Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Observabilidade de Sistemas de Controle

Juan Carlos Moraga Gonzalez

Manaus - 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Observabilidade de Sistemas de Controle

Juan Carlos Moraga Gonzalez

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Julio César Rodríguez.
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Manaus- 2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

G643o Gonzalez, Juan Carlos Moraga
Observabilidade de Sistemas de Controle / Juan Carlos Moraga Gonzalez. 2018
90 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Julio César Rodríguez
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Grupos de Lie. 2. Algebras de Lie. 3. Sistemas de Controle. 4. Observabilidade. 5. Lie Theory. I. Rodríguez, Julio César II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Juan Carlos Moraga Gonzalez

Observabilidade de Sistemas de Controle

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração: Matemática Aplicada.

Manaus , 01 de Fevereiro de 2018

Prof. Dr. Julio César Rodriguez
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Carlos Wagner Marques do Nascimento
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Carlos José Matheus
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado forças para vencer as adversidades.

Aos meus pais pelo incentivo e apoio nos momentos mais difíceis e a pela oportunidade que me deram de estudar. Aos meus irmãos pela companhia e amizade.

Ao meu orientador Prof. Dr. Julio César Rodríguez, pela confiança, incentivo, ensinamentos da pesquisa em Matemática, e me mostrar como a perseverança pode superar tantos obstáculos.

Aos membros da banca examinadora, pelas sugestões, comentários e valorosas contribuições.

À CAPES, pelo auxílio financeiro e ao Programa de Pós–graduação em Matemática da UFAM, por terem me dado a oportunidade de estudar.

Aos professores de Pós–graduação em Matemática-UFAM, pelos conhecimentos transmitidos.

Finalmente agradeço a todos os meus amigos do PPGM-UFAM os quais não citarei nomes para não cometer injustiças, pelos momentos compartilhados. E a todos meus amigos, pelas risadas e amizade.

RESUMO

OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE

Nesta dissertação apresentamos os fundamentos da Teoria de Lie e sua aplicação no estudo da propriedade de observabilidade para uma classe de sistemas de controle. Focamos nosso estudo em sistemas invariantes. O objetivo principal é estudar as propriedades de observabilidade para estabelecer que sob certas hipóteses é possível obter alguns critérios para verificar que um sistema possui a propriedade de ser observável. Para finalizar, mostramos exemplos em grupos de Lie com a finalidade de verificar as condições de observabilidade introduzidas neste trabalho.

Palavras-chave: Grupos de Lie, algebras de Lie, sistemas de controle, observabilidade.

ABSTRACT

OBSERVABILITY OF CONTROL SYSTEMS

In this dissertation we present the foundations of Lie theory and its application to the study of the property of observability for a class of control systems. We focus our study on invariant systems. The main objective is to study the properties of observability to establish that under certain hypotheses it is possible to obtain some criteria to verify that a system possesses the property of being observed. To conclude, we show examples in Lie groups with the purpose of verifying the conditions of observability introduced in this work.

Keywords: Lie Groups, Lie algebras, control systems, observability.

Índice

Introdução

A teoria de Controle Geométrico teve seus inícios aproximadamente no final da década dos anos 60's, e tem–se desenvolvido muito devido a sua estreita relação com diversas áreas de ciências e engenharias. Os sistemas de controle são uma interessante área de estudo tanto de um ponto de vista prático como desde um ponto de vista teórico, e os grupos de Lie [11],[16] surgem naturalmente como modelos para o espaço de configuração da dinâmica devido a que envolvem propriedades geométricas e algébricas.

O estudo dos sistemas de controle sobre grupos de Lie teve um grande avanço com diversos trabalhos de Brockett, Jurdjevic, e Sussmann, veja [3], [15], principalmente em questões de existência e critérios algébricos de controlablidade e observabilidade desde a teoria de Lie. Posteriormente, foram abordadas questões sobre controle ótimo para sistemas em grupos de Lie [10], e sobre espaços homogêneos [2].

A classe dos sistemas de controle invariantes sobre grupos de Lie foi considerada pela primeira vez em 1972 por Brockett em [3], são de especial interesse no estudo de diversos assuntos da teoria de controle, uma vez que eles formam uma importante subclasse de sistemas não lineares e representam também uma subclasse significativa de sistemas de controle ricos em simetria. Para estes sistemas a translação de qualquer trajetória é novamente uma trajetória. Eles possuem uma estrutura que deixa de maneira natural muitas simplificações o que nos permite o estudo de várias propriedades e questões relacionadas a controle não linear de modo mais simples. Além disso, para sistemas invariantes o estudo de diversas propriedades associadas com tais sistemas pode ser reduzido ao estudo da álgebra de Lie do grupo de Lie subjacente à dinâmica de controle. Veja [10].

O estudo da propriedade de observabilidade sobre grupos de Lie foi iniciado por Brockett [3], posteriormente destacamos as contribuições dos autores [4] e [10]. Eles se basearam nos conceitos de observabilidade em teoria de Lie. Informalmente falando, a observabilidade de sistemas está associado ao problema de determinar os estados no espaço de estados da dinâmica do controle a partir uma observação parcial conhecida sobre o sistema em um intervalo de tempo finito. Em outras palavras, estudar a posibilidade de encontrar um controle que permita distinguir dois estados diferentes no espaço de estados da dinâmica do controle a través da observação disponível dada por uma função de observação.

Nesta dissertação, nos concentrarmos em fornecer uma visão geral sobre a observabilidade para uma classe de sistemas de controle sobre um grupo de Lie com função de saída cujo espaço de saída é um espaço quociente deste grupo de Lie. Mostramos suas principais propriedades, sua relação com a Teoria de Lie, e em seguida estabeleceremos algumas condições de observabilidade local e global.

A dissertação esta organizada em três capítulos, a continuação descrevemos brevemente cada um deles:

No capítulo 1, apresentamos uma revisão das propriedades básicas de grupos e álgebras de Lie no contexto geral e também para grupos de Lie de matrizes, apís disso definimos os campos de vetores invariantes e sua relação com álgebras de Lie, e aplicação exponencial. Além disso, introduzimos a noção de representação sobre grupos de Lie, e alguns aspectos básicos dos grupos de Lie solúveis e também dos nilpontentes; ferramentas que são indispensáveis para a compreensão deste trabalho. Neste capítulo, seguimos as referências [14], [16], [17].

No capítulo 2, fornecemos uma descrição da classe de sistemas de controle invariantes, descreveremos os principais aspectos sobre um sistema de controle invariante e suas trajetórias, o conjunto de acesibilidade e suas propriedades, introduzimos alguns exemplos para facilitar a compreensão destes tópicos; ferramentas fundamentais que são de interesse deste trabalho. Veja [1], [10], [13].

Finalmente, no capítulo 3 apresentamos critérios para análise da observabilidade em grupos de Lie que generalizam o estudo da classe de sistemas de controle sobre espaços Euclidianos. Para desenvolver o capítulo, foi necessário dar uma caracterização do conjunto dos estados não observáveis pela dinâmica de controle cuja função de observabilidade toma valores num espaço quociente. Essa caracterização permite estabelecer a relação de invariância da álgebra de Lie do subgrupo formado pelos pontos no espaço de estados não observáveis. Com essas ferramentas, mostramos que análise da observabilidade local e/ou global depende tanto da subálgebra dos estados não observáveis quanto da função de observação. E para finalizar, damos alguns exemplos em grupos de Lie com a finalidade de verificar as condições de observabilidade introduzidas neste trabalho.

Muitas questões continuam em aberto na Teoria de Controle e a maioria deles precisam de uma boa compreensão de certas propriedades da Teoria de Lie que ainda estão em desenvolvimento. Nesse contexto, a dissertação estabelece os fundamentos necessários para a compreensão da propriedade de observabilidade, que é importante no estudo de diversos problemas da Teoria de Controle.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos e ferramentas relacionados à Teoria de Lie os quais serão úteis para o desenvolvimento desta dissertação. Seguimos as referências [14], [16], [17].

1.1 Grupos de Lie

Iniciamos a seção introduzindo a noção de Grupo de Lie.

Definição 1.1. *Um grupo de Lie G de dimensão n é uma variedade diferenciável $n-$dimensional a qual também possui uma estrutura de grupo tal que para todo $g, h \in G$ as operações de grupo*

$$\begin{array}{rcl} p : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \rightsquigarrow & p(g,h) := g \cdot h \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} i : G & \longrightarrow & G \\ g & \rightsquigarrow & i(g) := g^{-1} \end{array},$$

são aplicações diferenciáveis.

A continuação veremos alguns exemplos.

Exemplo 1.2. *$G = \mathbb{R}^n$ é um grupo de Lie. De fato, $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável com o atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \varphi)\}$ onde a aplicação identidade $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$ é considerado como uma carta global. Note que, $\mathbb{R}^n$ é um grupo com a operação de soma usual de vetores*

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) \mapsto x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)\,.$$

Além disso, as aplicações

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \rightsquigarrow & p(x, y) := x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \rightsquigarrow & i(x) := -x \end{array},$$

são diferenciáveis, pois as entradas das aplicações p e i são polinômios lineares. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um grupo de Lie.

Exemplo 1.3. A circunferência (esfera unitária 1–dimensional), dada por

$$S^1 = \left\{\exp(j\theta) : \ \theta \in \mathbb{R}, \ j = \sqrt{-1}\ \right\} \subset \mathbb{C} - \{0\}$$

é um grupo de Lie de dimensão 1.

Note que S^1 é uma variedade diferenciável. Com efeito, com a topologia induzida de $\mathbb{C} - \{0\}$ podemos construir o atlas $\mathcal{A} = \{(U_z, \varphi_z), (V_z, \psi_z)\}$ sobre S^1, como segue:

Para pontos $z \in S^1,\ z \neq \pm 1$, escolha a carta (U_z, φ_z), onde

$$U_z = \left\{ w = \exp(j\theta) : |z - w| < min(\frac{|1 - z|}{2}, \frac{|1 + z|}{2}) \right\},$$

e $\varphi_z : U_z \subset S^1 \to \mathbb{R}$ esta definida por $\varphi_z(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) = cos(\theta)$.

Para pontos $z \in S^1, z \neq \pm j$, considere a carta (V_z, ψ_z), onde

$$V_z = \left\{ w = \exp(j\theta) : |z - w| < min(\frac{|z - j|}{2}, \frac{|z + j|}{2}) \right\},$$

e $\psi_z : V_z \subset S^1 \to \mathbb{R}$ esta definida por $\psi_z(w) = \frac{1}{2j}(w - \frac{1}{w}) = sin(\theta)$.

Por outro lado, S^1 é um grupo com a multiplicação induzida desde $\mathbb{C} - \{0\}$ sobre S^1. De fato, dados $z = \exp(j\theta), w = \exp(j\beta) \in S^1$ temos $|z| = |w| = 1$. Assim, $z \cdot w = \exp(j\theta) \cdot \exp(j\beta) = \exp(j(\theta + \beta))$ satisfaz $|z \cdot w| = 1$. Portanto, $z \cdot w \in S^1$. Também, dado $\exp(j\theta) \in S^1$ o seu inverso é $\exp(-j\theta) \in S^1$.

Além disso, a aplicação produto $p : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1$ dada por

$$p(z, w) := z \cdot w = \exp(j\theta) \cdot \exp(j\beta)) = \exp(j(\theta + \beta)),$$

está definida via a multiplicação usual sobre o corpo dos números complexos, assim segue–se que p é diferenciável. Também, verifica–se que a aplicação $i : S^1 \longrightarrow S^1$ definida por

$$i(z) = i(\exp(j\theta)) = \exp(-j\theta),$$

é diferenciável. Portanto, S^1 é um grupo de Lie.

Proposição 1.4. *Se G e H são grupos de Lie, então o produto direto $G \times H$ é também um grupo de Lie.*

Prova: De fato, $G \times H$ é uma variedade diferenciável com a estrutura de variedade produto. Também é um grupo. Além disso, para todo $g, h \in G$ as operações:

$$\begin{array}{rcc} p : (G \times H) \times (G \times H) & \longrightarrow & (G \times H) \\ ((g_1, h_1); (g_2, h_2)) & \rightsquigarrow & p(g, h) := (g_1 g_1, h_1 h_2) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcc} i : G \times H & \longrightarrow & G \times H \\ (g, h) & \rightsquigarrow & i(g, h) := (g^{-1}, h^{-1}) \end{array},$$

são aplicações diferenciaveis, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis devido a que G e H são grupos de Lie. $\square$

Exemplo 1.5. *O Toro 2-dimensional, obtido pelo produto direto*

$$T^2 \cong S^1 \times S^1$$

é um grupo de Lie de dimensão 2. De fato, como S^1 é um grupo de Lie, segue–se diretamente desde a Proposição 1.4 que T^2 é um grupo de Lie.

Por um procedimento semelhante ao Exemplo 1.5 pode–se concluir que o Toro n-dimensional

$$T^n \cong S^1 \times \cdots \times S^1, \quad \big(\text{produto de } S^1 \text{ n-vezes}\big)$$

é também um grupo de Lie.

Agora introduziremos a noção de translação sobre grupos de Lie.

Definição 1.6. *Sejam G um grupo de Lie, e $g \in G$ fixado. Chama-se translação à esquerda por g à aplicação*

$$L_g : G \to G \quad \textit{definida por} \quad L_g\,(h) = g \cdot h$$

Da mesma forma, a aplicação

$$R_g : G \to G \quad \textit{definida por} \quad R_g\,(h) = h \cdot g$$

é dita translação à direita por g.

Observação 1.7. *As aplicações L_g e R_g são difeomorfismos de G. De fato, dados dois elementos g_1, g_2 em G verifica–se que*

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \;\; e \;\; R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_1 g_2}.$$

Assim, tomando $g_1 = g_2^{-1}$ desde as igualdades anteriores temos $L_{g_1^{-1}} = (L_{g_1})^{-1}$ e $R_{g_1^{-1}} = (R_{g_1})^{-1}$.

Assim, $L_{g^{-1}}$ e $R_{g^{-1}}$ são as inversas das aplicações L_g e R_g, respectivamente. Além disso, $L_{g^{-1}}$ e $R_{g^{-1}}$ são diferenciáveis, e como as as translações à esquerda e à direita e são bijetivas, segue–se que L_g e R_g são difeomorfismos.

Se G um grupo de Lie, $g \in G$ e $A \subset G$ é um subconjunto qualquer, então a translação de A via L_g dada por $L_g(A) = \{gx; x \in A\}$, é um conjunto aberto ou fechado, respectivamente, dependendo do fato de que A seja aberto ou fechado. A mesma conclusão é válida para o conjunto $R_g(A) = \{xg; x \in A\}$ definido via a translação à direita R_g.

Proposição 1.8. *Seja G um grupo de Lie. Se H é um subgrupo aberto de G, então H é fechado.*

Prova: Seja $g \in G$, note que uma classe lateral $gH = \{gh : \ h \in H\}$ de H é obtida pela translação à esquerda L_g. Portanto, se H é aberto segue–se que $L_g(H) = gH$ é também aberto. Por outro lado, podemos escrever G como a união de H com as classes laterais $gH, g \notin H$. Isso significa que o complementar de H em G é uma união de conjuntos abertos e daí que H é fechado. □

Sejam G um grupo de Lie, e $A, B \subset G$ subconjuntos arbitrários. Denotaremos por $A \cdot B$ o conjunto produto de A e B, dado por

$$A \cdot B = AB = \{xy \in G; x \in A, \ y \in B\},$$

Nesta notação, A^n denota os produtos, $A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2, etc.$ Também, se A ou B é aberto então AB é um conjunto aberto; pois por definição $AB = \bigcup_{x \in B} Ax = \bigcup_{x \in A} xB$, ou seja AB é união de abertos. No entanto, AB pode não ser fechado, mesmo que ambos os conjuntos sejam fechados.

Além disso, se $A \subset G$ é um subconjunto qualquer então o conjunto

$$A^{-1} = \{x^{-1} \in G; x \in A\},$$

é um conjunto aberto ou fechado, se e somente se, A é aberto ou fechado, respectivamente. De fato, como a aplicação inversão $i(x) = x^{-1}$ é um homeomorfismo sobre G, segue–se que $A^{-1} = i(A)$; logo A^{-1} é aberto ou fechado se e somente se A é aberto ou fechado, respectivamente.

Em termos destas notações podemos definir vizinhança simétrica sobre um grupo de Lie.

Definição 1.9. *Uma vizinhança U da identidade em um grupo de Lie G é dita simétrica se $U = U^{-1}$.*

Observação 1.10. *Note que, se V é uma vizinhança arbitrária da identidade em G então V^{-1} também é uma vizinhança da identidade em G, e $V \cap V^{-1}$ é uma vizinhança simétrica.*

Observação 1.11. *Seja G um grupo de Lie, então qualquer subgrupo $H \subset G$ de interior não vazio é aberto (e portanto fechado). De fato, tome $x \in int(H)$ e um aberto dado por uma vizinhança da identidade V tal que $xV \subset H$ então $V = x^{-1}(xV) \subset H$ pois H é subgrupo. Portanto, se $y \in H$ então $y \in yV \subset H$, mostrando que todo ponto de H é interior, isto é, H é aberto. Assim, desde a Proposição 1.8 segue–se que H é fechado.*
Note também que, os subgrupos abertos de um grupo de Lie G são uniões de componentes conexas de G. Em particular, se o grupo é conexo ele é o único de seus subgrupos abertos. De fato, como é conhecido qualquer subconjunto A de um espaço topológico X que é ao mesmo tempo aberto e fechado é união de componentes conexas de X, isto é, se uma componente conexa $C \subset X$ satisfaz $C \cap A \neq \emptyset$ então $C \subset A$.

Proposição 1.12. *Seja G um grupo de Lie conexo, se V é uma vizinhança da identidade em G então*

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n,$$

onde V^n denota as potências de V.

Prova: Considerar $W = V \bigcap V^{-1}$, onde V é vizinhança da identidade em G. Note que W é uma vizinhança simétrica contida em V. Como $\bigcup\limits_{n \geq 1} W^n \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} V^n$, para mostrar que G é união de V^n, $n \geq 1$, basta mostrar que $G = \bigcup\limits_{n \geq 1} W^n$.

Observe que a união $\bigcup\limits_{n \geq 1} W^n$ é fechada, pois esta união esta constituida por potências de W e os produtos $W^2, W^3, \cdots$. Como W é simétrico, segue–se que, $(W^n)^{-1} = W^n$. Isso mostra que $\bigcup\limits_{n \geq 1} W^n$ é um subgrupo de G com interior não-vazio (pois, $W \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} W^n$). Portanto, $\bigcup\limits_{n \geq 1} W^n$ é um subgrupo aberto. Pela Proposição 1.8 segue–se que também é fechado. Finalmente, como G é conexo desde a segunda parte da Observação 1.11 obtemos que $G = \bigcup\limits_{n \geq 1} W^n$. $\square$

Finalizamos está subseção com dois resultados importantes da Teoria de Lie.

Teorema 1.13. *Qualquer subgrupo fechado de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie.*

Prova: Veja Hausner e Schwartz [12]. □

Teorema 1.14. *Seja G um grupo de Lie, e H um subgrupo de G. Se H é conexo por caminhos então H é um subgrupo de Lie de G.*

Prova: Veja H. Yamabe [8] e Kobayashi–Nomizu [11]. □

1.1.1 Grupos de Lie de matrizes

Nesta seção mostramos alguns grupos de Lie nos quais os seus elementos são matrizes.

Exemplo 1.15. *Seja $M(n,\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) : \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \ i,j = 1,...,n\}$ o espaço de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais. Denote por*

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{X \in M\,(n,\mathbb{R}) : det(X) \neq 0\}\,,$$

*o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais. Tem–se que $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie munido do produto usual de matrizes, chamado **grupo de Lie linear geral**.*
Para provar que $GL(n,\mathbb{R})$ mostraremos que ele satisfaz as exigências da Definição 1.1. Em primeiro lugar, veja que $GL\,(n,\mathbb{R})$ possui uma estrutura diferenciável, pois a aplicação $det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é contínua e visto que $GL(n,\mathbb{R}) = det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ segue–se que $GL(n,\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $M(n,\mathbb{R})$, sendo assim temos que $GL(n,\mathbb{R})$ é uma subvariedade diferenciável de $M(n,\mathbb{R})$.
Em segundo lugar, veja que $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo com respeito ao produto usual de matrizes. Com efeito: se $X, Y \in GL(n,\mathbb{R})$ então o produto $XY \in GL(n,\mathbb{R})$. Obviamente a matriz identidade $Id = (\delta_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$,

e se $X \in GL(n,\mathbb{R})$ temos que $X^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ pois a inversa de uma matriz não singular é também não singular.

Finalmente, verifica–se que as operações produto e inversão em $GL(n,\mathbb{R})$ são diferenciáveis. Com efeito,

i) se $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$ são elementos de $GL(n,\mathbb{R})$ então a aplicação

$$(X,Y) \in GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \mapsto XY \in GL(n,\mathbb{R})$$

é diferenciável, visto que as entradas da matriz XY dadas por $(xy)_{ij}$ são polinômios de grau dois nas variaveis x_{ij}, y_{ij}. Isto é, $XY = ((xy)_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}\right)$. Portanto, a aplicação produto é diferenciável.

ii) $X \in GL(n,\mathbb{R}) \mapsto X^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ também é diferenciável, pois as entradas da matriz inversa $(X^{-1})_{ij}$ são dadas pelas funções racionais $\frac{1}{det(X)}(\tilde{x}_{ij})$ onde $\tilde{x}_{ij}$ denota os coeficientes da matriz adjunta de X, e assim funções racionais nas entradas x_{ij} cujo denominador é o determinante de X diferente de zero. Portanto, a aplicação inversão é diferenciável.

Exemplo 1.16. *O conjuntos das matrizes*

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) : det(X) = 1\},$$

é um grupo de Lie, chamado grupo de Lie linear especial.

Com efeito, primeiro veja que $SL(n,\mathbb{R})$ é um grupo com as operações induzidas por $GL(n,\mathbb{R})$; pois, se $A, B \in SL(n,\mathbb{R})$ então $\det(AB) = \det A \det B = 1$, e assim $AB \in SL(n,\mathbb{R})$. Tambén, se $A \in SL(n,\mathbb{R})$ segue–se que $A^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$.

Por outro lado, as aplicações $\alpha : SL(n,\mathbb{R}) \times SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow SL(n,\mathbb{R})$ e $\beta : SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow SL(n,\mathbb{R})$ definidas por $(A,B) \longmapsto AB$ e $A \longmapsto A^{-1}$, respectivamente, são diferenciáveis. De fato, ditas aplicações são as restrições das aplicações produto e inversão sobre $GL(n,\mathbb{R})$.

Finalmente, verificarmos que $SL(n,\mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável. Para esta finalidade, considerar a aplicação $\det : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $A \longmapsto \det A$. Observe que, $SL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, consequêntemente, se provarmos que $1 \in \mathbb{R}$

é um valor regular da aplicação det *desde o Teorema da Função Implícita segue–se que* $SL\,(n,\mathbb{R})$ *é uma subvariedade de* $GL(n,\mathbb{R})$ *com a estrutura diferenciável induzida por* $GL(n,\mathbb{R})$*. Note–se que verificar que* $1 \in \mathbb{R}$ *é um valor regular da aplicação* det *é equivalente a mostrar que a aplicação,*

$$(d\det)_A : T_A M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow T_{\det A}\mathbb{R},$$

definida por $X \longmapsto (d\det)_A(X)$ *com* $A \in \det^{-1}(1)$*, é sobrejetora. Veja que,*

$$(d\det)_A(X) = \sum_{i=1}^{n} \det(A_1, \cdots, A_{i-1}, X_i, A_{i+1}, \cdots, A_n),$$

donde $A = (A_1, \cdots, A_n), X = (X_1, \cdots, X_n) \in M(n,\mathbb{R})$*, com* A_i *e* X_i *denotando as colunas da matriz* A *e* X*, respectivamente. Em particular,* $(d\det A)_I(X) = tr(X)$*, onde* I *denota a matriz identidade.*

Observe que, a aplicação $(d\det)_A$ *é sobrejetora; pois,* $\forall k \in \mathbb{R}$ *existe uma matriz* $X = (kA_1, 0, \cdots, 0) \in M(n,\mathbb{R})$ *tal que* $(d\det)_A(X) = k$*. Assim, temos provado que* $SL\,(n,\mathbb{R})$ *é um grupo de Lie.*

O grupo de Lie linear especial esta constituído de matrizes de ordem $n \times n$ unimodulares, e correspondem aos operadores $v \mapsto Xv$ que preservam o volume padrão em $\mathbb{R}^n$.

Agora introduzimos uma definição de certa classe de grupos de Lie que têm importância em diversas aplicações em ciências e engenharias.

Definição 1.17. *Um grupo de Lie* $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ *é chamado um grupo de Lie linear.*

O próximo resultado é uma condição suficiente para que um conjunto de matrizes seja um grupo de Lie linear.

Teorema 1.18. *Se* G *é um subgrupo fechado de* $GL(n,\mathbb{R})$ *então* G *é um grupo de Lie Linear.*

Prova: *Veja [5] e [16].* □

Exemplo 1.19. *O conjunto*

$$G = \mathrm{Gl}^{+}(n,\mathbb{R}) := \{ A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

é um grupo de Lie linear, pois G é um subgrupo fechado de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$. De fato, note que o produto de duas matrizes com determinante positivo é uma matriz que também possui determinante positivo, e a inversa de uma matriz de determinante positivo também possui determinante positivo. Portanto, segue–se desde o Teorema 1.18 que G é um grupo de Lie linear.

Observação 1.20. *O Teorema 1.18 nos diz que para verificarmos se um conjunto de matrizes $G \subset M(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie linear basta verificarmos a validade das três condições seguintes:*

(1) $G \subset GL(n,\mathbb{R})$,

(2) G é um grupo com respeito ao produto de matrizes, e

(3) G é topologicamente fechado em $GL(n,\mathbb{R})$.

Os próximos exemplos são alguns grupos de Lie lineares que serão usados em seções dos próximos capítulos deste trabalho, além do grupo linear geral $GL(n,\mathbb{R})$. Em todos os casos as hipóteses do Teorema 1.18 podem ser verificadas sem dificuldade. No entanto, isto também pode ser testado via a verificação das condições da Observação 1.20.

Exemplo 1.21. *O conjunto das matrizes ortogonais de ordem $n \times n$, dadas por*

$$O(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) | XX^{\top} = Id\},$$

onde $X^{\top}$ denota a transposta da matriz X, é um grupo de Lie, chamado grupo de Lie ortogonal.

Os elementos sobre $O(n,\mathbb{R})$ correspondem a transformações ortogonais que preservam o produto interno usual. Isto é, $\langle Xu, Xv\rangle = \langle u, v\rangle, \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.22. *O conjunto das matrizes ortogonais, dadas por*

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) | XX^T = Id, \;\; detX = 1\} = \{X \in O(n,\mathbb{R}) | \; detX = 1\}$$

é um grupo de Lie linear, conhecido como grupo ortogonal especial.

Os elementos do grupo ortogonal especial são transformações ortogonais que preservam ambos, a estrutura euclideana e a orientação em $\mathbb{R}^n$. Em particular, $SO(3,\mathbb{R})$ esta constituído pelas rotações do espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.23. *O conjunto G das matrizes*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x_1, \, x_2, \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

é um grupo de Lie 3–dimensional, conhecido na Literatura como grupo de Lie de Heisenberg de dimensão três.

Com efeito, primeiro observe que G é uma variedade diferenciável, pois a aplicação

$$\varphi : G \;\; \to \;\; \mathbb{R}^3, \quad \textit{definida por}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\; \mapsto \;\; \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (x_1, \, x_2, \, x_3)$$

é um difeomorfismo de G em $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, deste difeomorfismo, a multiplicação de matrizes em G induz sobre $\mathbb{R}^3$ a seguinte operação "$*$" definida por

$$(x_1, \, x_2, \, x_3) * (y_1, \, y_2, \, y_3) = (x_1 + y_1, \, x_2 + y_2, \, x_3 + y_3 + x_1 y_2) \,,$$

de modo que $(\mathbb{R}^3, *)$ é um grupo. Portanto, G identificado com $(\mathbb{R}^3, *)$ é um grupo de Lie.

1.1.2 Homomorfismos de Grupos de Lie

Definição 1.24. *Sejam G e H dois grupos de Lie. Chame–se* homomorfismo de grupos de Lie *ao homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ como grupos abstratos de modo que φ é uma aplicação de classe C^{∞}. Se φ é sobrejetiva dizemos que ela é um isomorfismo de grupos de Lie e denotamos $G \cong H$. Quando G e H coincidem o homomorfismo φ é chamado de endomorfismo. Ao endomorfismo que também é um isomorfismo é chamado de* automorfismo de grupos de Lie.

Exemplo 1.25. *O grupo de Lie ortogonal especial de dimensão 1,*

$$SO(2,\mathbb{R}) = \{A \in O(2,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

formado pelas matrizes

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ tal que } a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

e o grupo de Lie descrito pela circunferência unitária $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ são isomorfos. De fato, a aplicação

$$\varphi : G = SO(2,\mathbb{R}) \to H = S^1, \quad \text{definida por} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib,$$

está bem definida, pois $a^2 + b^2 = 1$ e φ é um homomorfismo bijetor. Por tanto, é um isomorfismo de grupos de Lie.

Definição 1.26. *Seja G um grupo de Lie, chama–se* subgrupo uniparamétrico *ou subgrupo a um parâmetro de G, ao homomorfismo de grupos de Lie de classe C^{∞},*

$$\alpha : \mathbb{R} \to G.$$

Isto é,

$$\alpha(t + t') = \alpha(t) \cdot \alpha(t'), \ \forall t, t' \in \mathbb{R}$$

Observação 1.27. *Desde a Definição 1.26 segue–se que,*

$$\alpha(0) = e \qquad e \qquad \alpha(-t) = (\alpha(t))^{-1}.$$

Além disso, note que se $\alpha : \mathbb{R} \to G$ *é um subgrupo a um parâmetro então* $\alpha(t)$ *é uma curva que passa pela identidade de* G *e induz o vetor tangente* $(d\alpha)_0(1) = \alpha'(0) \in T_eG$*, onde a aplicação* $(d\alpha)_0 : \ T_0\mathbb{R} \longrightarrow T_{\alpha(0)}G = T_eG = \mathfrak{g}$*, está dada por* $1 \mapsto (d\alpha)_0(1)$*. Portanto, tem–se uma correspondência injetiva entre* G *e o seu espaço tangente.*

Exemplo 1.28. *Seja* $G = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ *o grupo de Lie ortogonal especial. A aplicação*

$$\alpha : \mathbb{R} \to G, \quad \textit{definida por} \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & sen\ (t) \\ -\ sen\ (t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

define um subgrupo a um parâmetro de G*.*

Com efeito, veja que,

$$\begin{aligned} \alpha(s+t) &= \begin{pmatrix} \cos(t+s) & sen\ (t+s) \\ -\ sen\ (t+s) & \cos(t+s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(t) -\ sen\ (t)\ sen\ (s) & sen\ (s)\cos(t) + \cos(s)\ sen\ (t) \\ -\ sen\ (s)\cos(t) - \cos(s)\ sen\ (t) & \cos(t)\cos(t) -\ sen\ (t)\ sen\ (s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & sen\ (t) \\ -\ sen\ (t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s) & sen\ (s) \\ -\ sen\ (s) & \cos(s) \end{pmatrix} \\ &= \alpha(s)\,\alpha(t). \end{aligned}$$

Além disso, $(d\alpha)_0(1) = \alpha'(0) = A \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$*, por tanto,* α *é um subgrupo a um parâmetro do grupo de Lie* $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$*.*

1.1.3 Campos invariantes

A noção de campos invariantes está associada ao conceito de translação sobre grupos de Lie.

Definição 1.29. *Seja G um grupo de Lie, chama–se campo* invariante à esquerda *(c.i.e.) sobre G, ao campo de vetores $X : G \to TG$ que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$X(L_g(h)) = (dL_g)_h(X(h)), \quad \text{para todo } \; g, h \in G,$$

onde $L_g : G \to G$ é a aplicação translação à esquerda, $(dL_g)_h : T_hG \to T_{gh}G$ o seu diferencial, e $TG = \dot{\bigsqcup\limits_{g\in G}} T_gG$ denota como usualmente o fibrado tangente de G.
Em particular, quando $h = e$ obtemos $X(g) = (dL_g)_e(X(e))$. Assim, dizer que um campo de vetores X sobre um grupo de Lie é invariante pela esquerda, significa que X é preservado pela translação à esquerda sobre G.

De modo semelhante, define-se campo invariante à direita.

Exemplo 1.30. *Seja $\mathbb{R}^n$ o grupo de Lie com a operação de adição. Note que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ a translação à esquerda $L_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está definida por $L_x(y) = x + y$. Assim, $(dL_x)_0(v) = v$. Tomando a base cañonica estándar $\{e_1, \cdots, e_n\}$ para o espaço tangente $T_0\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ tem–se*

$$X(x) = (dL_x)_0X(0) = (dL_x)_0\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (dL_x)_0 e_i = X(0).$$

Assim, os campos de vetores invariantes à esquerda sobre $\mathbb{R}^n$ são os campos de vetores constantes.

Proposição 1.31. *Os campos invariantes à esquerda são diferenciáveis e estão em correspondência bijetiva com o espaço vetorial T_eG, tangente a G na identidade e.*

Prova: *Primeiro, veja que um campo invariante à esquerda sobre o grupo de Lie G é diferenciável, pois a operação produto em G é diferenciável, e para todo $g \in G$ um campo de vetores invariante pela esquerda esta definido por, $X(g) = (dL_g)_e(X(e))$ com $X(e) \in T_eG$.*

Para verificar a correspondência bijetiva entre o conjunto de campos de vetores invariantes pela esquerda e o espaço tangente na identidade de G, defina a aplicação

$$\Phi : \{ \text{ campos invariantes pela esquerda sobre } G\} \to T_eG, \quad X \mapsto \Phi(X) = X(e).$$

Note que Φ é injetiva, pois se $\Phi(X) = \Phi(Y)$, segue–se que $X(e) = Y(e)$. Assim, para todo $X, Y \in \{$ campos invariantes pela esquerda sobre $G\}$ e $g \in G$ temos,

$$X(g) = (dL_g)_e(X(e)) = (dL_g)_e(Y(e)) = Y(g).$$

Por tanto, $X = Y$.

Para provar a sobrejetividade de Φ, seja $v \in T_eG$ um vetor e defina o campo de vetores à esquerda no ponto $g \in G$ por $X_v(g) = (dL_g)_e(v)$. Observe, que X_v é um campo de vetores invariante à esquerda e satisfaz $X_v(e) = v$, provando a sobrejetividade de Φ. □

O próximo resultado estabelece uma relação entre o espaço tangente em pontos distintos sobre um grupo de Lie.

Proposição 1.32. *A diferencial da aplicação translação à esquerda L_g*

$$(dL_g)_h : T_hG \to T_{gh}G.$$

induz um isomorfismo entre os espaços tangentes T_hG e $T_{gh}G$.

Observação 1.33. *Apartir da Proposição 1.32 temos que os campos de vetores invariantes sobre um grupo de Lie estão determinados por seu valor na identidade do grupo.*

1.2 Álgebras de Lie

Nesta seção vamos introduzir alguns fundamentos de álgebras de Lie. Iniciamos, com a noção de álgebra de Lie,

Definição 1.34. *Uma* álgebra de Lie *é um espaço vectorial V, sobre um corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo, munido de uma aplicação produto (usualmente chamado de colchete de Lie),*

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) é bilinear, ou seja,

$$[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y], \text{ e}$$

$$[X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2], \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in V.$$

ii) é anti-simétrico, isto é, $[X, Y] = -[Y, X], \quad \forall X, Y \in V$, *e*

iii) satisfaz a identidade de Jacobi, isto é,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \ \forall X, Y, Z \in V.$$

A dimensão da álgebra de Lie V é a dimensão de V visto como espaço vetorial.

Exemplo 1.35. O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do colchete $[X, Y] = X \times Y$ induzido desde o produto vetorial usual $\times$, é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.36. O espaço $M(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com coeficientes reais, munido do colchete (chamado comutador),

$$[A, B] = AB - BA, \quad X, Y \in M(n, \mathbb{R})$$

é uma álgebra de Lie.

Observação 1.37. *Note que se X e Y são campos invariantes à esquerda (respectivamente à direita) então o colchete de Lie $[X, Y]$ é invariante à esquerda (respectivamente à direita). Assim tanto, o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda, quanto campos invariantes à direita são subálgebras de Lie da álgebra de Lie de todos os campos de vetores em G. As correspondências bijetivas mencionadas acima permitem dar ao espaço tangente ao grupo G na identidade uma estrutura de álgebra de Lie. Isto é, dados X_1, X_2 campos invariantes à esquerda, o isomorfismo $\Phi(X_i) = X_i(e)$ $i = 1, 2$ (definido na Proposição 1.31) induz o colchete $[X_1(e), X_2(e)] = [X_1, X_2](e)$ em T_eG.*

Observação 1.38. *Sejam G um grupo de Lie, X e Y campos de vetores invariantes pela esquerda, e $a, b \in \mathbb{R}$. Desde a linearidade da aplicação $(dL_g)_e : T_eG \longrightarrow T_gG$ tem–se,*

$$(dL_g)_e\,(aX + bY)\,(e) = a(dL_g)_e X(e) + b(dL_g)_e X(e) = aX(g) + bY(g),$$

assim, $aX + bY \in \mathfrak{g}$. Também,

$$(dL_g)_e\,([X, Y]\,(e)) = [(dL_g)_e X(e), (dL_g)_e Y(e)] = [X, Y]\,(g).$$

Logo, o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda sobre G é um espaço vetorial.

Além disso, o colchete de campos invariantes à esquerda é bilinear, antisimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi.

En virtude da Observação 1.38 e Proposição 1.31 podemos introduzir a seguinte definição.

Definição 1.39. *Seja G um grupo de Lie, chama-se álgebra de Lie de G, denotado por $\mathfrak{g}$ ao conjunto de campos de vetores invariantes à esquerda sobre G.*

Pela Proposição 1.32 segue–se que, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G pode também ser obtido desde o espaço tangente na identidade do grupo, T_eG.

Definição 1.40. *Seja $\{X_i\}_{i=1,\ldots,r}$ uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong T_eG$ (correspondente ao grupo de Lie G, r–dimensional). Chamamos de* constantes de estrutura *de $\mathfrak{g}$ aos números $C^i_{jk} \in \mathbb{R}$ que satisfazem as relações*

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{r} C^i_{jk} X_i \in \mathfrak{g}, \tag{1.1}$$

Quando $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, somente existe uma constante de estrutura, e ela é nula. Assim, $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Daí, segue–se que as álgebras de Lie 1–dimensionais são sempre abelianas.

Observação 1.41. *As relações (1.1) implicam que*

$$[X_j, X_k](g) = \sum_{i=1}^{r} C_{jk}^i X_i(g),$$

para todo $g \in G$.

No contexto de grupos de Lie de matrizes, o espaço tangente a um grupo de Lie G em um ponto qualquer $X \in G$ é explicitada na prôxima proposição,

Proposição 1.42. *Seja G um grupo de Lie de matrizes com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $X \in G$. O espaço tangente em X esta dado por*

$$T_X G = X T_{Id} G = X\mathfrak{g} = \{XA \mid A \in \mathfrak{g}\},$$

onde $T_{Id}G$ denota o espaço tangente na matriz identidade $Id \in G$.

Prova: *Veja que*

$$T_X G = \{\dot{Z}(0) \mid Z : t \in J \subseteq \mathbb{R} \mapsto Z(t) \in G, Z(0) = X\}.$$

Vamos mostrar que $T_X G \subset X T_{Id} G = X\mathfrak{g}$, ou seja, que para cada $Y \in T_X G$ existe $A \in T_{Id} G$ tal que $Y = XA$. Com efeito, existe uma curva diferenciável $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ tal que $Z(0) = X$ e $\dot{Z}(0) = Y$. Defina a curva diferenciável $Y(t) = X^{-1} \cdot Z(t)$ obtida transladando $Z(t)$ pela esquerda por $X^{-1} \in G$. Note que $Y(t)$ passa pela identidade, pois $Y(0) = X^{-1}Z(0) = X^{-1}X = Id$. Também, $\dot{Y}(0) = X^{-1}\dot{Z}(0)$. Isso mostra que $\dot{Y}(0) = X^{-1}\dot{Z}(0) \in T_{Id}G$.

Agora, basta tomar $A = \dot{Y}(0)$ e observar que $XA = X\dot{Y}(0) = XX^{-1}\dot{Z}(0) = (Id)\dot{Z}(0) = \dot{Z}(0) = Y$. Assim, $T_X G \subset X T_{Id} G = X\mathfrak{g}$; e uma vez que esses espaços possuem a mesma dimensão segue que $T_X G = X T_{Id} G = X\mathfrak{g}$. □

Definição 1.43. *Chama–se campo de vetores invariantes à esquerda no grupo de Lie de matrizes Linear geral G, ao campo de vetores da forma*

$$V(X) = XA, \ \ \forall X \in G, \ \ A \in \mathfrak{g} \text{ fixado},$$

onde $\mathfrak{g}$ denota a álgebra de Lie de matrizes de G.

As considerações feitas anteriormente mostram que podemos definir a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *de um grupo de Lie linear* G *do seguinte modo:*

$$\mathfrak{g} := T_{Id}G \quad = \quad \{A \in M(n, \mathbb{K}) : V(X) = XA, \ \textit{é um campo de vetores invariante}\},$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Mais adiante, veremos que é possível determinar o espaço tangente $T_{Id}G$ *por,*

$$\mathfrak{g} := T_{Id}G \quad = \quad \{A \in M(n, \mathbb{K}) : \quad \exp(tA) \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}\},$$

onde $\exp(A)$ *denota a aplicação exponencial usual de uma matriz* A.

Seguidamente, daremos alguns exemplos de álgebras de Lie de grupos de matrizes.

Lembramos agora a definição do colchete de Lie entre duas funções,

Definição 1.44. *Sejam* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *aplicações diferenciáveis . Se define o colchete de Lie entre* f *e* g *por*

$$[f, g](x) = Df(x)(g(x)) - Dg(x)(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde Df *e* Dg *denota a matriz Jacobiana de* f *e* g*, respectivamente.*

Em particular, se f e g são aplicações lineares, isto é, $f(x) = Ax$ e $g(x) = Bx$ onde $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ então obtemos imediatamente que

$$[A, B](x) = (AB - BA)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \text{ ou seja } [A, B] = AB - BA.$$

Por tanto, o comutador de matrizes $[A, B] = AB - BA \in M(n, \mathbb{R})$ será usualmente usado como o colchete sobre o espaço tangente a um grupo de Lie linear G na identidade $T_{Id}G$, quando o mesmo é identificado com o conjunto de campos de vetores invariantes.

Exemplo 1.45. *A álgebra de Lie do grupo das matrizes invertíveis, denotada por* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *ou também por* $M(n, \mathbb{R})$*, esta definida por*

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \{\dot{X}(0) | X(t) \in GL(n, \mathbb{R}), X(0) = Id\}.$$

Com efeito, considere a curva $X:\mathbb{R}\longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ *definida por*

$$X(t)=\left(\begin{array}{ccc} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{array}\right).$$

Note que, $g(t)=det\,(X(t))\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Então,*

$$\left|\begin{array}{ccc} x'_{11}(t) & \cdots & x'_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{array}\right|+\cdots+\left|\begin{array}{ccc} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{(n-1)1}(t) & \cdots & x_{(n-1)n(t)}\\ x'_{n1}(t) & \cdots & x'_{nn}(t)\end{array}\right|=g'(t)\in\mathbb{R}.$$

Por outra parte, a curva $X(t)$ *sobre* $GL(n,\mathbb{R})$ *deve passar pela identidade no instante de tempo* $t=0$, *assim* $X(t)$ *deve cumprir que* $X(0)=Id$. *Por tanto, obtemos*

$$g'(0)=x'_{11}(0)+x'_{22}(0)+\cdots+x'_{nn}(0),$$

ou seja, $g'(0)=tr\dot{X}(0)=k\in\mathbb{R}$.

Sendo assim, dada uma matriz qualquer $A\in M(n,\mathbb{R})$ *com* $trA=k$, *existe uma curva diferenciável* $X(t)$ *satisfazendo* $X(0)=Id$ *e* $\dot{X}(0)=A$. *Por tanto,* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=M(n,\mathbb{R})$.

Observação 1.46. *Outra maneira, mais elegante, de determinarmos a álgebra de Lie de* $GL(n,\mathbb{R})$ *é dada a seguir:*

Uma vez que o vetor velocidade $\dot{X}(t)=(\dot{x}_{ij}(t))$ *é uma matriz* $n\times n$ *segue que*

$$\dot{X}(0)=(\dot{x}_{ij}(0))=A\in M(n,\mathbb{R}).$$

Isto nos dá $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=T_{Id}GL(n,\mathbb{R})\subset M(n,\mathbb{R})$. *Para obtermos a inclusão oposta, dada* $A\in M(n,\mathbb{R})$ *uma matriz qualquer exibiremos uma curva* $X(t)$ *satisfazendo:*

(1) $X(t)\in GL(n,\mathbb{R})$,

(2) $X(0)=Id$ *e* $\dot{X}(0)=A$.

A curva $X(t) = Id + tA$ satisfaz a condição (2). Para ver que a condição (1) também é cumprida, note que $GL(n,\mathbb{R})$ é um conjunto aberto em $M(n,\mathbb{R})$ por ser imagem inversa do aberto $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ pela aplicação determinante que é contínua. Como $Id \in GL(n,\mathbb{R})$ segue que para t suficientemente próximo de zero $X(t) = Id + tA \in GL(n,\mathbb{R})$. Consequentemente,

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = T_{Id}GL(n,\mathbb{R}) = M(n,\mathbb{R})$$

Deve-se observar que

$$A = \left(A - \frac{1}{n}tr(A)Id\right) + \left(\frac{1}{n}tr(A)Id\right), \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$$

ou seja,

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}Id.$$

Exemplo 1.47. *A álgebra de Lie do grupo de Lie linear especial, unimodular, $SL(n,\mathbb{R})$, descrito por*

$$T_{Id}SL\left(n,\mathbb{R}\right) = \left\{\dot{X}\left(0\right) : X\left(t\right) \in SL\left(n,\mathbb{R}\right), \quad X\left(0\right) = Id\right\},$$

esta dado pelo conjunto das matrizes de traço nulo,

$$\mathfrak{sl}\left(n,\mathbb{R}\right) = \left\{A \in M\left(n,\mathbb{R}\right) : tr\left(A\right) = 0\right\}.$$

Com efeito, como na primeira parte do Exemplo 1.45, porém considerando agora que $detX(t) = 1$ obtemos

$$tr\left(\dot{X}\left(0\right)\right) = x_{11}^{'}(0) + x_{22}^{'}(0) + \cdots + x_{nn}^{'}(0) = 0,$$

e a afirmação segue conforme desejado.

Exemplo 1.48. *A álgebra de Lie do grupo $\mathrm{O}\left(n,\mathbb{R}\right)$ esta dada por*

$$\mathfrak{o}\left(n,\mathbb{R}\right) = \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid X + X^{\top} = 0\right\},$$

Isto é, a álgebra $\mathfrak{o}\left(n,\mathbb{R}\right)$ está formada das matrizes reais $n \times n$ antisimétricas.

Com efeito, seja

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$$

uma curva sobre $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ *com*

$$\gamma(0) = Id.$$

Neste caso,

$$\gamma(s)\ \gamma(s)^{\top} = Id, \quad \forall\ s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Derivando a expressão anterior e avaliando em $s = 0$*, tem–se*

$$\gamma'(0)\ \gamma(0)^{\top} + \gamma(0)\ \gamma'(0)^{\top} = 0.$$

Como

$$\gamma(0) = Id \quad \Longrightarrow \quad \gamma(0)^{\top} = Id,$$

resulta que

$$\gamma'(0) \cdot Id + Id \cdot \gamma'(0)^{\top} = 0.$$

Mais ainda,

$$\gamma'(0) + \gamma'(0)^{\top} = 0.$$

Logo, esta condição determina restrições para que uma matriz $\gamma'(0) \in T_{Id}\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ *seja um elemento da álgebra de Lie* $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.49. *A álgebra de Lie do grupo* $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ *esta dada por*

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \left\{ X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^{\top} = 0 \right\}.$$

Com efeito, primeiro note que qualquer curva

$$\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$$

com $\gamma(0) = Id$*, cumpre que*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\det(\gamma(t))) = \mathrm{tr}(\gamma'(0)),$$

pois, se definimos

$$\epsilon(t) := \gamma(t) - Id,$$

tem–se

$$\det(\gamma(t)) = 1 + \operatorname{tr}(\epsilon(t)) + \mathrm{O}\left(t^2\right).$$

Tendo em conta que

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\epsilon}(t),$$

obtemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\det(\gamma(t))) = \operatorname{tr}(\epsilon'(0)) = \operatorname{tr}(\gamma'(0)).$$

Seja agora γ uma curva em $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ com $\gamma(0) = Id$. Como

$$\gamma(s)\ \gamma(s)^\top = Id, \quad \textit{para todo } s,$$

obtemos a relação

$$\gamma'(0) + \gamma'(0)^\top = 0.$$

A condição

$$\det(\gamma(s)) = 1,$$

para todo s, implica que

$$\operatorname{tr}(\gamma'(0)) = 0.$$

Assim, um elemento de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ através do vetor tangente $\gamma'(0)$ à curva $\gamma(t)$ deve satisfazer $\gamma'(0)^t = -\gamma'(0)$ e $\operatorname{tr}(\gamma'(0)) = 0$. Estas condições são trivialmente satisfeitas quando $\gamma'(0)$ é uma matriz antisimétrica.

Note que

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}),$$

no entanto, os respetivos grupos de Lie $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ não são isomorfos.

Exemplo 1.50. *A álgebra de Lie do grupo*

$$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) : \det A = 1 \ \ e \ AA^{\top} = I \right\}.$$

das rotações em $\mathbb{R}^3$*, esta dado pelo conjunto das matrizes antisimétricas em* $\mathrm{M}(3,\mathbb{R})$*. Isto é,*

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} : \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Também escrito como

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) = \mathrm{Span}_{\mathcal{L}.\mathcal{A}.} \left\{ Y^1,\, Y^2 \right\},$$

onde $\{Z_i\}_{LA}$ *denota o espaço gerado pelo conjunto* $\{Z_i\}$ *e pelos colchetes de seus elementos.*

Note que o colchete de Lie, $[Y^1, Y^2] = Y^3$*.*

Com efeito, como é conhecido sobre $\mathbb{R}^3$ *as rotações em torno dos eixos coordenados são:*

$$R_1(t) \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\,sen\,t \\ 0 & sen\,t & \cos t \end{pmatrix}, \quad R_2\,(t) \ = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\,sen\,t \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\,t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad e$$

$$R_3\,(t) \ = \begin{pmatrix} \cos t & -\,sen\,t & 0 \\ sen\,t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qualquer outra rotação em $\mathbb{R}^3$ *é obtida desde elas. Estas matrizes são claramente curvas sobre* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *que passam a través da identidade. Como conseqüência disto, derivando essas curva em relação ao tempo e avaliando em* $t = 0$ *obtemos uma base de* $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$*. Assim, a álgebra de Lie do grupo ortogonal especial* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *está gerada pelos elementos,*

$$Y^1 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^2 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e$$

$$Y^3 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 1.51. *A álgebra de Lie do grupo de Heisenberg G de dimensão três é nilpotente, e esta gerada por*

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com efeito, em relação à base de vetores do espaço Euclideano de dimensão três, podemos definir curvas que passam através da identidade em G. Primeiro, defina a curva

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3, \quad \textit{dada por} \\ t &\rightsquigarrow \gamma(t) = (t, 0, 0). \end{aligned}$$

para o vetor $e_1 = (1, 0, 0)$. Note que γ é uma curva que passa pela origém de $\mathbb{R}^3$, isto é, $\gamma(0) = (0, 0, 0)$. Também, $\dot{\gamma}(0) = e_1$. Assim, definindo $\phi = \varphi^{-1} \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$, onde $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é o difeomorfismo definido anteriormente no Exemplo 1.23, obtemos uma curva sobre G passando pela identidade, dada por

$$\phi(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Então, tomando a derivada em relação ao tempo, em $t = 0$ (curva passando pela identidade), obtemos um dos geradores da base para a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Isto é,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y^1 \in \mathfrak{g}.$$

De maneria semelhante, dependendo de e_2 y e_3, respectivamente obtenemos Y^2 e Y^3. Note que, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Heisenberg de dimensão três, pode ser escrita em térmo de seus geradores, por

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Span}\left\{Y^1,\, Y^2,\, Y^3\right\}.$$

Desde que $[Y^1, Y^2] = Y^3$ é o único colchete de Lie no nulo tem–se,

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Span}_{\mathcal{L}.\mathcal{A}.}\left\{Y^1,\, Y^2\right\}.$$

Note também, Y^3 pertence a $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, o centro de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.52. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete de Lie. Isto é, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.*

Definição 1.53. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é chamado de ideal se $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$.*

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.54. *Considere o grupo de Lie 2–dimensional,*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, x, y \in \mathbb{R} \text{ com } x \neq 0 \right\}.$$

Identificando G com $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } y\ \}$ podemos considerar a operação sobre G dada por

$$(a, b) * (x_1, x_2) = (ax_1,\ b + ax_2)\,.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *de* G *é*

$$\mathfrak{g} = \left\{ Y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

com o colchete de Lie

$$\left[Y^1, Y^2\right] = Y^2.$$

Assim, $\mathfrak{h} = \langle Y^1 \rangle$ *e* $\mathfrak{a} = \langle Y^2 \rangle$ *são subalgebras de Lie de* $\mathfrak{g}$. *Mais ainda,* $\mathfrak{a} = \langle Y^2 \rangle$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$.

A seguinte noção é importante,

Definição 1.55. *Duas álgebras de Lie* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$ *são isomorfas se existir um isomorfismo* σ *entre os espaços vetoriais associados e satisfaz satisfazendo*

$$\sigma([X, Y]_{\mathfrak{g}_1}) = [\sigma(X), \sigma(Y)]_{\mathfrak{g}_2}$$

, onde $[,]_{G_1}$ *e* $[,]_{G_2}$ *denotam, respectivamente, o colchete de Lie em* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$.

Exemplo 1.56. $(\mathbb{R}^3, \times)$ é isomorfa a $(so(3,\mathbb{R}), [\ ,\ ])$. O isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & \mathbb{R} & \to & so(3,\mathbb{R}) \\ & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

onde o símbolo " $\times$ " denota o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$.

1.3 Aplicação Exponencial

A aplicação exponencial é a mais importante relação entre um grupo de Lie e sua álgebra de Lie. Em muitas situações é possível abordar um problema sobre grupos de Lie usando apenas informação ao nível de sua álgebra de Lie. Assim, é possível resolver algumas perguntas aparentemente complicadas no nível de grupo usando apenas a informação ao nível de sua álgebra de Lie.

Antes de estabelecer a relação entre grupos e álgebras de Lie, primeramente discutiremos algumas propriedades de subgrupos uniparamétricos relacionados com grupos e álgebras de Lie. Iniciamos com o resultado que afirma que todo subgrupo uniparamétrico de um grupo de Lie define um elemento de sua álgebra de Lie, e viceversa.

Proposição 1.57. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado $X \in \mathfrak{g}$ arbitrário existe um subgrupo a um paramétro $\alpha : \mathbb{R} \to G$ tal que $\alpha'(0) = X$, e viceversa.*

Prova: *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to G,\ t \mapsto \alpha(t)$, um subgrupo a um parâmetro em G. Então, $\alpha(t)$ define uma curva que passa pela identidade $e \in G$, e obtemos o vetor tangente*

$$\alpha'(0) \in T_eG \cong \mathfrak{g}.$$

Recíprocamente, dado um campo de vetores invariante à X sobre G, tem–se uma única curva integral de X,

$$\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G,$$

satisfazendo

$$\beta(0) = e,$$

e também

$$\beta'(t) = X(\beta(t)) = X_{\beta(t)}.$$

Por outra parte, dado $g \in G$ a aplicação $L_g \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G$, onde $L_g : G \to G$ é a translação pela esquerda em G, define uma curva sobre G da seguinte forma

$$(L_g \circ \beta)(t) = L_g(\beta(t)) = g \cdot \beta(t),$$

e como X é invariante, tem–se

$$\frac{d}{dt}(L_g \circ \beta) = dL_g(\beta'(t)) = (dL_g)_{\beta(t)}\left(X_{\beta(t)}\right) = X_{g\cdot\beta(t)}.$$

Assim,

$$(L_g \circ \beta)(t) = g \cdot \beta(t)$$

é também uma curva integral de X.

Agora, fixe $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Note que, $\alpha(s) \cdot \alpha(t)$ é uma curva integral de X a mesma que em $t = 0$ toma o valor

$$\alpha(s) \cdot \alpha(0) = \alpha(s) \cdot e = \alpha(s).$$

Para s fixado temos que $\beta(t) := \alpha(t + s)$ é também uma curva integral de X com

$$\beta(0) := \alpha(s).$$

Assim, segue–se da unicidade de equações diferenciais,

$$\alpha(s) \cdot \alpha(t) = \beta(t) = \alpha(t + s).$$

Por tanto, $X \in \mathfrak{g}$ define um único subgrupo uniparamétrico, que denotamos por α_X en G, caracterizado por $\alpha'_X(0) = X$, e também satisfaz

$$\alpha_X(t + s) = \alpha_X(t) \cdot \alpha_X(s), \quad \alpha_X(0) = e.$$

$\square$

Proposição 1.58. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $\alpha_X : \mathbb{R} \to G$ um subgrupo a um paramétro correspondente a qualquer $X \in \mathfrak{g}$. Para todo $t \in \mathbb{R}$ tem–se*

$$\alpha_{tX}(1) = \alpha_X(t).$$

Prova: *Dado t considere os seguintes dois subgrupos uniparamétricos*

$$s \mapsto \alpha_{tX}(s) \qquad e \qquad s \mapsto \beta(s) := \alpha_X(ts).$$

Note que,

$$\left.\frac{d\alpha_{tX}(s)}{ds}\right|_{s=0} = tX_e \qquad e \qquad \left.\frac{d\beta}{ds}\right|_{s=0} = \alpha_X(t \cdot 0)\, t = tX_e.$$

Assim,

$$\alpha_{tX}(s) = \alpha_X(ts), \quad \forall s$$

Em particular, tomando $s = 1$ a prova é concluida. $\square$

Agora podemos introduzir a noção de aplicação exponencial.

Definição 1.59. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos a aplicação exponencial por*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

com

$$\exp(X) := \alpha_X(1)$$

onde $\alpha_X(1)$ é o valor do subgrupo a um paramétro $\alpha_X(t)$ correspondente a $X \in \mathfrak{g}$ no instante de tempo $t = 1$.

Proposição 1.60. *A aplicação exponencial satisfaze as seguintes propriedades:*

1. $\exp(tX) = \alpha_{tX}(1) = \alpha_X(t)$;
2. $\exp(t_1 X) \cdot \exp(t_2 X) = \exp((t_1 + t_2) X)$, *para todo $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;*
3. *Se X é um campo de vetores invariante à esquerda então o fluxo de X é dado pela fórmula*
$$X_t(g) = R_{\exp(tX)}(g) = g \exp(tX), \quad g \in G$$

Prova: *O item (1) segue desde a definição anterior e as propriedades de subgrupos a um parâmetro.*

Note que, $\exp(t_1 X) \cdot \exp(t_2 X) = \alpha_X(t_1) \cdot \alpha_X(t_2) = \alpha_X(t_1 + t_2) = \exp((t_1 + t_2) X)$.
A última afirmação segue–se diretamente. $\square$

Observação 1.61. *A aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *não necessariamente é sobrejetora, e a imagem de* $\exp$ *está contida na componente da identidade de G. Veja o Exemplo 1.62, abaixo.*

Exemplo 1.62. *Considere o grupo de Lie*

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

Note que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix},$$

com $r < -1$ pertence ao grupo G e não pode ser expressada como $A = \exp X$, para algum X em $\mathfrak{g}$.

Teorema 1.63. *A aplicação* exp *é um difeomorfismo local, especificamente, estabelece um difeomorfismo entre uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ e outra de $e \in G$.*

Prova:

Note que $T_0\mathfrak{g}$ esta identificado com $\mathfrak{g}$, pois qualquer $Y \in \mathfrak{g}$ pode ser visto como um elemento de $T_0\mathfrak{g}$ determinado pela curva $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}$ sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definida por

$$s \mapsto \beta(s) = sY \in \mathfrak{g}.$$

Portanto, a aplicação $(d\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ satisfaz

$$(d\exp)_0\,(Y) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\exp\,(sY)),$$

pois, $(d\exp)_0\,(Y)$ é o vetor tangente à curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dada por $s \mapsto \exp\,(sY)$, na identidade do grupo $e \in G$.

Desde a Proposição 1.58 tem–se

$$d\exp\,(Y) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\exp\,(sY)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\alpha_Y\,(s)) = \alpha'_Y\,(0) = Y_e = Y.$$

Assim, $d\exp$ é a aplicação identidade. Logo, a aplicação lineal $d\exp$, induzida entre os espaços tangentes $T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ é um isomorfismo; e a prova segue então como *conseqüência do Teorema da Aplicação Inversa.* □

Corolário 1.64. *Seja G um grupo de Lie conexo. Se $g \in G$ então existem $X_1, \cdots, X_k$ em $\mathfrak{g}$ tal que*

$$g = \exp(X_1) \cdots \exp(X_k).$$

Prova: *Desde a Proposição 1.63 a aplicação $\exp$ é um difeomorfismo local. Assim, existem vizinhanças U de $0 \in \mathfrak{g}$ e V de $e \in G$ tal que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo. Por tanto, como G é conexo segue que V^n formado por elementos da forma $g_1 \cdots g_n$ com $g_i = \exp(X_i) \in V$, gera G. Isto é,*

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

Como um elemento de V^n é um produto de exponências, tem–se que qualquer elemento $g \in G$ é também um produto de exponências. □

Proposição 1.65. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ suas correspondentes álgebras de Lie. Se H possui no máximo um conjunto enumerável de componentes então*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H, \ para\ todo\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Prova: *Veja [7].* □

Corolário 1.66. *Sejam G um grupo de Lie e H_i, $i = 1, 2$ dois subgrupos de Lie cada um deles com uma quantidade enumerável de componentes. Se $H_1 = H_2$ como conjuntos então $H_1 = H_2$ como grupos de Lie.*

Prova: *De fato, desde Proposição 1.65 mostra que H_1 e H_2 têm a mesma álgebra de Lie.* □

Proposição 1.67. *Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $X_1, \cdots, X_n$ em $\mathfrak{g}$. Se $X_1, \cdots, X_n$ geram $\mathfrak{g}$ então todo $g \in G$ é um produto finito de elementos da forma $\exp(tX_i)$ onde $t \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \cdots, n$.*

Prova: *Seja $G^{'}$ o conjunto de todos os produtos finitos de elementos da forma $\exp(tX_i)$. Note que $G^{'}$ é um subgrupo de G conexo por caminhos. Portanto, segue desde o Teorema 1.14 que $G^{'}$ é um subgrupo de Lie de G conexo. Por outro lado, veja que $G^{'}$ contém os subgrupos a 1–parâmetro gerados por $X_1, \cdots, X_n$. Portanto, $X_1, \cdots, X_n$ pertencem a $\mathfrak{g}$. Então, pelo Corolário 1.66 segue–se que $G^{'} = G$, e a prova está completa.* $\square$

Observação 1.68. *Note que, se G_1 e G_2 são dois grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ isomorfas, então pelo Teorema 1.63 as aplicações exponenciais de ambos grupos permitem estabelecer um difeomorfismo entre um entorno da identidade de G_1 e G_2, respectivamente. Mas, os grupos G_1 e G_2 não são necessariamente isomorfos; por exemplo os grupos de Lie $\mathrm{SO}\,(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{O}\,(n, \mathbb{R})$ possuem a mesma álgebra, porém, não são isomorfos.*

Proposição 1.69. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. O homomorfismo*

$$f : G \to H$$

induz um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

denotado por df.

Prova: *Note que f aplica o elemento identidade de G no elemento identidade $e^{'} = f(e)$ de H. Logo, f induz um homomorfismo de espaços vetoriais*

$$(df)_e : T_eG \to T_{e'}H$$

Na verdade, induz o homomorfismo de álgebras de Lie com o colchete de Lie, como desejado. □

Proposição 1.70. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então*

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi,$$

onde $(d\varphi)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Isto é, o seguinte diagrama é commutativo,

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{g} & \overset{d\varphi}{\to} & \mathfrak{h} & \\ \exp_{\mathfrak{g}} & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \exp_{\mathfrak{h}} \\ & G & \underset{\varphi}{\to} & H & \end{array}.$$

Prova: *Sejam $X \in \mathfrak{g}$ e α_X o correspondente subgrupo a um parâmetro em G. Então, $\varphi \circ \alpha_X : \mathbb{R} \longrightarrow H$, $t \mapsto (\varphi \circ \alpha_X)(t) = \varphi(\exp tX)$ é um homomorfismo de grupos de Lie. Na verdade, $\varphi \circ \alpha_X$ é um subgrupo a um parâmetro em H, pois é a composta de dois homomorfismos de grupos de Lie. Assim,*

$$\varphi \circ \alpha_X := \alpha_Y, \quad \textit{para algum } Y \in \mathfrak{h}$$

Note que, a aplicação $t \mapsto \alpha_Y(t) := \varphi(\exp tX)$ é uma curva diferenciável em H cuja derivada em 0 satisfaz

$$Y = \alpha'_Y(0) = \varphi'(\alpha'_X(0)) = (d\varphi)_e(X(e)).$$

Logo,

$$Y = d\varphi(X).$$

Assim,

$$\varphi \circ \exp(X) = \varphi(\alpha_X(1)) = \varphi \circ \alpha_X(1) = \alpha_Y(1) = \exp(Y) = \exp(d\varphi(X)) = \exp \circ d\varphi(X).$$

□

Como um caso particular da Proposição 1.70, tem–se

Corolário 1.71. *Seja* det : $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ *um homomorfismo de grupos de Lie, tem–se*

$$\det \circ \exp = \exp \circ \operatorname{tr},$$

onde $\operatorname{tr} : \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *é a aplicação traço e* exp *é a aplicação exponencial.*

Prova: *Note que, a álgebra de Lie do grupo de Lie linear geral* $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *está dada por* $\mathfrak{g} = \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, *e a álgebra de Lie de* $H = \mathbb{R}^+$ *é* $\mathfrak{h} = \mathbb{R}$. *Assim, o homomorfismo de grupos de Lie*

$$\det : G \to H,$$

induz o homomorfismo de álgebras de Lie

$$d(\det)_{Id} : \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \textit{onde} \;\; d(\det)_{Id} = \operatorname{tr}.$$

Por tanto, desde a Proposicição 1.70 segue–se que

$$\det \circ \exp = \exp \circ \operatorname{tr}.$$

□

Em outras palavras, segundo o Corolário 1.71, tem–se que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\operatorname{tr}} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle e} \\ \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\det]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

é comutativo. Isto é, $e^{\operatorname{tr} A} = \det(\exp A), \ \forall\, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Definição 1.72. *Seja* G *um grupo de Lie conexo. Chama–se* fórmula de Campbell-Baker-Haussdorf *à seguinte expressão,*

$$\exp tX \, \exp tY = \exp\Big(t\,(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}\,[X,Y] + \tfrac{t^3}{12}\,([[X,Y]\,,Y] - [[X,Y]\,,X]) + \mathrm{O}(t^4)\Big),$$

onde $\mathrm{O}(t^4)$ *representa os termos de ordém superior.*

Proposição 1.73. *Se G é um grupo de Lie abeliano então a aplicação* exp *é um difeomorfismo global. Além disso,*

$$\exp tX \, \exp tY = \exp\left(t\left(X+Y\right)\right).$$

Prova: *Como G é abeliano então $[X,Y]=0$ para todo $X,Y\in\mathfrak{g}$. Assim, desde a Definição 1.72, o resultado segue–se diretamente.* $\square$

Definição 1.74. *Seja M uma variedade diferenciável, e X um campo de vetores diferenciável sobre M. Chama–se curva integral de X que passa pelo ponto $p\in M$ à aplicação diferenciável $\Phi:(\alpha,\omega)\subset\mathbb{R}\to M$, $0\in(\alpha,\omega)$, tal que $\frac{d\Phi}{dt}=X(\Phi(t))$ e no instante $t=0$ passa por $\Phi(0)=p$.*

Definição 1.75. *Dado um campo de vetores X sobre uma variedade diferenciável M, chama–se fluxo de X à aplicação $X_t: dom(X_t)\subseteq M\to M$, $t\in\mathbb{R}$, tal que para cada $p\in M$ a aplicação $t\mapsto X_t(p)$ é uma curva integral de X com condição inicial p e satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $X_0=I$, *onde I é a aplicação identidade.*

(b) $X_{t+s}=X_t\circ X_s=X_s\circ X_t$.

(c) $\dfrac{d}{dt}X_t(p)=X\left(X_t(p)\right).$

A través da noção de fluxo de campos de vetores também é possível definir o colchete de Lie, como segue

Definição 1.76. *Sejam M uma variedade diferenciável e $p\in M$ um ponto arbitrário. Se X e Y são campos de vetores sobre M então o colchete de Lie $[X,Y](p)$ está dado por*

$$[X,Y](p)=\frac{d}{dt}\left((d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)}\left(Y(\varphi_t(p))\right)\right),$$

onde φ_t é o fluxo local de X numa vizinhança de p.

Em termos da aplicação exponencial o colchete de Lie de dois campos de vetores, pode ser dado pela seguinte definição.

Definição 1.77. *Sejam V e W campos de vetores diferenciáveis sobre uma variedade diferenciável M. O colchete de Lie destes campos é o campo vetorial $[V, W]$ definido por*

$$[V, W](X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0_+} \gamma(\sqrt{t}), \quad x \in M,$$

onde a curva γ é definida como

$$\gamma(t) = e^{-tW} e^{-tV} e^{tW} e^{tV},$$

e e^{tV} denota o fluxo do campo vetorial V.

Aplicação exponencial em grupos de matrizes

Agora, estabelecemos algunos aspectos de interesse sobre a aplicação exponencial, quando o grupo de Lie G é dado por um grupo de matrizes.

Definição 1.78. *Sejam* $\exp : M(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *a aplicação exponencial, e* $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. *Chama–se matriz exponencial de A, denotado* $\exp(A)$ *à série*

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots, \quad com \quad A^0 = I. \tag{1.2}$$

sempre que ela convergir.

Definição 1.79. *Seja* $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, *a norma de A (chamada norma subordinada) é dada por*

$$||A||_s = \sup \left\{ \frac{||Ax||}{||x||}, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \right\},$$

onde $||\cdot||$ é a norma usual em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.80. *Se $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ então*

$$\left|\left|A^k\right|\right|_s \leq ||A||_s^k,$$

Teorema 1.81. *A série (1.2) converge uniformemente em conjuntos compactos.*

Prova: *Desde Proposição 1.80 segue que*

$$\left|\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{A^k}{k!}\right|\right|_s \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{||A||_s^k}{k!}.$$

Logo, se tA pertence a um conjunto compacto, existe r tal que $\| tA \| \leq r$. Daí $\| (tA)^k \| \leq r^k$. Portanto, a norma dos termos da série (1.2) podem ser majorados pelos correspondentes termos da série numérica convergente $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!}$. Pelo critério de Weierstrass, segue-se o resultado. □

No seguinte resultado, estabelecemos algumas propriedades da aplicação exponencial sobre um grupo de Lie de matrizes,

Proposição 1.82. *Seja $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. São válidas as seguintes propriedades:*

1) $e^0 = I_d$, $\quad \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$;

2) $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^{tA}B$, *para qualquer matriz invertível B;*

3) *Se $AB = BA$ então $e^{tA}B = Be^{tA}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$;*

4) *Se $AB = BA$ então $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$;*

5) $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$;

6) $\forall A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $e^A \in GL(n, \mathbb{R})$ *e* $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. *Em particular,* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

Prova: *Desde Definição de* $\exp$ *segue–se diretamente que* $e^0 = Id$. *Agora, derivando termo a termo (pois, a série exponencial é absolutamente convergente), obtem–se,*

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \frac{d}{dt}(Id + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots) = (A + A^2 + \cdots + \frac{A^nt^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots) = e^{At}A.$$

Para a prova do item (2), primeiro considere a seguinte afirmação:

$$(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Provaremos está afirmação por indução. Para $k=1$ é óbvio. Agora, suponha que a igualdade é válida para $n=k$, ou seja, $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$. Então, segue–se que

$$(B^{-1}AB)^{k+1} = (B^{-1}AB)^k(B^{-1}AB) = B^{-1}A^kB(B^{-1}AB) = B^{-1}A^kIdAB = B^{-1}A^{k+1}B,$$

e assim temos provado a afirmação.

Portanto, usando a afirmação anterior segue que

$$e^{B^{-1}AB} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(B^{-1}AB\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(B^{-1}A^kB\right) = B^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)B = B^{-1}e^AB.$$

Se $AB = BA$ é fácil mostrar por indução que $BA^k = A^kB, \ \forall k = 1, 2, \cdots$ Segue então que

$$\begin{aligned} Be^{tA} &= B + tBA + \frac{t^2}{2!}BA^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}BA^k + \cdots \\ &= B + tBA + \frac{t^2}{2!}A^2B + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^kB + \cdots \\ &= e^{tA}B. \end{aligned}$$

Para provar o item (4), considere a equação diferencial matricial

$$\dot{X}(t) = (A+B)X(t), \ X(t) \in Gl(n,\mathbb{R}), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ A, B \in M(n,\mathbb{R}).$$

Note que $X_1(t) = e^{(A+B)t}$ é solução desta equação diferencial satisfazendo a condição inicial $X(0) = Id$. Por outro lado, a curva $X_2(t) = e^{tA}e^{tB}$ satisfaz $X_2(0) = Id$ e, derivando com relação a t, tem–se

$$\dot{X}_2(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)X_2(t).$$

Assim, $X_2(t)$ também é solução da mesma equação diferencial e com a mesma condição inicial. Logo, pela unicidade de equações diferenciais segue–se que $X_1(t) = e^{(A+B)t} = X_2(t) = e^{tA}e^{tB}$, como desejado.

O item (5), segue imediatamente de (4).

Finalmente, se $A \in GL(n,\mathbb{R})$ *temos* $e^{A}e^{-A} = e^{-A}e^{A} = e^{0} = Id$. *Assim,* $e^{A} \in GL(n,\mathbb{R})$. *Também,* $\forall t \in \mathbb{R}$ *temos* $e^{At}e^{-At} = e^{0} = e^{-At}e^{At} = Id$. *Por tanto,* $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$. □

Observação 1.83. *Seja* $G = GL(n,\mathbb{R})$ *o grupo Linear geral com álgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})$. *Seja* $A \in \mathfrak{g}$, *considere o campo de vetores invariante à esquerda* Z *sobre* G *definido por* $Z = XA$, *onde* $X \in G$.

Note que é possível associar ao campo de vetores Z *a seguinte a equação diferencial,*

$$\dot{X}(t) = X(t)A, \;\; X(0) = X_0, \;\; X \in G.$$

Um curva integral desta equação está dada pela fórmula

$$X(t) = X_0 exp(tA) \in GL(n,\mathbb{R}).$$

Porém, se G *é um subgrupo do grupo Linear* $GL(n,\mathbb{R})$ *a equação diferencial*

$$\dot{X} = XA, \;\; X \in G,$$

pode não estar bem definida quando $A \in \mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})$ *é uma matriz arbitrária, pois pode acontecer que o campo vetorial* $V(X) = XA$ *não seja tangente ao subgrupo de Lie* G, *quando* $A \notin \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.84. *Seja* $SL(n,\mathbb{R})$ *o grupo de Lie linear especial, cuja álgebra de Lie é* $\mathfrak{s}l(n,\mathbb{R})$ *o conjunto das matrizes de traço zero. Se* $A \notin \mathfrak{s}l(n,\mathbb{R})$ *então a equação diferencial,*

$$\dot{X} = XA, \;\; X(0) = Id, \;\; X \in SL(n,\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

não está bem definida, pois o campo de vetores $V(X) = XA$ *não é tangente ao grupo de Lie* $SL(n,\mathbb{R})$. *De fato, é possível observar que a solução*

$$X(t) = exp(tA) \notin SL(n,\mathbb{R}).$$

Realmente, se $exp(tA) \in SL(n,\mathbb{R})$ então

$$A = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp(tA) \in T_{Id}SL(n) = \mathfrak{s}l(n,\mathbb{R}).$$

Em geral, se G é um grupo de Lie de matrizes então para qualquer elemento $A \in \mathfrak{g}$ o campo de vetores invariante à esquerda $V(X) = XA,\ \ X \in G$ é tangente ao grupo de Lie G. Assim, a equação diferencial

$$\dot{X}(t) = X(t)A; \ \ X(t) \in G, \tag{1.4}$$

está bem definida e possui solução descrita por

$$X(t) = X(0)\exp(At) \in G.$$

Deve-se notar também que, se uma curva $X(t)$ é uma trajetôria do campo $V(X) = XA$ então a translação à esquerda $YX(t)$ de $X(t)$ via qualquer $Y \in G$ é também uma trajetôria desta equação diferencial. De fato,

$$X(t) = X(0)\exp(tA) \Rightarrow Y(t) = YX(t) = YX(0)\exp(tA) = Y(0)exp(tA).$$

O cálculo do colchete de Lie entre campos de vetores invariantes à esquerda é dado na seguinte proposição.

Proposição 1.85. *Sejam G um grupo de Lie de matrizes com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $A, B \in \mathfrak{g}$. Se $V(X) = XA$ e $W(X) = XB$ são campos de vetores invariantes à esquerda em G, então o colchete de Lie satisfaz*

$$[V,W](X) = [XA, XB] = X[A,B] = X(AB - BA), \ \ X \in G.$$

Prova: *Como já sabemos os fluxos dos campos de vetores esquerda-invariantes podem ser dados pela aplicação exponencial, como*

$$e^{tV}(X) = X\,exp(tA), \quad e^{tB}(X) = X\,exp(tB).$$

Pela Definição 1.77 e utilizando a definição da exponencial de matrizes via séries, obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= X exp(tA)\ exp(tB)\ exp(-tA)\ exp(-tB) \\
&= X(Id + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots)(Id + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + \cdots) \\
&\quad (Id - tA - \frac{t^2}{2}A^2 - \cdots)(Id - tB - \frac{t^2}{2}B^2 - \cdots) \\
&= X(Id + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots) \\
&\quad X(Id - t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots) \\
&= X(Id + t^2(AB - BA) + \cdots) = X(Id + t^2[A,B] + \cdots),
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(\sqrt{t}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X(Id + t^2[A,B] + \cdots) = X[A,B],$$

que é o colchete de Lie $[XA, XB]$. □

1.4 Representações

A Teoria de Representações tem uma gram importância para a compreensão de um grupo. Iniciamos com a noção geral de representação,

Definição 1.86. *Sejam G um grupo de Lie, e V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma representação de G em V é um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow Aut(V)$, onde $Aut(V)$ denota o espaço dos automorfismos de V. A dimensão da representação é a dimensão do espaço de representação V.*

Como é conhecido, existe uma representação natural de um grupo de Lie G sobre sua álgebra de Lie. Essa representação é construida na seguinte maneira: fixado um elemento $g \in G$ a aplicação $C_g : G \longrightarrow G$ dado por $C_g(h) = ghg^{-1}$ é um *homomorfismo. Ainda,* $C_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$ *é um difeomorfismo. Por tanto,* C_g *é um automorfimo, e é chamado de automorfismo interno de* G.

Por outro lado, $(dC_g)_e : T_eG \longrightarrow T_{C_g(e)}G$ *é uma aplicação lineal, pois* $C_g(e) = e$. *Agora podemos descrever a representação adjunta de um grupo de Lie sobre sua álgebra de Lie.*

Definição 1.87. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *chama–se representação adjunta de* G *sobre* $\mathfrak{g}$ *à aplicação diferenciável*

$$Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$$

definida por $Ad(g) = d(C_g)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Observação 1.88. *A Definição 1.87 está bem definida. De fato, a aplicação* $g \in G \mapsto (dC_g)_e \in GL(\mathfrak{g})$ *é u homomorfismo de* G *em* $GL(\mathfrak{g})$, *pois dados* $g, h \in G$ *tem–se* $C_g \circ C_h(p) = C_g(C_h(p)) = C_g(hgh^{-1}) = C_{gh}(p)$. *Assim,* $(dC_g)_e \circ (dC_h)_e = (dC_{gh})_e$.

Proposição 1.89. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *e* $Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$ *a representação adjunta de* G *em* $\mathfrak{g}$. *Então são válidas as seguintes afirmações:*

a) Ad *é diferenciável.*

b) $Ad(gh) = Ad(g) \circ Ad(h)$ *para cada* $g, h \in G$.

c) $Ad(g)^{-1} = Ad(g^{-1})$ *para qualquer* $g \in G$.

Prova: *primeiro note que a aplicação* Ad *é diferenciável, pois*

$$(dC_g)_e = (d(L_g \circ R_{g^{-1}}))_e = (d(R_{g^{-1}} \circ L_g))_e = (dL_g)_{g^{-1}} \circ (dR_{g^{-1}})_e = (dR_{g^{-1}})_g \circ (dL_g)_e.$$

O item (b) segue desde $C_{gh} = C_g \circ C_h$. *Por outro lado, para qualquer* $g \in G$ *desde o item (b) segue diretamente que* $Ad(g)^{-1} = Ad(g^{-1})$, *e a prova esta concluida.* $\square$

A representação adjunta Ad *induze uma representação adjunta de* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *tomando a derivada da da representação adjunta de* G, *e está definida por*

Definição 1.90. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *a representação adjunta de* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, *é a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} ad\text{:} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = End(\mathfrak{g}) \\ & X & \longrightarrow & ad\,(X)\,(Y) = [X,Y], \end{array}$$

onde $End(\mathfrak{g})$ *denota o espaço dos endomorfismos de* $\mathfrak{g}$.

Desde a identidade de Jacobi, segue–se diretamente que a aplicação ad é um homomorfismo das álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.91. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *com colchete de Lie dado pelos campos de vetores invariantes à esquerda. São válidas as seguintes fórmulas:*

i) $ad(X) = (dAd)_e(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

ii) $Ad(exp\ X) = exp(ad(X))$.

Prova:

Sejam X *e* Y *campos de vetores invariantes por translações à esquerda sobre* G. *Logo, o fluxo de* X *está dado por* $\varphi_t = R_{\exp(tX)}$. *Também,* $\left(dL_{exp(tX)}\right)_e(Y(e)) = Y\left(\exp(tX)\right)$.

Por outro lado, se $t \in \mathbb{R}$ *então*

$$\begin{aligned} Ad\left(\exp(tX)\right)(Y) &= (dC_{\exp(tX)})_e(Y) \\ &= \left(d(L_{\exp(tX)} \circ R_{\exp(-tX)})\right)_e(Y) \\ &= \left(d(R_{\exp(-tX)} \circ L_{\exp(tX)})\right)_e(Y) \\ &= \left(dR_{\exp(-tX)}\right)_{\exp(tX)}\left(\left(dL_{\exp(tX)}\right)_e(Y)\right) \\ &= \left(dR_{\exp(-tX)}\right)_{\exp(tX)}\left(Y\left(\exp(tX)\right)\right) \\ &= (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(e)}\left(Y(\varphi_t(e))\right) \end{aligned}$$

Desde Definição 1.76 obtemos,

$$ad(X)(Y) = [X,Y](e) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left((d\varphi_{-t})_{\varphi_t(e)}\left(Y(\varphi_t(e))\right)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(Ad\left(\exp(tX)\right)(Y)\right)$$

Por tanto, sendo X e Y campos invariantes por translação à esquerda segue–se que,

$$ad(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (Ad\,(\exp(tX))) = (dAd)_e(X),$$

como desejado.

O item (2) segue diretamente tomando $\varphi = Ad$ na Proposição 1.70. □

Observação 1.92. *Seja g sobre um grupo de Lie G, é válida a seguinte fórmula:*

$$g\exp(X)g^{-1} = \exp\left(Ad(g)X\right).$$

De fato, fazendo $\varphi = C_g$ na Proposição 1.70 obtemos,

$$g\exp(X)g^{-1} = C_g(\exp(X)) = \exp\left((dC_g)_e X\right) = \exp\left(Ad(g)X\right)$$

Exemplo 1.93. *A representação adjunta $Ad: \ G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ sobre o grupo de Lie abeliano $G = S^1$ é trivial. Isto é, $Ad(g) = id$ para todo $g \in S^1$, pois $C_g = id$. Na verdade, isto é valido para qualquer grupo de Lie abeliano.*

Para o caso de um grupo de matrizes, a representação adjunta pode ser obtida de maneira bem simples, como segue

Proposição 1.94. *Se G é um grupo de matrizes então para qualquer $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$ temos $Ad(g)X = gXg^{-1}$, sendo o produto a multiplicação usual de matrizes.*

Prova: *Basta observar que C_g se estende a uma transformação linear no espaço das matrizes, por tanto coincide com $Ad(g)$. Com efeito,*

$$\begin{aligned} Ad\,(g)\,(X) \quad &= (dC_g)_e(X) \\ &= \left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0} C_g\,(\exp(tX)) \\ &= \left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0} g\,(\exp(tX))\,g^{-1} \\ &= g\left(\left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(tX))\right)g^{-1} \\ &= gXg^{-1} = C_g \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.95. *Seja G um grupo de Lie. O centro de G, denotado por $Z(G)$ esta dado por,*

$$Z(G) = \{g \in G : \ gh = hg, \ \forall h \in G\}$$

Proposição 1.96. *Seja G um grupo de Lie. O centro de G está contido em $Ker(Ad)$ e ambos coincidem se G é conexo.*

Prova: *Seja $g \in Z(G)$ então $gh = hg$ para todo $h \in G$. Por outro lado, desde Observação 1.92 segue que*

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp\left(Ad(g)X\right),$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Para $X \in \mathfrak{g}$ tem–se $\exp(X) \in G$. Logo, como $g \in Z(G)$ segue que $\exp(X)g^{-1} = g^{-1}\exp(X)$. Assim,

$$\exp\left(Ad(g)X\right) = g\exp(X)g^{-1} = gg^{-1}\exp(X) = \exp(X).$$

Como $\exp : \ \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é um difeomorfismo entre vizinhanças de $0 \in \mathfrak{g}$ e da identidade $e \in V$, existem $U \subset \mathfrak{g}$ e $V \subset G$ tal que $\exp : \ U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo, e por tanto $\exp$ é injetiva na vizinhança de $0 \in U$. Desde $\exp\left(Ad(g)X\right) = \exp(X)$ segue que $Ad(g)X = X$ para todo $X \in U$. Agora, ao ser $\mathfrak{g}$ um álgebra de Lie é um espaço vetorial, logo $U \subset \mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial. Então, $rX \in U$ com $r \in \mathbb{R}$ e $r \neq 0$, $X \in \mathfrak{g}$. Finalmente, $Ad(g)(rX) = rX$ e como $Ad(g)$ é linear obtemos $rAd(g)X = rX$, $X \in \mathfrak{g}$. Assim, $Ad(g)X = X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Portanto, $g \in Ker(Ad)$ concluindo a primeira parte do resultado.

Suponha que G é conexo, e seja $g \in Ker(Ad)$. Então $Ad(g)X = X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Por outro lado, desde Observação 1.92 segue que

$$g\exp(X)g^{-1} = \exp\left(Ad(g)X\right) = \exp\left(X\right),$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. *Assim,* $g\exp(X) = \exp(X)\, g$, *para todo* $X \in \mathfrak{g}$. *Isto é,* $g \in G$ *commuta com exponenciais. Agora, como* G *é conexo, pelo Corolario 1.64 qualquer elemento* $h \in G$ *é descrito por produto de exponencias, digamos* $h = \exp(X_1)\cdots\exp(X_s)$. *Logo,*

$$hg = \exp(X_1)\cdots\exp(X_s)g = \exp(X_1)\cdots\exp(X_{s-1})g\exp(X_s),$$

commutando sucessivamente g *com os exponenciais obtemos,*

$$hg = \exp(X_1)\cdots\exp(X_s)g = g\exp(X_1)\cdots\exp(X_s).$$

Portanto, $hg = gh$ *para todo* $h \in G$. *Assim,* $Ker(Ad) \subset Z(G)$, *e a prova está concluida.* □

Exemplo 1.97. *Seja* $G = GL(n,\mathbb{R})$ *o grupo de Lie das matrizes com determinante diferente de zero. O centro de* G *está dado pelo subgrupo das matrizes escalares*

$$Z(GL(n,\mathbb{R})) = \{\lambda I,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}.$$

Por outro lado, se $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *e* $g \in GL(n,\mathbb{R})$ *então* $Ad(g)X = gXg^{-1}$. *Logo,* $Z(GL(n,\mathbb{R})) = ker(Ad)$.

Definição 1.98. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *e* H *um subgrupo de* G. *O centralizador de* H *em* G *esta dado por,*

$$Z_G(H) = \{g \in G :\ g\beta = \beta g,\ \forall \beta \in H\}$$

Definição 1.99. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. O centro de* $\mathfrak{g}$, *denotado por* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *esta dado por,*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} :\ \forall Y \in \mathfrak{g},\ [X,Y] = 0\}.$$

Exemplo 1.100. *Seja* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie do grupo de Heisenberg de dimensão três gerado por*

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\mathfrak{g} = \text{Span}\left\{Y^1, Y^2, Y^3\right\}.$$

Desde que

$$\left[Y^1, Y^2\right] = Y^3$$

é o único colchete de Lie no nulo, obtemos que o centro de $\mathfrak{g}$ *esta dado por,*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \text{Span}\left\{Y^3\right\}.$$

1.5 Grupos de Lie solúveis e nilpotentes

Para introduzir está classe de grupos de Lie é necessário definir primeiramente as seguintes sequências decrescentes de ideais.

Definição 1.101. *Seja* $\mathfrak{g}$ *um álgebra de Lie. A* série derivada *de* $\mathfrak{g}$ *está definida por,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \cdots \mathfrak{g}^{(i-1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(i)} \supseteq \cdots,$$

onde

$$\mathfrak{g}^{(i)} = \left[\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}\right],$$

Definição 1.102. *Seja* $\mathfrak{g}$ *um álgebra de Lie. A* série central descendente *de* $\mathfrak{g}$ *está definida por,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \cdots \mathfrak{g}^{i-1} \supseteq \mathfrak{g}^i \supseteq \cdots,$$

onde

$$\mathfrak{g}^{i+1} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i\right], \quad ,$$

é o subespaço gerado pelos colchetes $[X, Y]$, $X \in \mathfrak{g}$ *e* $Y \in \mathfrak{g}^k$.

Agora, podemos definir as álgebras de Lie solúveis e as nilpotentes,

Definição 1.103. *Um álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dita solúvel se sua série derivada termina na álgebra trivial. Isto é, se* $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$ *para algúm* $k_0 \geq 0$.

Definição 1.104. *Um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita nilpotente se sua série central descendente termina na álgebra trivial. Isto é, se $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$ para algúm $k_0 \geq 0$.*

Observação 1.105. *Note que ao comparar as das duas séries tem–se, $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^2$. Mais ainda, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.*

Proposição 1.106. *Se $\mathfrak{g}$ é um álgebra de Lie nilpotente então ela é solúvel.*

Prova: *Segue diretamente da Observação anterior 1.105.* □

Exemplo 1.107. *Considere o grupo de Lie G de dimensão dois*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 0 \right\},$$

com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada por

$$\mathfrak{g} = \left\{ Y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

cujo único colchete de Lie não nulo é

$$\left[Y^1, Y^2 \right] = Y^2.$$

Está álgebra de Lie não é nilpotente, pois sua série central descendente satisfaz

$$\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^2 = \langle Y^2 \rangle,$$

para todo $k \geq 2$. Assim, não é estabilizada em zero. Porém, é uma álgebra de Lie solúvel, pois sua série derivada

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} = \langle Y^2 \rangle \supset \mathfrak{g}^{(2)} = \{0\}.$$

Assim, estabiliza em zero.

Capítulo 2

Sistemas de controle

Neste capítulo, estudaremos a classe de sistemas de controle invariantes sobre grupos de Lie, descreveremos alguns aspectos fundamentais que são de interesse deste trabalho. Veja [1], [10], [13].

2.1 Generalidades dos Sistemas de controle

Iniciamos com a noção geral de sistemas de controle.

Definição 2.1. *Seja M uma variedade diferenciável n–dimensional. Chama–se sistema de control sobre M à família de equações diferenciais,*

$$\dot{x}(t) = X\left(x(t), u(t)\right), \tag{2.1}$$

onde $x \in M$ é a variável de estados, $u \in \mathcal{U}$ são conhecidos como os controles do sistema com

$$\mathcal{U} = \{u : \ \mathbb{R} \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m, \ \textit{localmente integrável}\}$$

o conjunto de controles admissísiveis, U chamado de conjunto de valores dos controles, e para cada controle $u \in \mathcal{U}$ fixado a aplicação $X_u : \ p \in M \mapsto X_u(p) := X(p, u) \in T_pM$ é um campo de vetores tangente diferenciável sobre M. Usualmente, $m \leq n$.

Observação 2.2. *Note que um sistema de controle (2.1) está determinado pela seguinte coleção de campos de vetores parametrizados por controles,*

$$\Sigma = \{X_u : \ u \in \mathcal{U}\}.$$

Assim, para cada $u = u_0 \in \mathcal{U}$ *fixado o sistema de controle (2.1) é simplesmente a equação diferencial sobre* M *dada por* $\dot{x}(t) = X\left(x(t), u_0\right)$. *Portanto, ela tem localmente soluções únicas* $\varphi(t, x, u_0)$ *tais que* $\varphi(0, x, u_0) = x$ *no instante de tempo* $t = 0$.

Definição 2.3. *Sejam* M *uma variedade diferenciável e* X_u *um campo de vetores sobre* M *parametrizado pelos controles. Dizemos que* X_u *é completo se para cada* $u \in \mathcal{U}$ *a solução da equação diferencial*

$$\dot{x}(t) = X\left(x(t), u\right)$$

está definida globalmente. Isto é, sua solução $\varphi(t, x, u)$ *está definida para* $t \in \mathbb{R}$. *Equivalentemente, o correspondente subgrupo a 1–parâmetro* $\alpha_u : (t, x) \longmapsto \alpha_u(t, x) := \varphi(t, x, u)$ *esta definido em* $\mathbb{R} \times M$.

Observação 2.4. *A curva integral* $\gamma : \ I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ *passando pelo ponto* $p \in M$ *em tempo* $t = t_0$ *(também chamada de trajetória) associada com o campo de vetores* X_u, *parametrizado pelos controles* $u \in \mathcal{U}$, *definida por* $\gamma(t) = \varphi(t, x, u)$ *satisfaz*

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\left(\gamma(t)\right) = X_u\left(\gamma(t)\right), \quad \textit{com } \gamma(t_0) = p,$$

e $\alpha_u(t, x) = \gamma(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $p \in M$.

De acordo com o conhecido lema de aproximação de Sussmann [15] os resultados obtidos para sistemas de controle parametrizados apenas por funções constantes por pedaços podem ser estendidos para sistemas com qualquer classe de controle, aproximada pela classe de controles constantes por pedaços, usualmente denotada por $\mathcal{U}_{ccpp}$, e dada por

$$\mathcal{U}_{ccpp} = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m, \ \textit{constante por pedaços}\}.$$

Definição 2.5. *Sejam M uma variedade diferenciável n–dimensional e Σ um sistema de controle sobre M. Chama–se semigrupo do sistema ou semigrupo gerado por Σ ao conjunto*

$$S_\Sigma = \{X^1_{t_1} \circ X^2_{t_2} \circ \cdots \circ X^k_{t_k} : \quad X^k \in \Sigma, e\ t_i \in \mathbb{R}^+\},$$

dos difeomorfismos locais $X^k_{t_k}$ (fluxos induzidos pelos campos X^k em Σ).

De maneira semelhante é possível introduzir o grupo de um sistema, como segue

Definição 2.6. *Sejam M uma variedade diferenciável n–dimensional e Σ um sistema de controle sobre M. Chama–se grupo do sistema ou grupo gerado por Σ ao conjunto*

$$G_\Sigma = \{X^1_{t_1} \circ X^2_{t_2} \circ \cdots \circ X^k_{t_k} : \quad X^k \in \Sigma, e\ t_i \in \mathbb{R}\},$$

dos fluxos $X^k_{t_k}$ induzidos pelos campos X^k em Σ.

Note que o grupo G_Σ é fechado pelas composições e suas inversas satisfazem $(X_t)^{-1} = X_{-t}$ com $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.7. *Sejam M uma variedade diferenciável n–dimensional e S_Σ o semigrupo local gerado pelo sistema de controle Σ. O conjunto*

$$S_\Sigma(x) = \{\phi(x) : \quad \phi \in S_\Sigma\},$$

é dito órbita pelo sistema em tempo positivo, ou simplesmente órbita positiva a partir de $x \in M$ pela ação de S_Σ sobre x.

Definição 2.8. *Sejam M uma variedade diferenciável n–dimensional e Σ um sistema de controle sobre M. Chama–se conjunto acessível a partir de $x \in M$ ao conjunto*

$$\mathcal{A}_\Sigma(x) = \{y \in M : \quad y = \varphi(t, x, u) \text{ para algum } u \in \mathcal{U}_{ccpp},\ t > 0\},$$

dos pontos atingíveis a partir de $x \in M$ por concatenação de trajetórias dos campos de Σ tomando apenas as partes positivas das trajetórias.

Note que os conjuntos $S_\Sigma(x)$ e $\mathcal{A}_\Sigma(x)$, $x \in M$ coincidem.

A seguir um resultado importante da Teoria de Controle conhecido como Teorema da órbita.

Teorema 2.9. *Sejam M uma variedade diferenciável n–dimensional e*

$$\Sigma = \{X_u : u \in \mathcal{U}\}$$

uma família de campos de vetores diferenciáveis sobre M parametrizados por controles. Então, para cada $x \in M$ a órbita $G_\Sigma(x)$ é uma subvariedade imersa quase–regular de M.

Prova: Veja [15] □

2.2 Sistemas de controle invariantes

Nesta seção analisaremos a classe de sistemas de controle invariantes, e suas propriedades, que serão de nosso interesse para uma melhor compreensão do próximo capítulo.

No contexto de grupos de Lie de matrizes a classe de sistemas de controle invariante são descritos da seguinte maneira,

Definição 2.10. *Seja G um grupo de Lie de matrizes com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um sistema de controle invariante à esquerda sobre G, é um conjunto arbitrário de campos de vetores invariantes à esquerda em G dado por,*

$$\dot{X}(t) = X(t)A + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)X(t)B^i, \tag{2.2}$$

onde $u = (u_1, \cdots, u_m) \in U$ são funções de controle, $X(t) \in G$, $B^i \in \mathfrak{g}$ que determinam os campos invariantes (chamados campos controlados), e $A \in \mathfrak{g}$ (chamado de drift).

Usualmente, o sistema de controle (2.2) denotado por Γ, é descrito por,

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B^i \,\middle|\, (u_1, u_2, \cdots, u_m) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \right\} \subset \mathfrak{g}.$$

Quando U coincide com $\mathbb{R}^m$ o sistema é dito sistema com controles irrestritos. Neste caso, o sistema Γ é um subespaço afim de $\mathfrak{g}$.

Definição 2.11. *Uma trajetôria de um sistema invariante à esquerda* Γ *em* G *descrito por (2.2) é uma curva absolutamente contínua* $Z : [t_0, T] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow G$ *definida por* $t \mapsto Z(t)$ *tal que existem campos de vetores invariantes à esquerda*

$$A^1, \cdots, A^N \in \Gamma$$

e uma partição

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

tal que a restrição de $Z(t)$ *a cada intervalo aberto* (t_{i-1}, t_i) *é diferenciável e*

$$\dot{Z}(t) = Z(t)A^i, \text{ para } t \in (t_{i-1}, t_i), \ i = 1, \cdots, N.$$

Na notação clássica, isto corresponde a controles admissíveis constantes por pedaços.

De modo semelhante podemos introduzir a noção de sistemas de controle invariantes pela direita,

Definição 2.12. *Um sistema de controle invariante pela direita sobre um grupo de Lie de matrizes* G *é um conjunto arbitrário de campos de vetores invariantes à direita em* G*, e pode ser escrito na forma*

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B^iY(t), \quad Y(t) \in G, \ A, B^i \in \mathfrak{g}, \tag{2.3}$$

Observação 2.13. *Notemos que podemos transformar campos de vetores invariantes à esquerda em campos de vetores invariantes à direita, e vice-versa, através da inversão*

$$i : G \to G, \quad X \mapsto i(X) = X^{-1}.$$

Para sermos mais precisos: se $X(t)$ *é uma trajetória de uma equação diferencial*

$$\dot{X}(t) = X(t)A, \ X(0) = Id, \quad X(t) \in G, \ A \in \mathfrak{g}$$

associada a um campo de vetores invariante à esquerda, então $Y(t) = i(X(t)) = X^{-1}(t)$ *é uma trajetória de uma equação diferencial*

$$\dot{Y}(t) = -AY(t), \ Y(0) = Id, \quad Y(t) \in G, \ A \in \mathfrak{g}$$

associada a um campo de vetores invariante à direita.

De fato, como $X(t)$ é uma curva em G que passa pelo seu elemento identidade Id no instante de tempo $t = 0$ então a curva $Y(t) = X^{-1}(t)$ sobre G representa o caminho $X(t)$ percorrido em tempo inverso. Assim, obtemos

$$Y(t)X(t) = X^{-1}(t)X(t) = Id, \quad \forall t.$$

Agora, derivando essa igualdade com respeito á variável t tem-se,

$$\dot{Y}(t)X(t) + Y(t)\dot{X}(t) = 0.$$

Portanto,

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) = -Y(t)X(t)AY(t) = -X^{-1}(t)X(t)AY(t) = -AY(t),$$

como desejado.

Desde a Observação 2.13 segue que $X(t) = X_0 e^{At}$ é uma trajetória da equação invariante pela esquerda

$$\dot{X} = XA,$$

passando por X_0 em tempo $t = 0$, se e somente se, $Y(t) = e^{-tA}Y_0$ é uma trajetória da equação invariante pela direita a menos do sinal

$$\dot{Y} = -AY,$$

com $Y = X^{-1}$.

De acordo com o exposto na Observação 2.13, podemos dizer que o estudo de sistemas de controle invariante à direita pode ser reduzido ao estudo de sistemas invariantes à esquerda via a inversão.

Exemplo 2.14. *Consideremos o problema de planejamento de um veículo de uma roda simples com um único eixo, como é mostrado na Figura 2.1. Esta configuração é conhecida como modelo simplificado de um monociclo. O problema é manter a estrutura do monociclo em uma posição de equilibrio durante o movimento. Por exemplo*

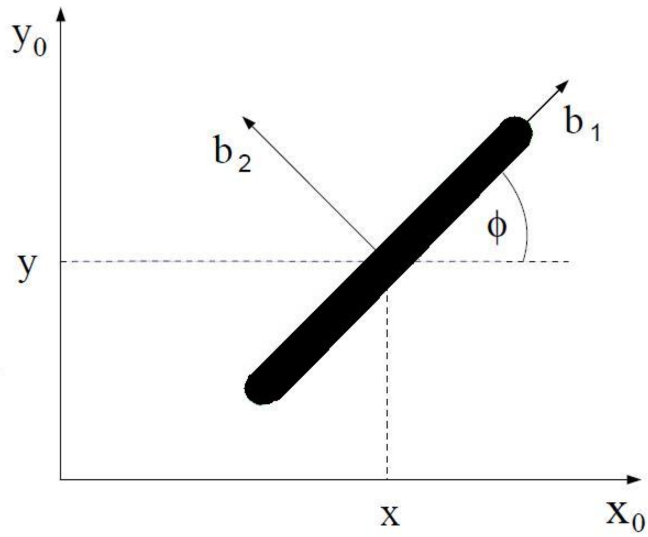

Figura 2.1: Vista aérea do monociclo

uma das atrações de um circo é o equilibrista sobre o monociclo. Para conseguir manter uma posição de equilíbrio do monociclo é necessário uma estratégia de controle.

Considere um referencial inercial ortonormal (X_0, Y_0) *de* $\mathbb{R}^2$. *Seja* (x, y, ϕ) *a posição do monociclo sobre um plano* Π *relativo ao referencial* (X_0, Y_0), *onde* ϕ *descreve a orientação do moniciclo e representa o ângulo entre a tangente à roda do monociclo sobre o plano* Π *e o eixo* X_0. *Suponha que a roda do monociclo está girando sobre o plano* Π *sem deslizamentos, e que o eixo da roda do monociclo é sempre paralelo a dito plano. Também, assuma que a velocidade de direção descrita pela derivada* $\dot{\phi}$ *(que descreve a velocidade angular da roda em torno de uma linha através do ponto de contato e perpendicular ao plano) e a velocidade de rolamento (avanço)* v *podem ser controlados. Denotando os controles por* $u_1 = \dot{\phi}$ *e* $u_2 = v$ *a dinámica do monociclo pode ser descrita pelo sistema de controle,*

$$\Sigma : \quad \begin{cases} \dot{x} = & u_2 cos\ \phi \\ \dot{y} = & u_2 sen\ \phi \\ \dot{\phi} = & u_1 \end{cases}$$

onde (x, y, ϕ) está sobre o espaço de configuração do monociclo descrito por $\mathbb{R}^2 \times S^1$ com S^1 a circunferência unitária.

O sistema de controle Σ pode ser visto como um sistema de controle invariante. Para conseguir está descrição considere (b_1, b_2) um referencial ortonormal no plano fixado sobre a roda de modo que b_1 é paralela à tangente da roda sobre o plano, como mostra a Figura 2.1.

Note que, relativo às coordenadas de um ponto nas coordenadas do corpo com respeito ao referencial inercial (X_0, Y_0) pode ser visto como uma matriz $X(t)$ sobre o grupo de Lie $SE(2, \mathbb{R})$ dos movimentos rígidos de $\mathbb{R}^2$ descrita na forma

$$X = \begin{pmatrix} cos\ \phi & -sen\ \phi & x \\ sen\ \phi & cos\ \phi & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a mesma que representa a posição e orientação do monociclo em tempo t. Por tanto, a velocidade do corpo vem a ser da forma

$$\hat{V}_b = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & v_x \\ \omega & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(2, \mathbb{R}).$$

Assim, a dinámica do monociclo descrita pelo sistema de controle Σ sobre $\mathbb{R}^2 \times S^1$, pode ser descrito pelo sistema de controle invariante sobre o grupo de Lie $SE(2, \mathbb{R})$ com dois controles e sem drift,

$$\dot{X}(t) = X(t)(u_1(t)A_1 + u_2(t)A_2), \tag{2.4}$$

onde u_1 e u_2 são as velocidades da direção e de avanço, respectivamente; $X(t) \in SE(2, \mathbb{R})$, e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertencem à álgebra de Lie $\mathfrak{se}(2, \mathbb{R})$.

Note que, o colchete de Lie $[A_1, A_2]$ esta dado pela matriz

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e assim $\{A_1, A_2, A_3\}$ geram a álgebra de Lie $\mathfrak{se}(2, \mathbb{R})$.

2.3 Acessibilidade

Nesta seção descreveremos a noção de acessibilidade, a mesma que é importante no estudo de sistemas de controle.

Definição 2.15. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $T \geq 0$ e $g \in G$ arbitrários. Chama–se conjunto atingível (ou conjunto acessível), em tempo T, pelas trajetórias de um sistema de controle invariante à esquerda $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ a partir do ponto g, ao conjunto denotado por $\mathcal{A}_\Gamma(g, T)$ formado pelos pontos que podem ser alcançados a partir de g em exatamente T unidades de tempo. Isto é,*

$$\mathcal{A}_\Gamma(g, T) = \{X(T) | X(\cdot) \ \text{ é uma trajetôria de } \ \Gamma, \ X(0) = g\}.$$

O conjunto acessível para um tempo não maior do que $T \geq 0$ é definido como

$$\mathcal{A}_\Gamma(g, \leq T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{A}(g, t).$$

O conjunto acessível de um sistema invariante Γ a partir de um ponto $g \in G$ denotado por $\mathcal{A}_\Gamma(g)$ é o conjunto de todos os pontos terminais $X(T)$, $T \geq 0$, de todas as trajetórias de Γ começando em g, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Gamma(g) &= \{X(T) | \ X(\cdot) \ \text{trajetôria de} \ \Gamma, \ X(0) = g, \ T \geq 0\} \\ &= \textstyle\bigcup_{T \geq 0} \mathcal{A}_\Gamma(g, T). \end{aligned}$$

Se não houver ambiguidades, na sequência denotaremos os conjuntos acessíveis $\mathcal{A}_\Gamma(g, T)$ e $\mathcal{A}_\Gamma(g)$ por $\mathcal{A}(g, T)$ e $\mathcal{A}(g)$, respectivamente.

De modo semelhante ao exposto na Observação 2.13 temos que, se $A \in \mathfrak{g}$ e $g_0 \in G$ então o problema de Cauchy

$$\dot{g}(t) = g(t)A, \quad g(t_0) = g_0$$

possui uma solução dada por $g(t) = g_0 \exp((t - t_0)A)$. Desde este fato, podemos dar uma descrição do ponto final $g(T)$ via produto de exponenciais.

Lema 2.16. *Seja $g(t)$, $t \in [0, T]$, uma trajetória de um sistema esquerda–invariante $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ com $g(0) = g_0$. Então existem $N \in \mathbb{N}$ e*

$$\tau_1, \cdots, \tau_N > 0, \quad A_1, \cdots, A_N \in \Gamma.$$

tal que

$$g(T) = g_0 \exp(\tau_1 A_1) \cdots \exp(\tau_N A_N), \quad \tau_1 + \cdots + \tau_N = T.$$

Prova: *Por definição de trajetória de Γ, existem $N \in \mathbb{N}$ e*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T, \quad A_1, \cdots, A_N \in \Gamma$$

tal que $g(t)$ é absolutamente contínua e

$$\dot{g}(t) = g(t)A_i, \quad t \in (t_{i-1}, t_i),$$

onde

$$g(t) = g(t_{i-1})\ exp[(t - t_{i-1})A_i], \text{ e } \quad g(t_i) = g(t_{i-1})\ exp[(t_i - t_{i-1})A_i].$$

Daí, segue que a curva $g(t) = g_0\ exp(tA_1)$ é solução da equação $\dot{g} = g(t)A_1,\ g(0) = g_0$ para $t \in (0, t_1)$. Assim, $g(t_1) = g_0\ exp(t_1 A_1)$. Similarmente, se $t \in (t_1, t_2)$ então $\dot{g} = g(t)A_2,\ g(t_1) = g_0\ exp(t_1 A_1)$. Portanto,

$$g(t) = g(t_1)\ exp[(t - t_1)A_2] = g_0\ exp(t_1 A_1)\ exp[(t - t_1)A_2]$$

Assim,

$$g(t_2) = g_0\ exp(t_1 A_1)\ exp[(t_2 - t_1)A_2]$$

Continuando com esse procedimento obtemos

$$g(t_N) = g(T) = g_0 \ exp(t_1 A_1) \ exp[(t_2 - t_1)A_2] \cdots exp[(t_N - t_{N-1})A_N].$$

Agora fazendo $\tau_1 = t_1, \ \tau_2 = t_2 - t_1, \cdots, \tau_N = t_N - t_{N-1}$ segue que

$$g(T) = g_0 \ exp(\tau_1 A_1) \ exp(\tau_2 A_2) \cdots exp(\tau_N A_N), \ \sum_{i=1}^{N} \tau_i = T,$$

e a prova está concluída. $\square$

Algumas propriedades do conjunto acessivél que serão de nossa utilidade são estabelecidas no próximo resultado.

Proposição 2.17. *Seja $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ um sistema invariante à esquerda, e g um ponto arbitrário em G. Então,*

(a) $\mathcal{A}_\Gamma(g) = \{g \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) | A_i \in \Gamma, t_i \geq 0, N \geq 0\}$;

(b) $\mathcal{A}_\Gamma(g) = g\mathcal{A}_\Gamma(e) = \{gh : h \in \mathcal{A}_\Gamma(e)\}$, *onde $\mathcal{A}_\Gamma(e)$ é o conjunto de acessibilidade desde a identidade e de G.*

(c) $\mathcal{A}_\Gamma(g)$ *é um subconjunto conexo por caminhos em G.*

(d) O conjunto de acessibilidade $\mathcal{A}_\Gamma(e)$ é um semigrupo de G.

Prova: *A prova do item (a) segue imediatamente do Lema 2.16. Vamos provar os outros itens: (b) Seja $p \in \mathcal{A}_\Gamma(g)$, então existe uma trajetória $x(t)$ de Γ tal que $\dot{x}(t) = A_i(x(t)), \ t \in (t_{i-1}, t_i), \ A_i \in \Gamma, \ x(0) = e$ e $x(T) = p = g \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N)$, $T \geq 0$. Além disso, tomando a curva $y(t) = g^{-1}x(t)$, é claro que $gy(0) = e$, e $\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}(L_{g^{-1}}(x(t)) = (dL_{g^{-1}})_{x(t)}\dot{x}(t) = (dL_{g^{-1}})_{x(t)}A_i(x(t)) = A_i(y(t))$.*
(c) Qualquer ponto em $\mathcal{A}_\Gamma(g)$ é ligado com o ponto inicial g por uma trajetória de Γ. Assim, dois pontos arbitrários podem ser ligados por uma trajetória de Γ que passa pelo ponto inicial.

Finalmente, para a prova do item (d) sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_\Gamma(e)$. Logo, podemos escrever g_1 e g_2 em termos da solução de Γ por $g_1 = \varphi(e, u, t)$ e $g_2 = \varphi(e, u', t')$. Agora, defina um controle v por

$$v(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & \textit{para} \quad 0 \leq \tau \leq t \\ u'(\tau - t) & \textit{para} \quad \tau > t \end{cases}$$

Então $g_1 g_2 = \varphi(e, v, t + t')$. Portanto, $g_1 g_2 \in \mathcal{A}_\Gamma(e)$, e a prova está completa. □

Observação 2.18. *O item (b) da Proposição 2.17 mostra que é suficiente considerar o caminho mais curto que inicia na identidade e do grupo. Assim, se $g(t)$ é o caminho mais curto que liga g_0 com g_1, então $g_0^{-1} g(t)$ é o caminho mais curto que liga e com $g_0^{-1} g_1$.*

Exemplo 2.19. *Considere o sistema invariante sobre o grupo de Lie 2–dimensional $G = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, dado por*

$$\dot{g} = Y(g),$$

onde $g \in \mathbb{T}^2$, e $Y(g) = (1, r)$ com r um número irracional. Ou seja, $\Gamma = \{Y\}$.

Por outro lado, como G é um grupo de Lie abeliano, e usando a descrição do toro $\mathbb{T}^2$ pelo conjunto $\{(x \mod 1, y \mod 1)\}$, segue da Proposição 1.73 que o conjunto acessivél desde a identidade de G está dado por

$$\mathcal{A}_\Gamma(Id) = \{\exp(tY) | Y \in \Gamma, t \geq 0\} = \{(x \mod 1, rx \mod 1) | x \geq 0\},$$

o mesmo que é denso em G.

Capítulo 3

Observabilidade

A propriedade de observabilidade de sistemas está associado ao problema de determinar os estados no espaço de estados da dinâmica do controle a partir uma observação parcial conhecida sobre o sistema em um intervalo de tempo finito. Em outras palavras, estudar a possibilidade de encontrar um controle que permita distinguir dois estados diferentes no espaço de estados da dinâmica do controle via a observação disponível dada por uma função de observação.

Neste capítulo estudaremos a propriedade de observabilidade de sistemas de controle invariante sobre um grupo de Lie com função de saída cujo espaço de saída é um espaço coseto deste grupo de Lie. Seguimos a linha descrita pelos autores em [3], [4] e suas principais referências.

3.1 Generalidades

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Considere um sistema de control invariante à direita sobre G junto com uma função de saída, descrito pelo par,

$$\Gamma : \quad \dot{g}(t) = A\left(g(t)\right) + \sum_{i=1}^{m} u_i B^i\left(g(t)\right), \quad g(t) \in G \tag{3.1}$$

$$y(t) = h(g(t)) = \mathcal{C}g(t) \tag{3.2}$$

onde $A, B^1, \cdots, B^m \in \mathfrak{g}$, $h:\ G \longrightarrow G \setminus \mathcal{C}$ *é chamada de aplicação de saída, e* $\mathcal{C}$ *é um subgrupo fechado de* G, *e a notação* $\mathcal{C}g$ *representa uma classe lateral direita de* $\mathcal{C}$ *em* G *que contém* g.

Uma das propriedades importantes associadas com sistemas de controle está relacionada com a noção de pontos distinguíveis. Iniciamos com a seguinte definição,

Definição 3.1. *Seja* G *um grupo de Lie. Dizemos que dois pontos* g_1 *e* g_2 *em* G *são distinguíveis por trajetórias* $\varphi(\cdot)$ *de (3.1) se existir algum controle* $\widehat{u}$ *que da origem a saídas diferentes para esses dois pontos iniciais. Isto é,* $h(\varphi(t, \widehat{u}, g_1)) \neq h(\varphi(t, \widehat{u}, g_2))$ *para algum* $\widehat{u} \in \mathcal{U}$.

Assim, podemos definir sistema observável.

Definição 3.2. *O sistema (3.1)–(3.2) sobre um grupo de Lie* G *é observável (globalmente) se não existem dois pontos de* G *os quais são indistinguíveis por* Σ, *isto é, não existem dois pontos* $g_1, g_2 \in G$ *tais que*

$$h(\varphi(t, u, g_1)) = h(\varphi(t, u, g_2)),$$

para todo φ *no semigrupo* S_Σ *do sistema. Dizemos que é localmente observável em um ponto* $g \in G$ *se existe uma vizinhança* U *de* g *tal que todo elemento em* U *não é indistinguível de* g.

Denotamos por $\{S\}_G$ *o menor subgrupo do grupo de Lie* G *contendo* S *(também chamado de subgrupo gerado pelo subconjunto* S *de* G*), e* $\{\mathcal{K}\}_{LA}$ *denota a subálgebra de Lie gerada pelo conjunto* $\mathcal{K}$ *de campos de vetores invariantes à direita sobre* G. *Também,*

$$exp\ (\{\mathcal{K}\}_{LA}) = \{\exp(X) :\ X \in \{\mathcal{K}\}_{LA}\}.$$

A seguinte é uma condição necessária de observabilidade quando o sistema de controle está definido sobre um grupo de Lie de matrizes.

Teorema 3.3. *Sejam* $\mathfrak{h}$ *e* $\mathfrak{l}$ *álgebras de Lie em* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. *Considere um sistema de controle invariante à direita sobre o grupo de Lie de matrizes* G *junto com uma* *aplicação de saída, descrita pelo par,*

$$\dot{X}(t) = AX(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i B^i X(t), \quad X(t) \in G \tag{3.3}$$

$$y(t) = (\{\exp\ \mathfrak{h}\}_G)X(t)$$

Suponha que o conjunto de acessibilidade do sistema (3.3) a partir da identidade é $\{\exp\ \mathfrak{l}\}_G$*. Então o conjunto de estados iniciais* $\mathcal{I}$ *que são indistinguíveis desde a identidade contem* $\{\exp\ \mathcal{K}\}_G$ *se e somente se* $\{ad_{\mathfrak{l}}(\mathcal{K})\ \}_{LA} \subset \mathfrak{h}$*. Portanto, se* $\mathfrak{h}$ *não contem a subálgebra* $\mathcal{K}$ *de modo que* $\{ad_{\mathfrak{l}}\mathcal{K}\}_{LA} \subset \mathfrak{h}$ *então todos os estados são indistinguíveis desde a identidade.*

Prova: *O leitor interessado pode consultar [3].* □

Observação 3.4. *Os autores em [3] mostram que a condição necessária do Teorema 3.3 não é suficiente.*

Desde o Teorema 3.3 temos que a parte "não observável "está relacionada com uma subálgebra $\mathfrak{l}$*-invariante* $\{ad_{\mathfrak{l}}\mathcal{K}\}_{LA}$*, a mesma que está contida na subálgebra de Lie do subgrupo de saída. O estudo da parte "não observável "será discutido en esta seção, seguindo a linha dos autores em [3] e [4] estabeleceremos algumas condições necessárias e suficientes para que (3.1)–(3.2) seja observável.*

Através desta seção assumiremos que os controles são elementos de $\mathcal{U}_{ccpp}$*, isto é, funções constantes por pedaços.*

3.2 Conjunto não–observável

Proposição 3.5. *Seja* G *um grupo de Lie, e* $\mathcal{A}(e)$ *o conjunto de acessibilidade de (3.1) desde a identidade e de* G*. Então, dois pontos arbitrários* $p, q \in G$ *são indistinguíveis via (3.1) se e somente se*

$$Ad\ (r)pq^{-1} \in \mathcal{C}, \tag{3.4}$$

para cada $r \in \mathcal{A}(e)$*, onde* $\mathcal{C}$ *é o subgrupo de* G *como em (3.2).*

Prova: *Desde a estrutura da saída (3.2) segue–se que $p, q \in G$ são indistinguíveis se e somente se $h(\varphi(t,u,p)) = h(\varphi(t,u,q))$, onde φ é uma solução de (3.1). Assim, $p, q \in G$ são indistinguíveis se e somente se $C\varphi(t,u,p) = C\varphi(t,u,q)$. Equivalentemente, $p, q \in G$ são indistinguíveis se e somente se para todo t os conjuntos de acessibilidade, $\mathcal{A}(p,t)$ e $\mathcal{A}(q,t)$ estão na mesma classe lateral de C. Desde o item (2) da Proposição 2.17 temos $\mathcal{A}(g) = \mathcal{A}(e)g = \{rg : r \in \mathcal{A}(e)\}$. Portanto, $p, q \in G$ são indistinguíveis se e somente se $Crp = Crq$ para todo $r \in \mathcal{A}(e)$. Isto é, $rpq^{-1}r^{-1} \in C$ para todo $r \in \mathcal{A}(e)$.*

Por outro lado, se G é um grupo de Lie de matrizes tem–se que a aplicação adjunta coincide com a aplicação conjugação, ou seja, $Ad(r) = C_r$, e restringindo ao conjunto de acessibilidade $\mathcal{A}(e)$ está bem definida. Por tanto, desde $rpq^{-1}r^{-1} \in C$. segue que $rpq^{-1}r^{-1} = Ad(r)pq^{-1} \in C$. □

Agora definimos um estado não observável como segue.

Definição 3.6. *Um ponto $z \in G$ é dito não observável pelo sistema (3.1)–(3.2) se existem p e q em G tais que $pq^{-1} = z$, e p e q são indistinguíveis via (3.1).*

Observação 3.7. *Seja $z \in G$ não observável. Se $p^1(q^1)^{-1} = z$ para qualquer par (p^1, q^1) então p^1 e q^1 são indistinguíveis. De fato, segue diretamente desde a Proposição 3.5.*

Proposição 3.8. *Seja G um grupo de Lie e $\mathcal{C}$ um subgrupo de G. Se $\mathcal{C}$ é fechado então o conjunto não observável*

$$H = \{z \in G \mid z \text{ é não observável}\}$$

do sistema (3.1)–(3.2) é um subgrupo de Lie fechado de G.

Prova: *Primeiro note que, pela Definição 3.6 de estado não observável e equação (3.4) da Proposição 3.5, está claro que $H \subset \mathcal{C}$.*

Agora, veja que se $z \in G$ é não observável então pela Definição 3.6 segue que para arbitrários $p, q \in G$ se $pq^{-1} = z$ tem–se p e q são indistinguíveis. Desde a

Proposição 3.5 obtemos que $pq^{-1} = z$ *para arbitrários* $p, q \in G$ *tem–se* $Ad\ (r)pq^{-1} \in \mathcal{C}$ *para cada* $r \in \mathcal{A}(e)$. *Assim, é possível escrever* H *na forma*

$$H = \{z \in G \mid rzr^{-1} \in \mathcal{C} \text{ para todo } r \in \mathcal{A}(e)\}.$$

Sejam $h_1, h_2 \in H$. *Então,*

$$rh_1h_2^{-1}r^{-1} = rh_1r^{-1}rh_2^{-1}r^{-1} = (rh_1r^{-1})(rh_2r^{-1})^{-1} \in \mathcal{C}.$$

Assím, $h_1h_2^{-1} \in H$. *Por tanto,* H *é subgrupo de* G.

Seja $\{h_n\} \subset H$ *uma seqüência, se* $h_n \to z$ *quando* $n \to \infty$ *então*

$$rh_nr^{-1} \to rzr^{-1} \in \mathcal{C},$$

pois $\mathcal{C}$ *é fechado. Assim,* $z \in H$, *e conseqüentemente* H *é fechado.*

Finalmente, como H *é um subgrupo fechado do grupo de Lie* G *segue–se desde o Teorema 1.13 que* H *é um subgrupo de Lie.* □

Se C *é um subgrupo fechado do grupo de Lie* G *a aplicação saída dada como (3.2) tem uma estrutura analítica que é descrita pelo seguinte resultado.*

Teorema 3.9. *Sejam* G *um grupo de Lie e* $\mathcal{C}$ *um subgrupo de* G. *Se* $\mathcal{C}$ *é fechado então o espaço quociente* $\mathcal{C} \setminus G$ *admite estrutura de variedade analítica real de tal forma que a aplicação* $G \times (\mathcal{C} \setminus G) \to (\mathcal{C} \setminus G)$ *definida por* $(p, \mathcal{C}q) \mapsto \mathcal{C}pq$ *é analítica real. Em particular, a projeção* $G \to \mathcal{C} \setminus G$ *é analítica real.*

Prova: *Veja [5].* □

Seja $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ *o subgrupo de* G *gerado por* $\mathcal{A}(e)$ *e denotemos por* $\overline{\{\mathcal{A}(e)\}_G}$ *o fecho de* $\{\mathcal{A}(e)\}_G$.

Observação 3.10. *Tomando* $\Gamma = \left\{A + \sum_{j=1}^{m} u_jB^j \mid u_j \in \mathbb{R}\right\} \in \mathfrak{g}$ *desde o item (a) da Proposição 2.17 segue que o subgrupo de* G *gerado por* $\mathcal{A}(e)$ *pode ser escrito na forma,*

$$\{\mathcal{A}(e)\}_G = \left\{exp\ (t_sX_s) \cdots exp\ (t_1X_1) \mid t_i \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}^+, X_i \in \Gamma; i = 1, \cdots, s\right\} \quad (3.5)$$

O próximo resultado é um Lema técnico que será utilizado na prova de alguns resultados de observabilidade estabelecidos mais adiante neste capítulo.

Lema 3.11. *Seja H o conjunto não observável do sistema (3.1)–(3.2). Suponha que $z \in H$. Então*

$$Ad\,(r)z \in H, \quad \forall\ r \in \overline{\{\mathcal{A}(e)\}_G} \tag{3.6}$$

Prova: *Seja $z \in H = \{\eta \in G \mid r\eta r^{-1} \in \mathcal{C}$ para todo $r \in \mathcal{A}(e)\}$. Primeiro, vamos verificar que a seguinte afirmação é válida.*

Afirmação 1:

$$Ad\,(r)z \in H, \quad \forall\ r \in \mathcal{A}(e)$$

Com efeito, para cada $\tilde{r} \in \mathcal{A}(e)$ temos $\tilde{r}r \in \mathcal{A}(e)$, pois pelo item (d) da Proposição 2.17 o conjunto $\mathcal{A}(e)$ é um semigrupo. Agora, como $z \in H$ e $\tilde{r}r \in \mathcal{A}(e)$ segue que $(\tilde{r}r)z(\tilde{r}r)^{-1} \in \mathcal{C}$. Portanto,

$$\tilde{r}(rhr^{-1})\tilde{r}^{-1} = (\tilde{r}r)z(\tilde{r}r)^{-1} \in \mathcal{C}, \quad \forall\ \tilde{r} \in \mathcal{A}(e).$$

Assim, $rzr^{-1} \in H$, o que prova a Afirmação 1.

Por outro lado, desde a forma para $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ descrito em (3.5), o mais pequeno subgrupo de G contendo $\mathcal{A}(e)$, segue–se que, a conclusão (3.6) deste teorema é válida para $r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G$ se provarmos que $z \in H$ implica $Ad\,(exp(t_sX_s)\cdots exp(t_1X_1))\,z \in H$. Para verificar isto, é suficiente provar que $E_s = \mathbb{R}^s$, $s = 1, 2, \cdots$, onde

$$E_s = \{(t_1, \cdots, t_s) \in \mathbb{R}^s \mid Ad\,(exp(t_sX_s)\cdots exp(t_1X_1))\,z \in \mathcal{C}\}\,.$$

Afirmação 2: $E_s = \mathbb{R}^s$ para $s = 1, 2, \cdots$

A prova desta afirmação será feita por um processo de indução.

Primeiro verificaremos o primeiro passo de indução, $s = 1$, via redução ao absurdo. Isto é, suponha que $Ad(exp\ t_1X_1)z \not\subset \mathcal{C}$. Então existe $\tilde{t}_1$ tal que

$$\left.\frac{d}{dt_1}\right|_{\tilde{t}_1} Ad(exp\ t_1X_1)z \notin (R_p)_*\mathfrak{c}, \tag{3.7}$$

onde $(R_p)_*$ denota a derivada da aplicação traslação à direita, $R_p : G \to G$ com $p = Ad(exp\ \tilde{t}_1X_1)z$, e $\mathfrak{c}$ é a álgebra de Lie de $\mathcal{C}$.

Por outro lado, como é conhecido uma 1–forma diferencial sobre G *é uma aplicação diferenciável* $\eta : g \in G \mapsto \eta_g \in T_g^*G$ *onde para cada* $g \in G$ *o espaço* T_g^*G *denota o espaço dual de* T_gG*, a 1–forma* η *é invariante à dereita se para todo* $g \in G$ *tem–se* $(R_g)^* \eta = \eta$ *onde o pull–back* $(R_g)^*$ *é dado pela 1–forma* $\tau = \eta \circ R_g = (R_g)^* \eta$ *definida por* $\tau_p = (R_g)_q^* \left(\eta_{R_g(p)}\right)$ *para todo* p *no dominio de* R_g*, escrevemos* $(R_g)^* \eta$*. Se denotarmos por* $\chi^*(G)$ *o conjunto de todas as 1–formas diferenciais sobre* G *e por* $\chi(G)$ *o conjunto de todos os campos de vetores sobre* G *é possível estabelecer a identificação via o emparelhamento bilinear* $(\eta, Z) \in \chi^*(G) \times \chi(G) \mapsto \langle \eta, Z \rangle \in \mathbb{R}$ *talque* $\eta_g(Zg) = \langle \eta, Z \rangle(g)$*. Além disso, a subalgebra* $\mathfrak{c}$ *de* $\mathfrak{g}$ *induz uma distribuição* $\Delta_{\mathfrak{c}}$ *sobre o fibrado tangente* TG *definida por* $\Delta_{\mathfrak{c}}(g) = (R_g)_* \mathfrak{c}$, $g \in G$*. Assim, dada* Δ *sobre* G *através da identificação bilinear anterior podemos associar a co–distribuição* $\Delta^{\perp} = \{\eta \in \chi^*(G) : \ \langle \eta, Z \rangle = 0, \ \forall Z \in \Delta\}$.

Em termo de formas diferenciais, (3.7) significa que existe uma 1–forma unitária invariante à direita $\omega(x)$ *gerada por* $\omega \in \mathfrak{c}^{\perp}$ *tal que*

$$\Big\langle w_{(p)}, \left.\frac{d}{dt_1}\right|_{\tilde{t}_1} Ad(exp\ t_1X_1)z \Big\rangle \neq 0.$$

Por analiticidade a expressão (3.2) é válida em um subconjunto aberto e denso de $\mathbb{R}$*. Mas, de acordo com a Afirmação 1 tem–se* $Ad(exp\ t_1X_1)z \in H$ *onde* $exp\ t_1X_1 \in \mathcal{A}(e) \subset \{\mathcal{A}(e)\}_G$*. Portanto, para* $\tilde{t}_1 \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}, t \geqq 0\}$ *obtemos*

$$\Big\langle w_{(p)}, \left.\frac{d}{dt_1}\right|_{\tilde{t}_1} Ad(exp\ t_1X_1)z \Big\rangle = 0,$$

isto leva a uma contradição; concluindo–se a prova do primeiro passo do processo de indução $s = 1$.

O próximo passo é assumir que a Afirmação 2 é válida para $s - 1$ *e provar que ela é também válida para* s.

Assumamos que,

$$Ad\ (exp\ (t_{s-1}X_{s-1}) \cdots exp\ (t_1X_1))z \in \mathcal{C}, \quad t_i \in \mathbb{R}$$

e

$$\{Ad\ (exp\ (t_sX_s) \cdots exp\ (t_1X_1))z \mid (t_1, \cdots, t_s) \in \mathbb{R}^s\} \not\subset \mathcal{C}.$$

Então, existe $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \cdots, \tilde{t}_s)$ tal que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\tilde{t}_s} Ad\ (exp\ (tX_s) exp\ (\tilde{t}_{s-1}X_{s-1}) \cdots exp\ (\tilde{t}_1 X_1))z \in \mathfrak{c}.$$

Como no caso de $s = 1$ temos uma contradição.

Portanto, temos provado que a conclusão (3.6) deste teorema é válida para $r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G$. Por continuidade, vale para todo $r \in \overline{\{\mathcal{A}(e)\}_G}$; e a prova está concluida. □

Denote os campos de vetores $A(g), B^1(g), \cdots, B^m(g)$ por $A, B^1, \cdots, B^m$, respectivamente, onde A e B^i são elementos na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Proposição 3.12. *Seja G um grupo de Lie, o subgrupo de G gerado pelo conjunto de accesibilidade $\mathcal{A}(e)$ de (3.1) desde a identidade e de G está dado por*

$$\{\mathcal{A}(e)\}_G = \{exp\ (t_s X_s) \cdots exp\ (t_1 X_1) \mid t_i \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}^+, X_i \in \{A, B^1, \cdots, B^m\}, i = 1, \cdots, s\}.$$

Prova: *Desde a forma para $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ descrita em (3.5) da Observação 3.10 tem–se que $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ é um grupo conexo por caminhos. Portanto, pelo Teorema 1.14 segue que $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ é um subgrupo de Lie. Agora, como $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ é um grupo de Lie conexo e $A, B^1, B^2, \cdots, B^m$ geram a álgebra de Lie de $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ então pela Proposição 1.67 obtem–se a forma para $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ como descrito na tese do resultado, e assim a prova está concluida.* □

Exemplo 3.13. *Considere o sistema de control invariante à dereita sobre o grupo de Lie $G = GL(3, \mathbb{R})$ descrito por,*

$$\Gamma : \quad \dot{g}(t) = A(g(t)) + uB\,(g(t))\,, \quad g(t) \in GL(3, \mathbb{R}),$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}l(3, \mathbb{R}),$$

Note que

$$exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e \quad exp(tB) = I + tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, se consideramos $exp(tA)$, $exp(tB)$, $exp(-tB)exp(-tA)exp(tB)exp(tA)$ *e seus produtos, obtemos*

$$\{\mathcal{A}(e)\}_{GL(3,\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.3 Invariância

Nesta subseção estudaremos a invariância da álgebra de Lie do sugrupo dos estados não observáveis.

Primeiramente, introduzimos a noção de invariância.

Definição 3.14. *Sejam* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *e* $\{X^1(x), \cdots, X^s(x)\}$ *um conjunto de campos de vetores invariantes à direita induzidos por* $X^i \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \cdots, s$, *respectivamente. Um subespaço* Δ *de* $\mathfrak{g}$ *gerado por* $\{X^1, \cdots, X^s\}$ *é dito* $Y \in \mathfrak{g}$ *invariante se*

$$[Y, X] \in \Delta, \quad \textit{para todo } X \in \Delta.$$

Antes de estabelecer a noção de invariância para 1–formas, precissamos introduzir a derivada de Lie.

Definição 3.15. *Sejam* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, ω *uma 1–forma no espaço cotangente* T_e^*G *de* G *na identidade* $e \in G$ *(denotado por* $\mathfrak{g}^*$*), e* $Y \in \chi(G)$ *um campo de vetores. A derivada de Lie da 1–forma* ω *na direção de* Y *denotada por* $L_Y\omega$ *está dada por*

$$L_Y\omega(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (Y_t)^* \, \omega_{Y_t(g)},$$

e o pullback $(Y_t)^*$ *esta dado por*

$$(Y_t)^* \omega_g(v) = \omega_{Y_t(g)} (Y_t)_* (v), \;\; v \in T_g G,$$

com $(Y_t)_*$ *a derivada do fluxo* Y_t *de* Y.

Definição 3.16. *Sejam* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *e* $\omega_1(g), \cdots, \omega_s(g)$ *1–formas invariantes à direita geradas por* $\omega_i \in \mathfrak{g}^*$, $i = 1, \cdots, s$ *onde* $\mathfrak{g}^*$ *denota o espaço cotangente de* G *na identidade* $e \in G$. *Um subespaço invariante à direita* Ω *gerado por* $\{\omega_1, \cdots, \omega_s\}$ *é dito* Y*–invariante se*

$$L_Y \omega \in \Omega, \;\; \forall \omega \in \Omega,$$

onde $L_Y\omega$ *é a derivada de Lie de* ω *na direção de* $Y \in \mathfrak{g}$.

Proposição 3.17. *Sejam* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, $\mathcal{A}(e)$ *o conjunto de accesibilidade de (3.1) desde a identidade* e *de* G, *e*

$$H = \{z \in G \mid rzr^{-1} \in \mathcal{C} \text{ para todo } r \in \mathcal{A}(e)\}$$

o subgrupo de Lie dos estados não observáveis do sistema (3.1)–(3.2). Então a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ *de* H *é* A *e* B^i, $i = 1, \cdots, m$ *invariante, onde* $A, B^1, \cdots, B^m \in \mathfrak{g}$ *geram a álgebra de Lie do subgrupo* $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ *de* G *gerado por* $\mathcal{A}(e)$. *Além disso,* $\mathfrak{h}$ *é a maior subálgebra de Lie* A *e* B^i, $i = 1, \cdots, m$ *invariante contida na álgebra de Lie* $\mathfrak{c}$ *do subgrupo de saída* $\mathcal{C}$.

Prova: *Como* $A, B^1, \cdots, B^m \in \mathfrak{g}$ *geram a álgebra de Lie do subgrupo* $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ *de* G *gerado pelo conjunto de accesibilidade* $\mathcal{A}(e)$ *e pela Proposição 3.10 o conjunto* $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ *está dado por*

$$\{exp\,(t_sX_s) \cdots exp\,(t_1X_1) \mid t_i \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}^+, X_i \in \{A, B^1, \cdots, B^m\}, i = 1, \cdots, s\}$$

se tomarmos $X = A$ *ou* B^i, $t \in \mathbb{R}$ *segue–se que* $p = exp\,(tX) \in \{\mathcal{A}(e)\}_G$. *Assim, pelo Lema 3.11 obtemos que para* $z \in H$ *valé* $Ad\,(exp\,(tX))z \in H$. *Portanto,* $(Ad(exp(tX)))_*\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$.

Agora, seja $Y \in \mathfrak{h}$; pelo item (i) da Proposição 1.91 obtemos

$$[X,Y] = ad(X)(Y) = (dAd)_e\,(X)\,Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad\ exp\ \left((tX)\right)Y = (Ad\ exp\ (tX))_* Y \subset \mathfrak{h}.$$

Para a prova da segunda parte, primeiro vamos verificar que a seguinte afirmação é válida.

Afirmação 1: *A álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ pode ser escrita na forma,*

$$\mathfrak{h} = \bigcap_{\substack{X_1,\cdots,X_p \in \{A,B_1,\cdots,B_m\} \\ p\in\mathbb{Z}^+}} ad_{X_1}^{-1}\cdots ad_{X_p}^{-1}\,(\mathfrak{c})\,. \tag{3.8}$$

A prova desta afirmação será feita por dupla inclusão de conjuntos. Denotemos por $\mathfrak{F}$ o lado dereito de (3.8),

$$\bigcap_{\substack{X_1,\cdots,X_p \in \{A,B_1,\cdots,B_m\} \\ p\in\mathbb{Z}^+}} ad_{X_1}^{-1}\cdots ad_{X_p}^{-1}\,(\mathfrak{c})\,,$$

Seja $Y \in \mathfrak{F}$ então $Y \in ad_{X_i}^{-1}(\mathfrak{c})$, para todo $i = 1,\cdots,p$ com $p \in \mathbb{Z}^+$. Mostraremos que $Y \in \mathfrak{h}$. Desde $Y \in ad_{X_i}^{-1}(\mathfrak{c})$ segue que $ad_{X_i}(Y) \in \mathfrak{c}$, para todo $i = 1,\cdots,p$ com $p \in \mathbb{Z}^+$. Como $H = \{z \in G \mid rzr^{-1} \in \mathcal{C}$ para todo $r \in \mathcal{A}(e)\}$ para provar que $Y \in \mathfrak{h}$ é suficiente provar que $exp\ (\tau Y) \in H$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Agora, como o conjunto

$$\{\mathcal{A}(e)\}_G = \{exp(t_sX_s)\cdots exp(t_1X_1) \mid t_i \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}^+, X_i \in \{A,B^1,\cdots,B^m\}, i = 1,\cdots,s\}$$

gerado pelo conjunto de accesibilidade é o mais pequeno subrgupo de G contendo $\mathcal{A}(e)$, tem–se que para provar que $exp\ (\tau Y) \in H$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$ é suficiente provar que, para cada $X_1,\cdots,X_p \in \{A,B^1,\cdots,B^m\}$, $(t_1,\cdots,t_p) \in \mathbb{R}^p$ é válido

$$Ad\ (exp\ (t_pX_p)\cdots exp\ (t_1X_1))exp\ \tau Y \in \mathcal{C}. \tag{3.9}$$

Por outro lado, como $Ad\ (exp\ (t_pX_p)\cdots exp\ (t_1X_1))$ é um difeomorfismo, temos

$$Ad\ (exp\ (t_pX_p)\cdots exp\ (t_1X_1))exp\ \tau Y = exp\ \left(Ad(exp\ (t_pX_p)\cdots exp\ (t_1X_1))\,\tau Y\right).$$

Assim, para provar (3.9) é suficiente mostrar que

$$Ad\,(exp\,(t_pX_p)\cdots exp\,(t_1X_1))\tau Y\in\mathfrak{c}.$$

Desde o item (b) da Proposição 1.89 segue–se que

$$Ad\,(exp(t_pX_p)\cdots exp(t_1X_1))\,\tau Y = Ad\,(exp(t_pX_p))\,Ad(exp(t_{p-1}X_{p-1}))\cdots Ad(exp(t_1X_1))\tau Y,$$

Portanto, é suficiente provar que $Ad\,(exp(t_kX_k))\,\tau Y)\in\mathfrak{F}$. *Mas pelo item (ii) da Proposição 1.91, denotando por Exp é o endomorfismo* $Exp:\ \mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g})\longrightarrow Gl\,(\mathfrak{g})$, *obtemos*

$$Ad\,(exp(t_kX_k))\,\tau Y = Exp\,(ad(t_kX_k))\,\tau Y=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ad(t_kX_k))^j}{j!}\,(\tau Y)\in\mathfrak{F},$$

pois $ad_{X_i}(Y)\in\mathfrak{c}$ *para todo* $i=1,\cdots,p$ *com* $p\in\mathbb{Z}^+$. *Assim, a inclusão* $\supseteq$ *esta provada.*

Agora, provarmos que $\mathfrak{h}$ *esta contida no lado dereito de (3.8). Desde a primeira parte deste resultado temos que* $\mathfrak{h}$ *é* A *e* B_i *invariante. Assim, se* $X=A$ *ou* B^i *tem–se* $ad(X)\,(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}$. *Como* $H=\{z\in G\mid rzr^{-1}\in\mathcal{C}$ *para todo* $r\in\mathcal{A}(e)\}$ *segue que* $ad_{X_i}\,(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{c}$. *Isto é,* $\mathfrak{h}\subset ad_{X_i}^{-1}\mathfrak{c}$, $i=1,\cdots,p$ *com* $p\in\mathbb{Z}^+$. *Portanto, para qualquer* $X_i\in\Gamma=\{A,B_1,\cdots,B_m\}$, $i=1,\cdots,p$ *e* $p\in\mathbb{Z}^+$ *tem–se,*

$$\mathfrak{h}\subseteq\bigcap_{X_i\in\Gamma}ad_{X_1}^{-1}\cdots ad_{X_p}^{-1}\,(\mathfrak{c})\,.$$

concluindo–se a prova da Afirmação 1.

Finalmente, provaremos que (3.8) implica que $\mathfrak{h}$ *é a maior subálgebra de Lie* A *e* B^i *invariante contida em* $\mathfrak{c}$. *Suponha que outra álgebra de Lie, digamos* $\tilde{\mathfrak{h}}\subset\mathfrak{c}$ *é também* A *e* B^i *invariante. Então, para qualquer* $X_1,\cdots,X_p\in\{A,B^1,\cdots,B^m\}$ *tem–se,*

$$ad_{X_1}\cdots ad_{X_p}\tilde{\mathfrak{h}}\subset\tilde{\mathfrak{h}}\subset\mathfrak{c}.$$

Portanto, $\tilde{\mathfrak{h}}\subset ad_{X_1}^{-1}\cdots ad_{X_p}^{-1}\mathfrak{c}$. *Como* $X_1,\cdots,X_p$ *são escolhidos arbitrariamente temos que* $\tilde{\mathfrak{h}}\subset\mathfrak{h}$, *e a prova esta concluida.* □

3.4 Propriedades de Observabilidade

Nesta seção estabelecemos algumas condições de observabilidade de (3.1)–(3.2).

Para iniciarmos nosso estudo primeiro estabelecemos outra forma alternativa de estabelecer a Definição 3.2 dada por,

Definição 3.18. *O sistema (3.1)–(3.2) é dito localmente observável em $g \in G$ se existe uma vizinhança V_g de g tal que todo elemento em V_g não é indistinguível de g. Isto é,*

$$I_g \cap V_g = \{g\},$$

onde I_g é o conjunto de pontos que são indistinguíveis de g.
Dizemos que o sistema (3.1)–(3.2) é localmente observável se é localmente observável em todos os pontos.

Definição 3.19. *O sistema (3.1)–(3.2) é dito globalmente observável se $I_g = \{g\}$, para todo $g \in G$.*

O seguinte resultado estabelece um teste de observabilidade local.

Teorema 3.20. *O sistema (3.1)–(3.2) é localmente observável se e somente se a maior subálgebra de Lie A e B^i, $i = 1, \cdots, m$ invariante contida na álgebra de Lie $\mathfrak{c}$ do subgrupo de saída $\mathcal{C}$ é trivial. Além disso, se V_e é uma vizinhança da identidade $e \in G$ tal que $I_e \cap V_e = \{e\}$ então $V_g = R_g(V_e)$ é uma vizinhança de $g \in G$ tal que $I_g \cap V_g = \{g\}$, onde R_g denota a translação à direita.*

Prova: *Pela segunda parte da Proposição 3.17 tem–se que a maior subálgebra de Lie A e B^i, $i = 1, \cdots, m$ invariante contida na álgebra de Lie $\mathfrak{c}$ do subgrupo de saída $\mathcal{C}$ está dada pela subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ do subgrupo de Lie*

$$H = \{z \in G \mid rzr^{-1} \in \mathcal{C} \text{ para todo } r \in \mathcal{A}(e)\}$$

dos estados não observáveis do sistema (3.1)–(3.2). Por tanto, $\mathfrak{h}$ é trivial se e somente se $H = \{z \in G \mid z \text{ é não observável}\} = \{e\}$, e a prova do resultado segue. $\square$

Antes de estabelecer um resultado de observabilidade global, introduzimos algumas notações.

Observação 3.21. *O centralizador de $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ em G é um sugbrupo de Lie. Com efeito, de acordo com a Definição 1.98 o centralizador S de $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ em G está dado por,*

$$S = \{g \in G \mid rg = gr, \text{ para todo } r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G\}.$$

Por otro lado, desde a Proposição 3.12 o subgrupo $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ está dado por,

$$\{\mathcal{A}(e)\}_G = \{exp\ (t_s X_s) \cdots exp\ (t_1 X_1) \mid t_i \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}^+, X_i \in \{A, B^1, \cdots, B^m\}, i = 1, \cdots, s\}.$$

Portanto, podemos escrever S na forma,

$$S = \{g \in G \mid g\ exp(tX) = exp(tX)g,\ X \in \{A, B^1, \cdots, B^m\}\} \tag{3.10}$$

Note que, S é um subgrupo fechado de G, e portanto é um subgrupo de Lie.

Pela forma do subgrupo $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ e a equação (3.24), segue–se que $g \in S$ se

$$Ad(g) exp(tY) = exp(tY), \quad \text{para } Y \in \{A, B^1, \cdots, B^m\},\ t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.22. *Considere o sistema de controle invariante à direita sobre o grupo de Lie $G = GL(3, \mathbb{R})$ junto com um função de saída, descrito pelo par,*

$$\Gamma : \quad \dot{g}(t) = A(g(t)) + uB\,(g(t)), \quad g(t) \in GL(3, \mathbb{R})$$

$$y(t) = h(g(t)) = \mathcal{C}g(t)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}l(3, \mathbb{R}),$$

e $h :\ GL(3, \mathbb{R}) \longrightarrow G \setminus \mathcal{C}$ é a aplicação de saída com $\mathcal{C} = SO(3, \mathbb{R})$ o grupo de Lie ortogonal especial.

Note que

$$exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e \quad exp(tB) = I + tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, se consideramos $exp(tA)$*,* $exp(tB)$*,* $exp(-tB)exp(-tA)exp(tB)exp(tA)$ *e seus produtos, obtemos*

$$\{\mathcal{A}(e)\}_{GL(3,\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto, desde a equação (3.24) segue–se que

$$S = \{g \in GL(3,\mathbb{R}) \mid g \; exp(tX) = exp(tX)g, \; X \in \{A, B\}\}$$

está dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}.$$

Teorema 3.23. *O sistema (3.1)–(3.2) é globalmente observável se e somente se são satisfeitas as seguintes condições:*

(a) $\mathfrak{h} = \{0\}$,

(b) $S \cap \mathcal{C} = \{e\}$,

onde e é a identidade em G.

Prova: *Suponha que (3.1)–(3.2) é globalmente observável. Então* $I_g = \{g\}$ *para todo* $g \in G$*. Assim,* $I_g \cap V_g = \{g\}$ *e o sistema é localmente observável. Portanto, pelo Teorema 3.20 segue–se que* $\mathfrak{h} = \{0\}$.

Por outro lado, se $z \in S \cap \mathcal{C}$ *com* $z \neq e$ *obtemos* $z \in \mathcal{C}$ *e* $z \in S$, $z \neq e$*. Assim,* $rz = zr$ *para todo* $r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G$*. Logo,* $rzr^{-1} = z \in \mathcal{C}$ *para todo* $r \in \mathcal{A}(e)$*. Então* $z \in H$,

o conjunto de estados não observáveis. Portanto, z é indistinguível da identidade $e \in G$. Ou seja, $S \cap \mathcal{C} = \{e\}$.
Reciprocamente, o item (a) $\mathfrak{h} = \{0\}$ implica que H é um subgrupo discreto de G. Note que, para cada $z \in H$ defina a aplicação $\psi : \{\mathcal{A}(e)\}_G \to H$ por $\psi(r) \mapsto Ad\ (r)z$. De acordo com Lema 3.11 ψ aplica $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ em H. Agora, como $\{\mathcal{A}(e)\}_G$ é conexo e ψ é contínua então $\{Ad\ (r)z \mid r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G\} \subset H$ é conexo, mas como

$$z \in \{Ad\ (r)z \mid r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G\}$$

segue que $\{z\} = \{Ad\ (r)z \mid r \in \{\mathcal{A}(e)\}_G\}$, isto é, $Ad\ (r)z = z$ para todo $r \in \mathcal{A}(e)\}_G$. Isto é, $z \in S$. Finalmente, usando a condição (b), obtemos que $z = e$. Portanto, $H = \{e\}$, e assim o sistema (3.1)–(3.2) é globalmente observável. □

Exemplo 3.24. *Considere o sistema de controle invariante à direita sobre o grupo de Lie $G = GL(3, \mathbb{R})$ junto com uma função de saída, descrito pelo par,*

$$\Gamma : \quad \dot{g}(t) = uB\left(g(t)\right), \quad g(t) \in GL(3, \mathbb{R}) \tag{3.11}$$

$$y(t) = h(g(t)) = \mathcal{C}g(t) \tag{3.12}$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}),$$

e $h : GL(3, \mathbb{R}) \longrightarrow G \setminus \mathcal{C}$ é a aplicação de saída com $\mathcal{C} = SO(3, \mathbb{R})$ o grupo de Lie ortogonal especial.

Note que o sistema (3.11)–(3.12) não é globalmente observável. Para verificar está afirmação usaremos o Teorema 3.23.

Primeiro considere o centralizador S de $\{\mathcal{A}(e)\}_{GL(3,\mathbb{R})}$ em $GL(3, \mathbb{R})$. Pela equação (3.21) S está dado por,

$$S = \{g \in GL(3, \mathbb{R}) \mid g\ exp(tX) = exp(tX)g,\ X \in \{B\}\}$$

Por tanto, $S \cap \mathcal{C} = \{g \in SO(3,\mathbb{R}) \mid gexp(tB) = exp(tB)g,$ *para todo* $t \in \mathbb{R}\}$. *Para encontrarmos uma forma explícita para* $S \cap \mathcal{C}$, *consideremos a equação*

$$gexp(tB) = exp(tB)g, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g = (g_{ij}) \in \mathcal{C}. \tag{3.13}$$

Note que,

$$exp\ (tB) = I + tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$g\ exp(tB) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}+tg_{12} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21}+tg_{22} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31}+tg_{32} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

e

$$exp(tB)g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ tg_{11}+g_{21} & tg_{12}+g_{22} & tg_{13}+g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Então a igualdade $gexp(tB) = exp(tB)g$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *implica que*

$$\begin{cases} g_{11}+tg_{12} = g_{11}, \\ g_{21}+tg_{22} = tg_{11}+g_{21} \\ g_{22} = tg_{12}+g_{22} \\ g_{23} = tg_{13}+g_{23} \\ g_{31}+tg_{32} = g_{31} \end{cases}$$

segue

$$g_{12} = 0, \quad g_{11} = g_{22}, \quad g_{13} = 0, \quad g_{32} = 0,$$

e podemos escrever g *na forma,*

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{11} & g_{23} \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{pmatrix},$$

mas $g \in \mathcal{C} = SO(3,\mathbb{R})$. *Isto é,* $\det(g) = 1$ *e* $g \cdot g^\top = I$. *Assim,* $g_{11} = \pm 1$, $g_{21} = g_{31} = g_{23} = 0$ *e* $g_{33} = 1$. *Portanto, as únicas soluções de (3.13) são*

$$g_1 = I, \quad e \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$S \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{ g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \neq \{I\}.$$

De acordo com Teorema 3.23 o sistema (3.11)–(3.12) não é globalmente observável.

Como foi observado pelo Teorema 3.20 e Teorema 3.23 a subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ *do grupo de Lie* H *dos estados não observáveis por (3.1)–(3.2) joga um papel importante no análise da propriedade de observabilidade de um sistema, assim um algoritmo para obter explicitamente esta subálgebra é de muita utilidade nesta direção.*

Proposição 3.25. *Seja o sistema (3.1)–(3.2). Então a seqüência* $\{\Omega_k\}$ *de subespaços invariantes à direita*

$$\Omega_0 \triangleq \mathfrak{c}^\perp,$$
$$\Omega_{k+1} \triangleq \Omega_k + L_A \Omega_k + \sum_{i=1}^{m} L_{B_i} \Omega_k, \quad k \geqq 1,$$

onde $\mathfrak{c}$ *é a álgebra de Lie do subgrupo de saída* $\mathcal{C}$ *e* $L_X(\omega)$ *a derivada de Lie da 1–forma* ω *com respeito ao campo de vetores* $X = A$ *ou* B^i $i = 1, \cdots, m$; *é convergente.*

Prova: *Como* $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$, *a seqüência* $\{\Omega_k\}$ *deve estabilizarse para algum inteiro* $k^* \leq n$, *pois a seqüência de subespaços invariantes à direita* $\{\Omega_k\}$ *é crescente.* $\square$

Observação 3.26. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\chi_{inv}(G)$ o conjunto dos campos de vetores invariantes à direita sobre G, e $\chi^*_{inv}(G)$ o conjunto das 1–formas (campos de covetores) invariantes à direita. Sejam $\omega(g) \in \chi^*_{inv}(G)$ gerado por $\mathfrak{g}^*$ (dual de $\mathfrak{g}$), e $A(g), B(g) \in \chi_{inv}(G)$ gerados por $A, B \in \mathfrak{g}$ respectivamente. Então,*

$$\langle L_A\omega, B\rangle = -\langle \omega, [A, B]\rangle. \tag{3.14}$$

Com efeito, como é conhecido a seguinte propriedade de derivadas de Lie é válida: se $X, Y \in \chi(G)$ e $\omega \in \chi^*(G)$ então $L_X\langle\omega, Y\rangle = \langle L_X(\omega), Y\rangle + \langle\omega, [X, Y]\rangle$. Assim, tomando $X = A$ e $Y = B$ obtemos

$$\langle L_A\omega, B\rangle = \langle L_{A(g)}\omega(g), B(g)\rangle = L_{A(g)}\langle\omega(g), B(g)\rangle - \langle\omega(g), [A(g), B(g)]\rangle,\ g \in G.$$

Por outro lado, como $\langle\omega(g), B(g)\rangle$ é constante segue que $L_{A(g)}\langle\omega(g), B(g)\rangle = 0$, e a afirmação (3.14) está concluida.

Proposição 3.27. *Seja G o grupo de Lie de matrizes $GL(n, \mathbb{R})$ (ou um subgrupo dele) com álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$, $\omega \in \mathfrak{g}l^*(n, \mathbb{R})$ uma 1–forma expressada como uma matriz $\omega = (\omega_{ij})$, e $A, B \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ respectivamente. Então*

$$L_A\omega = [\omega, A^\top] = \omega A^\top - A^\top\omega, \tag{3.15}$$

onde $(\cdot)^\top$ indica a transposta.
Além disso, se $A(g)$ é um campo de vetores invariante à direita, e ω é uma 1–forma invariante à direita, então

$$\omega(g) = \omega(g^\top)^{-1}$$

onde $\omega = \omega(e)$, e $\omega(g^\top)^{-1} = (R_{g^{-1}})^*\omega(e)$.

Prova: *Defina*

$$\langle\omega, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}a_{ij},$$

□

onde $A \in \mathfrak{g}$ e $w \in \mathfrak{g}^*$. Assim, desde (3.14) da Observação 3.26 segue–se que,

$$
\begin{aligned}
\langle L_A\omega, B\rangle &= -\langle \omega, [A,B]\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}[A,B]_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{kj}\omega_{ij}b_{ik} - \omega_{ij}a_{ik}b_{kj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_{pk}a_{qk} - a_{kp}\omega_{kq}\right)b_{pq}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$L_A\omega = [\omega, A^\top] = \omega A^\top - A^\top\omega, \tag{3.16}$$

onde $\top$ denota a transposta.

Agora, seja $A(g)$ um campo de vetores invariante à direita sobre o grupo de Lie $G = GL(n,\mathbb{R})$. Pela Definição 1.29 tem–se,

$$A(g) = (R_g)_*A(e) = Ag, \;\; g \in GL(n,\mathbb{R}),$$

onde $A = A(e) \in T_eG \equiv \mathfrak{g}$ e $R_g : G \to G$ é a translação à dereita.

Seja ω é uma 1–forma invariante à dereita. Note que,

$$\langle \omega(g), A(g)\rangle = \langle \omega, A\rangle.$$

De fato, se denotarmos $y = g^{-1}$ onde $g = (g_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$ e $y = (y_{ij})$ então

$$
\begin{aligned}
\langle \omega(g), A(g)\rangle &= \sum_i\sum_j\left(\sum_p \omega_{ip}y_{jp}\right)\left(\sum_q a_{iq}g_{qj}\right) \\
&= \sum_i\sum_p\sum_q \omega_{ip}a_{iq}\left(\sum_j g_{qj}y_{jp}\right) \\
&= \sum_i\sum_p\sum_q \omega_{ip}a_{iq}\delta_{qp} \\
&= \sum_i\sum_p \omega_{ip}a_{ip} = \langle \omega, A\rangle.
\end{aligned}
$$

Escrevendo $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *na forma de um vetor em* $\mathbb{R}^{n^2}$ *dado por*

$$A = A(e) = (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn})^\top,$$

podemos reescrever o campo de vetores invariante à dereita $A(g)$ *na forma vetorial como*

$$A(g) = (g^\top \dotplus g^\top \dotplus \cdots \dotplus g^\top) A(e) \quad n \text{ termos},$$

onde "$\dotplus$*" denota a soma direta de matrizes e* $(g^\top \dotplus g^\top \dotplus \cdots \dotplus g^\top)$ *a matriz jacobiana de translação à dereita* R_g.

Assim, de maneira semelhante obtemos,

$$\omega(x) = \omega(e)((g^\top)^{-1} \dotplus (g^\top)^{-1} \dotplus \cdots \dotplus (g^\top)^{-1})$$

onde $((g^\top)^{-1} \dotplus (g^\top)^{-1} \dotplus \cdots \dotplus (g^\top)^{-1})$ *é a matriz jacobiana de* $R_{g^{-1}}$. $\square$

Note que como toda álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ *é isomorfo à alguma álgebra de matrizes, a Proposição 3.27 é muito útil na construção da seqüência* $\{\Omega_k\}$ *descrita na Proposição 3.25 anteriormente, quando o grupo de Lie* G *é um grupo de Lie de matrizes.*

Teorema 3.28. *Seja* $\{\Omega_k\}$ *a seqüência dada na Proposição 3.25. Se* $\Omega_{k^*+1} = \Omega_{k^*}$ *então*

$$\mathfrak{h} = \Omega_{k^*}^\perp,$$

onde $\mathfrak{h}$ *é a álgebra de Lie do subgrupo de Lie* H *dos estados não observáveis do sistema (3.1)–(3.2).*

Prova: *Veja Isidori [9].* $\square$

O Teorema 3.28 proporciona um método para encontrar explicitamente a subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Exemplo 3.29. *Considere o sistema de controle invariante à direita sobre o grupo de Lie $G = GL(3,\mathbb{R})$ junto com uma função de saída, descrito pelo par,*

$$\Gamma : \quad \dot{g}(t) = uB\left(g(t)\right), \quad g(t) \in GL(3,\mathbb{R}) \tag{3.17}$$

$$y(t) = h(g(t)) = \mathcal{C}g(t) \tag{3.18}$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}),$$

e $h :\ GL(3,\mathbb{R}) \longrightarrow G \setminus \mathcal{C}$ é a aplicação de saída com $\mathcal{C} = SO(3,\mathbb{R})$ o grupo de Lie ortogonal especial.

Note que o sistema (3.17)–(3.18) é localmente observável. Para verificar esta afirmação usaremos o Teorema 3.20. Assim, o primeiro passo nesta direção é construir a subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ do subgrupo H dos estados não observáveis do sistema (3.17)–(3.18), usaremos o algoritmo descrito pelo Teorema 3.28 para esta finalidade.

A subálgebra $\mathfrak{c}$ do subgrupo de saída $\mathcal{C}$ está gerada pelo seguinte conjunto de matrizes antisimétricas,

$$\mathfrak{c} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Para o sistema (3.17)–(3.18) a seqüência de subespaços invariantes à direita do Teorema 3.28 é reduzido a,

$$\Omega_0 = \mathfrak{c}^{\perp},$$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k + L_B\Omega_k, \quad k \geqq 1,$$

onde $L_X(\omega)$ é a derivada de Lie do campo de vetores X ao longo da 1–forma ω.

Note que $\Omega_0 = \operatorname{Span}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, *onde*

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, usando a fórmula (3.15) segue–se que

$$L_B\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L_B\omega_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; L_B\omega_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$L_B\omega_2 = -L_B\omega_1$, $L_B\omega_3 = \{0\}$, *e* $L_B\omega_4 = \omega_2 - \omega_1$. *Assim,* $\Omega_1 = \Omega_0 + L_B\Omega_0$ *com* $L_B\Omega_k = \{L_B\omega : \; \omega \in \Omega_k\}$ *está dado por* $\Omega_1 = \mathfrak{g}^*$.

Também, $\Omega_2 = \Omega_1 + L_B\Omega_1 = \mathfrak{g}^* = \Omega_1$. *Portanto,* $k^* = 1$. *Isto é, a seqüência* $\{\Omega_k\}$ *é estabilizada em* $k^* = 1$. *Desde o Teorema 3.28 segue que,*

$$\mathfrak{h} = \Omega_1^{\perp} = \{0\}.$$

De acordo com Teorema 3.20 o sistema é localmente observável.

Observação 3.30. *Observabilidade local não implica global. De fato, desde o Exemplo 3.29 o sistema (3.17)–(3.18) é localmente observável, mas pelo Exemplo 3.24 tem–se que dito sistema não é globalmente observável.*

Exemplo 3.31. *Considere o sistema de controle invariante à direita sobre o grupo de Lie* $G = GL(3, \mathbb{R})$ *junto com uma função de saída, descrito pelo par,*

$$\Gamma : \quad \dot{g}(t) = A(g(t)) + uB\left(g(t)\right), \quad g(t) \in GL(3, \mathbb{R})$$

$$y(t) = h(g(t)) = \mathcal{C}g(t)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}l(3, \mathbb{R}),$$

e $h : GL(3, \mathbb{R}) \longrightarrow G \setminus \mathcal{C}$ *é a aplicação de saída com* $\mathcal{C} = SO(3, \mathbb{R})$ *o grupo de Lie ortogonal especial.*

Note que $\mathfrak{h} = \{0\}$. *Portanto, novamente pelo Teorema 3.20 o sistema é localmente observável.*

Pela equação (3.21) o centralizador S *de* $\{\mathcal{A}(e)\}_{GL(3,\mathbb{R})}$ *em* $GL(3, \mathbb{R})$ *está dado por,* $S = \{g \in GL(3, \mathbb{R}) \mid g \ exp(tX) = exp(tX)g, \ X \in \{A, B\}\}$. *Portanto,*

$$S \cap \mathcal{C} = \{g \in SO(3, \mathbb{R}) \mid g \ exp(tX) = exp(tX)g, \ X \in \{A, B\}, \ \textit{para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

A solução da equação, $gexp(tB) = exp(tB)g, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g = (g_{ij}) \in \mathcal{C}$, *está dada por*

$$g_1 = I, \quad e \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Mas, $g = (g_{ij}) \in \mathcal{C}$ *também deve cumprir a equação* $gexp(tA) = exp(tA)g, \ \forall t \in \mathbb{R}$. *Como*

$$exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

segue que g_2 *não comuta com* $exp(tA)$. *Assim,* $g_1 = I$ *é o único elemento em* $S \cap C$. *Portanto, desde o Teorema 3.23 o sistema é globalmente observável.*

Referências Bibliográficas

[1] Agrachev A.A., Sachkov Y.L., Control Theory from the Geometric Viewpoint, *Encyclopedia of Mathematical Sciences, Control Theory and Optimization II, Springer-Verlag, Berlin, 87, (2004).*

[2] Rodríguez J. C., Ayala V., L.A.B. San Martin, Optimality on Homogeneous Spaces, and the Angle System Associated with a Bilinear Control System, *SIAM Journal on Control and Optimization, 48 (4), (2009), 2636-2650.*

[3] Brockett R. W., System theory on group-manifolds and coset spaces, *SIAM J. Control, 10 (2), (1972), 265–284.*

[4] Cheng D., Dayawansa W.P., Martin C.F. , Observability of systems on Lie groups and coset spaces, *SIAM J. Contr. Optim., 28 (3), (1990), 570–581.*

[5] C. Chevalley, Theory of Lie Groups, *Princeton University Press, Princeton, NJ, (1946), 109–111.*

[6] H. Nijmeijer, J. M. Schumacher, Zeros at infinity for affine nonlinear control systems, *IEEE Trans. Automat. Control, 30 (1985), 566-573.*

[7] Helgason S., Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, *New York: Academic Press., (1978).*

[8] H. Yamabe, On an arcwise connected subgroup of a Lie Group, *Osaka Math. J., (1950), 13-14.*

[9] *Isidori A.,* Nonlinear control systems: An introduction*, Lecture Notes in Control and Information Science, 287, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1985).*

[10] *Jurdjevic V.,* Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1997).*

[11] *Kobayashi S., Nomizu K.,* Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, 1, (1963).*

[12] *M. Hausner, J. T. Schwartz,* Lie Groups, Lie Algebras*, Gordon and Breach, New York, (1968).*

[13] *Sachkov Yu.L.,* Control theory on Lie Groups*, J. Math. Sci. 156 (3), (2009), 381-439.*

[14] *San Martin L.A.B.,* Álgebras de Lie*, Editorial UNICAMP, Brasil, (1999).*

[15] *Sussmann H.,* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc., 180, (1973), 171-188.*

[16] *Varadarajan V. S.,* Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Prentice-Hall, (1974); New York: Springer-Verlag, (1984).*

[17] *Warner F. W.* Foundation on Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer, University of Pensilvania, (1983).*