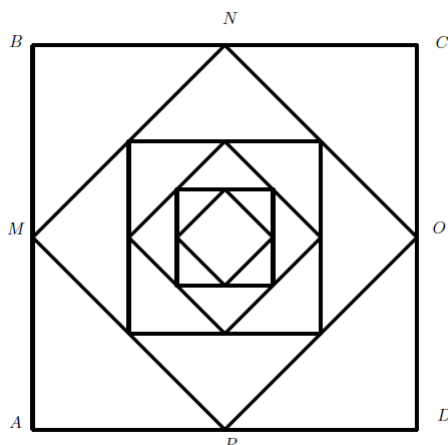


Figura 4.3: Quadrados infinitos

Solução: a) Como $MB = NB = 2$ e $\widehat{MBN} = 90^\circ$, então pelo Teorema de Pitágoras, temos $(MN)^2 = (MB)^2 + (NB)^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow (MN) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm. Usando um procedimento análogo, obtemos a medida do lado do terceiro quadrado, equivalente a 2 cm. Assim, as áreas dos três primeiros quadrados são 16 cm^2 , 8 cm^2 e 4 cm^2 , respectivamente. As áreas dos quadrados formam uma progressão geométrica (a_n) de primeiro termo $a_1 = 16$ e razão $q = \frac{1}{2}$, portanto, seu termo geral é dado por $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) O comprimento dos lados dos quadrados formam uma progressão geométrica (b_n) de termos $(4, 2\sqrt{2}, 2, \dots)$.

c) Como a sequência formada pelas áreas dos quadrados é uma PG de razão $q = \frac{1}{2} < 1$, então, a soma das áreas de todos os quadrados gerados será dada por $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32.$$

16. A seguir apresentaremos uma visualização geométrica da convergência da série geométrica de primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$. Para isso consideremos o quadrado unitário.

Solução: Dividindo o quadrado ao meio com um segmento vertical, obtemos dois retângulos, cada um com área igual $\frac{1}{2}$. Dividindo o retângulo da direita ao meio com um

segmento horizontal, obtemos dois retângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{4}$. Esse processo continua indefinidamente. Conforme Figura 4.4.

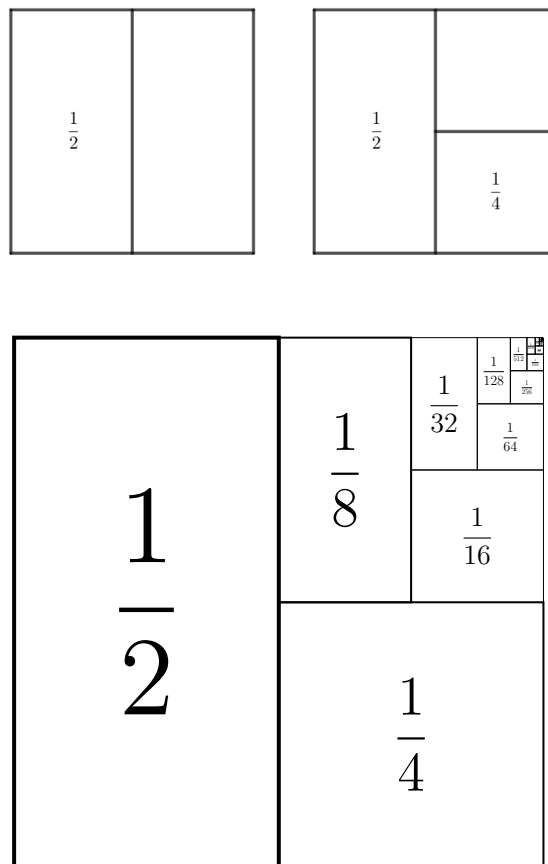


Figura 4.4: Visualização geométrica da convergência da série geométrica de razão 1/2

Isto nos indica que deve ser verdadeira uma identidade do tipo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho procurou-se trazer uma abordagem diferenciada de sequências e séries de números reais. Para isso, tivemos que rever alguns temas que já não tínhamos mais contatos, especialmente em análise, temas esses, importantíssimos para fazermos a fundamentação teórica do trabalho. O estudo que foi realizado, procurou aprofundar o que se trabalha nas escolas sobre progressões aritmética e geométrica e mostrar que é possível que se apresente para o aluno do ensino médio métodos de prova, como indução ou/e através da visualização e construções geométricas. O trabalho procurou apresentar problemas que permitem a conexão de sequências e séries com outros temas, desta forma, aproximar alguns conteúdos do ensino superior aos do ensino médio, mas, sem abrir mão dos fundamentos e rigor necessários que a matemática exige. Espera-se que este trabalho sirva de suporte para alunos de ensino médio que visam se preparar para provas de olimpíadas de matemática, professores, alunos de graduação e pós-graduação, ou seja, que venha contribuir para os diversos níveis de ensino focando no tema de sequências e séries, com ênfase nas progressões e na sistematização dos problemas mais interessante que geralmente não são abordados.

Referências Bibliográficas

- [1] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*, 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] LOPES, L. B. R. *Manual de sequências e séries*, v.1/Luís Lopes. - Rio de Janeiro, 2005.
- [3] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, v.1, 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [4] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de Uma Variável*, v.1, 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [5] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*, 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [6] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*, v.2, 3.ed. São Paulo: HARBRA, 1994.
- [7] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S.C. *Progressões e Matemática Financeira*, 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- [8] OLIVEIRA, M. R.; PINHEIRO, M. R. R. *Coleção Elementos da Matemática*, v.3, 3.ed. Fortaleza: VestSeller, 2010.
- [9] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais*, v.1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [10] LOPES, L. *Manual de Progressões*, Rio de Janeiro: Interciência, 1998.
- [11] BOYER, C. B. *História da Matemática*, 2.ed. São Paulo: EDGARD BLÜCHER LTDA, 1999.
- [12] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*, v.4, 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [13] ÁVILA, G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura*, 3. ed.. São Paulo: Editora Blücher, 2006.
- [14] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise*, v.3. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [15] BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Línguas, códigos e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

Apêndice A

O conjunto \mathbb{N} dos Números Naturais

É incrível como hoje em dia os números fazem parte da nossa vida cotidiana e como esses dígitos passaram a dominar o nosso mundo. Eles foram desenvolvidos pelo homem para servir como modelos que permitem comparações e medidas das diferentes quantidades de uma grandeza.

Inicialmente se contava com ajuda dos meios que se tinham a disposição: dedos, pedras, etc. A palavra cálculo, tem origem do latim *calculus* que originalmente era o nome de um conjunto de pedrinhas que eram usadas para fazer contas. *Calculus* também significa contagem ou estimativa.

Acredita-se também que por terem usado os dedos das mãos antigamente como instrumentos nos métodos de contagem, essa ideia tenha influenciado a razão de se ter um sistema de base decimal.

A.1 Os números naturais e os Axiomas de Peano

Definição A.1. *Se define o conjunto \mathbb{N} dos números naturais como um conjunto que satisfaz os seguintes axiomas:*

1. *Há um elemento de \mathbb{N} , denominado **um** e que é representado simbolicamente por 1, ou seja, $1 \in \mathbb{N}$.*
2. *Existe uma função $s(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, que se chama **sucessor** de n .*
3. *O número natural 1 é o único que não é sucessor de nenhum outro número natural.*
4. *$s(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva, pois sejam $n, m \in \mathbb{N}$, se $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$.*
5. *Seja A um subconjunto de \mathbb{N} . Se $1 \in A$ e para todo elemento $n \in A$ tem-se $s(n) \in A$, então $A = \mathbb{N}$.*

Os axiomas acima chamam-se os axiomas de Peano¹. O axioma 5 é também conhecido como o *princípio de indução*.

Denotamos o conjunto dos números naturais por $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Usando estes axiomas podemos provar todas as propriedades do conjunto dos números naturais.

A.2 Princípio de Indução Matemática

Definição A.2. *O princípio de indução é uma técnica muito utilizada na Matemática para demonstrar a validade de proposições sobre os números naturais.*

A.2.1 Princípio de indução - primeira versão

Teorema A.1. *Seja P uma proposição matemática que depende de \mathbb{N} . Suponhamos que P seja tal que:*

1. $P(1)$ é verdadeira, e diz-se que 1 satisfaz a proposição P .
2. Se $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$ e implicar $P(k + 1)$ verdadeira.

Então, P é verdadeira para todos os naturais.

Demonstração: Denotemos por X o conjunto dos números naturais satisfazendo P . Então, por hipótese, temos $1 \in X$; e se $k \in X$ então $k + 1 \in X$. Pelo quinto axioma de Peano temos que $X = \mathbb{N}$. □

A.2.2 Princípio de indução - segunda versão

Teorema A.2. *Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $P(n)$ uma proposição matemática acerca dos números naturais. Suponhamos $n \geq n_0$ e que:*

item A proposição $P(n_0)$ é verdadeira;

1. Para todo $n \geq n_0$, a proposição $P(n)$ implica $P(n + 1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$.

Demonstração: Se $n_0 = 1$, então o enunciado 1 se resume ao próprio Teorema A.1. Se $n_0 > 1$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos a proposição $T(k) = P[(n_0 - 1) + k]$.

Então, pela hipótese 1 do enunciado vale para $T(1)$, de forma que a hipótese 2 afirma que $T(k)$ implica $T(k + 1)$. Pelo Teorema A.1 segue que vale $T(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, vale $P(n)$ para todo $n \geq n_0$. □

¹Giuseppe Peano (1858-1932) - Matemático Italiano autor de mais de 200 livros e artigos, tido com um dos fundadores da lógica moderna e da teoria dos conjuntos.

A.3 Adição em \mathbb{N}

Adição é o nome que se dá a operação que consiste em somar números e é designada pelo símbolo $+$. Assim pode-se dizer que a operação adição faz associar dois números naturais m, n a outro número natural $m + n$.

Definição A.3. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. O número natural $s^n(m)$ é chamado a soma de m e n e é designado por $m + n$. Isto é, $m + n = s^n(m)$.*

Assim temos:

* $m + 1 = s(m)$, ou seja, somar m com 1 significa tomar o sucessor de m . De forma geral, somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor.

* $m + s(n) = s^{s(n)}(m) = s(s^n(m)) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Proposição A.1. *Sejam n, m, p e $q \in \mathbb{N}$. A adição em \mathbb{N} possui propriedades:*

1. *Associatividade*

$$(n + m) + p = n + (m + p);$$

2. *Comutatividade*

$$n + m = m + n;$$

3. *Lei do cancelamento ou do corte*

$$m + n = p + n \Rightarrow m = p.$$

Demonstração:

1. *Associatividade*

Mantendo m e p fixos e $A = \{n \in \mathbb{N} : (n + m) + p = n + (m + p)\}$.

$1 \in A$, pois

$$(1 + m) + p = s(m) + p = s(m + p) = 1 + (m + p)$$

Supondo que $n \in A$ (Hipótese de indução), ou seja,

$$(n + m) + p = n + (m + p)$$

Então,

$$\begin{aligned}
[s(n) + m] + p &\Rightarrow s(n + m) + p \\
&\Rightarrow s[(n + m) + p] \\
&\Rightarrow s[n + (m + p)] \\
&\Rightarrow s(n) + (m + p)
\end{aligned}$$

Concluimos assim que $s(n) \in A$, portanto $A = \mathbb{N}$. □

2. Comutatividade

Fixando $m \in \mathbb{N}$ e fazendo $A = \{n \in \mathbb{N} : n + m = m + n\}$.

$1 \in A$, pois

$$1 + m = s(m) = m + 1$$

Supondo que $n \in A$ (Hipótese de indução), ou seja, que vale

$$n + m = m + n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
s(n) + m &= s(n + m) \\
&= s(m + n) \\
&= (m + n) + 1 \\
&= m + (n + 1) \\
&= m + s(n)
\end{aligned}$$

Concluimos que $s(n) \in A$, portanto $A = \mathbb{N}$. □

3. Lei do cancelamento ou do corte

Faremos esta demonstração por indução em n . Suponhamos que m e p sejam números naturais fixos e $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n = p + n\}$.

$1 \in A$, pois,

$$m + 1 = p + 1 \Rightarrow s(m) = s(p) \Rightarrow m = p.$$

Supondo que $n \in A$ (Hipótese de indução), ou seja,

$$m + n = p + n \Rightarrow m = p.$$

Façamos a verificação para $s(n) = n + 1$, ou seja,

$$m + s(n) = p + s(n) \Rightarrow m = p$$

Temos,

$$m + s(n) = p + s(n) \Rightarrow s(m + n) = s(p + n) \Rightarrow m + n = p + n$$

$$\Rightarrow m = p.$$

Concluimos que $s(n) \in A$, portanto $A = \mathbb{N}$. □

A.4 Multiplicação em \mathbb{N}

Multiplicação é o nome que se dá a operação que consiste no produto de números e é designada pelo símbolo \cdot .

Assim sejam $m, n \in \mathbb{N}$, temos:

* $m \cdot 1 = m$, ou seja, multiplicar m por 1 não altera o valor de m ;

* $m(n + 1) = m \cdot n + m$, ou seja, multiplicar m por um número maior que 1 da forma $n + 1$, é iterar n -vezes a operação de soma m começando com m .

Proposição A.2. *Sejam n, m e $p \in \mathbb{N}$. A multiplicação em \mathbb{N} possui propriedades:*

1. *Associatividade*

$$n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p;$$

2. *Comutatividade*

$$n \cdot m = m \cdot n;$$

3. *Lei do cancelamento ou do corte*

$$n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m;$$

4. *Distributividade*

$$n(m + p) = n \cdot m + n \cdot p;$$

Demonstração:

1. *Associatividade*

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Usando indução sobre p , mantendo n e m fixos e $A = \{p \in \mathbb{N} : n \cdot (m \cdot p) = n \cdot m = (n \cdot m) \cdot p\}$.

$1 \in A$, pois temos,

$$n \cdot (m \cdot 1) = n \cdot m = (n \cdot m) \cdot 1.$$

Supondo que $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$ é verdade para algum $p \in A$. Verificaremos para $s(p) = p + 1$, ou seja, que $n \cdot (m \cdot s(p)) = (n \cdot m) \cdot s(p)$. Temos

$$\begin{aligned} n \cdot (m \cdot s(p)) &= n \cdot (m \cdot (p + 1)) \Rightarrow n \cdot (m \cdot p + m \cdot 1) = n \cdot (m \cdot p) + n \cdot (m \cdot 1) \\ &\Rightarrow (n \cdot m) \cdot p + (n \cdot m) \cdot 1 = (n \cdot m)(p + 1) = (n \cdot m) \cdot s(p) \end{aligned}$$

Concluimos que $s(p) \in A$, portanto $A = \mathbb{N}$. □

2. Comutatividade

Seja $m \in \mathbb{N}$. Usando indução sobre n , mantendo m fixo e $A = \{n \in \mathbb{N} : n \cdot m = m \cdot n\}$.

$1 \in A$, pois temos

$$1 \cdot m = m \cdot 1 \Rightarrow m = m.$$

Supondo que $n \cdot m = m \cdot n$ é verdade para algum $n \in A$.

Façamos a verificação para $s(n) = n + 1$, ou seja, $s(n) \cdot m = m \cdot s(n)$. Temos,

$$s(n) \cdot m = (n + 1) \cdot m = n \cdot m + 1 \cdot m = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot n + m = m \cdot (n + 1) = m \cdot s(n).$$

Concluimos que $s(n) \in A$, portanto $A = \mathbb{N}$. □

3. Lei do cancelamento ou do corte

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Usando indução sobre p , mantendo m e n fixo e $A = \{p \in \mathbb{N} : n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m\}$.

$1 \in A$, pois temos

$$n \cdot 1 = m \cdot 1 \Rightarrow n = m.$$

Supondo que $n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m$ é verdade para algum $p \in A$.

Façamos a verificação para $s(p) = p + 1$, ou seja,

$$n \cdot s(p) = m \cdot s(p) \Rightarrow n = m.$$

Temos,

$$n \cdot s(p) = n \cdot (p + 1) = n \cdot p + n \cdot 1 = m \cdot p + m \cdot 1 = m \cdot p + m = m \cdot (p + 1) = m \cdot s(p).$$

□

4. Distributividade

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Usando indução sobre p , mantendo m e n fixo e $A = \{p \in \mathbb{N} : n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p\}$.

$1 \in A$, pois temos

$$n \cdot (m + 1) = n \cdot s(m) = n \cdot m + n = n \cdot m + n \cdot 1$$

Supondo que $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ é verdade para algum $p \in A$.

Faremos a verificação para $s(p) = p + 1$, ou seja,

$$n \cdot (m + s(p)) = n \cdot m + n \cdot s(p).$$

Temos,

$$n \cdot (m + s(p)) = n \cdot (m + (p + 1)) = n \cdot m + n \cdot (p + 1) = n \cdot m + n \cdot s(p).$$

□

A.5 A ordenação do conjunto \mathbb{N} dos números naturais

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, diz-se que m é menor do que n , e escreve-se $m < n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Isto significa dizer que n será obtido a partir de m , após p iterações tomando os sucessores. Podemos também escrever desta forma $n = m + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ vezes}}$.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

1. Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.
2. Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas:

$$m = n, m < n \text{ ou } n < m.$$

3. Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Demonstração:

1. Se $m < n$ e $n < p$ então existem $k, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = m + k$ e $p = n + r \Rightarrow p = (m + k) + r = m + (k + r) \Rightarrow m < p$. □
2. Se tivéssemos $m < n$ e $m = n$, então seria $m = n + p = m + p$, donde $m + 1 = m + p + 1$ e, cortando m , concluiríamos que $1 = p + 1$ é absurdo, pois 1 não é sucessor de p . Portanto $m < n$, conseqüentemente, $n < m$, é incompatível com $m = n$.

Do mesmo modo, se tivéssemos $m < n$ e $n < m$, então teríamos $m = n + p$ e $n = m + k$, do que resultaria $n = n + p + k$, logo $n + 1 = n + p + k + 1$, e cortando n concluiríamos que $1 = p + k + 1$, um absurdo, pois 1 não é sucessor de $p + k$. Portanto, ou $m = n$, ou $m < n$ ou $n < m$. \square

3. Se $m < n$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. Logo, $n + p = (m + q) + p = m + (q + p) = m + (p + q) = (m + p) + q$, ou seja, $m + p < n + p$.

De forma análoga, se $m < n$. Então, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. Logo, $n \cdot p = (m + q) \cdot p = m \cdot p + q \cdot p$, ou seja, $m \cdot p < n \cdot p$. \square

Observação A.1. 1 é o menor elemento de \mathbb{N} , pois se $n \neq 1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m + 1 = n$. Então, $n > 1$.

Teorema A.3. Não existem números naturais entre n e $n + 1$.

Demonstração: Se fosse possível ter $n < m < n + 1$, então existiria $k, r \in \mathbb{N}$ onde $m = n + k$ e $n + 1 = m + r$, logo $n + 1 = n + k + r$. Cortando n , obteríamos $1 = k + r$. Por definição, isto é absurdo, pois se somarmos dois números naturais $k + r$, quaisquer que sejam eles, $k + r > 1$. \square

A.5.1 Princípio da boa ordenação

Definição A.4. Todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Isto significa que existe um elemento $m_0 \in X$ que é menor do que todos os demais elementos de X . A boa-ordenação pode muitas vezes substituir com vantagem a indução como método de prova de resultados referentes a números naturais.

Demonstração: Seja $Y = \{n \in \mathbb{N} | \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - X\}$. Se $1 \in X$, então está demonstrado, pois 1 é o menor elemento de X . Supondo que $1 \notin X$, então $1 \in Y$ e como X é um conjunto não vazio e $Y \subset \mathbb{N} - X$, temos $Y \neq \mathbb{N}$, dessa forma o menor elemento de X , cuja existência queremos provar, deverá ser da forma $n + 1$, para um certo número natural n . Devemos encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in X$, e, além disso, mostrar que todos os elementos de X sejam maiores do que n , ou seja, maiores do que 1, 2, 3,

Pelo axioma 5, da Definição A.1., temos que o conjunto Y não é indutivo, isto é, deve existir algum $n \in Y$ tal que $n + 1 \notin Y$. Isto significa que todos os elementos de X são maiores do que n , mas nem todos são maiores do que $n + 1$. Como não há números naturais entre n e $n + 1$ concluímos que $n + 1$ pertence a X e é o menor elemento de X . \square

Apêndice B

O conjunto \mathbb{R} dos Números Reais

O conjunto dos números reais é um corpo.

Definição B.1. Dizemos que um corpo é um conjunto não vazio \mathbb{K} no qual estão definidas duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem a algumas condições. Essas condições são conhecidas como propriedades ou axiomas.

Assim podemos dizer que existe um conjunto simbolizado por \mathbb{R} , cujos elementos são chamados números reais e que estão definidas duas operações: a *adição* denotada por “+” e a outra chamada *multiplicação* denotada por “·”, onde dados $a, b \in \mathbb{R}$ a adição faz corresponder o par de elementos (a, b) à soma $a + b \in \mathbb{R}$ e a multiplicação faz corresponder o par (a, b) ao seu produto $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

B.1 Propriedades algébricas dos números reais

Como vimos acima, as operações definidas no conjunto dos números reais possuem algumas propriedades ou axiomas. Apresentaremos agora essas propriedades:

Propriedades da Adição

A1. Associatividade

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \text{ se } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

A2. Comutatividade

$$a + b = b + a, \text{ se } a, b \in \mathbb{R}.$$

A3. Elemento neutro

Existe um elemento em \mathbb{R} , chamado zero e representado por “0”, onde se verifica

$$a + 0 = a, \text{ se } a \in \mathbb{R}.$$

A4. Simétrico

Para todo número $a \in \mathbb{R}$ existe outro número, denotado por $-a \in \mathbb{R}$, chamado *simétrico* ou *inverso aditivo* de a , tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Propriedades da Multiplicação

M1. Associatividade

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ se } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

M2. Comutatividade

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ se } a, b \in \mathbb{R}.$$

M3. Elemento neutro

Existe um elemento em \mathbb{R} , denominado um e denotado por “1”, de modo que $1 \neq 0$ e se verifica

$$1 \cdot a = a, \text{ se } a \in \mathbb{R}.$$

M4. Inverso multiplicativo

Para todo número $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ existe outro número, denotado por $a^{-1} \in \mathbb{R}$ chamado o *inverso multiplicativo* de a , tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

M5. Distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ se } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Observação B.1. Por Comutatividade podemos reescrever M3, M4 e M5, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= a \text{ se } a \in \mathbb{R} \\ a^{-1} \cdot a &= 1, \text{ para todo } a \neq 0 \in \mathbb{R} \\ (b + c) \cdot a &= a \cdot b + a \cdot c \text{ se } a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Proposição B.1. (a) O número um é o único que tem a propriedade $1 \cdot a = a$, $a \in \mathbb{R}$.

(b) O número zero é o único que tem a propriedade $a + 0 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

(c) Cada número real $a \in \mathbb{R}$ tem um único simétrico.

(d) Cada número real $a \in \mathbb{R}$ tem um único inverso multiplicativo.

Demonstração: (a) Suponhamos que existem dois elementos neutros da multiplicação. Então, além do 1 existe um número $m \in \mathbb{R}$ que satisfaz $m \cdot a = a$, $a \in \mathbb{R}$; em particular para $a = 1$, temos $m \cdot 1 = 1$. Por outro lado $1 \cdot m = m$. Pela propriedade comutativa temos $m \cdot 1 = 1 \cdot m$,

donde concluimos que $m = 1$. Logo, o elemento neutro da multiplicação é único. \square

(b) Supondo que existam dois elementos neutros da adição. Então existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $a + \beta = a$. De A4 temos $a + (-a) = \beta$, logo $\beta = 0$. Portanto, o elemento neutro da adição é único. \square

(c) Seja $a \in \mathbb{R}$ e suponhamos que existam dois números reais a' e a'' que verificam: $a+a' = 0$ e $a+a'' = 0$.

De A3 temos,

$$a' = a' + 0 \Rightarrow a' = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a'' + 0 = a''.$$

Portanto, o simétrico é único. \square

(d) Seja $a \in \mathbb{R}$ e suponhamos que existam dois números reais a' e a'' que verificam: $a \cdot a' = 1$ e $a \cdot a'' = 1$.

De M3, temos:

$$a' = 1 \cdot a' \Rightarrow a' = (a \cdot a'') \cdot a' = a' \cdot (a \cdot a'') = (a' \cdot a) \cdot a'' = (a \cdot a') \cdot a'' = 1 \cdot a'' = a''.$$

Portanto, o inverso multiplicativo é único. \square

Proposição B.2. (i) Se $a \in \mathbb{R}$, $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$.

(ii) $a \cdot 0 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $-(-a) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

(iv) Se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

(v) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) Se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

(vii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

(viii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Demonstração: (i) Vejamos primeiro a implicação " $a+a = a \Rightarrow a = 0$ ". Tomemos $a \in \mathbb{R}$ verificando $a+a = a$, somando a esta igualdade $-a$ resulta que $(a+a)+(-a) = a+[a+(-a)] = a+0 = a$. Aplicando ao primeiro membro, sucessivamente, as propriedades da associatividade, do simétrico e do elemento neutro, resulta: $(a+a)+(-a) = a+[a+(-a)] = a+0 = a$. Por outro lado, o segundo membro é $a+(-a) = 0$. De ambas, $a = 0$. Vejamos agora a implicação " $a = 0 \Rightarrow a+a = a$ ". Esta implicação é imediata e trivial, já que pela propriedade do elemento neutro $0+0 = 0$. \square

(ii) Seja $a \in \mathbb{R}$, então $(a \cdot 0) + a = (a \cdot 0) + (a \cdot 1) = a(0+1) = a \cdot 1 = a$. Sabendo que zero é o único que tem a propriedade $0+a = a$ (ver proposição 9.1.1), resulta que $a \cdot 0 = 0$. \square

(iii) Seja $a \in \mathbb{R}$, então $(-a) + a = a + (-a) = 0$, logo a é o simétrico $-a$, isto é, $a = -(-a)$. \square

(iv) Como $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então por M4 temos $a \cdot a^{-1} = 1$. Por outro lado, se $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0$, pois se $a^{-1} = 0$, teríamos $a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$, contrariando M4. Logo $a^{-1} \neq 0$. Como $a^{-1} \neq 0$, por M4 existe um elemento $(a^{-1})^{-1}$ tal que $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1$. Assim temos,

$$(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1 = a \cdot a^{-1} \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a.$$

\square

(v) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, então $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$. Portanto, $a(-b)$ é o simétrico de ab , isto é, $a(-b) = -(ab)$. \square

(vi) Seja $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então

$$(-a)(-a^{-1}) = -a(-a^{-1}) = -[-aa^{-1}] = aa^{-1} = 1.$$

Logo $-a^{-1}$ é o inverso multiplicativo de $(-a)$. \square

(vii) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, já sabemos que se $a = 0$ ou $b = 0$ então $ab = 0$. Vejamos então a recíproca. Suponhamos que $ab = 0$, devemos provar que algum deles é zero. Suponhamos que um deles não é zero, por exemplo “ a ”, então existe a^{-1} . Multiplicando a igualdade $ab = 0$ por a^{-1} obtemos:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0.$$

O segundo membro é zero e o primeiro é $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$. Assim $b = 0$.

O caso $b \neq 0$ é análogo. \square

(viii) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Provemos que $a^{-1}b^{-1}$ é o inverso multiplicativo de ab , então

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = ((ab)a^{-1})b^{-1} = ((ba)a^{-1})b^{-1} = (b(aa^{-1}))b^{-1} = (b \cdot 1)b^{-1} = b \cdot b^{-1} = 1$$

\square

B.2 O conjunto \mathbb{R} é um conjunto ordenado

Existe um subconjunto de \mathbb{R} que se denota por \mathbb{R}^+ , cujos elementos são chamados positivos, tais que se verificam a propriedade que segue abaixo.

Dado $a \in \mathbb{R}$, ocorre uma e somente uma das três possibilidades abaixo:

$$\text{ou } a \in \mathbb{R}^+, \text{ ou } a = 0 \text{ ou } -a \in \mathbb{R}^+.$$

Observação B.2. 1. Se $a \in \mathbb{R}^+$, escreve-se $a > 0$ e diz-se que a é um número real positivo ou maior do que zero.

2. Se $a = 0$ diz-se que a é real e igual a zero.

3. Se $-a \in \mathbb{R}^+$, escreve-se $a < 0$ e diz-se que a é negativo ou menor do que zero.

4. Se $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, escreve-se $a \geq 0$ e diz-se que a é um número real não negativo.

5. Se $-a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, escreve-se $a \leq 0$ e diz-se que a é um número real não positivo.

Definição B.2. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, se obtém $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$. Isto é, a soma e o produto de números positivos, são números positivos.

Proposição B.3. Se $a \neq 0$ então $a^2 \in \mathbb{R}^+$ (todo número real diferente de zero tem quadrado positivo).

Demonstração: Se $a \in \mathbb{R}^+$ então $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{R}^+$, se $a \notin \mathbb{R}^+$ então $-a \in \mathbb{R}^+$ e $(-a)(-a) = a^2 \in \mathbb{R}^+$. \square

Como consequência temos que 1 é um número positivo, pois, $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$.

Definição B.3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Se $a - b \in \mathbb{R}^+$, então $a > b$ ou $b < a$.

2. Se $a - b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, então $a \geq b$ ou $b \leq a$.

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, da relação de ordem $a < b$ temos as seguintes propriedades:

O1. **Transitividade:** se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

O2. **Tricotomia:** ocorre exatamente uma das três possibilidades $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.

O3. **Monotonicidade da adição:** se $a < b$ então, tem-se $a + c < b + c$.

O4. **Monotonicidade da multiplicação:** se $a < b$ então para todo $c > 0$ tem-se $ac < bc$. Se $c < 0$ então $a < b \Rightarrow bc < ac$.

Demonstração: O1. Suponhamos que $a < b$ e $b < c$, então pela Definição B.3., $b - a \in \mathbb{R}^+$ e $c - b \in \mathbb{R}^+$. Da Definição B.2. temos, $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow b - a + c - b \in \mathbb{R}^+$, donde $c - a \in \mathbb{R}^+$, isto é, $a < c$. \square

O2. Uma das três possibilidades ocorre, ou $a - b = 0$ logo $a = b$, ou $a - b \in \mathbb{R}^+$ donde segue $b < a$ ou $a - b \notin \mathbb{R}^+$ donde $b - a \in \mathbb{R}^+$ que significa $a < b$. \square

O3. Suponhamos que $a < b$, isto é, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Então $(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathbb{R}^+$. Logo, tem-se $a + c < b + c$. \square

O4. Suponhamos que $a < b$ e $c > 0$, isto é, $b - a \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Então $c \cdot (b - a) = cb - ca = bc - ac \in \mathbb{R}^+$. Logo, tem-se $ac < bc$. Se $a < b$ e $c < 0$, isto é, $b - a \in \mathbb{R}^+$ e $-c \in \mathbb{R}^+$. Então $(-c) \cdot (b - a) = -cb + ca = -bc + ac = ac - bc \in \mathbb{R}^+$. Logo, tem-se $bc < ac$. \square

B.3 Valor absoluto de um número real

Definição B.4. Seja $x \in \mathbb{R}$, chama-se o valor absoluto de x , representado por $|x|$, como o número real não negativo.

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observação B.3. Como consequência da definição, teremos $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Caso $x \neq 0$, teremos $|x| > 0$.

Proposição B.4. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos $|x| = |-x|$.

Teorema B.1. Se $x, y \in \mathbb{R}$ então:

- (i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
- (ii) $|x|^2 = x^2$.
- (iii) Dado $z \in \mathbb{R}$ com $z \geq 0$, tem-se $|x| \leq z \Leftrightarrow -z \leq x \leq z \Leftrightarrow (-z \leq x \text{ e } x \leq z)$.
- (iv) $-|x| \leq x \leq |x|$.
- (v) Seja $z \in \mathbb{R}$ temos $|x| \geq z \Leftrightarrow (x \geq z \text{ ou } x \leq -z)$

Demonstração: (i) Se $x = 0$ ou $y = 0$ então a igualdade é verificada ($0 = 0$). Assim, nos tem-se quatro casos a analisar.

1. Se $x > 0$ e $y > 0$, então $x \cdot y > 0$. Assim, tem-se $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.
2. Se $x > 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y < 0$. Assim, tem-se $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.
3. Se $x < 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y > 0$. Assim, $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.
4. Se $x < 0$ e $y > 0$, então $x \cdot y < 0$. Assim, tem-se $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$. \square

(ii) Dado que $x^2 \geq 0$, tem-se $x^2 = |x^2| = |x \cdot x| = |x| \cdot |x| = |x|^2$. \square

(iii) se $x \geq 0$ então $|x| \leq z \Leftrightarrow x \leq z$. Se $x < 0$ então $|x| \leq z \Leftrightarrow -x \leq z$. Logo, para $z \in \mathbb{R}$, tem-se $|x| \leq z \Leftrightarrow (0 \leq x \leq z \text{ ou } -z \leq x < 0) \Leftrightarrow -z \leq x \leq z \Rightarrow (-z \leq x \text{ e } x \leq z)$. \square

(iv) Usando o caso anterior e considerando $z = |x|$, temos $-|x| \leq x \leq |x|$. Temos um caso particular de (iii). \square

(v) Se $x \geq 0$, então $|x| \geq z \Leftrightarrow x \geq z$. Se $x < 0$, então $|x| \geq z \Leftrightarrow -x \geq z \Leftrightarrow x \leq -z$. Logo, para $z \in \mathbb{R}$, tem-se $|x| \geq z \Leftrightarrow (x \geq z \text{ ou } x \leq -z)$. \square

Teorema B.2. (Desigualdade Triangular) Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração: Do Teorema B.1., tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Somando as desigualdades, temos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Logo $|x + y| \leq |x| + |y|$. \square

Abriremos a seguir um espaço para apresentarmos outras duas desigualdades importantíssimas, estas serão de grande utilidade na resolução de alguns exercícios que serão discutidos neste trabalho.

Teorema B.3 (Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica). Se $a, b \geq 0$ então $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, ocorrendo a igualdade, se, e somente se, $a = b$.

Demonstração: Temos que $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é um número real. Como admite-se a possibilidade $a = b$, concluímos que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Daí $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. \square

Teorema B.4 (Desigualdade de Bernoulli). Seja $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$. Então $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Demonstração: Faremos a demonstração por indução em n . Para $n = 1$, temos que $1+x \geq 1+x$, o que é verdade. Supondo $(1+x)^n \geq 1+nx$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que vale para $n+1$. Assim temos, $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. Portanto é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

B.4 Propriedade Arquimediana

Proposição B.5. Se $x \in \mathbb{R}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos por contradição que se tenha $n \leq x$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, x seria uma cota superior de \mathbb{N} . Assim, pela Propriedade de Completeza de \mathbb{R} , o conjunto não vazio \mathbb{N} teria um supremo $m \in \mathbb{R}$. Logo, $m-1$ não seria uma cota superior de \mathbb{N} e deste modo existiria $p \in \mathbb{N}$ tal que $m-1 < p$, ou seja, $m < p+1$. Agora, como

$p + 1 \in \mathbb{N}$, devido ao fato de \mathbb{N} ser um conjunto indutivo, a condição $m < p + 1$ contradiz o fato de m ser uma cota superior de \mathbb{N} . Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. \square

Teorema B.5. (Propriedade Arquimediana). *Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, existe um número natural n tal que $n \cdot x > y$.*

Demonstração: De acordo com a Proposição B.5., existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{y}{x}$. Como $x > 0$, tem-se $n \cdot x > y$. \square

B.5 Propriedades de completeza de \mathbb{R}

Definição B.5. *Seja X um subconjunto do corpo ordenado \mathbb{R} .*

** X é limitado superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$, ou seja $X \subset (-\infty, b]$. Cada b com esta propriedade é uma cota superior de X .*

** X é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$, ou seja, $X \subset [a, +\infty)$. Cada a com esta propriedade é uma cota inferior de X .*

** X é limitado quando é limitado superior e inferiormente, ou seja, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tais que $X \subset [a, b]$.*

B.5.1 Supremo e Ínfimo

Definição B.6. *Dizemos que um conjunto A possui supremo e denotamos por $\sup A$, se existe um número real a que satisfaz as duas propriedades seguintes:*

1. *a é uma cota superior de A .*
2. *Qualquer outra cota superior de A é maior do que a .*

Definição B.7. *Dizemos que um conjunto A possui ínfimo e denotamos por $\inf A$, se existe um número real b que satisfaz as duas propriedades seguintes:*

1. *b é uma cota inferior de A .*
2. *Qualquer outra cota inferior de A é menor do que b .*

Definição B.8. *Todo o subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado superiormente, tem supremo em \mathbb{R} .*

Proposição B.6. *Todo o subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado inferiormente, tem ínfimo em \mathbb{R} .*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e cotado inferiormente. Então $-X = \{-x : x \in X\}$ é não vazio, cotado superiormente e deste modo, admite supremo em \mathbb{R} . Além disso, tem-se $\sup(-X) = -\inf(X)$. De fato, se $L = \sup(-X)$, então tem-se $L \geq -x$ para todo $-x \in -X$, isto é, $x \geq -L$ para todo $x \in X$, ou seja, $-L$ é uma cota inferior de X . Seja agora l uma cota inferior de X . Tem-se $l \leq x$ para todo $x \in X$, isto é, $-x \leq -l$ para todo $-x \in -X$. Como L é a menor das cotas superiores de $-X$, tem-se $L \leq -l$, ou seja, $l \leq -L$, e assim $-L$ é a maior das cotas inferiores de X . Logo, tem-se $\inf(X) = -\sup(-X)$. \square