UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
2018

Versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos

LEONARDO DA SILVA BRITO

LEONARDO DA SILVA BRITO

Versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves.

Manaus - AM
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Brito, Leonardo da Silva

B862v Versões das propriedades A e B de Lindesntrauss para operadores compactos : Versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos / Leonardo da Silva Brito. 2018

144 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Thiago Rodrigo Alves

Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Operadores compactos. 2. Propriedades de Lindenstrauss. 3. Propriedade da aproximação . 4. Espaços uniformemente convexos . I. Alves, Thiago Rodrigo II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. General Rodrigo Octavio Jordão Ramos
Coroado I, Manaus - AM, CEP 69067-005

ALUNO: Leonardo da Silva Brito.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 2160166.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Auditório Professor José Henrique de Sá Mesquita do Departamento de Matemática, Campus UFAM, em 23 de Março de 2018, às (horas)h(minutos)min, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves (orientador) Thiago Rodrigo Alves
UFAM - Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
UFAM - Universidade Federal do Amazonas

Manaus-AM, 23 de Março de 2018.

BRITO, L. S. *Versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos* 2018. 138 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Amazonas, Manaus-AM.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar as versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos. No decorrer do nosso trabalho, apresentamos resultados sobre a topologia fraca-estrela, bases de Schauder, propriedades da aproximação, espaços de Banach cuja norma depende localmente de finitas coordenados, espaço estritamente convexo, espaço uniformemente convexo, dentre outros. Em 2014 Miguel Martín publicou um artigo respondendo de maneira positiva a seguinte pergunta: Existem operadores compactos entre espaços de Banach que não podem ser aproximados por operadores compactos que atingem a norma? Ao fazer isso, introduziu, no mesmo trabalho, duas propriedades chamadas de propriedades A^k e B^k ou versões para operadores compactos das propriedades de Lindenstrauss. Nesta dissertação, são apresentados de maneira detalhada resultados relacionados às propriedades A e B de Lindenstrauss e propriedades A^k e B^k.

Palavras-chave: Operador compacto; Propriedades de Lindenstrauss; Propriedade da aproximação; Espaços uniformemente convexos.

BRITO, L. S. *Versions of Lindenstrauss properties A and B for compact operators.* 2018. 138 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Amazoans, Manaus-AM.

Abstract

The main goal in this dissertation is to study the versions for compact operators of Lindenstrauss property A and B. In the course of our work, we present results concerning weak-star topology, Schauder basis, approximation properties, Banach spaces that locally depend upon finitely many coordinates, strictly convex spaces, uniformly convex spaces, among others. In 2014 Miguel Martín answered positively the following question: Are there compact operators between Banach spaces that can not be approximated by compact operators that attain their norms? In order to do that, he introduced two properties called properties A^k and B^k or versions for compact operators of Lindenstrauss properties. In this dissertation we present some results regarding Lindenstrauss properties A and B, and we also provide several results regarding properties A^k and B^k.

Keywords: Compact operator; Lindenstrauss properties; Approximation properties; Uniformly convex space.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\lvert \cdot \rvert$	módulo
$\lVert \cdot \rVert$	norma
$\lVert \cdot \rVert_X$	norma em X
X, Y, Z, W e F	espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
$W \leq Z$	W é subespaço de Z
e_n	$(0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)$
$Im(A)$	imagem da aplicação A
$ker(T)$	núcleo do operador linear T
X'	dual topológico do espaço vetorial normado X
$B_X[x_0; r]$	bola fechada do espaço normado X com centro em x_0 e raio r
B_X	$B_X[0; 1]$
$X \times Y$	produto cartesiano de X e Y
$\prod_{n=1}^{N} G_n$	$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_N$
$X \oplus Y$	soma direta de X e Y
$L(X, Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares contínuos de X em Y
$\mathcal{NA}(X, Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares contínuos de X em Y que atingem a norma
$\mathcal{F}(X, Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares contínuos de X em Y de posto finito
$\mathcal{K}(X, Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores compactos lineares contínuos de X em Y

$T' : Y' \longrightarrow X'$,	operador adjunto de $T \in L(X,Y)$
$R : X' \longrightarrow X'$ w^*-w^*-contínuo	R é contínuo na topologia fraca-estrela $(X', \sigma(X', X))$
$T\|_F$	operador $T \in L(X,Y)$ restrito ao subespaço F de X
I_X	operador identidade de X
I ou T^0	operador identidade
$(x_n)_n$	sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
$\sup\limits_n \\|x_n\\|$ ou $\sup\limits_n \|x_n\|$	$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \\|x_n\\|$ ou $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ respectivamente
$(\ell_p, \\|.\\|_p)$	$\{(a_n) : a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p < \infty\}$ onde $\\|(a_n)_n\\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p)^{1/p}$
$(\ell_\infty, \\| \cdot \\|_\infty)$	$\{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitado$\}$ onde $\\|(a_n)_n\\|_\infty = \sup\limits_n \|a_n\|$
$(c_0, \\|.\\|_\infty)$	$\{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_n a_n = 0\}$ onde $\\|(a_n)_n\\|_\infty = \sup\limits_n \|a_n\|$
$X \simeq Y$	X é isomorfo topologicamente a Y
$\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$	espaço gerado pela sequência $(x_n)_n$
$\overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$	fecho do espaço gerado pela sequência $(x_n)_n$
$T \circ \tilde{T}$	composta dos operadores T e $\tilde{T}$
T^k	$\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ vezes}}$
$\|J\|$	número de elementos de J

Conteúdo

Resumo **iv**

Abstract **v**

Introdução **1**

1 Noções Preliminares **4**

1.1 Espaços de Banach estritamente convexos e uniformemente convexos 4

1.2 Operadores que atingem a norma e resultados auxiliares 25

2 Alguns Resultados sobre Espaços de Banach **29**

2.1 Base de Schauder 29

2.2 Propriedade da aproximação 34

2.3 Propriedades α e β 71

2.4 Noção de espaço de Banach de codimensão finita 74

2.5 Noção de espaço de Banach cuja norma depende localmente de finitas coordenadas 77

2.6 Noção de espaços de Banach poliedrais 83

3 Uma Breve Introdução as Propriedades A e B de Lindenstrauss **86**

3.1 Propriedades A e B de Lindenstrauss 86

4 Versões das Propriedades A e B de Lindenstrauss para Operadores Compactos **98**

4.1 Operadores compactos que não podem ser aproximados por operadores que atingem a norma 98

4.2 Propriedade A^k 106

4.3 Propriedade B^k 123

Referências **134**

Introdução

O teorema clássico de Bishop-Phelps [3] afirma que todo funcional linear definido sobre um espaço de Banach real pode ser aproximado por um funcional linear que atinge a norma. Motivado por esse resultado, J. Lindenstrauss (veja [26]) começou a investigar a densidade de operadores que atingem a norma entre espaços de Banach arbitrários. Lembre que um operador linear e contínuo $T : X \longrightarrow Y$, onde X e Y são espaços normados, atinge a norma se existe $x \in X$, $\|x\| = 1$, tal que $\|T\| = \|Tx\|$. Neste trabalho Lindenstrauss mostrou que o Teorema de Bishop-Phelps não se estende para qualquer operador linear e também apresentou exemplos em que o resultado é positivo. Durante as pesquisas realizadas sobre espaços nos quais todo operador linear e contínuo pode ser aproximado por operadores que atingem a norma, observou-se que, com as mesmas justificativas, mostrava-se que operadores compactos também eram aproximados por operadores compactos que atingem a norma. Então uma questão foi naturalmente levantada: Existe operador compacto linear e contínuo entre espaços de Banach que não pode ser aproximado por operadores compactos que atingem a norma? Em 2014 Miguel Martín publicou um trabalho (veja [29]) respondendo essa pergunta. Ele mostrou que existem espaços de Banach X, Y tais que todo operador compacto $T : X \longrightarrow Y$ pode ser aproximado por operadores que atingem a norma e, por outro lado, ele também exibiu exemplos de espaços de Banach X, Y e operador compacto $T : X \longrightarrow Y$ que não pode ser aproximado por operadores compactos que atingem a norma. Em 2015 Martín publicou mais um artigo [30] fornecendo mais exemplos envolvendo a aproximação de operadores compactos.

Vamos a algumas notações. Sejam X e Y espaços de Banach. Denotaremos a bola fechada de X por $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, a esfera de X por $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$, o espaço de todos os operadores lineares e contínuos $T : X \longrightarrow Y$ por $L(X, Y)$. Os conjuntos $\mathcal{NA}(X, Y), \mathcal{K}(X, Y)$ e $\mathcal{F}(X, Y)$ são os subconjuntos de $L(X, Y)$ dos operadores que atingem a norma, dos operadores compactos e dos operadores de posto finito, respectivamente.

Em [26] Lindenstrauss introduziu duas propriedades conhecidas hoje como propriedades A e B de Lindenstrauss. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade* A de Lindenstrauss se para qualquer espaço de Banach Y tivermos $\mathcal{NA}(X, Y)$ denso em $L(X, Y)$, e diremos que um espaço de Banach Y tem a *propriedade* B de Lindenstrauss se para qualquer espaço de Banach X tivermos $\mathcal{NA}(X, Y)$ denso em $L(X, Y)$. Em [30]

Martín apresentou versões das propriedade A e B de Lindenstrauss para operadores compactos, conhecidas por propriedades A^k e B^k. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade* A^k se para qualquer espaço de Banach Y tivermos $\mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$ denso em $\mathcal{K}(X,Y)$, e diremos que um espaço de Banach Y tem a *propriedade* B^k se para qualquer espaço de Banach X tivermos $\mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$ denso em $\mathcal{K}(X,Y)$.

O principal objetivo desta dissertação é estudar as versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos. Não se sabe ainda se em geral a propriedade A de Lindenstrauss implica a propriedade A^k ou se a propriedade B de Lindenstrauss implica a propriedade B^k, ou vice-versa. É salutar notar que todas as condições suficientes conhecidas que garantem que um espaço de Banach tem a propriedade A ou B de Lindenstrauss automaticamente implicam que o espaço também tem as propriedades A^k ou B^k, respectivamente. Isso ocorre pois o caminho usual para estabelecer a densidade de operadores que atingem a norma é demonstrando que todo operador T pode ser aproximado por um operador da forma $T+S$, onde S é um operador compacto. Sublinhamos que em [30] Martín apresenta espaços que têm a propriedade A^k e B^k e quase todos esses exemplos encontram-se nesta dissertação.

No primeiro capítulo desta dissertação serão abordados alguns resultados básicos de Análise Funcional, com especial ênfase naqueles relacionados aos espaços estritamente convexos, uniformemente convexos e localmente uniformemente convexos. Além disso, forneceremos exemplos de operadores que atingem a norma e de operadores que não atingem a norma.

No segundo capítulo, exibiremos alguns resultados mais avançados que em geral não são tratados em um curso introdutório de análise funcional. Abordaremos o conceito de base de Schauder (recomendamos [4]), dando alguns exemplos de espaços de Banach com essa propriedade. Trataremos também de espaços com a propriedade da aproximação e a propriedade da aproximação limitada (para um estudo mais profundo recomendamos [27]); ressaltamos que o primeiro exemplo de espaços de Banach com essas propriedades são aqueles que têm base de Schauder. Ademais, discutiremos, sem irmos muito a fundo na teoria, tópicos relacionados a espaços de Banach de codimensão finita, espaços de Banach que tem as propriedades α e β, espaços de Banach cuja norma depende localmente de finitas coordenados, espaços de Banach poliedrais e espaços de Banach M-mergulho. Para um estudo mais detalhado desses espaços recomendamos [5], [14], [12], [22] e [15], respectivamente.

No terceiro capítulo discutiremos alguns dos primeiros resultados apresentados por Lindenstrauss em 1963 (veja [26]) relacionados aos operadores que atingem a norma. Mais especificamente, apresentaremos resultados que envolvem as propriedades A e B de Lindenstrauss.

Por fim, no quarto capítulo estabeleceremos os principais resultados desta dissertação. Por exemplo, o resultado apresentado por Martín em 2014 (veja [29]) sobre a existência de operadores compactos que não podem ser aproximados por operadores que atingem a norma. Ademais, exibiremos versões das propriedades de Lindenstrauss para operadores compactos; além de vários outros resultados envolvendo operadores compactos que podem e que não podem ser aproximados por operadores que atingem a norma. Neste capítulo ficará claro se certos espaços clássicos (por exemplo, c_0 e ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$) satisfazem essas propriedades.

É importante notar que nesta dissertação admitiremos que o leitor esteja familiarizado com vários conceitos básicos de análise funcional como, por exemplo, topologias fraca e fraca estrela. Para resultados introdutórios de análise funcional recomendamos fortemente a referência [4].

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo serão abordados alguns resultados básicos de Análise Funcional, com especial ênfase naqueles relacionados aos espaços estritamente convexos, uniformemente convexos e localmente uniformemente convexos. Além disso, forneceremos exemplos de operadores que atingem a norma e de operadores que não atingem a norma. Para um estudo mais profundo sobre os assuntos acima, recomendamos [4] e [8].

1.1 Espaços de Banach estritamente convexos e uniformemente convexos

Intuitivamente, quando se fala em bola num espaço normado, vem logo em nossa mente um objeto redondo. Mas em geral isso não é verdade, pois o fato da bola ser deveras redonda depende da norma considerada sob o espaço vetorial em questão. Por exemplo, a bola no espaço $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ não é redonda, mas quando munimos $\mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana, a bola passa a ser redonda.

Definição 1.1.1. Um espaço de Banach X é dito *estritamente convexo* se $\|(1-t)x+tz\| < 1$ sempre que $t \in (0,1)$, $x \neq z$ e $\|x\| = \|z\| = 1$.

Pensando de maneira intuitiva, em espaços que não são estritamente convexos a bola unitária não é redonda. Apresentaremos a seguir uma caracterização para espaços estritamente convexos.

Proposição 1.1.2. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) X é estritamente convexo.
(b) Se $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$, então $x = y$.
(c) Se $x, y \in X$ e $\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, então $x = y$.
(d) Se $x, y \in X$ e $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, então x é um múltiplo positivo de y.
(e) Para cada $x \in S_X$ tem-se que se $y \in X$ e $\|x \pm y\| \leq 1$, então $y = 0$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Suponha que se tenha $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$, mas $x \neq y$. Logo para cada $t \in (0,1)$ devemos ter $\|(1-t)x + ty\| < 1$. Em particular, se $t = \frac{1}{2}$ então $\|x+y\| < 2$ com $\|x\| = \|y\| = 1$, o que contradiz $\|x+y\| = 2$. Portanto devemos ter $x = y$.
$(b) \Rightarrow (c)$ O caso $x = y = 0$ é trivial. Suponha, sem perda de generalidade, que x é não nulo. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \\ &\geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| - \|y\|^2 \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2, \end{aligned}$$

e portanto $\|x\| = \|y\|$. Segue que

$$\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4\|x\|^2,$$

o que implica

$$\|x+y\| = 2\|x\| \Longrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2.$$

Segue de (b) que $\dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{y}{\|y\|}$ e, consequentemente, $x = y$.
$(c) \Rightarrow (b)$ Como $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$, podemos escrever $\|x+y\|^2 = 4$. Logo,

$$\|x+y\|^2 = 4 = 2 + 2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

e segue de (c) que $x = y$.
$(b) \Rightarrow (d)$ O caso $x = 0$ ou $y = 0$ segue trivialmente. Suponha, sem perda de generalidade, que x e y são vetores não nulos e $\|y\| \geq \|x\|$. Faça $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$ e $y_0 = \dfrac{y}{\|y\|}$. Assim,

$$\begin{aligned} 2 \geq \|x_0 + y_0\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \\ &= \frac{\|x+y\|}{\|x\|} - \left| \frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|} \right| \|y\| \\ &= \frac{\|x\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|y\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} = 2. \end{aligned}$$

Logo $\|x_0 + y_0\| = 2$. Segue de (b) que $x_0 = y_0$ e portanto $x = \dfrac{\|x\|}{\|y\|} y$.
$(d) \Rightarrow (b)$ Como $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$ tem-se $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Segue de (d) que $x = \lambda y$ com $\lambda > 0$ e portanto $\lambda = 1$ e $x = y$.

$(e) \Rightarrow (a)$ Suponha que X não seja estritamente convexo, logo existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\|(1-t_0)x + t_0 y\| = 1$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$. Logo $\|x + t_0(y-x)\| = 1$ e por (e) temos $t_0(y-x) = 0$. Isso implica que $x = y$, o que é claramente uma contradição.
$(c) \Rightarrow (e)$ Sejam x, $y \in X$ com $\|x\| = 1$ e $\|x \pm y\| \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 2 = 2\|x\| &= \|2x\| \\ &= \|x + x\| \\ &= \|x + y - y + x\| \\ &\leq \|x + y\| + \|x - y\| \\ &\leq 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|x+y\| + \|x-y\| = 2 &\iff \frac{\|x+y\|}{2} + \frac{\|x-y\|}{2} = 1 \\ &\iff \|x+y\| = \|x-y\| = 1 \\ &\iff \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2\|x+y\|^2 + 2\|x-y\|^2 &= 2 + 2 = 4 \\ &= 4\|x\| \\ &= 4\|x\|^2 \\ &= \|2x\|^2 \\ &= \|x + x\|^2 \\ &= \|(x+y) + (x-y)\|^2. \end{aligned}$$

Segue de (c) que $x + y = x - y$ e portanto $y = 0$. ■

Exemplo 1.1.3. Sejam μ uma medida positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto $X \neq \emptyset$ e $1 < p < \infty$. Afirmamos que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é estritamente convexo. De fato, sejam $f_1, f_2 \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ com $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$ e $f_1 \neq f_2$. Segue que para todos $t \in (0,1)$ e $\lambda > 0$, $(1-t)f_1 \neq \lambda t f_2$. Caso contrário, existiriam $\lambda_0 > 0$ e $t_0 \in (0,1)$ tais que $(1-t_0)f_1 = \lambda_0 t_0 f_2$, então

$$\|(1-t_0)f_1\|_p = \|\lambda_0 t_0 f_2\|_p \Longrightarrow 1 - t_0 = \lambda_0 t_0,$$

implicando que $\lambda_0 = \dfrac{1-t_0}{t_0}$. Logo substituindo λ_0 em $(1-t_0)f_1 = \lambda_0 t_0 f_2$ por $\dfrac{1-t_0}{t_0}$, teremos $f_1 = f_2$ e isto contradiz $f_1 \neq f_2$. Desse modo, a desigualdade de Minkowski é estrita, isto é,

$$\|(1-t)f_1 + t f_2\|_p < (1-t)\|f_1\|_p + t\|f_2\|_p = 1 \text{ para todo } t \in (0,1),$$

e portanto $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é estritamente convexo para $1 < p < \infty$.

Exemplo 1.1.4. Em geral, os espaços L_1 e L_∞ não são estritamente convexos. Para mostrar isto, suponha primeiro que existam uma medida μ positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de X e dois subconjuntos mensuráveis disjuntos A_1 e A_2 tais que $0 < \mu(A_1) < \infty$ e $0 < \mu(A_2) < \infty$. Sejam χ_{A_1} e χ_{A_2} as funções características desses conjuntos, e sejam

$$f_1 = \mu(A_1)^{-1}\chi_{A_1}, f_2 = \mu(A_2)^{-1}\chi_{A_2}, g_1 = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} \text{ e } g_2 = \chi_{A_1} - \chi_{A_2}.$$

Note que para $t = \dfrac{1}{2}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\|_1 &= \frac{1}{2}\|f_1 + f_2\|_1 \\
&= \frac{1}{2}\int_X |\ f_1 + f_2\ |\ d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_X (\mu(A_1)^{-1}\chi_{A_1} + \mu(A_2)^{-1}\chi_{A_2}) d\mu \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_X \mu(A_1)^{-1}\chi_{A_1} d\mu + \int_X \mu(A_2)^{-1}\chi_{A_2} d\mu\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+1) = 1
\end{aligned}$$

Portanto $\|f_1\|_1 = \|f_1\|_1 = \left\| \dfrac{f_1 + f_2}{2} \right\|_1 = 1.$

É fácil ver que também temos $\|g_1\|_\infty = \|g_2\|_\infty = \left\| \dfrac{g_1 + g_2}{2} \right\|_\infty = 1.$

Como caso particular do exemplo acima tome $X = \mathbb{R}$, σ-álgebra Σ como sendo a de Borel, μ a medida de Lesbegue, $A_1 = (0, 1)$ e $A_2 = (1, 2)$.

Definição 1.1.5. Dizemos que um espaço normado X é *uniformemente convexo* ou, mais precisamente, que sua norma é *uniformemente convexa* se, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \text{ sempre que } x,\ y \in B_X \text{ e } \|x - y\| \geq \epsilon.$$

Como dois pontos de B_X distam no máximo 2 entre si, é suficiente mostrar a condição acima para $0 < \epsilon \leq 2$.

Exemplo 1.1.6. Todo espaço de Hilbert H é uniformemente convexo. Sejam $x,\ y \in B_H$ e $0 < \epsilon \leq 2$ tais que $\|x - y\| \geq \epsilon$. Pela Lei do Paralelogramo,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{\|y\|^2}{2}.$$

Portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2=\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{\|y\|^2}{2}-\frac{\|x-y\|^2}{4}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{4}=1-\frac{\epsilon^2}{4}.$$

Logo

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}=1-\left(1-\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\right).$$

Basta tomar $\delta=1-\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}$, e assim concluímos o desejado.

Lema 1.1.7. *Sejam (x_n) uma sequência em um espaço de Banach X e $x\in X$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) (x_n) converge a x.
(b) Toda subsequência de (x_n) possui uma subsequência que converge a x.

Ideia da Demonstração: A implicação $(a)\Rightarrow(b)$ é imediata. Na demonstração da recíproca prossiga por contradição, como na demonstração de $(a)\Rightarrow(b)$ abaixo.

A seguinte proposição apresenta algumas caracterizações para espaços uniformemente convexos.

Proposição 1.1.8. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) X é uniformemente convexo.
(b) Se $x_n,y_n\in S_X$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$, então $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.
(c) Se $x_n,y_n\in X$ para todo $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}(2\|x_n\|^2+2\|y_n\|^2-\|x_n+y_n\|^2)=0$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada, então $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

Demonstração. $(a)\Rightarrow(b)$ Sejam $x_n,y_n\in S_X$ para todo $n\in\mathbb{N}$ tais que $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|\neq 0$. Logo, existe $\epsilon>0$ tal que para cada $n_0\in\mathbb{N}$ podemos encontrar $n>n_0$ tal que $\|x_n-y_n\|\geq\epsilon$. Em particular, dado $n_0=1$ existe $n_1>1$ tal que $\|x_{n_1}-y_{n_1}\|\geq\epsilon$. Analogamente, para $n_0=n_1$ existe $n_2>n_1$ tal que $\|x_{n_2}-y_{n_2}\|\geq\epsilon$. Continuando com essa argumentação, podemos construir, por recorrência, uma sequência $(n_j)_j$ em $\mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_j}-y_{n_j}\|\geq\epsilon$ para cada $j\in\mathbb{N}$. Como X é uniformemente convexo, existe $\delta>0$ tal que $\left\|\frac{x_{n_j}+y_{n_j}}{2}\right\|\leq 1-\delta$. Logo

$$\lim_{j\to\infty}\|x_{n_j}+y_{n_j}\|<2-2\delta<2,$$

o que é claramente uma contradição.

$(b) \Rightarrow (a)$ Suponha que X não seja uniformemente convexo. Logo existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existem x, $y \in S_X$ com $\|x-y\| \geq \epsilon$ mas $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n, y_n \in B_X$ tais que $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ e $\left\|\dfrac{x_n+y_n}{2}\right\| > 1 - \dfrac{1}{n}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ mas $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \neq 0$, o que é uma contradição.

$(c) \Rightarrow (b)$ Seja $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ com $x_n, y_n \in S_X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$, e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2\right) = 0.$$

Segue de (c) que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Dividiremos essa parte da demonstração em dois passos:

PASSO 1: Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n, y_n \neq 0$ para cada $n \geq n_0$. Neste caso, considere a sequência $(h_n)_{n\geq n_0}$ onde $h_n = \|x_n - y_n\|$ para cada $n \geq n_0$. Pelo Lema 1.1.7 é suficiente mostrar que toda subsequência de $(h_n)_n$ possui uma subsequência que converge para zero. Para a notação não ficar muito carregada, considere $(h_n)_n$ como sendo uma subsequência de $(h_n)_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2 &\geq 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - (\|x_n\| + \|y_n\|)^2 \\
&= 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n\|^2 - 2\|x_n\|\|y_n\| - \|y_n\|^2 \\
&= \|x_n\|^2 - 2\|x_n\|\|y_n\| - \|y_n\|^2 \\
&= (\|x_n\| - \|y_n\|)^2 .
\end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} (\|x_n\| - \|y_n\|) = 0$, e portanto $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Sejam $(x_{n_j})_j$ e $(y_{n_j})_j$ subsequências de $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, respectivamente, tais que $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_{n_j}\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|y_{n_j}\| = a$. Se $a = 0$ então $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_{n_j} - y_{n_j}\| = 0$. Suponhamos que $a > 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} + y_{n_j}\|^2 &= \lim_{j\to\infty} \left(\|x_{n_j} + y_{n_j}\|^2 - 2\|x_{n_j}\|^2 - 2\|y_{n_j}\|^2\right) \\
&+ \lim_{n\to\infty} \left(2\|x_{n_j}\|^2 + 2\|y_{n_j}\|^2\right) = 4a^2,
\end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_{n_j} + y_{n_j}\| = 2a$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|} + \frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\| &\geq \left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|} + \frac{y_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}\right\| - \left\|\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|} - \frac{y_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}\right\| \\
&= \frac{\|x_{n_j} + y_{n_j}\|}{\|x_{n_j}\|} - \left|\frac{1}{\|y_{n_j}\|} - \frac{1}{\|x_{n_j}\|}\right| \|y_{n_j}\|.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite na desigualdade acima obtemos

$$2 \geq \lim_{j\to\infty} \left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|} + \frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\| \geq \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\|x_{n_j} + y_{n_j}\|}{\|x_{n_j}\|}\right)$$

$$- \lim_{j\to\infty}\left(\left|\frac{1}{\|y_{n_j}\|}-\frac{1}{\|x_{n_j}\|}\right|\|y_{n_j}\|\right)=\frac{2a}{a}=2,$$

donde

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}+\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\|=2.$$

Segue assim de (b) que

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}-\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\|=0.$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
\frac{\|x_{n_j}-y_{n_j}\|}{\|x_{n_j}\|} &= \left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}-\frac{y_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}\right\| \\
&\leq \left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}-\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\|+\left\|\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}-\frac{y_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}\right\| \\
&= \left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}-\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\|+\left|\frac{1}{\|y_{n_j}\|}-\frac{1}{\|x_{n_j}\|}\right|\|y_{n_j}\|,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|x_{n_j}-y_{n_j}\| \leq \left\|\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|}-\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right\|\|x_{n_j}\|+\left|\frac{1}{\|y_{n_j}\|}-\frac{1}{\|x_{n_j}\|}\right|\|y_{n_j}\|\|x_{n_j}\|.$$

Portanto, fazendo $j \longrightarrow \infty$, obtemos $\lim\limits_{j\to\infty}\|x_{n_j}-y_{n_j}\|=0$.

PASSO 2: Agora mostraremos o caso geral. Seja $(h_n)_n$ tal que $h_n=\|x_n-y_n\|$ para cada $n\in\mathbb{N}$ e considere $(h_{n_j})_j$ uma subsequência arbitrária de $(h_n)_n$. Neste caso, temos duas possibilidades:

(i) Existe subsequência $(h_{n_{j,p}})_p$ de $(h_{n_j})_j$ tal que $x_{n_{j,p}}\neq 0$ e $y_{n_{j,p}}\neq 0$ para cada $p\in\mathbb{N}$.

(ii) Existe $p_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_{n_{j,p}}=0$ para cada $p\geq p_0$, ou $y_{n_{j,p}}=0$ para cada $p\geq p_0$.

Ao considerar a possibilidade (i), segue trivialmente do PASSO 1 que $\lim\limits_p h_{n_{j,p}}=0$. Na possibilidade (ii) podemos supor sem perda de generalidade que existe $p_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_{n_{j,p}}=0$ para cada $p\geq p_0$. Logo, a subsequência de $(h_{n_j})_j$ possui uma subsequência que converge a zero, pois podemos considerar uma subsequência nula da subsequência da subsequência $(x_{n_{j,p}})_p$, que claramente converge a zero e não é difícil ver que a subsequência da subsequência da subsequência $(y_{n_j})_j$ correspondente, converge a zero. De fato, basta usar a hipótese de que

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\|x_n\|^2+2\|y_n\|^2-\|x_n+y_n\|^2\right)=0.$$

■

Proposição 1.1.9. *Todo espaço de Banach X uniformemente convexo é estritamente convexo.*

Demonstração. Sejam $\|x\| = \|y\| = 1$ com $x, y \in X$ e $\|x + y\| = 2$. Como $x, y \in S_X$, existem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em S_X com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = \|x + y\| = 2$. Como X é uniformemente convexo, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Logo, $\|x - y\| = 0$ e portanto $x = y$. Isso mostra que X é estritamente convexo. ∎

O exemplo a seguir pode ser encontrado em [4, Exercício 6.8.33].

Exemplo 1.1.10. (Um espaço estritamente convexo que não é uniformemente convexo) Para $f \in C[0,1]$ defina

$$\|f\| = \left(\|f^2\|_\infty + \|f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma usual de $C[0,1]$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma usual de $L_2[0,1]$. Primeiramente, veja que $\|\cdot\|$ é uma norma, pois dados f e g em $C[0,1]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\iff \|f\|^2 = 0 \\
&\iff \|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2 = 0 \\
&\iff \|f\|_\infty = \|f\|_2 = 0 \\
&\iff f = 0.
\end{aligned}$$

Vale também a multiplicação por escalar,

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= \left(\|\lambda f\|_\infty^2 + \|\lambda f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|\lambda|^2\|f\|_\infty^2 + |\lambda|^2\|f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left(\|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|\|f\|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Minkowski para sequências obtemos

$$\begin{aligned}
\|f\| + \|g\| &= \left(\|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\|g\|_\infty^2 + \|g\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left(\left(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2\right)^2 + \left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (Minkowski) \\
&\geq \left(\|f+g\|_\infty^2 + \|f+g\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|f+g\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f+g\|.
\end{aligned}$$

Segue assim que $\|\cdot\|$ é uma norma. Veja que $(C[0,1], \|\cdot\|)$ é estritamente convexo pois se $2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f+g\|^2 = 0$ então

$$0 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f+g\|^2 \;=\; 2\|f\|_\infty^2 + 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_\infty^2 + 2\|g\|_2^2$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \|f+g\|_\infty^2 - \|f+g\|_2^2 \\
&= \quad 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 - \|f+g\|_\infty^2 \\
&+ \quad 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2 - \|f+g\|_2^2 = 0. \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Segue daí que

$$2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 - \|f+g\|_\infty^2 = 0,$$

e

$$2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2 - \|f+g\|_2^2 = 0. \qquad (1.2)$$

Como $L_2[0,1]$ é estritamente convexo, segue de (1.2) que $f = g$. Agora vejamos que $(C[0,1], \|\cdot\|)$ não é uniformemente convexo. Para isso, considere as sequências $f_n = 1$ e g_n como sendo a função poligonal que une os pontos $(0,0)$, $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ e $(1,1)$. Mais especificamente,

$$g_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\infty = 1.$$

Temos ainda

$$\|f_n + g_n\|_\infty = \sup_n |f_n(x) + g_n(x)| = 2 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

e

$$
\begin{aligned}
\|f_n + g_n\|_2 &= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1+nx)^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 4dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1 + 2nx + n^2x^2) dx + 4 \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[x + nx^2 + n^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{n}} + 4\,[x]_{\frac{1}{n}}^1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n} + 4 - \frac{4}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(4 - \frac{5}{3n} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo $\lim_{n\to\infty} \|f_n + g_n\|_2 = 2$. Lembre que

$$\|f_n + g_n\|^2 = \|f_n + g_n\|_2^2 + \|f_n + g_n\|_\infty^2,$$

$$\|f_n\|^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f_n\|_\infty^2$$

e

$$\|g_n\|^2 = \|g_n\|_2^2 + \|g_n\|_\infty^2.$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left((2\|f_n\|^2 + \|g_n\|^2 - \|f_n + g_n\|^2\right) &= 2\lim_{n\to\infty}\|f_n\|^2 + 2\lim_{n\to\infty}\|g_n\|^2 - \lim_{n\to\infty}\|f_n + g_n\|^2 \\ &= 4 + 4 - 8 = 0,\end{aligned}$$

mas

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - g_n\| = 1 \neq 0.$$

Logo $(C[0,1], \|\cdot\|)$ não é uniformemente convexo.

Apresentaremos a seguir uma definição de espaços que são ”intermediários” entre os espaços estritamente convexos e os espaços uniformemente convexos.

Definição 1.1.11. Um espaço de Banach é dito ser *localmente uniformemente convexo* se dados $x \in S_X$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x,\epsilon) > 0$ tal que para todo $y \in S_X$ tem-se $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$ sempre que $\|x - y\| \geq \epsilon$.

Proposição 1.1.12. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) X é localmente uniformemente convexo.
(b) Se $x_n, x \in S_X$ e $\lim_{n\to\infty}\|x + x_n\| = 2$, então $\lim_{n\to\infty}\|x - x_n\| = 0$.
(c) Se $x_n, x \in X$ são tais que $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ e $\lim_{n\to\infty}\|x + x_n\| = 2\|x\|$, então $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.
(d) Se x, $x_n \in X$ satisfazem $\lim_{n\to\infty}(2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2) = 0$ então $\lim_{n\to\infty}\|x - x_n\| = 0$.

Demonstração. A implicação $(a) \Rightarrow (b)$ é análoga à implicação $(a) \Rightarrow (b)$ da Proposição 1.1.8.
$(b) \Rightarrow (c)$ O caso em que $x = 0$ é trivialmente verificado. Suponha assim $x \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}2 \geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| &\geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{x_n}{\|x\|}\right\| - \left\|\frac{x_n}{\|x\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| \\ &= \frac{\|x + x_n\|}{\|x\|} - \left|\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|x_n\|}\right|\|x_n\|.\end{aligned}$$

Aplicando o limite nas desigualdades acima e lembrando que $(x_n)_n$ é limitada, obtemos

$$2 \geq \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| \geq \lim_{n\to\infty}\frac{\|x + x_n\|}{\|x\|}$$

$$= \quad 2\frac{\|x\|}{\|x\|} = 2.$$

Donde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = 2.$$

Segue de (b) que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\|x - x_n\|}{\|x_n\|} &= \left\| \frac{x}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} + \frac{x}{\|x\|} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\|.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\|x - x_n\| \leq \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \right) \|x_n\|,$$

e portanto $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.
$(c) \Rightarrow (d)$ Note que

$$\begin{aligned}
2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2 &\geq 2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - (\|x\| + \|x_n\|)^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x\|^2 - 2\|x\|\|x_n\| - \|x_n\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\|x\|\|x_n\| + \|x_n\|^2 \\
&= (\|x\| - \|x_n\|)^2 .
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x + x_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left(\|x + x_n\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x_n\|^2\right) + \\
&+ \lim_{n\to\infty} \left(2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2\right) = 4\|x\|^2,
\end{aligned}$$

temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2\|x\|$ e por (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.
$(d) \Rightarrow (c)$ Se $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2\|x\|$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + x_n\|^2 = 4\|x\|^2$, donde

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2\right) = 0.$$

Segue de (d) que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.
$(c) \Rightarrow (b)$ Como $x \in S_X$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2\|x\|$. Segue de (c) que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Suponha que X não seja localmente uniformemente convexo. Logo, existem

$x \in S_X$ e $\epsilon > 0$ tais que para todo $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ existe $y \in S_X$ com $\|x - y\| \geq \epsilon$ mas $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta$. Em particular, para $\delta = 1$ existe $y_1 \in S_X$ com $\|x - y_1\| \geq \epsilon$ mas $\left\|\dfrac{x+y_1}{2}\right\| > 1 - 1$, assim como, para $\delta = \dfrac{1}{2}$ existe $y_2 \in S_X$ com $\|x - y_2\| \geq \epsilon$ mas $\left\|\dfrac{x+y_2}{2}\right\| > 1 - \dfrac{1}{2}$. Prosseguindo desta forma, obteremos uma sequência $(y_n)_n$ em S_X com $\|x - y_n\| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas $\left\|\dfrac{x+y_n}{2}\right\| > 1 - \dfrac{1}{n}$. Segue que aplicando o limite nesta desigualdade obtemos $2 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| \leq 2$, e portanto $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + y_n\| = 2$ mas $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| \neq 0$. Isso é uma contradição pois $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\|$ deve ser igual a zero por (b). ■

Exemplo 1.1.13. Todo espaço localmente uniformemente convexo é estritamente convexo. De fato, basta aplicar a Proposição 1.1.12.

Diante dos resultados anteriores é possível afirmar que todo espaço normado que satisfaz a lei do paralelogramo é localmente uniformemente convexo, todo espaço normado localmente uniformemente convexo é estritamente convexo e espaços uniformemente convexos são localmente uniformemente convexo. Em contrapartida, segue do Exemplo 1.1.10 que a implicação contrária não é verdadeira.

Discutiremos a seguir alguns conceitos em espaços de Banach que serão usados no decorrer desta dissertação.

Definição 1.1.14. Dizemos que um subconjunto A de um espaço normado X é *totalmente limitado* se para todo $\epsilon > 0$ existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em A tais que $X \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$.

Exemplo 1.1.15. Todo subconjunto limitado A de um espaço normado de dimensão finita é totalmente limitado. Sabemos que em espaços de dimensão finita os conjuntos limitados e fechados são compactos. Como A é limitado, segue que $\overline{A}$ é limitado. Donde conclui-se que $\overline{A}$ é compacto. Ademais, dado $\epsilon > 0$ temos $A \subset \bigcup\limits_{x\in A} B(x, \epsilon)$. Afirmamos que $\overline{A} \subset \bigcup\limits_{x\in A} B(x, \epsilon)$. De fato, dado $\overline{x} \in \overline{A}$ existe $x \in A$ tal que $x \in B(\overline{x}, \epsilon)$. Donde é imediato que $\overline{x} \in B(x, \epsilon)$. Portanto $\overline{A} \subset \bigcup\limits_{x\in A} B(x, \epsilon)$. Como $\overline{A}$ é compacto existem $x_1, x_2, \ldots, x_j$ em A tal que$\overline{A} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{j} B(x_k, \epsilon)$. Então, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{j} B(x_k, \epsilon)$, com $x_k \in A$ para $k = 1, 2, \ldots, j$.

Proposição 1.1.16. *As seguintes afirmações a respeito de um subconjunto fechado K de um espaço de Banach X são equivalentes:*
(a) $\overline{K}$ é compacto.
(b) Todo subconjunto A infinito de K possui um ponto de acumulação.

(c) *Toda sequência em K possui uma subsequência convergente para K.*
(d) *K é totalmente limitado.*

Demonstração. Uma demonstração mais geral pode ser encontrada em [25, Proposição 7,p. 222].

■

Mais adiante exibiremos um resultado que será importante nesta dissertação. Antes disso, é necessário preparar o caminho para posteriormente ser possível demonstrar tal resultado.

Lema 1.1.17. *Se X é uma espaço de Banach separável, então existe uma família $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X'}$ que separa pontos de X.*

Demonstração. Como X é separável tem-se que S_X é separável. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável denso em S_X. Seja $x_n'' = J_X(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\|x_n\| = 1$ temos $\|x_n''\| = 1$. Logo para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in S_{X'}$ tal que $|x_n''(\phi_n)| \geq \frac{1}{2}$. Vejamos que a família $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ separa pontos de X. Sejam $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| = 1$ e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S_X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|} - x_{n_0}\right\| < \frac{1}{4}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|x_{n_0}''(\phi_{n_0})| &= \left|x_{n_0}''(\phi_{n_0}) - \phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) + \phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \\
&= \left|J_X(x_{n_0})(\phi_{n_0}) - \phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) + \phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \\
&= \left|\phi_{n_0}(x_{n_0}) - \phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) + \phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \\
&\leq \left|\phi_{n_0}\left(x_{n_0} - \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| + \left|\phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \\
&\leq \|\phi_{n_0}\|\left\|x_{n_0} - \frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| + \left|\phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \\
&= \left\|x_{n_0} - \frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| + \left|\phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right|,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\left|\phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \geq |x_{n_0}''(\phi_{n_0})| - \left\|x_{n_0} - \frac{x-y}{\|x-y\|}\right\|.$$

Assim

$$\frac{|\phi_{n_0}(x) - \phi_{n_0}(y)|}{\|x-y\|} = \left|\phi_{n_0}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \; |x''_{n_0}(\phi_{n_0})| - \left\| x_{n_0} - \frac{x-y}{\|x-y\|} \right\| \\
&> \; \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
|\phi_{n_0}(x) - \phi_{n_0}(y)| \geq \frac{\|x-y\|}{4} > 0.
$$

Isso mostra que $\phi_{n_0}(x) \neq \phi_{n_0}(y)$. Como x, y eram quaisquer em X, temos que a família $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X'}$ separa pontos de X. ■

Vamos à demonstração do teorema, que pode também ser encontrado em [8, Theorem 8.17, p. 248].

Teorema 1.1.18. *Todo espaço de Banach separável* $(X, \|\cdot\|)$ *admite uma norma equivalente* $\|\cdot\|_0$ *tal que* $(X, \|\cdot\|_0)$ *é um espaço localmente uniformemente convexo.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto denso em S_X. Pelo Lema 1.1.17 existe uma família $\{f_n\} \subset S_{X'}$ que separa pontos de X. Seja $F_n = span\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Defina uma norma $\|\cdot\|_0 : X \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$
\|x\|_0^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} dist(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (f_n(x))^2. \tag{1.3}
$$

Vamos mostrar que $\|\cdot\|_0$ é realmente uma norma em X. Primeiro precisamos verificar que $\|\cdot\|_0$ está bem definida. De fato, veja que $dist(x, F_n) \leq \|x\|$ para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, pois $0 \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, fazendo

$$
S_N \;=\; \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} dist(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (f_n(x))^2
$$

para cada $N \in \mathbb{N}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
S_N &= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} dist(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (f_n(x))^2 \\
&\leq \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|x\|^2. \\
&= \|x\|^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \right).
\end{aligned}
$$

Como isso ocorre para cada $N \in \mathbb{N}$, temos

$$
\lim_{N \to \infty} S_N \;\leq\; \|x\|^2 \left(1 + 2 \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \right)
$$

$$= \quad 3\|x\|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|x\|_0^2 &= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} dist(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (f_n(x))^2 \\ &= \lim_{N\to\infty} S_N \leq 3\|x\|^2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Isso mostra que $\|\cdot\|_0$ está bem definido. Para completar a verificação de que $\|\cdot\|_0$ é uma norma, provaremos apenas a desigualdade triangular, pois os outros axiomas de norma são triviais. Sejam $x, y \in X$. Temos que para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} dist(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (f_n(x))^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{dist(x, F_n)}{\sqrt{2^n}} \right)^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{2^n}} \right)^2$$

e

$$\|y\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} dist(y, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (f_n(y))^2 = \|y\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{dist(y, F_n)}{\sqrt{2^n}} \right)^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{f_n(y)}{\sqrt{2^n}} \right)^2.$$

Faça

$$a_0 = \|x\|, a_{n+1} = \frac{dist(x, F_n)}{\sqrt{2^n}}, a_{N+1+n} = \frac{f_n(x)}{\sqrt{2^n}} \text{ para } 1 \leq n \leq N, \tag{1.5}$$

e

$$b_0 = \|y\|, b_{n+1} = \frac{dist(y, F_n)}{\sqrt{2^n}}, b_{N+1+n} = \frac{f_n(y)}{\sqrt{2^n}} \text{ para } 1 \leq n \leq N. \tag{1.6}$$

Pela desigualdade de Minkowski (veja Proposição 1.4.2 em [4]) para sequências obtemos

$$\left(\sum_{n=0}^{2N} |a_n + b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{2N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{2N} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

que é equivalente a

$$\left(|a_0 + b_0|^2 + \sum_{n=1}^{2N} |a_n + b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{2N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(|b_0|^2 + \sum_{n=1}^{2N} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

que por sua vez é equivalente a

$$\begin{aligned} \left(|a_0 + b_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_{N+n} + b_{N+n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_{N+n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(|b_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |b_{N+n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Segue de (1.5) e (1.6) que

$$\left((\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{dist(x,F_n)}{\sqrt{2^n}}+\frac{dist(y,F_n)}{\sqrt{2^n}}\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{f_n(x)}{\sqrt{2^n}}+\frac{f_n(y)}{\sqrt{2^n}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\|x\|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{dist(x,F_n)}{\sqrt{2^n}}\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{f_n(x)}{\sqrt{2^n}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\|y\|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{dist(y,F_n)}{\sqrt{2^n}}\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{f_n(y)}{\sqrt{2^n}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\|x\|^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}dist(x,F_n)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\|y\|^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}dist(y,F_n)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(y))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, temos

$$\|x+y\|^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}dist(x+y,F_n)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(x+y))^2$$

$$\leq\ (\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(dist(x,F_n)+dist(y,F_n))^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(x)+f_n(y))^2$$

$$=\ (\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{dist(x,F_n)}{\sqrt{2^n}}+\frac{dist(y,F_n)}{\sqrt{2^n}}\right|^2+\sum_{n=N+1}^{2N}\left|\frac{f_n(x)}{\sqrt{2^n}}+\frac{f_n(y)}{\sqrt{2^n}}\right|^2. \quad (1.7)$$

Segue que

$$\left((\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(dist(x,F_n)+dist(y,F_n))^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(x)+f_n(y))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left((\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{dist(x,F_n)}{\sqrt{2^n}}+\frac{dist(y,F_n)}{\sqrt{2^n}}\right|^2+\sum_{n=N+1}^{2N}\left|\frac{f_n(x)}{\sqrt{2^n}}+\frac{f_n(y)}{\sqrt{2^n}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\|x\|^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}dist(x,F_n)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\|y\|^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}dist(y,F_n)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(y))^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

Portanto de (1.7) e (1.8) obtemos para todo $N\in\mathbb{N}$

$$\|x+y\|^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}dist(x+y,F_n)^2+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}(f_n(x+y))^2$$

$$\leq \left(\|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} dist(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (f_n(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left(\|y\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} dist(y, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (f_n(y))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fazendo $N \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima obtemos

$$\|x + y\|_0 \leq \|x\|_0 + \|y\|_0.$$

Isso mostra que $\| \cdot \|_0$ é uma norma em X. Note que

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} \text{ e } F_n \subset F_{n+1}. \tag{1.9}$$

Para mostrar isso, é suficiente verificar a inclusão $X \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n}$. De fato, para o caso $x = 0$ é trivial. Sejam $x \in X - \{0\}$ e $\epsilon > 0$. Como o conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é denso em S_X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \frac{x}{\|x\|} - x_{n_0} \right\| < \frac{\epsilon}{\|x\|}$, o que implica $\|x - \|x\| x_{n_0}\| < \epsilon$. Como $\|x\| x_{n_0} \in F_{n_0}$, tem-se $\|x\| x_{n_0} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} F_n}$ e portanto $x \in \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n}$. Para alguns cálculos que serão realizados mais adiante será preciso usar o fato de $\lim_{n \to \infty} dist(x, F_n) = 0$ para cada $x \in X$. De fato, sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Logo, de (1.9), existe

$$z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

tal que $\|x - z\| < \epsilon$. Segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in F_{n_0}$. Portanto para cada $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ temos que $F_{n_0} \subset F_n$ e

$$\begin{aligned} dist(x, F_n) &\leq dist(x, z) + dist(z, F_n) \\ &= \|x - z\| + 0 < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{n \to \infty} dist(x, F_n) = 0$ para cada $x \in X$. Ademais, segue de (1.4) e da definição da norma $\| \cdot \|_0$, que $\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \sqrt{3} \|x\|$ para todo $x \in X$. Isso mostra que as normas $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|_0$ são equivalentes. Por fim, resta mostrar que o espaço normado $(X, \| \cdot \|_0)$ é localmente uniformemente convexo. Pela Proposição 1.1.12 é suficiente mostrar que se $x_k, x \in X$ e

$$\lim_{k \to \infty} \left(2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x + x_k\|_0^2 \right) = 0,$$

então $\lim_{k \to \infty} \|x_k - x\| = 0$. Substituindo (1.3) em

$$2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x + x_k\|_0^2,$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x+x_k\|_0^2 &= 2\|x\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dist(x,F_n)^2}{2^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f_n(x))^2}{2^n} + \\
&+ 2\|x_k\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dist(x_k,F_n)^2}{2^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f_n(x_k))^2}{2^n} - \\
&- \left(\|x+x_k\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dist(x+x_k,F_n)^2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f_n(x+x_k))^2}{2^n}\right) \\
&= \left(2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2\right) + \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2dist(x,F_n)^2 + 2dist(x_k,F_n)^2 - dist(x+x_k,F_n)^2}{2^n}\right) + \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(f_n(x))^2 + 2(f_n(x_k))^2 - (f_n(x+x_k))^2}{2^n}\right). \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{gathered}
2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2 \geq 0, \\
2dist(x,F_n)^2 + 2dist(x_k,F_n)^2 - dist(x+x_k,F_n)^2 \geq 0, \\
2(f_n(x))^2 + 2(f_n(x_k))^2 - (f_n(x+x_k))^2 \geq 0,
\end{gathered}
$$

seguem de (1.10) as seguintes desigualdades

$$
\begin{gathered}
2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x+x_k\|_0^2 \geq 2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2, \\
2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x+x_k\|_0^2 \geq 2dist(x,F_n)^2 + 2dist(x_k,F_n)^2 - dist(x+x_k,F_n)^2, \\
2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x+x_k\|_0^2 \geq 2(f_n(x))^2 + 2(f_n(x_k))^2 - (f_n(x+x_k))^2.
\end{gathered}
$$

Como por hipótese

$$\lim_{k\to\infty}\left(2\|x\|_0^2 + 2\|x_k\|_0^2 - \|x+x_k\|_0^2\right) = 0,$$

podemos garantir a existência dos seguintes limites:

$$\lim_{k\to\infty}\left(2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2\right) = 0, \qquad (1.11)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(2dist(x,F_n)^2 + 2dist(x_k,F_n)^2 - dist(x+x_k,F_n)^2\right) = 0, \qquad (1.12)$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\left(2(f_n(x))^2 + 2(f_n(x_k))^2 - (f_n(x+x_k))^2\right) = 0. \qquad (1.13)$$

Além disso, tem-se

$$2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2 \quad \geq \quad 2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x\|^2 - 2\|x\|\|x_k\| - \|x_k\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \|x\|^2 - 2\|x\|\|x_k\| + \|x_k\|^2 \\
&= (\|x\| - \|x_k\|)^2 .
\end{aligned}
$$

Segue assim de (1.11) que $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$. Repetindo o mesmo argumento para (1.12) e (1.13) obtém-se

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|, \tag{1.14}$$

$$\lim_{k\to\infty} dist(x_k, F_n) = dist(x, F_n), \tag{1.15}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = f_n(x), \tag{1.16}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo é mostrar que $\lim\limits_k \|x_k - x\| = 0$. Para isso usaremos o fato de $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ ser compacto na topologia da norma. A demonstração disso, será deixado por último. Vejamos que $\lim\limits_k \|x_k - x\| = 0$. Pelo Lema 1.1.7 é suficiente mostrar que toda subsequência de $(x_k)_k$ possui uma subsequência que converge para x. Para não carregar a notação iremos supor que $(x_k)_k$ é uma subsequência arbitrária de $(x_k)_k$. Vejamos que $(x_k)_k$ possui uma subsequência que converge para x. Pela compacidade de $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$, existe uma subsequência $(x_{k_j})_j$ de $(x_k)_k$ que converge para algum x_0 na topologia da norma. Vejamos que $x = x_0$. De fato, se $x \neq x_0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x) \neq f_{n_0}(x_0)$, pois a família $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ separa pontos de X, o que implica

$$0 < |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \;=\; \lim_j |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_j)| \overset{(1.16)}{=} 0,$$

e isso é claramente uma contradição. Portanto devemos ter $x = x_0$ como queríamos. Sabendo disso, mostraremos que $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ é compacto na topologia da norma. Vamos mostrar que $\{x_k\} \cup \{x\}$ é totalmente limitado o que implicará que $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ é totalmente limitado e aplicando a Proposição 1.1.16 teremos que $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ é compacto. Com efeito, como $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$, existe $K > 0$ tal que $\|x_k\| \leq K$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} dist(x, F_n) = 0$ para todo $x \in X$, segue que para cada $0 < \epsilon < 1$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $dist(x, F_n) < \epsilon$. Visto que o espaço

$$F_n = span\{x_1, \ldots, x_n\}$$

tem dimensão finita para cada n, segue que $(K + \epsilon)B_{F_n}$ é totalmente limitado pois é compacto (ver Proposição 1.1.16). Assim existem $y_1, \ldots, y_p$ em $(K + \epsilon)B_{F_n}$ tais que

$$(K + \epsilon)B_{F_n} \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(y_j, \epsilon).$$

Segue de (1.15) que

$$\lim_{k\to\infty} dist(x_k, F_n) = dist(x, F_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, fixado $n \in \mathbb{N}$, existe $k_0 := k_0(n) \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica

$$dist(x_k, F_n) < \epsilon.$$

Como F_n é subespaço fechado de dimensão finita, existe $z_k \in F_n$ tal que

$$\|x_k - z_k\| = dist(x_k, z_k) = dist(x_k, F_n) < \epsilon. \tag{1.17}$$

Segue que

$$\|z_k\| \leq \|z_k - x_k\| + \|x_k\| < \epsilon + K < 1 + K.$$

Daí, $z_k \in (K+1)B_{F_n}$. Segue que existe y_k com $1 \leq k \leq p$ tal que

$$\|z_k - y_k\| < \epsilon. \tag{1.18}$$

Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x_1, \ldots, x_{k_0}\} \cup \{y_1, \ldots, y_p\}, \\ B &= \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{y_1, \ldots, y_p\}. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$B \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k_0} B(x_i, 2\epsilon) \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{p} B(y_j, 2\epsilon) \right).$$

De fato, seja $z \in B$. Se $z = y_j$ para algum $1 \leq j \leq p$ ou se $z = x_i$ para algum $1 \leq i \leq k_0$, então é claro que

$$z \in \left(\bigcup_{i=1}^{k_0} B(x_i, 2\epsilon) \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{p} B(y_j, 2\epsilon) \right).$$

Agora se $z = x_k$ para algum $k > k_0$ segue de (1.17) e (1.18) que

$$\begin{aligned} \|z - y_j\| &\leq \|z - z_j\| + \|z_j - y_j\| \\ &= \|x_k - z_j\| + \|z_j - y_j\| < 2\epsilon, \end{aligned}$$

onde $1 \leq j \leq p$. Logo

$$z \in \left(\bigcup_{i=1}^{k_0} B(x_i, 2\epsilon) \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{p} B(y_j, 2\epsilon) \right).$$

Assim temos que B é totalmente limitado. Como $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset B$ e subconjuntos de conjuntos totalmente limitados são totalmente limitados, obtemos que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é totalmente limitado. Portanto é imediato que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é totalmente limitado, como queríamos demonstrar. ■

A seguir, apresentaremos uma sequência de resultados que serão usados nos próximos capítulos desta dissertação. Optamos por deixá-los neste capítulo, por se tratar de resultados básicos de Análise Funcional, e podem ser encontrados em [4] e [8].

Teorema 1.1.19. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T, T_1, T_2, \ldots,$ operadores em $L(X, Y)$ tais que $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ para todo $x \in X$. Então para todo compacto $K \subset X$, $\sup\limits_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Veja [8, Lemma 7.3, p. 204]. ■

Proposição 1.1.20. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo, então existem constantes C e C_1 positivas tais que $C\|x\| \leq \|Tx\| \leq C_1\|x\|$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Veja [4, Corolário 2.1.2]. ■

Proposição 1.1.21. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear e contínuo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) T é compacto.
(b) $\overline{T(A)}$ é compacto em Y para todo limitado A em X.
(c) Para toda subsequência limitada $(x_n)_n$ em X, a sequência $(T(x_n))_n$ tem subsequência convergente em Y.

Demonstração. Veja [4, Proposição 7.2.3]. ■

Teorema 1.1.22. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T, T_1, T_2 \ldots$ em $L(X, Y)$. Se para todo $m \in \mathbb{N}$, T_m é compacto e $\lim\limits_{m \to \infty} T_m = T$, então T é compacto.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 7.2.5]. ■

Teorema 1.1.23. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador contínuo. Se X é separável então $T(X)$ é separável.*

Demonstração. Seja $E \subset X$ um conjunto denso e enumerável. Segue que $T(E)$ é um conjunto enumerável em $T(X)$. Dado $y \in T(X)$, existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Como E é denso e enumerável em X, existe uma sequência $(x_n)_n$ em E tal que $x_n \longrightarrow x$. Segue da continuidade de T que $T(x_n) \longrightarrow T(x) = y$. Como $(T(x_n))_n$ está contida em $T(E)$, temos que $T(E)$ é denso em $T(X)$. Portanto concluímos que $T(X)$ é separável. ■

1.2 Operadores que atingem a norma e resultados auxiliares

Nesta seção vamos mostrar alguns exemplos de operadores que atingem a norma e alguns que não atingem a norma. Também mostraremos alguns resultados envolvendo espaço quociente e subespaços complementados. Lembre que, se X é um espaço de Banach, um operador linear e contínuo $P : X \longrightarrow X$ é chamado projeção se $P \circ P = P$. Como consequência, $\|P\| \geq 1$. Um subespaço E de um espaço normado X é dito ser *complementado* em X se existe uma projeção linear $P : X \longrightarrow X$ tal que $P(X) = E$. A proposição a seguir nos fornece uma caracterização para espaços complementados.

Proposição 1.2.1. *Seja E um subespaço do espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) Existe uma projeção linear $P : X \longrightarrow X$ cuja a imagem coincide com E. Neste caso dizemos que P é uma projeção sobre E.
(b) E é fechado e existe um subespaço fechado G de X tal que $X = E \oplus G$, isto é, $E = E + G$ e $E \cap G = \{0\}$.

Demonstração. Veja [4, Proposição 3.2.1]. ∎

Exemplo 1.2.2. Todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado. Seja F um subespaço de dimensão n do espaço de Banach X e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de F tal que $\|e_j\| = 1$. Para cada $1 \leq j \leq n$, considere o funcional

$$\varphi_j : F \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_j\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = a_j.$$

Claramente, φ_j é linear para cada j. Como F tem dimensão finita segue que φ_j também é contínuo para cada j. Ademais, podemos supor que para cada j tem-se $\|\varphi_j\| = 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{\varphi}_j \in X'$ extensão de φ_j a X para cada j. Defina

$$P : X \longrightarrow F, \quad P(x) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x) e_j.$$

Vejamos que P é uma projeção. De fato,

$$\begin{aligned} (P \circ P)(x) = P(P(x)) &= P\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x) e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) e_i\right) e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) \tilde{\varphi}_j(e_i)\right) e_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x)e_j = P(x).$$

É fácil ver que $P(X) = F$. Ademais, para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\|P(x)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x)e_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|\tilde{\varphi}_j\| \|x\| \|e_j\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|x\| \\
&= n\|x\|.
\end{aligned}$$

Portanto, F é complementado em X e $\|\tilde{P}\| \leq n$.

Teorema 1.2.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$. Então, se $T(X)$ é fechado em Y temos que $T(X)$ é isomorfo a $X/Ker(T)$.*

Demonstração. Veja [4, Exercício 2.7.15]. ∎

Teorema 1.2.4. *Sejam X, Y espaços de Banach. Se Z, W são subespaços de X tais que $X = Z \oplus W$ e $T : X \longrightarrow Y$ é um operador linear contínuo e sobrejetor com $Ker(T) = Z$, então $Y \simeq X/Z \simeq (Z \oplus W)/Z \simeq W$.*

Demonstração. Veja que $Y \simeq X/Z$ decorre imediatamente do Teorema 1.2.3. Vejamos que $X/Z \simeq (Z \oplus W)/Z$. De fato, para cada $x \in X$ existem únicos $z \in Z$ e $w \in W$ tais que $x = z + w$. Defina a aplicação

$$[x] \in X/Z \longrightarrow [z] + [w] \in (Z \oplus W)/Z.$$

Vejamos que a aplicação acima é um isomorfismo. De fato, é linear. É contínua, pois dado $x \in X$ existem únicos $z \in Z$ e $w \in W$ tais que $x = z + w$, e portanto

$$\|[z] + [w]\| = \|[z + w]\| = \|[x]\|.$$

Vejamos a injetividade. Seja $[x] \in X/Z$ com $x = z + w$ e $[z] + [w] = [0]$. Como $z \in Z$ e Z é fechado então $[z] = [0]$, donde $[w] = [0]$ e portanto $[x] = [0]$. Não é difícil ver que a aplicação é sobrejetora. Resta mostrar apenas o isomorfismo entre $(Z \oplus W)/Z$ e W. Então defina a aplicação

$$T : W \longrightarrow (Z \oplus W)/Z, \qquad Tw = [w].$$

É claro que T é linear. T é contínuo, pois para cada $w \in W$ temos $\|Tw\| = \|[w]\| \leq \|w\|$. T é claramente sobrejetor. Vejamos que T é injetor. De fato, se $Tw = [0]$ então $[w] = [0]$, e portanto $w \in Z \cap W = \{0\}$ o que implica que $w = 0$. Logo T é injetor. E assim concluímos que T é um isomorfismo, o que prova o resultado. ∎

Proposição 1.2.5. *Sejam X espaço de Banach e Z um subespaço fechado de X. Se X é não separável e Z é separável então X/Z é não separável.*

Demonstração. Suponha por contradição que X/Z seja separável. Sejam $D = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\tilde{D} = \{[x_n] : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto enumerável e denso em X/Z e $G = \{z_n \in Z : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável e denso em Z. Seja $x \in X$ e $[x] \in X/Z$. Considere em X o conjunto enumerável $\tilde{G} = \{x_n - z_n : n \in \mathbb{N}\}$, vejamos que $\tilde{G}$ é denso em X. Como $\tilde{D}$ é denso em X/Z existe um sequência $(x_k)_k$ em D tal que $\|[x_k] - x]\| = \|[x_k] - [x]\| \longrightarrow 0$. Lembre que para cada $y \in X$ a norma a se considerar em X/Z é

$$\|[y]\| = \inf\{\|y - z\| : z \in Z\}.$$

Então, pela densidade de $\tilde{D}$ em Z, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $z_k \in G$ tal que

$$\|[x_k] - [x]\| < \|x_k - x - z_k\| \leq \|[x_k] - [x]\| + \frac{1}{k}.$$

Logo quando $k \longrightarrow \infty$,

$$\|x_k - z_k - x\| = \|x_k - x - z_k\| \longrightarrow 0.$$

Assim a sequência $(x_k - z_k)_k$ está contida em $\tilde{G}$ e converge para x. Logo X é separável, o que é uma contradição pois X não é separável. Portanto X/Z não é separável. ■

Uma caracterização para espaços de dimensão finita diz que um espaço normado X tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária B_X é compacto. Por outro lado, um resultado topológico clássico diz que toda aplicação contínua $f : B_X \longrightarrow \mathbb{K}$ atinge o máximo se $\dim X < \infty$. Em particular, isso ocorre para todo funcional $x' \in X'$. No entanto, isso nem sempre é verdade em espaços de dimensão infinita.

Definição 1.2.6. Dizemos que um operador linear entre espaços normados $T : X \longrightarrow Y$ *atinge a norma* se existe $x_0 \in S_X$ tal que $\|Tx_0\| = \|T\|$.

Exemplo 1.2.7. Se E é reflexivo então todo φ em E' atinge a norma. De fato, seja $\varphi \in E' - \{0\}$. Pelo teorema de Hanh-Banach existe $f \in E''$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(\varphi) = \|\varphi\|$. Ademais, como E é reflexivo, existe $x_0 \in E$ tal que $J_E(x_0) = f$. Segue que $J_E(x_0)(\varphi) = f(\varphi)$, e portanto

$$|\varphi(x_0)| = |J_E(x_0)(\varphi)| = |f(\varphi)| = \|\varphi\|.$$

Observe também que $\|x_0\| = \|J_E(x_0)\| = \|f\| = 1$. Portanto todo funcional linear definido em E atinge a norma.

É importante ressaltar que a recíproca do último exemplo é verdadeira (veja demonstração em [17]).

Exemplo 1.2.8. Se E é reflexivo e F é um espaço normado, então existe $T \in L(E,F)$ tal que T atinge a norma. Pelo exemplo anterior, para cada $\varphi \in E'$, existe $x_0 \in B_E$ tal que $\|\varphi\| = |\phi(x_0)|$. Desse modo, basta definir $T : E \longrightarrow F$ por $T(x) = \varphi(x)y$, com $y \in F$ e $\varphi \in E'$. É fácil ver que T é linear, contínuo e está bem definido. Ademais,

$$\begin{aligned}
\|T\| = \sup\{\|\varphi(x)y\|; \|x\| \leq 1\} &= \sup\{|\varphi(x)|\|y\|; \|x\| \leq 1\} \\
&= \|y\| \sup\{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\} \\
&= \|y\|\|\varphi\| = \|y\||\varphi(x_0)| = \|\varphi(x_0)y\| = \|T(x_0)\|.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.9. (Um funcional linear que não atinge a norma) O funcional $\varphi : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$, definido por $\varphi((a_j))_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$ não atinge a norma. Não é difícil ver que φ está bem definido, é linear e contínuo. Portanto mostraremos apenas que tal funcional não atinge a norma. Antes disso vejamos que $\|\varphi\| = 1$. De fato, seja $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e note que

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}}{2^j} = \|x\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|x\|.$$

Logo $\|\varphi\| \leq 1$. Agora observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $x_n = (1, 1, \ldots, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots) \in B_{c_0}$. Daí,

$$\varphi(x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 1.$$

Assim $\|\varphi\| = 1$. Agora, se $x \in B_{c_0}$, então $x \in c_0$ e existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0$ implica $|a_j| \leq \frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
|\ \varphi(x)\ | &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{|\ a_j\ |}{2^j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{|\ a_j\ |}{2^j} \\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&< \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto $|\ \varphi(x)\ | < 1$ se $\|x\| \leq 1$. Isto mostra que não existe $x \in B_X$ tal que $\|\varphi\| = |\ \varphi(x)\ |$.

Capítulo 2

Alguns Resultados sobre Espaços de Banach

Espaços vetoriais de dimensão finita sempre têm bases (algébricas ou base de Hamel). Esse conceito não tem muita utilidade em espaços vetoriais de dimensão infinita, sendo um dos motivos devido ao fato de que espaços de Banach de dimensão infinita não têm bases algébricas enumeráveis (veja [4, Proposição 10.3.1]). Por causa disso, existe outro conceito de base em espaços de dimensão infinita, o qual tem mais utilidade do que base de Hamel. Este novo conceito de base é conhecido como *base de Schauder*, e será tratado na primeira seção deste capítulo.

Um outro conceito muito importante em Análise Funcional são espaços de Banach sobre os quais podemos aproximar a identidade por operadores de posto finito uniformemente sobre conjuntos compactos. Veremos que alguns espaços de Banach clássicos têm essa propriedade e, além disso, essa propriedade é preservada por isomorfismo. Estudaremos ainda duas propriedades introduzidas num artigo publicado em 1983 (veja [33]). Neste artigo, Schachermayer deu nome às duas propriedades que já haviam sido usadas por Lindenstrauss [26] e Partington [32], a saber, *propriedade* α e *propriedade* β.

2.1 Base de Schauder

O seguinte conceito de base em espaços de Banach de dimensão infinita diferencia-se de bases de Hamel pelo fato de base de Hamel usar combinações lineares que são somas finitas, enquanto nas novas bases podemos ter somas infinitas.

Definição 2.1.1. Uma sequência $(x_n)_n$ no espaço de Banach X é chamada *base de Schauder* de X se cada $x \in X$ tem uma única representação da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n' : X \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad x_n'\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, que são chamados *funcionais coeficientes* (ou *funcionais coordenados* ou ainda *funcionais biortogonais associados*).

Exemplo 2.1.2. Vejamos que a sequência $(e_n)_n$ onde para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ com 1 na posição n, é uma base de Schauder para c_0. De fato, seja $x = (x_j)_j \in c_0$ e sejam $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n > N$ tenhamos $|x_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j e_j - x \right\| &= \|(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots) - (x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots)\| \\
&= \|(0, \ldots, 0, -x_{N+1}, \ldots)\| \\
&= \sup_{n>N} |x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto obtemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j e_j = x$. Vamos mostrar a unicidade: Para isso é suficiente mostrar que se $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j = 0$ para qualquer sequência de escalares $(x_j)_j$ em $\mathbb{K}$, então $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Visto que

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \right\| = \sup_j |x_j|,$$

segue da propriedade de supremo que $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. De acordo com a definição, os funcionais coeficientes são

$$e_n' : X \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad e_n'\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = x_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_j)_j = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$.

Proposição 2.1.3. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que $(x_n)_n$ seja uma base de Schauder para X normalizada, isto é, $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo para cada $x \in X$ tem-se*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde a sequência $(a_n)_n$ é unicamente determinada por x. Nessas condições tem-se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração. De fato, temos que se $j \in \mathbb{N}$ então para todo $N \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq N$ temos

$$\begin{aligned} |a_j| = \|a_j x_j\| &= \left\| \sum_{n=j}^{N} a_n x_n - \sum_{n=j+1}^{N} a_n x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=j}^{N} a_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n=j+1}^{N} a_n x_n \right\|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é convergente, fazendo $j \longrightarrow \infty$ em (2.1) obtemos $\lim_{j \to \infty} |a_j| = 0$. O que mostra o resultado. ■

Quando um espaço de Banach tem base de Schauder é sempre possível definir uma sequência de projeções no espaço. Essas projeções, conhecidas também como *projeções canônicas*, são operadores lineares e contínuos (veja em [4, Corolário 10.3.7]) e o supremo das normas dessa sequência de projeções sempre existe (veja em [4, Proposição 10.3.8]).

Definição 2.1.4. Uma base de Schauder $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é chamada *monótona* se as projeções canônicas

$$P_n : X \longrightarrow X, \quad P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

são tais que $\|P_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.5. Se $X = c_0$ então a base de Schauder $(e_n)_n$ é monótona. De fato, sejam

$$P_n : X \longrightarrow X, \quad P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,$$

as projeções canônicas em c_0. Logo, é imediato que se $x = (x_j)_j \in c_0$ então

$$\|P_n(x)\|_\infty = \left\| P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) \right\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \right\|_\infty = \|x\|_\infty.$$

Portanto, obtemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\| = 1$.

Proposição 2.1.6. *Seja X um espaço de Banach. Então uma sequência $(x_n)_n$ em X é uma base de Schauder se, e somente, se*
(i) $X = \overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$,
(ii) existe uma contante $C > 0$ tal que $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$ para qualquer sequência de escalares $(a_i)_i$ em $\mathbb{K}$ e todos $n < m$.

Demonstração. Veja [6, Theorem 3.2,p 28]. ■

Proposição 2.1.7. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se X tem base de Schauder monótona e existe um isomorfismo isométrico $T : X \longrightarrow Y$, então Y tem base de Schauder monótona.*

Demonstração. De fato, se $(x_n)_n$ é uma base de Schauder monótona para X. Não é difícil mostrar que a sequência $(y_n)_n$ onde $y_n = T(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ é uma base de Schauder para Y. Vamos mostrar apenas que a base de Schauder $(y_n)_n$ é monótona. Sejam

$$\tilde{P_n} : Y \longrightarrow Y, \qquad \tilde{P_n}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j,$$

as projeções canônicas de Y e

$$P_n : X \longrightarrow X, \qquad P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

as projeções canônicas de X que satisfazem $\|P_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que $\|\tilde{P_n}\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $y \in Y$ então

$$\begin{aligned}
\|P_n(y)\| &= \left\|P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j y_j\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} b_j T(x_j)\right\| \\
&= \left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j\right)\right\| \\
&= \left\|T\left(P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j\right)\right)\right\| \\
&= \left\|(T \circ P_n)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j\right)\right\| \\
&= \left\|(T \circ P_n)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j T^{-1}(y_j)\right)\right\| \\
&= \left\|(T \circ P_n \circ T^{-1})\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j y_j\right)\right\| \\
&= \|(T \circ P_n \circ T^{-1})(y)\| \\
&\leq \|T\|\|P_n\|\|T^{-1}\|\|y\| = \|y\|.
\end{aligned}$$

Isso mostra que a base de Schauder $(y_n)_n$ é monótona. ∎

Em alguns casos é possível que os funcionais coordenados de um espaço de Banach com base de Schauder também constituam uma base de Schauder para X'. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.1.8. Uma base de Schauder $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é chamada *contrátil* se a sequência de funcionais coordenados $(x'_n)_n$ é uma base de Schauder de X'.

Exemplo 2.1.9. A base de Schauder $(e_n)_n$ de c_0 é contrátil. De fato, com a demonstração de c_0 adaptada para ℓ_1 se mostra que $(e_n)_n$ é base de Schauder para ℓ_1. Segue de [4, Proposição 4.2.3] que

$$b = (b_j)_j \in \ell_1 \mapsto \varphi_b \in (c_0)', \quad \varphi_b\left((a_j)_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \quad \text{para toda } (a_j)_j \in c_0,$$

é um isomorfismo isométrico. Veja que para cada $n \in \mathbb{N}$ o funcional correspondente de e_n pelo isomorfismo em $(c_0)'$ é e'_n, que são os funcionais coordenados. Não é difícil verificar que imagem de base de Schauder por um isomorfismo é base de Schauder. Portanto temos que $(e_n)_n$ é contrátil.

Definição 2.1.10. Seja $(x_n)_n$ uma sequência no espaço de Banach X. Dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge *incondicionalmente* se para cada função bijetora $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente. Quando a sequência acima for uma base de Schauder para X então dizemos que $(x_n)_n$ é uma base de *Schauder incondicional*, isto é, para cada $x \in X$ a série $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge incondicionalmente.

De acordo com as definições acima, está aberta a possibilidade de uma série incondicionalmente convergente convergir para limites diferentes considerando ordenações diferentes de $\mathbb{N}$. A proposição seguinte afirma que isso não ocorre.

Proposição 2.1.11. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado* X. *Se* $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *são funções bijetoras, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

Demonstração. Veja [4, Proposição 5.3.8]. ■

A seguir apresentaremos algumas caracterizações para espaços de Banach com base de Schauder incondicional que envolvem sequência básica complementada. Para tanto lembre que uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é dita *sequência básica* se é uma base de Schader para $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, e é dita uma *sequência básica complementada* se $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço complementado em X.

Definição 2.1.12. Sejam $(x_n)_n$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(k_n)_n$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos, com $k_0 = 0$. Uma sequência de vetores não-nulos $(y_n)_n$ em X definida por

$$y_n = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} b_i x_i,$$

em que $b_i \in \mathbb{K}$, é chamada de *sequência de blocos básica relativa a* $(x_n)_n$.

O seguinte teorema será usado no último capítulo desta dissertação. Optamos por deixá-lo nesta seção, pois é um resultado sobre tópicos relacionados à seção.

Teorema 2.1.13. *Seja X um espaço de Banach com base de Schauder incondicional $(x_n)_n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) $(x_n)_n$ não é contrátil.
(b) X contém um subespaço complementado isomorfo a ℓ_1.
(c) Existe uma sequência básica de blocos $(y_n)_n$ básica de blocos complementada em relação à $(x_n)_n$ equivalente à base canônica de ℓ_1.
(d) X contém um subespaço isomorfo a ℓ_1.

Demonstração. Veja [2, Theorem 3.3.1]. ■

2.2 Propriedade da aproximação

A investigação das várias variantes da propriedade da aproximação e as relações entre elas foi iniciada por Grothendieck [13]. O estudo da propriedade da aproximação é muito importante em teoria dos espaços de Banach. Para um estudo mais detalhado, recomendamos [27]. Dados X e Y espaços de Banach. Denotaremos por $\mathcal{F}(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores $T : X \longrightarrow Y$ lineares e contínuos de *posto finito*, isto é, cuja a *imagem têm dimensão finita.*

Definição 2.2.1. Um espaço de Banach X tem a *propriedade da aproximação* se para todo conjunto compacto K de X e todo $\epsilon > 0$, existe $T \in \mathcal{F}(X, X)$ tal que $\|x - T(x)\| < \epsilon$ para cada $x \in K$.

Exemplo 2.2.2. Todo espaço de Banach X com base de Schauder tem a propriedade da aproximação. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere as projeções canônicas

$$P_n : X \longrightarrow X,\ P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

onde $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é a base de Schauder de X. Segue que para cada n, $P_n(X)$ tem dimensão finita. Ademais, para todo $x \in X$,

$$\|P_n(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j x_j \right\| \longrightarrow 0,$$

pois $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$. Segue do Teorema 1.1.19 que para todo compacto K em X tem-se $\sup_{x \in K} \|P_n(x) - x\| \longrightarrow 0$. Ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $P_{n_\epsilon} \in \mathcal{F}(X, X)$ tal que $\|x - P_{n_\epsilon}(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in K$.

Devido ao Exemplo 2.2.2 temos que c_0 tem a propriedade de aproximação. Mas, um espaço de Banach ter a propriedade de aproximação não significa que seus subespaços o terão, como pode ser visto no próximo Teorema.

Teorema 2.2.3. *O espaço c_0 tem subespaços que não têm a propriedade da aproximação.*

Demonstração. Veja [27, Theorem 2.d.6]. ■

A propriedade de aproximação é conservada por isomorfismo, e isso é muito importante, pois dependendo do espaço podemos renormalizá-lo para concluir que ele tem a propriedade da aproximação.

Teorema 2.2.4. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um isomorfismo. Então X tem a propriedade da aproximação se, e somente se, Y tem a propriedade da aproximação.*

Demonstração. Suponha que X tenha a propriedade da aproximação. E sejam $K \subset Y$ um conjunto compacto e $\epsilon > 0$. Como T é um isomorfismo, temos que $K_1 = T^{-1}(K)$ é compacto em X. Logo, como X tem a propriedade da aproximação, existe $T_1 \in F(X, X)$ tal que $\|x - T_1(x)\| < \dfrac{\epsilon}{\|T\|}$. Note que o operador

$$\overline{T} = T \circ T_1 \circ T^{-1} : Y \longrightarrow Y$$

é linear, contínuo e tem posto finito, pois T_1 tem posto finito. Note que dado $y \in K$, existe $x \in K_1$ tal que $Tx = y$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \|y - \overline{T}(y)\| &= \|y - T \circ T_1 \circ T^{-1}(y)\| \\ &= \|y - T \circ T_1(T^{-1}(y))\| \\ &= \|T(x) - T(T_1(x))\| \leq \|T\| \|x - T_1(x)\| \\ &< \|T\| \frac{\epsilon}{\|T\|} = \epsilon, \end{aligned}$$

para cada $y = Tx$. Portanto Y tem a propriedade de aproximação. Reciprocamente, suponha que Y tem a propriedade da aproximação. Neste caso, basta imitar a demostração anterior para X no lugar de Y. ■

Teorema 2.2.5. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ um operador que não pode ser aproximado por operadores de posto finito. Se a norma $\|\cdot\|$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_Y$, então $T : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|)$ não pode ser aproximado por operadores de posto finito.*

Demonstração. Como T não pode ser aproximado por operadores de posto finito, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $T_1 \in \mathcal{F}(X, Y)$ tem-se

$$\|T_1 - T\|_{L(X,(Y,\|\cdot\|_Y))} \geq \epsilon.$$

Como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_Y$ são equivalentes, existem constantes a e b positivas tais que

$$a\|y\| \leq \|y\|_Y \leq b\|y\| \text{ para todo } y \in Y.$$

Então,

$$\begin{aligned} \epsilon \leq \|T_1 - T\|_{L(X,(Y,\|\cdot\|_Y))} &= \sup\{\|T_1(x) - T(x)\|_Y; x \in B_X\} \\ &\leq b \sup\{\|T_1(x) - T(x)\|; x \in B_X\} \\ &= b\|T_1 - T\|_{L(X,(Y,\|\cdot\|))}, \end{aligned}$$

e portanto

$$T : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|),$$

não pode ser aproximado por operadores de posto finito. ■

Os lemas a seguir serão necessários para apresentarmos uma caracterização para espaços de Banach cujo dual tem a propriedade da aproximação.

Lema 2.2.6. *Sejam X um espaço de Banach, D um subespaço de dimensão finita de X'' e $\epsilon > 0$. Então existe um operador $S : D \longrightarrow X$ tal que $\|S\| \leq 1 + \epsilon$ e $S(J_X(x)) = x$ sempre $J_X(x) \in D$ para cada $x \in X$.*

Demonstração. Veja [27, Lemma 1.e.6]. ■

O seguinte lema é uma caracterização para operadores de posto finito muito importante.

Lema 2.2.7. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear e contínuo $T : X \longrightarrow Y$ tem posto finito se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in X'$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ em Y tais que $T(x) = \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 + \cdots + \varphi_n(x)y_n$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Veja [4, Exercício 2.7.20]. ■

Teorema 2.2.8. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes.*
(i) X tem a propriedade da aproximação.
(ii) Para todo espaço de Banach Y, os operadores de posto finito são densos em $L(X, Y)$ na topologia da convergência uniforme sobre conjuntos compactos.

(iii) Para todo espaço de Banach Y, os operadores de posto finito são densos em $L(Y, X)$ na topologia da convergência uniforme sobre conjuntos compactos.
(iv) Para todas sequências $(x_n)_n$ em X e $(x'_n)_n$ em X' tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \|x_n\| < \infty$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x_n = 0$$

para todo $x \in X$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) = 0.$$

(v) Para todo espaço de Banach Y, todo operador compacto $T \in L(Y, X)$ e todo $\epsilon > 0$ existe um operador de posto finito $T_1 \in L(Y, X)$ tal que $\|T_1 - T\| < \epsilon$.

Demonstração. Veja [27, Theorem 1.e.4]. ■

Nos próximos capítulos será importante para alguns resultados um espaço de Banach (ou seu dual) ter ou não propriedade da aproximação. Segue uma caracterização para espaço de Banach cujo dual tem essa propriedade. Tal resultado pode ser encontrado em [27, Theorem 1.e.5].

Teorema 2.2.9. *Seja X um espaço de Banach. Então X' tem a propriedade da aproximação se, e somente se, para todo espaço de Banach Y, todo $\epsilon > 0$ e todo operador compacto $T \in L(X, Y)$, existe um operador de posto finito $T_1 \in L(X, Y)$ tal que $\|T - T_1\| < \epsilon$.*

Demonstração. Suponha que X' tenha a propriedade da aproximação e seja $T \in L(X, Y)$ um operador compacto. O Teorema de Schauder diz que o adjunto de um operador compacto é compacto. Logo, o operador $T' : Y' \longrightarrow X'$ é compacto. Pelo Teorema 2.2.8 (v), para todo $\epsilon > 0$ existe um operador $U \in L(Y', X')$ de posto finito tal que

$$\|T' - U\| < \epsilon.$$

Segue do Lema 2.2.7 que existem $(y''_i)_{i=1}^n \subset Y''$ e $(x'_i)_{i=1}^n \subset X'$ tais que

$$U(y') = \sum_{i=1}^{n} y''_i(y') x'_i$$

para todo $y' \in Y'$, e portanto

$$\left\| T'y' - \sum_{i=1}^{n} y''_i(y') x'_i \right\| < \epsilon$$

sempre que $y' \in B_{Y'}$. Defina

$$T_Y = J_Y \circ T : X \longrightarrow Y'', \quad T_Y(x)(y') = T'y'(x).$$

Note que T_Y está bem definido pois

$$T_Y(x)(y') = (J_Y \circ T)(x)(y') = y'(T(x)) = T'y'(x).$$

Ademais, se $y' \in B_{Y'}$ e $x \in B_X$, então

$$\begin{aligned}
\left| T_Y(x)(y') - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i''(y') \right| &= \left| T'y'(x) - \sum_{i=1}^{n} y_i''(y') x_i'(x) \right| \\
&\leq \sup \left\{ \left| T'y'(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i''(y') \right| : x \in B_X \right\} \\
&= \left\| T'y' - \sum_{i=1}^{n} y_i''(y') x_i' \right\| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\left\| T_Y(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i'' \right\| = \sup \left\{ \left| T_Y(x)(y') - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i''(y') \right| : y' \in B_{Y'} \right\} \leq \epsilon,$$

para todo $x \in B_X$. Como T é compacto, segue da Propriedade de Ideal que T_Y é compacto. Logo $\overline{T_Y(B_X)}$ é compacto. Assim existe $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ em B_X tal que

$$T_Y(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(T_Y(x_j), \epsilon).$$

Considere

$$D = \operatorname{span} \left(\{T_Y(x_j)\}_{j=1}^{m} \cup \{y_i'' : 1 \leq i \leq n\} \right).$$

Para cada $x \in B_X$ existe $1 \leq j \leq m$ tal que

$$\left\| T_Y(x_j) - T_Y(x) \right\| < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\| T_Y(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i'' \right\| &= \left\| T_Y(x_j) - T_Y(x) + T_Y(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i'' \right\| \\
&\leq \|T_Y(x_j) - T_Y(x)\| + \left\| T_Y(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i'' \right\| \leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.6 existe um operador $S : D \longrightarrow X$ tal que $\|S\| \leq 1 + \epsilon$ e $S(J_Y(x)) = x$ sempre que $J_Y(x) \in D$ para cada $x \in X$. Logo aplicando S em $T_Y(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i''$, obtemos

$$\left\| S(T_Y(x_j)) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| = \left\| S(T_Y(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i'') \right\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|S\| \left\| T_Y(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i'' \right\| \\ &< 2\epsilon(1+\epsilon) < 3\epsilon \end{aligned}$$

para $\epsilon < \frac{1}{2}$. Logo,

$$\left\| S(T_Y(x_j)) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| < 3\epsilon.$$

Segue que

$$\left\| (S \circ J_Y)(T(x_j)) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| < 3\epsilon.$$

Como $J_Y(Tx_j) \in D$, segue que $S(J_Y(Tx_j)) = Tx_j$ e portanto

$$\left\| T(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'')) \right\| < 3\epsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| T(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| &= \left\| T(x) - T(x_j) + T(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| \\ &\leq \|T(x) - T(x_j)\| + \left\| T(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| < \epsilon + 3\epsilon = 4\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\left\| T(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i'') \right\| < 4\epsilon$$

e

$$T_1 : X \longrightarrow Y, \quad T_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) S(y_i''),$$

é um operador de posto finito em $L(X, Y)$, como queríamos.

Reciprocamente, sejam Z um espaço de Banach qualquer, $T : Z \longrightarrow X'$ um operador compacto e $\epsilon > 0$. Considere $T' : X'' \longrightarrow Z'$ o adjunto de T e $J_X : X \longrightarrow X''$ o mergulho canônico. Diante disso, seja

$$T_* = T' \circ J_X : X \longrightarrow Z', \quad T_*(x)(z) = (Tz)(x).$$

Observe que T_* está bem definido pois

$$T_*(x)(z) = (T' \circ J_X(x))(z) = J_X(x)(Tz) = (Tz)(x).$$

Segue do Teorema de Schauder e da Propriedade de Ideal que T_* é compacto. Logo, aplicando a hipótese do teorema a T_*, existe um operador de posto finito $T_1 \in L(X, Z')$ tal que

$$\|T_* - T_1\| < \epsilon.$$

Logo, para cada $x \in B_X$ tem-se

$$\|T_*(x) - T_1(x)\| < \epsilon.$$

Como T_1 tem posto finito, segue do Lema 2.2.7 que existem $(x'_j)_{j=1}^n \subset X'$ e $(z'_j)_{j=1}^n \subset Z'$ tais que

$$T_1(x) = \sum_{j=1}^{n} x'_j(x) z'_j$$

para todo $x \in X$. Logo

$$\|T_*(x) - T_1(x)\| = \left\| T_*(x) - \sum_{j=1}^{n} x'_j(x) z'_j \right\| < \epsilon.$$

Portanto, segue que para cada $z \in B_Z$,

$$|T_*(x)(z) - T_1(x)(z)| = \left| T_*(x)(z) - \sum_{j=1}^{n} x'_j(x) z'_j(z) \right| \leq \epsilon.$$

Assim,

$$\left| (Tz)(x) - \sum_{j=1}^{n} z'_j(z) x'_j(x) \right| = \left| T_*(x)(z) - \sum_{j=1}^{n} z'_j(z) x'_j(x) \right| < \epsilon,$$

donde

$$\left\| Tz - \sum_{j=1}^{n} z'_j(z) x'_j \right\| < \epsilon.$$

Portanto, segue do Teorema 2.2.8 ($(v) \Rightarrow (i)$) que X' tem a propriedade da aproximação.

∎

Teorema 2.2.10. *Seja X uma espaço de Banach. Se X' tem a propriedade da aproximação, então X tem a propriedade da aproximação.*

Demonstração. Vamos mostra que para sequências

$$\{x_n\}_n \subset X, \{x'_n\}_n \subset X' \tag{2.2}$$

tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \|x_n\| < \infty \tag{2.3}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x_n = 0 \tag{2.4}$$

para todo $x \in X$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) = 0. \tag{2.5}$$

Assim, pelo Teorema 2.2.8 obteremos que X tem a propriedade da aproximação. Vamos à demonstração: Suponha que em X tenhamos (2.2), (2.3) e (2.4) e mostraremos que ocorre (2.5). De fato, seja $J_X : X \longrightarrow X''$ o mergulho canônico e para cada $n \in \mathbb{N}$ chame $J_X(x_n) = x''_n$. Assim temos

$$\{x'_n\}_n \subset X', \{x''_n\}_n \subset X''. \tag{2.6}$$

Segue de (2.3) que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|x''_n\| \|x'_n\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \|J_X(x_n)\| \|x'_n\| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \|x_n\| < \infty, \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x''_n\| \|x'_n\| < \infty. \tag{2.7}$$

Por (2.4) temos que para todo x' em X',

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x'(x_n) = x' \left(\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x_n \right) = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} J_X(x_n)(x') x'_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x''_n(x') x'_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n) x'_n(x) = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n)x'_n = 0. \tag{2.8}$$

Como X' tem a propriedade da aproximação e temos (2.6), (2.7) e (2.8), segue do Teorema 2.2.8 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x''_n(x'_n) = 0.$$

Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} J_X(x_n)(x'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x''_n(x'_n) = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.2.11. *Seja Y um espaço de Banach. Então um operador $T \in L(X,Y)$ é compacto se, e somente se, existem um subespaço fechado G de c_0 e operadores compactos $R : G \longrightarrow Y$ e $S : X \longrightarrow G$ tal que $R \circ S = T$.*

Demonstração. Veja [18, Theorem 17.1.4]. ■

Como consequência obtemos uma caracterização para espaços de Banach com a propriedade da aproximação.

Lema 2.2.12. *Um espaço de Banach Y tem a propriedade da aproximação se, e somente se, $\mathcal{K}(X,Y) = \overline{\mathcal{F}(X,Y)}$ para todo subespaço fechado X de c_0.*

Demonstração. Suponha que Y tem a propriedade da aproximação. A igualdade $\mathcal{K}(X,Y) = \overline{\mathcal{F}(X,Y)}$ segue como caso particular do Teorema 2.2.8 (v) aplicado a subespaços fechados de c_0. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{K}(X,Y) = \overline{\mathcal{F}(X,Y)}$ para todo subespaço fechado X de c_0. De acordo com o Teorema 2.2.8 é suficiente mostrar que dados $\epsilon > 0$, X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, existe um operador $T_1 \in L(X,Y)$ de posto finito tal que $\|T_1 - T\| < \epsilon$. Então faremos isso: sejam $\epsilon > 0$, X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, segue do Teorema 2.2.11 que existem um subespaço fechado G de c_0 e operadores compactos $R : G \longrightarrow Y$ e $S : X \longrightarrow G$ tais que $R \circ S = T$. Segue da hipótese que existe $\overline{T} \in \mathcal{F}(G,Y)$ tal que

$$\|\overline{T} - R\| < \frac{\epsilon}{\|S\|}.$$

Assim chamando $T_1 = \overline{T} \circ S$ tem-se,

$$\|T_1 - T\| \;=\; \|\overline{T} \circ S - T\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\overline{T} \circ S - R \circ S\| \\
&= \|(\overline{T} - R) \circ S\| \\
&\leq \|\overline{T} - R\|\|S\| < \epsilon.
\end{aligned}
$$

Note que $T_1 : X \longrightarrow Y$ tem posto finito e portanto o resultado está provado. ■

Definiremos e apresentaremos agora alguns resultados que serão importantes para a demonstração do último teorema. Esse teorema por sua vez, será usado para se demonstrar um resultado do último capítulo da dissertação.

Definição 2.2.13. Seja X um espaço de Banach e seja $1 \leq \lambda < \infty$. Dizemos que X tem a *λ-propriedade da aproximação* se para todo $\epsilon > 0$ e todo conjunto compacto $K \subset X$, existe um operador de posto finito $T \in L(X, X)$ tal que $\|Tx - x\| < \epsilon$ para todo $x \in K$ e $\|T\| \leq \lambda$.

Definição 2.2.14. Um espaço de Banach X tem a *propriedade da aproximação limitada* se tem λ-propriedade da aproximação para algum $1 \leq \lambda < \infty$.

Exemplo 2.2.15. Espaços com base da Schauder têm a propriedade da aproximação limitada. Mostramos no Exemplo 2.2.2 que os operadores de posto finito que fazem com que X tenha a propriedade da aproximação são as projeções P_n. Resta mostrar que existe $1 \leq \lambda < \infty$ tal que $\|P_n\| \leq \lambda$. Mas isso ocorre pois, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\lambda < \infty$ com $\|P_n\| \leq \lambda$; por exemplo, λ pode ser a constante de base da base de Schauder. Como $P_n \circ P_n = P_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\lambda \geq \|P_n\| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto todo espaço com base da Schauder tem a propriedade da aproximação limitada.

Proposição 2.2.16. *Sejam X um espaço de Banach e Z um subespaço complementado em X. Se X tem a propriedade da aproximação limitada então Z tem a propriedade da aproximação limitada.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$, $K \subset Z$ compacto e $\lambda_0 \geq 1$. Como Z é complementado em X, existe projeção $P : X \longrightarrow X$ tal que $P(X) = Z$ com $P(z) = z$ para todo $z \in Z$. Como K é compacto em $Z \subset X$, tem-se K compacto em X, pois Z é fechado em X. Por hipótese X tem a propriedade da aproximação limitada, logo existe um operador $\tilde{T} : X \longrightarrow X$ linear, contínuo e de posto finito tal que $\|\tilde{T}x - x\| < \dfrac{\epsilon}{\|P\|}$ para todo $x \in K$ e $\|\tilde{T}\| \leq \lambda_0$. Seja $T = \tilde{T}_{|Z} : Z \longrightarrow X$, e considere o operador $P \circ T : Z \longrightarrow Z$ linear, contínuo e de posto finito. Segue que para cada $x \in K$,

$$
\begin{aligned}
\|P \circ Tx - x\| &= \|P \circ Tx - Px\| \\
&= \|P \circ (Tx - x)\| \\
&\leq \|P\|\|Tx - x\| \\
&< \|P\|\frac{\epsilon}{\|P\|} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, $\lambda = \lambda_0\|P\| \geq 1$, obtemos

$$\|P \circ T\| \leq \|P\|\|T\| \leq \|P\|\|\tilde{T}\| \leq \lambda_0\|P\| = \lambda.$$

Portanto Z tem a propriedade da aproximação limitada. ■

Lema 2.2.17. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X, X)$. Se $\|T\| < 1$, então o operador $I - T$ é invertível e $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.*

Demonstração. De fato, se $\|T\| < 1$, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ é absolutamente convergente, e portanto convergente. Agora para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(I - T) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right) = I - T^n = \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right) \circ (I - T).$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$(I - T) \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right) = I = \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right) \circ (I - T).$$

Portanto $(I - T)$ é invertível e $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$. ■

Lema 2.2.18. *Sejam X um espaço de Banach e $E \subset X$ um subespaço de dimensão n e $T : X \longrightarrow E$ um operador linear sobrejetor. Sejam $k \leq n$ e $F \subset X$ um subespaço de dimensão k tal que $\|T|_F - I_F\| < \epsilon < 1$, onde $(1 - \epsilon)^{-1}\epsilon k < 1$. Então existe um operador $S : X \longrightarrow E$ tal que $S|_F = I_F$, $\|S - T\| < (1 - \epsilon)^{-1}\epsilon k\|T\|$. Se além disso, T for uma projeção, então S pode ser escolhido de tal forma que seja também uma projeção e $\|S|_{T(X)} - I_{T(X)}\| < (1 - \epsilon)^{-1}\epsilon k$.*

Demonstração. Seja $U = T_{|F}$. Segue do Lema 2.2.17 que $U = T_{|F}$ é invertível sobre $T(F)$ e $U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I - U)^k$. Como $T(F) \subset E$, pelo Exemplo 1.2.2 existe uma projeção P de $E = T(X)$ sobre $T(F)$ com $\|P\| \leq k$. Defina

$$V : E \longrightarrow X, \quad V(y) = (U^{-1} \circ P)(y) + I_E(y) - P(y).$$

A linearidade e continuidade de V seguem de U^{-1}, I_E e de P. Diante disso, defina

$$S : X \longrightarrow E, \quad S(x) = (V \circ T)(x).$$

A linearidade e continuidade de S seguem de V e de T. Vejamos que S satisfaz as condições desejadas. De fato, primeiramente note que para $x \in B_F$,

$$\|U(x)\| \leq \|U(x) - x\| + \|x\| < \epsilon + 1,$$

donde

$$\|U\| < \epsilon + 1.$$

Além disso, temos que $\|U^{-1}\| < (1-\epsilon)^{-1}$. De fato, segue do Lema 2.2.17 que

$$U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I-U)^k,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\|U^{-1}\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\|I-U\|^k \\
&< \sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k \\
&= \frac{1}{1-\epsilon} = (1-\epsilon)^{-1}.
\end{aligned}$$

Note também que para cada $y \in B_{T(F)}$ existe $x \in F$ tal que $U(x) = y$ e

$$\|U^{-1}(y) - y\| = \|x - U(x)\| < \epsilon < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Portanto

$$\|U^{-1} - I_{T(F)}\| < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Diante disso obtemos,

$$\begin{aligned}
\|V - I_E\| &= \|(U^{-1}\circ P) + I_E - P - I_E\| \\
&= \|(U^{-1}\circ P) - P\| \\
&= \|(U^{-1} - I_E)\circ P\| \\
&\leq \|(U^{-1} - I_E)\|\|P\| \\
&< \frac{\epsilon k}{1-\epsilon}.
\end{aligned}$$

Portanto para todo $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned}
\|S(x) - T(x)\| &= \|V(T(x)) - T(x)\| \\
&= \|(V - I_E)(T(x))\| \\
&\leq \|V - I_E\|\|T\|\|x\| \\
&< (1-\epsilon)^{-1}\epsilon k\|T\|\|x\|.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|S - T\| < (1-\epsilon)^{-1}\epsilon k\|T\|.$$

Também temos que $S_{|F} = I_F$. De fato, para todo $x \in F$,

$$\begin{aligned}
S(x) = (V \circ T)(x) &= (U^{-1} \circ P \circ T)(x) + (I_E \circ T)(x) - (P \circ T)(x) \\
&= U^{-1}(P(T(x))) + T(x) - P(T(x)) \\
&= U^{-1}(T(x)) + T(x) - T(x) \\
&= U^{-1}(U(x)) = I_F(x).
\end{aligned}$$

Ademais, caso T seja uma projeção, S também será. De fato, como $T(X) = E$ segue de [4, Proposição 3.2.2] que para cada $y \in E$ temos que $Ty = y$. Como $V(Tx) \in E$ para todo $x \in X$ então

$$S(S(x)) = V(T(S(x))) = V(T(V(Tx))) = V(T(Tx)) = V(Tx) = S(x),$$

donde S é uma projeção. ∎

Proposição 2.2.19. *Seja X um espaço de Banach. Então as seguinte condições são equivalentes:*
(a) X tem a propriedade da aproximação limitada.
(b) Existe $\lambda_1 \geq 1$ satisfazendo a seguinte propriedade: Para todo subespaço $F \subset X$ de dimensão finita existe um operador $S : X \longrightarrow X$ de posto finito tal que $\|S\| \leq \lambda_1$ e $Sx = x$ para todo $x \in F$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Suponha que X tenha a propriedade da aproximação limitada e seja F um subespaço de X de dimensão finita k. Como B_F é compacta em F, segue que B_F é compacta em X. Como X tem a propriedade da aproximação limitada, existe $\lambda \geq 1$ tal que para todo $0 < \epsilon < 1$ satisfazendo $(1-\epsilon)^{-1}\epsilon k < 1$ existe um operador de posto finito $T \in L(X, X)$ tal que

$$\|Tx - x\| < \epsilon$$

para todo $x \in B_F$ e $\|T\| \leq \lambda$. Logo,

$$\|T|_F - I_F\| < \epsilon.$$

Faça $E = T(X)$. Logo $T : X \longrightarrow E$ é sobrejetor. Com isso, estamos na hipótese do Lema 2.2.18. De fato, $T : X \longrightarrow E$ é sobrejetor, E e F são subespaços de X de dimensão finita com $k = \dim F \leq \dim E$ e

$$\|T|_F - I_F\| < \epsilon < 1,$$

com $(1-\epsilon)^{-1}\epsilon k < 1$. Portanto, existe um operador $S : X \longrightarrow E$ tal que $S|_F = I_F$, $\|S - T\| < (1-\epsilon)^{-1}\epsilon k\|T\|$. Além disso,

$$\|S\| \leq \|S - T\| + \|T\|$$

$$
\begin{aligned}
&< (1-\epsilon)^{-1}\epsilon k\|T\| + \|T\| \\
&< \|T\| + \|T\| \\
&= 2\|T\| \leq 2\lambda.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\lambda_1 = 2\lambda \geq 1$, obtemos que $\|S\| < \lambda_1$. Assim o resultado está provado.
$(b) \Rightarrow (a)$ Seja $\lambda_1 \geq 1$ como nas hipóteses de (b). Vejamos que X tem a propriedade da aproximação limitada. Sejam $K \subset X$ compacto e $\epsilon > 0$. Logo, existem $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em K tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2\lambda_1}\right).$$

Defina

$$F = \text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Visto que F tem dimensão finita, segue da hipótese que existe um operador de posto finito $T : X \longrightarrow X$ tal que $\|T\| \leq \lambda_1$ e $T(x) = x$ para $x \in F$. Ademais, dado $x \in K$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\|x - x_i\| < \dfrac{\epsilon}{2\lambda_1}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|T(x) - x\| &= \|T(x) - x_i + x_i - x\| \\
&\leq \|T(x) - x_i\| + \|x_i - x\| \\
&\leq \|T(x) - T(x_i)\| + \|x_i - x\| \\
&\leq \|T(x - x_i)\| + \|x_i - x\| \\
&\leq \|T\|\|x - x_i\| + \|x_i - x\| \\
&< \frac{\epsilon\lambda_1}{2\lambda_1} + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto X tem a propriedade da aproximação limitada. ■

Definição 2.2.20. Um espaço de Banach X tem a *propriedade da decomposição de dimensão finita*, se existe uma sequência $(F_n)_n$ de subespaços de X de dimensão finita tal que cada $x \in X$ tem uma única representação $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n x$, com $P_n x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(F_n)_n$ é chamada de *decomposição em dimensão finita* para X e P_n são projeções lineares e contínuas definidas em X.

Exemplo 2.2.21. Espaços de Banach X com base de Schauder tem a propriedade da decomposição em dimensão finita. De fato, seja $(x_n)_n$ a base de Schauder para X. Assim, dado $x \in X$ existe uma única sequência $(a_n)_n$ em $\mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Com isso, para cada $n \in \mathbb{N}$ faça $F_n = \text{span}\{x_n\}$. Isto mostra que X tem a propriedade da decomposição em dimensão finita.

Proposição 2.2.22. *Seja X um espaço de Banach que tem a propriedade da decomposição de dimensão finita, isto é, existe uma sequência $(F_n)_n$ de subespaços de X de dimensão finita tal que cada $x \in X$ tem uma única representação $x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x$, com $P_n x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com P_n projeções lineares e contínuas definidas em X. As aplicações*

$$Q_0 = 0 \text{ e } Q_N = \sum_{n=1}^{N} P_n$$

para cada $N \in \mathbb{N}$ são projeções lineares e contínuas.

Demonstração. A linearidade das aplicações Q_N e o fato de serem projeções é imediato. Note que $\lim_{N\to\infty} Q_N x = x$ para cada $x \in X$. Como $\lim_{N\to\infty} Q_N x = x$, existem constantes $C_x > 0$ tais que $\|Q_N x\| \leq C_x$ para cada $x \in X$ e cada $N \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema de Banach-Steinhaus que existe $C > 0$ tal que $\|Q_N\| \leq C$. Como isso obtemos que $Q_N \in L(X, X)$ para cada $N \in \mathbb{N}$. ■

Uma observação importante a fazer com relação à sequência de operadores $(Q_n)_n$ definidas na proposição acima é

$$Q_n \circ Q_m = Q_{\min\{n,m\}}$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. De fato, se $x \in X$ e $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$ então

$$\begin{aligned}
(Q_n \circ Q_m)x &= Q_n(Q_m(x)) \\
&= Q_n\left(\sum_{k=1}^{m} P_k x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} Q_n(P_k x) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_j(P_k(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \delta_{j,k} P_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_k(x) = Q_n x.
\end{aligned}$$

Note também, que na demonstração da Proposição 2.2.22 mostramos que $\lim_n Q_n x = x$ para cada $x \in X$. As projeções $(Q_n)_n$ são usualmente chamadas de *projeções que determinam a decomposição em X* ou *projeções naturais da decomposição em X*. A seguir será feita uma construção de espaços de sequências.

Definição 2.2.23. Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que um operador linear e contínuo $T : X \longrightarrow Y$ é uma *aplicação quociente* se $\overline{T(B_X)} = B_Y$.

A seguir apresentaremos uma construção, seguida de uma proposição que podem ser encontradas em [19] e [28].

Seja X um espaço de Banach e seja $(E_n)_n$ uma sequência crescente de subespaços de X de dimensão finita tais que $X = \overline{\bigcup_n E_n}$. Ponha

$$Z = \Big\{(x_n) : x_n \in E_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ em } X\Big\}, \tag{2.9}$$

$$Y = \Big\{(x_n) : x_n \in E_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X\Big\}. \tag{2.10}$$

Não é difícil verificar que Z e Y são espaços de Banach com a norma $\|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\|$.

Diante disso temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.24. *Seja X um espaço de Banach e seja $(E_n)_n$ uma sequência crescente de subespaços de X de dimensão finita tal que $X = \overline{\bigcup_n E_n}$. Seja Y como em (2.10), e seja*

$$Q : Y \longrightarrow X, \quad Q((x_n)_n) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Então,
(a) Q é uma aplicação quociente, Ker $(Q) = Z$ e $Q(Y) = X$, onde Z é como em (2.9).
(b) Y tem a propriedade da aproximação limitada.
(c) Y tem uma decomposição em dimensão finita (H_n) tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, H_n é isométrico a E_n.
(d) Suponha que X seja separável e falhe a propriedade da aproximação limitada. Então Y é separável e Z não é complementado em Y.

Demonstração. (a) Mostraremos que $\overline{QB_Y} = B_X$. Seja $y \in \overline{QB_Y}$. Logo existe uma sequência $(y^k) \subset QB_Y$ tal que $\lim_{k\to\infty} y^k = y$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x^k = (x_n^k)_n \in B_Y$ tal que $Q(x^k) = y^k$. Segue da definição de Q que

$$y^k = Q(x^k) = Q((x_n^k)_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^k.$$

Como para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\|x^k\| \leq 1$, segue que

$$1 \geq \|x^k\| = \sup_n \|x_n^k\| \geq \|x_n^k\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\|y^k\| = \|Q(x^k)\| = \|Q((x_n^k)_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n^k\| \leq 1.$$

Segue que $\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|y^k\| \leq 1$, e portanto $y \in B_X$. Logo $\overline{QB_Y} \subset B_X$.
Vejamos que $B_X \subset \overline{QB_Y}$. Para isso, mostraremos que $S_X \subset \overline{QB_Y}$. Uma vez sabendo disso, é suficiente observar que como B_Y é convexo e Q é linear, tem-se que $Q(B_Y)$ é convexo e portanto $\overline{QB_Y}$ é convexo. Logo

$$B_X = \operatorname{conv}(S_X) \subset \operatorname{conv}(\overline{QB_Y}) = \overline{QB_Y}.$$

Vejamos que $S_X \subset \overline{QB_Y}$. Sejam $x \in S_X$ e $\epsilon > 0$. Como

$$S_X \subset X = \overline{\bigcup_n E_n},$$

existe $z \in \bigcup_n E_n$ não nulo tal que $\|x - z\| < \dfrac{\epsilon}{2+\epsilon}$. Como $z \in \bigcup_n E_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in E_{n_0}$. Faça $y = \dfrac{z}{\|z\|} \in E_{n_0}$. Sabendo que $E_n \subset E_{n+1}$ segue que $y \in B_{E_n}$ para todo $n \geq n_0$. Com isso, defina a sequência $(x_n)_n$ em X por

$$x_n = \begin{cases} y, & \text{se} \quad n \geq n_0 \\ 0, & \text{se} \quad n < n_0 \end{cases}.$$

Observe que $(x_n)_n \in B_Y$ e $Q((x_n)_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = y \in Q(B_Y)$. Mostraremos que

$$\|x - Q((x_n)_n)\| < \epsilon.$$

Como $\|x\| = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\|x - Q((x_n)_n)\| &= \|x - y\| \\
&= \left\| x - \frac{z}{\|z\|} \right\| \\
&\leq \left\| x - \frac{x}{\|z\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|z\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \\
&= \left| 1 - \frac{1}{\|z\|} \right| \|x\| + \frac{\|x - z\|}{\|z\|} \\
&= \left| \frac{\|z\| - 1}{\|z\|} \right| + \frac{\|x - z\|}{\|z\|} \\
&= \left| \frac{\|z\| - \|x\|}{\|z\|} \right| + \frac{\|x - z\|}{\|z\|} \\
&= \frac{|\|z\| - \|x\||}{\|z\|} + \frac{\|x - z\|}{\|z\|} \\
&\leq \frac{\|z - x\|}{\|z\|} + \frac{\|z - x\|}{\|z\|} \\
&= \frac{2\|z - x\|}{\|z\|}.
\end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}
\|z\| &\geq \|x\| - \|z - x\| \\
&> 1 - \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \\
&= \frac{2}{2+\epsilon},
\end{aligned}$$

segue que $\dfrac{2+\epsilon}{2} > \dfrac{1}{\|z\|}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\|x - Q((x_n)_n)\| &\leq \frac{2\|z-x\|}{\|z\|} \\
&< 2\frac{\epsilon}{2+\epsilon}\frac{2+\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $x \in \overline{Q(B_Y)}$ e portanto $S_X \subset \overline{QB_Y}$ como desejado.
Vamos mostrar que Ker $(Q) = Z$. De fato,

$$\begin{aligned}
x = (x_n)_n \in \text{Ker}(Q) &\iff 0 = Q((x_n)_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \\
&\iff x = (x_n)_n \in Z.
\end{aligned}$$

Por fim, resta mostrar que $Q(Y) = X$. Como a inclusão $Q(Y) \subset X$ é trivial, mostraremos apenas que $X \subset Q(Y)$. De fato, seja $x \in X = \overline{\bigcup_n E_n}$. Logo existe $x_1 \in \bigcup_n E_n$ tal que $\|x - x_1\| < 1$. Como $x_1 \in \bigcup_n E_n$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \in E_{n_1}$. Analogamente, existe $x_2 \in \bigcup_n E_n$ tal que $\|x - x_2\| < \dfrac{1}{2}$. Como $x_2 \in \bigcup_n E_n$ e $E_n \subset E_{n+1}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 \geq n_1$ tal que $x_2 \in E_{n_2}$. Novamente pelo fato de $x \in \overline{\bigcup_n E_n}$, existe $x_3 \in \bigcup_n E_n$ tal que $\|x - x_3\| < \dfrac{1}{3}$. Como $x_3 \in \bigcup_n E_n$ e $E_n \subset E_{n+1}$, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ com $n_3 \geq n_2$ tal que $x_3 \in E_{n_3}$. Prosseguindo desta forma obteremos uma sequência $(x_k)_k$ em X com $x_k \in E_{n_k}$, $E_{n_k} \subset E_{n_{k+1}}$ e $\|x - x_k\| < \dfrac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Diante disso considere a sequência $(y_n)_n$ dada por

$$y_i = \begin{cases} x_k, & \text{se} \quad n_k \leq i < n_{k+1} \\ 0, & \text{se} \quad 1 \leq i < n_1 \end{cases}. \tag{2.11}$$

Segue que a sequência $(y_n)_n$ converge para x. De fato, caso isso não aconteça, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$ tal que $\|y_n - x\| \geq \epsilon$. Em particular, para $n_0 = n_1$ existe $m_1 \geq n_1$ com $\|y_{m_1} - x\| \geq \epsilon$. Assim, para $n_0 = n_2$ existe $m_2 \geq n_2$ com $\|y_{m_2} - x\| \geq \epsilon$. Prosseguindo desta forma obteremos uma sequência não decrescente $(m_j)_j$ de números naturais com $\|y_{m_j} - x\| \geq \epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N} - \{1\}$ e $m_j \geq n_j$ para cada

j. Mas de acordo como foi construída a subsequência $(y_{m_j})_j$, de (2.11), tem-se que $(y_{m_j})_j$ é uma subsequência de $(x_k)_k$. Logo temos uma contradição, visto que $(x_k)_k$ converge para x. Desse modo, devemos ter que $(y_n)_n$ converge para x. Além disso, $(y_n)_n \in Y$, pois $y_n \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$Q((y_n))_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Isso mostra que $X \subset Q(Y)$. Portanto o resultado está provado.
(b) Vamos mostrar que Y tem a propriedade da aproximação limitada. Para isso, mostraremos que existem uma sequência de projeções $(P_n)_n$ em $L(Y,Y)$ de posto finito tal que a sequência $(P_n(x))_n$ converge uniformemente para x sobre conjuntos compactos e $\lambda \geq 1$ com $\|P_n\| \leq \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in Y$ defina

$$P_n : Y \longrightarrow Y, \quad P_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, x_n, x_n, \ldots).$$

A linearidade de P_n é clara. Vejamos que P_n é contínua para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in Y$. Logo

$$\begin{aligned} \|P_n(x)\| &= \|(x_1, x_2, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, x_n, \ldots)\| \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\| \\ &\leq \sup_n \|x_n\| = \|(x_n)_n\|. \end{aligned}$$

Isso mostra que P_n é contínua e que $\|P_n\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora vamos mostrar que a sequência $(P_n(x))_n$ converge uniformemente para x sobre conjuntos compactos. De fato, dada $(x_n)_n \in Y$ segue que

$$\begin{aligned} \|P_n((x_n)_n) - (x_n)_n\| &= \|(0, 0, \ldots, x_n - x_{n+1}, x_n - x_{n+2}, \ldots)\| \\ &= \sup_{N>n} \|x_n - x_N\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Portanto $P_n(x)$ converge para x para cada $x \in Y$. Segue do Teorema 1.1.19 que P_n converge uniformemente para I_Y sobre conjuntos compactos. Além disso, P_n é uma projeção para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $x = (x_n)_n \in Y$ segue que

$$\begin{aligned} (P_n \circ P_n)(x) &= P_n(P_n(x)) \\ &= P_n(x_1, x_2, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, x_n, x_n, \ldots) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, x_n, x_n, \ldots) = P_n(x). \end{aligned}$$

Por fim, resta mostra que $P_n(Y)$ tem dimensão finita para cada $n \in \mathbb{N}$. Para isso, seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Como E_n tem dimensão finita para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere

$$\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{d(n)}\} \tag{2.12}$$

uma base de E_n. Afirmamos que o conjunto

$$A = \Big\{(y_1, 0, 0, 0, \ldots), (0, y_1, 0, 0, 0, \ldots), \ldots, (0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_1}, y_1, y_1, \ldots),$$
$$(y_2, 0, 0, 0, \ldots), (0, y_2, 0, 0, 0, \ldots), \ldots, (0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_2}, y_2, y_2, \ldots),$$
$$(y_3, 0, 0, 0, \ldots), (0, y_3, 0, 0, 0, \ldots), \ldots, (0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_3}, y_3, y_3, \ldots), \ldots,$$
$$(y_{d(n)}, 0, 0, 0, \ldots), (0, y_{d(n)}, 0, 0, 0, \ldots), \ldots, (0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_{d(n)}}, y_{d(n)}, y_{d(n)}, \ldots)\Big\}$$

é uma base para $P_n(Y)$. De fato, é fácil ver que A é linearmente independente. Vejamos que cada $y \in P_n(Y)$ é combinação linear de elementos de A. De fato, como $y \in P_n(Y)$ existe $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in Y$ tal que $P_n(x) = y$, isto é,

$$y = P_n(x) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, x_n, x_n \ldots).$$

Como $E_n \subset E_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que para cada $1 \leq i \leq n$ tem-se $x_i \in E_n$. Como o conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{d(n)}\}$ é uma base de E_n existem escalares

$$\{a_{1,j}\}_{j=1}^{d(n)}, \quad \{a_{2,j}\}_{j=1}^{d(n)}, \quad \{a_{3,j}\}_{j=1}^{d(n)}, \ldots, \{a_{n,j}\}_{j=1}^{d(n)}$$

em $\mathbb{K}$ tais que

$$x_1 = \sum_{j=1}^{d(n)} a_{1,j} y_j, \quad x_2 = \sum_{j=1}^{d(n)} a_{2,j} y_j, \ldots, x_n = \sum_{j=1}^{d(n)} a_{n,j} y_j, \quad x_n = \sum_{j=1}^{d(n)} a_{n,j} y_j, \ldots.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
y &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, x_n, x_n, \ldots) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{d(n)} a_{1,j} y_j, \sum_{j=1}^{d(n)} a_{2,j} y_j, \sum_{j=1}^{d(n)} a_{3,j} y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{d(n)} a_{n,j} y_j, \sum_{j=1}^{d(n)} a_{n,j} y_j, \ldots\right) \\
&= (a_{1,1} y_1, a_{2,1} y_1, a_{3,1} y_1, \ldots, a_{n,1} y_1, a_{n,1} y_1, \ldots) + \\
&+ \cdots + (a_{1,d(n)} y_{d(n)}, a_{2,d(n)} y_{d(n)}, a_{3,d(n)} y_{d(n)}, \ldots, a_{n,d(n)} y_{d(n)}, a_{n,d(n)} y_{d(n)}, \ldots) \\
&= a_{1,1}(y_1, 0, 0, 0, \ldots) + a_{2,1}(0, y_1, 0, 0, 0, \ldots) + \cdots + a_{n,1}(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_1}, y_1, y_1, \ldots) + \\
&+ a_{1,2}(y_2, 0, 0, 0, \ldots) + a_{2,2}(0, y_2, 0, 0, 0, \ldots) + \cdots + a_{n,2}(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_2}, y_2, y_2, \ldots) + \\
&+ \cdots + a_{1,d(n)}(y_{d(n)}, 0, 0, 0, \ldots) + a_{2,d(n)}(0, y_{d(n)}, 0, 0, 0, \ldots) + \cdots + \\
&+ a_{n,d(n)}(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_{d(n)}}, y_{d(n)}, y_{d(n)}, \ldots) + a_{1,d(n)}(y_{d(n)}, 0, 0, 0, \ldots) + \\
&+ a_{2,d(n)} + (0, y_{d(n)}, 0, 0, 0, \ldots) + \cdots + a_{n,d(n)}(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{y_{d(n)}}, y_{d(n)}, y_{d(n)}, \ldots).
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração de que o conjunto A é uma base para $P_n(Y)$. Portanto $P_n(Y)$ tem dimensão finita. Como $n \in \mathbb{N}$ é qualquer, tem-se que $P_n(Y)$ tem dimensão finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto o resultado está provado, isto é, Y tem a propriedade

da aproximação limitada.
(c) Vamos mostrar que a sequência de subespaços $(H_n)_n$ é uma decomposição em dimensão finita para Y, onde $H_n = \{(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, x, \ldots) : x \in E_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja, existe uma sequência de projeções $(P_n)_n$ em $L(Y, Y)$ tal que cada $x = (x_n)_n \in Y$ tem uma única representação da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \qquad P_n(x) \in H_n,$$

e H_n tem dimensão finita para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, defina para cada $x = (x_n)_n \in Y$

$$P_n : Y \longrightarrow Y, \qquad P_n((x_j)_j) = (0, \ldots, 0, x_n \overset{(n)}{-} x_{n-1}, x_n - x_{n-1}, \ldots).$$

onde denotamos $x_0 = 0$. A linearidade e o fato de P_n ser projeção são triviais. Vejamos que P_n é contínua para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $x = (x_n)_n \in Y$. Assim

$$\begin{aligned} \|P_n(x)\| = \|P_n((x_n)_n)\| &= \|(0, \ldots, 0, x_n \overset{(n)}{-} x_{n-1}, x_n - x_{n-1}, \ldots)\| \\ &= \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \|x_n\| + \|x_{n-1}\| \\ &\leq 2 \sup_n \|x_n\| = 2\|x\|. \end{aligned}$$

Isso mostra que P_n é contínua para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

para cada $x = (x_n)_n \in Y$. De fato, seja

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} P_n(x) \\ &= P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_N(x) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_N, x_N, \ldots). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|S_N - x\| &= \|(x_1, x_2, \ldots, x_N, x_N, \ldots) - (x_1, x_2, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots)\| \\ &= \|(0, \ldots, x_N - x_{N+1}, x_N - x_{N+2}, \ldots)\| \\ &= \sup_{n>N} \|x_N - x_n\| \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0\ . \end{aligned}$$

Logo,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

para cada $x = (x_n)_n \in Y$. Note também que

$$P_n(y) = \begin{cases} y, & \text{se} \quad y \in H_n \\ 0, & \text{se} \quad y \in H_m, \text{ com } m \neq n \end{cases}. \tag{2.13}$$

Em particular

$$P_n \circ P_m = \begin{cases} P_n, & \text{se} \quad n = m \\ 0, & \text{se} \quad n \neq m \end{cases}.$$

Resta verificar que a representação acima é única. De fato, seja $x = (x_n)_n \in Y$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \qquad \text{com } P_n x, y_n \in H_n.$$

Devemos mostrar que $P_n x = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\begin{aligned} P_k x = P_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n x \right) &= P_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_k y_n \\ &= y_k. \qquad \text{(por (2.13))} \end{aligned}$$

Isso mostra o desejado. Vejamos que H_n tem dimensão finita para cada $n \in \mathbb{N}$. Para isso é suficiente mostrar que E_n é isométrico a H_n para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, defina

$$T_n : E_n \longrightarrow H_n, \quad T_n(x) = (0, 0, \ldots, 0, \overset{(n)}{x}, x, x, \ldots).$$

É imediato que o operador T_n está bem definido, é linear e contínuo. A sobrejetividade de T_n também é clara. Para concluir a demonstração, resta verificar apenas que T_n é uma isometria para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\|T_n(x)\| = \|(0, 0, \ldots, 0, \overset{(n)}{x}, x, x, \ldots)\| = \sup_n \|x\| = \|x\|.$$

Isso mostra que H_n tem dimensão finita e que H_n é isométrico a E_n para cada $n \in \mathbb{N}$, obtendo o desejado.

(d) Vejamos que Y é separável. Para isso, lembre primeiro que $Q(Y) = X$ e $\ker(Q) = Z$. Assim, segue do Teorema 1.2.3 que X é isomorfo a $Y/\mathrm{Ker}(Q) = Y/Z$. Pelo Teorema 1.1.23, Y/Z é separável. Observe que se mostrarmos que Z é separável, então aplicando a contra-positiva da Proposição 1.2.5 obteremos que Y é separável. Portanto, é isso que iremos fazer, provaremos que Z é separável. Como E_n tem dimensão finita para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que E_n é separável. Daí, existe conjunto enumerável $G_n \subset E_n$ tal que $\overline{G_n} = E_n$. Defina, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$D_N = \{(x_n) \in Z : x_n \in G_n \text{ para } 1 \leq n \leq N \text{ e } x_n = 0 \text{ para todo } n > N\}.$$

Não é difícil ver que a aplicação

$$\tilde{T}_N : D_N \longrightarrow \prod_{n=1}^{N} G_n, \qquad \tilde{T}_N((x_n)_n) = (x_1, \ldots, x_N)$$

é uma bijeção linear entre D_N e $\prod_{n=1}^{N} G_n$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Logo, visto que G_n é enumerável para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos $\prod_{n=1}^{N} G_n$ enumerável para cada $N \in \mathbb{N}$ e portanto D_N é enumerável para cada $N \in \mathbb{N}$. Defina

$$D := \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N.$$

Como união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável tem-se D enumerável com $D \subset Z$. Mostraremos que D é denso em Z. De fato, sejam $x = (x_n)_n \in Z$ e $\epsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $\|x_n\| < \frac{\epsilon}{4}$. Como o conjunto G_n é denso em E_n existe $z_n \in G_n$ tal que $\|x_n - z_n\| < \frac{\epsilon}{4}$ para cada $1 \leq n \leq n_0$. Seja

$$z = (z_n)_n, \text{ onde } z_n = 0 \text{ para todo } n > n_0.$$

Note que $z \in D$. Vamos mostrar que $\|x - z\| < \epsilon$. Para isso faça

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\tilde{x}_n)_n, \text{ onde } \tilde{x}_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } n \leq n_0 \\ 0, & \text{se } n > n_0 \end{cases} \\ &\text{e} \\ \tilde{\tilde{x}} &= (\tilde{\tilde{x}}_n)_n, \text{ onde } \tilde{\tilde{x}}_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq n_0 \\ x_n, & \text{se } n > n_0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Veja que $x = \tilde{x} + \tilde{\tilde{x}}$. Segue que

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|\tilde{x} + \tilde{\tilde{x}} - z\| \\ &\leq \|\tilde{x} - z\| + \|\tilde{\tilde{x}}\| \\ &= \sup_n \|\tilde{x}_n - z_n\| + \sup_n \|\tilde{\tilde{x}}_n\| \\ &= \sup_{n \leq n_0} \|x_n - z_n\| + \sup_{n > n_0} \|x_n\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que G é denso em Z. Logo Z é separável como desejado. Vejamos que Z não é complementado em Y. Suponha por contradição que Z seja complementado em Y. Seja W um subespaço fechado de Y tal que $Y = Z \oplus W$. Logo, pelos Teoremas 1.2.4 e 1.2.3 temos os seguintes isomorfismos

$$X \approx Y/Z \approx (Z \oplus W)/Z \approx W. \tag{2.14}$$

Como W também é complementado em Y e Y tem a propriedade da aproximação limitada, segue da Proposição 2.2.16 que W tem a propriedade da aproximação limitada. De modo análogo como feito no Teorema 2.2.4 se mostra que a propriedade de aproximação limitada é preservada por isomorfismo. Segue de (2.14) que X tem a propriedade da aproximação limitada, e isso é uma contradição, pois por hipótese X falha a propriedade de aproximação limitada. Portanto Z não é complementado em Y. E por fim a proposição está demonstrada. ■

O seguinte teorema pode ser encontrado em [12]. Dado F um subconjunto de X, lembre que $F^{\perp} := \{x' \in X' : x'(x) = 0 \text{ para todo } x \in F\}$.

Teorema 2.2.25. *Sejam X um espaço de Banach separável e Z um subespaço de X. Se $T : Z \longrightarrow c_0$ é um operador linear e contínuo, então existe $\tilde{T} : Z \longrightarrow c_0$ tal que*

$$\tilde{T}|_Z = T \ \text{ e } \ \|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|.$$

Demonstração. Para mostrarmos que existe $\tilde{T} : Z \longrightarrow c_0$ satisfazendo as condições da tese desta proposição, precisaremos fazer algumas construções. Para isso, sejam $T' : (c_0)' \longrightarrow Z'$ o adjunto de T e $(e_n)_n$ a base de Schauder usual de c_0. Considere $(e'_n)_n$ a sequência de funcionais coordenados da base de Schauder $(e_n)_n$. Seja $(z'_n)_n$ uma sequência em Z' tal que $T'e'_n = z'_n$ cada $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que $\|T\| = \sup_n \|z'_n\|$. De fato, como

$$\|z'_n\| = \|T'e'_n\| \leq \|T'\|\|e'\| = \|T\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos $\sup_n \|z'_n\| \leq \|T\|$. Vejamos a desigualdade contrária. Lembre-se que se $y = (y_n)_n \in c_0$ então

$$\|y\| = \sup_n |y_n| = \sup_n |e'_n(y)|.$$

Diante disso, seja $z \in Z$. Segue que

$$\begin{aligned}
\|Tz\| &= \sup_n |e'_n(Tz)| \\
&= \sup_n |T'e'_n(z)| \\
&\leq \sup_n \|T'e'_n\|\|z\| \\
&= \sup_n \|z'_n\|\|z\|.
\end{aligned}$$

Logo $\|T\| \leq \sup_n \|z'_n\|$ e portanto

$$\|T\| = \sup_n \|z'_n\|.$$

Como Z é um subespaço de X e $z'_n : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ são funcionais lineares e contínuos para cada $n \in \mathbb{N}$., segue pelo Teorema da extensão de Hanh-Banach que existem funcionais lineares e contínuos $x'_n : X' \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $x'_n|_Z = z'_n$ e $\|x'_n\| = \|z'_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\|T\| \geq \|z'_n\|$ isso implica $\|T\| \geq \|x'_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Com isto, defina

$$G := \{x' \in X' : \|x'\| \leq \|T\|\} \text{ e } K := G \cap Z^{\perp}.$$

Observe que $G \neq \emptyset$ pois a sequência $(x'_n)_n \subset G$. Sendo X separável, tem-se G metrizável na topologia w^* (veja [4, Proposição 6.5.1]), isto é, a topologia fraca estrela em G é gerada por uma métrica d. Além disso, segue da mesma proposição que d é invariante por translação, ou seja,

$$d(x', z') = d(x' + h', z' + h')$$

para quaisquer $x', z', h' \in G$. Ademais, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, G é compacto na topologia fraca-estrela (veja [4, Teorema 6.3.9]). Para mostrarmos que existe $\tilde{T} : Z \longrightarrow c_0$ satisfazendo as condições da tese desta proposição, é necessário mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, K) = 0$ onde $d(x'_n, K) = \inf\limits_{x'\in K} d(x_n, x')$. Para isso mostraremos que se

$$x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0 \text{ para algum } x'_0 \in X', \text{ então } x'_0 \in K. \tag{2.15}$$

De fato, suponha que $x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0$ para algum $x'_0 \in X'$. Como $(x'_n)_n \subset G$ tem-se $x'_0 \in G$ visto que G é fechado na topologia fraca estrela, pois G é compacto na topologia fraca estrela que é Hausdorff. Vejamos que $x'_0 \in Z^{\perp}$. Para cada $x \in X$ temos que $Tx \in c_0$ logo

$$z'_n(x) = T'e'_n(x) = e'_n(Tx) \longrightarrow 0.$$

Como $x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0$, segue que para cada $z \in Z$ temos

$$x'_0(z) = \lim_{n\to\infty} x'_n(z) = \lim_{n\to\infty} z'_n(z) = 0.$$

Portanto $x'_0 \in Z^{\perp}$ e consequentemente $x'_0 \in G \cap Z^{\perp} = K$. Não é difícil verificar que K é fechado em X'. Podemos assim considerar em K a topologia fraca estrela induzida de G. Com isto temos que a topologia fraca estrela em K é gerada pela métrica d e se $x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0$ para algum $x'_0 \in X'$ então $x'_0 \in K$. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, K) = 0$. De fato, suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ exista $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$ mas $d(x_n, K) \geq \epsilon$. Em particular, para $n_0 = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_1 \geq 1$ mas $d(x_{n_1}, K) \geq \epsilon$. Analogamente, para $n_0 = n_1$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 \geq n_1$ mas $d(x_{n_2}, K) \geq \epsilon$. Prosseguindo desta forma, obteremos sequência $(n_k)_k$ de números naturais tais que $d(x'_{n_k}, K) \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como G é compacto na topologia fraca estrela, existe uma subsequência $(x_{n_p})_p$ da subsequência $(x_{n_k})_k$ tal que $x'_{n_p} \xrightarrow{w^*} x'$ para algum $x' \in X'$. Portanto segue de (2.15) que $x' \in K$. Logo $\lim\limits_{p\to\infty} d(x_{n_p}, K) = 0$ e isso é uma contradição, visto que $(x_{n_p})_p$ é uma subsequência da subsequência $(x_{n_k})_k$ e $d(x_{n_k}, K) \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, a afirmação esta provada. Ademais, como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, K) = 0$ existem $y'_n \in K$ tais que $d(x'_n, y'_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como d é invariante por translação, temos

$$d(x'_n - y'_n, 0) = d(x'_n - y'_n + y'_n, y'_n) = d(x'_n, y'_n).$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n - y'_n, 0) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = 0.$$

Como d gera a topologia fraca estrela em K, isso significa que a sequência $(x'_n - y'_n)_n$ converge para 0 na topologia fraca-estrela. Defina

$$\tilde{T} : X \longrightarrow c_0, \quad \tilde{T}x = (x'_n(x) - y'_n(x))_n.$$

Veja que $\tilde{T}$ está bem definido, visto que $x'_n(x) - y'_n(x) \longrightarrow 0$ para cada $x \in X$, pois a sequência $(x'_n - y'_n)_n$ converge para 0 na topologia fraca estrela. A linearidade e a continuidade de $\tilde{T}$ decorrem de x'_n e y'_n. Vejamos que

$$\tilde{T}_{|Z} = T \text{ e } \|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|.$$

De fato, para cada $z \in Z$ tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}z &= (x'_n(z) - y'_n(z))_n \\ &= (x'_n(z))_n \qquad\qquad \big(\text{ pois } y'_n \in K = G \cap Z^{\perp}\big) \\ &= (z'_n(z))_n \\ &= (e'_n(Tz))_n \\ &= Tz. \end{aligned}$$

Lembre-se que $\|T\| = \sup\limits_n \|z'_n\| = \sup\limits_n \|x'_n\|$. Além disso, como $y'_n \in K \subset G$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\|T\| \geq \sup\limits_n \|y'_n\|$. Logo, para cada $x \in X$ tem-se

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}x\| &= \sup_n |x'_n(x) - y'_n(x)| \\ &\leq \sup_n |x'_n(x)| + |y'_n(x)| \\ &\leq \sup_n \|x'_n\|\|x\| + \sup_n \|y'_n\|\|x\| \\ &\leq \|T\|\|x\| + \|T\|\|x\| = 2\|T\|\|x\|. \end{aligned}$$

Logo $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$ e portanto o resultado esta provado. ■

Vejamos uma consequência do resultado acima.

Corolário 2.2.26. *Seja X um espaço de Banach separável, e seja Z um subespaço de X isomorfo a c_0. Então Z é complementado em X.*

Demonstração. Vamos mostrar que existe uma projeção P linear e contínua de X sobre Z. Sejam $T : Z \longrightarrow c_0$ um isomorfismo e $\tilde{T} : X \longrightarrow c_0$ a extensão de T a X(veja Teorema 2.2.25). Defina

$$P = T^{-1} \circ \tilde{T} : X \longrightarrow Z.$$

Vejamos que P é uma projeção de X sobre Z. Para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} P \circ Px &= (T^{-1} \circ \tilde{T}) \circ (T^{-1} \circ \tilde{T})(x) \\ &= T^{-1}(\tilde{T}(T^{-1}(\tilde{T}(x)))) \\ &= T^{-1} \circ \tilde{T}x = Px \end{aligned}$$

Logo P é uma projeção. Ademais, para cada $z \in Z$,

$$Pz = T^{-1}(\tilde{T}z) = T^{-1}(Tz) = z.$$

Portanto, P é uma projeção sobre Z. Logo Z é complementado em X. ∎

Corolário 2.2.27. *Seja X um espaço de Banach separável que tem um subespaço Z tal que Z e X/Z são isomorfos a c_0. Então X é isomorfo a um subespaço de c_0.*

Demonstração. Vamos mostrar que X é isomorfo a um subespaço de $c_0 \times c_0$ e depois mostraremos que $c_0 \times c_0 \simeq c_0$. Considere em $c_0 \times c_0$ a norma $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Sejam $T : Z \longrightarrow c_0$, $R : X/Z \longrightarrow c_0$ isomorfismos sobre subespaços de c_0 e $\tilde{T} : X \longrightarrow c_0$ uma extensão de T a X (Teorema 2.2.25). Considere também a aplicação canônica

$$\pi : X \longrightarrow X/Z \qquad \pi x = [x].$$

Diante disso, defina

$$V : X \longrightarrow c_0 \times c_0, \qquad Vx = (\tilde{T}x, R \circ \pi x).$$

Vejamos que V é um isomorfismo linear de X sobre um subespaço de $c_0 \times c_0$. De fato, a linearidade e continuidade de V decorrem de $\tilde{T}, R \circ \pi$. Vejamos apenas que V é injetor. Seja $x \in X$ tal que $Vx = 0$. Segue que $\tilde{T}x = 0$ e $R \circ \pi x = 0$. Pelo fato de $R([x]) = R \circ \pi x = 0$ e R ser um isomorfismo, tem-se que $[x] = [0]$. Logo, $x \in Z$. Portanto $Tx = \tilde{T}x = 0$, e como T é injetor, segue que $x = 0$. Assim, V é isomorfo a um subespaço de $c_0 \times c_0$. Iremos mostrar que $c_0 \times c_0 \simeq c_0$. Para isso, defina

$$S : c_0 \times c_0 \longrightarrow c_0, \qquad S((x_j)_j, (y_j)_j) = (z_j)_j,$$

onde $z_{2j-1} = x_j$ e $z_{2j} = y_j$. Vejamos que S é um isomorfismo. Primeiramente, observe que S está bem definida, no sentido de $(z_j)_j \in c_0$. De fato, se $z = (z_j)_j$ e fazendo

$$r = (r_j)_j, \quad r_{2j-1} = x_j \text{ e } r_{2j} = 0$$

$$h = (h_j)_j, \quad h_{2j-1} = 0 \text{ e } h_{2j} = y_j,$$

tem-se $r_j \longrightarrow 0$ e $h_j \longrightarrow 0$, e como $z = r + h$ obtém-se $z_j \longrightarrow 0$. Não é difícil ver que S é linear. Vejamos que S é contínuo. De fato, dado $((x_j)_j, (y_j)_j) \in c_0 \times c_0$,

$$\begin{aligned} \|S((x_j)_j, (y_j)_j)\| &= \|(z_j)_j\| \\ &= \sup\{|z_j| :\in \mathbb{N}\} \\ &= \max\{\sup_j |x_j|, \sup_j |y_j|\} \\ &= \max\{\|(x_j)_j\|, \|(y_j)_j\|\} \\ &= \|((x_j)_j, (y_j)_j)\|. \end{aligned}$$

Portanto S é contínuo. Além disso, S é injetor pois S é uma isometria. Provaremos agora que S é sobrejetor. Seja $x = (x_j)_j \in c_0$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} (r_j)_j, &\quad r_j = x_{2j-1} \\ (h_j)_j, &\quad h_j = x_{2j} \quad . \end{aligned}$$

Assim $((r_j)_j, (h_j)_j) \in c_0 \times c_0$ e $S((r_j)_j, (h_j)_j) = (x_j)_j$. Logo, S é sobrejetor e portanto S é um isomorfismo. Segue que o operador linear $S \circ V : X \longrightarrow c_0$ é um isomorfismo de X sobre um subespaço de c_0 como queríamos demonstrar. ■

O seguinte lema pode ser encontrado em [21, Lemma 2.2].

Proposição 2.2.28. *Seja X um espaço de Banach que tem a decomposição em dimensão finita determinada pelas projeções $(Q_n)_n$ (veja observação que segue a Proposição 2.2.22). Se cada subespaço $(Q_n - Q_{n-1})(X)$ tem base $\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{d(n)}^n\}$ com constante de base b_n tal que $\sup_n b_n = b < \infty$ ($d(n) = dim(Q_n - Q_{n-1})(X)$ e Q_0 é o operador nulo), então a sequência $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{d(1)}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{d(2)}^2, x_1^3, \ldots)$ é uma base de Schauder para X.*

Demonstração. Fazendo uso da Proposição 2.1.6 mostraremos que:
(i) $X = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$,
(ii) existe uma constante $C > 0$ tal que $\left\|\sum_{j=1}^{p} a_j y_j\right\| \leq C \left\|\sum_{j=1}^{q} a_j y_j\right\|$ para qualquer sequência de escalares $(a_j)_j$ em $\mathbb{K}$ e todos $p < q$, onde $y_1 = x_1^1, y_2 = x_2^1, \ldots, y_{d(1)} = x_{d(1)}^1, y_{d(1)+1} = x_1^2, \ldots$.

Vamos começar a prova por (i). Seja $x \in X$. Lembre X tem decomposição em dimensão finita, isto é, existe uma sequência $(F_n)_n$ de subespaços de X de dimensão finita e uma sequência de projeções $(P_n)_n$ definidas em X de modo que x tem uma única representação

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x, \text{ com } P_n x \in F_n.$$

Além disso, tem-se

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{d(n)}^n\}$ é uma base para $(Q_n - Q_{n-1})(X)$ e $P_n x \in P_n(X) = (Q_n - Q_{n-1})(X)$, existem escalares $(a_i^n)_{i=1}^{d(n)}$ tais que

$$P_n x = \sum_{i=1}^{d(n)} a_i^n x_i^n \in \operatorname{span}\{x_i^n : n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq d(n)\}.$$

Logo para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{n=1}^{N} P_n x = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{d(n)} a_i^n x_i^n \in \operatorname{span}\{x_i^n : n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq d(n)\}.$$

Tendo visto que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P_n x,$$

concluímos que $x \in \overline{\operatorname{span}}\{x_i^n : n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq d(n)\}$. Logo (i) está provado.
Vamos a demonstração de (ii). Sejam $p, q \in \mathbb{N}, p < q$ e $(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{d(1)}^1, a_1^2, \ldots, a_{d(2}^2, \ldots)$ uma sequência em $\mathbb{K}$. Façamos

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{q} a_i^N x_i^N,$$

onde $1 \leq q \leq d(N)$ para algum $N \in \mathbb{N}$, e

$$\mathcal{T} \;=\; \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{p} a_i^k x_i^k,$$

onde $1 \leq p \leq d(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $k < N$. Vejamos que existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{T}\| \leq C\|\mathcal{S}\|$. Mas antes disso, observe que

$$\sum_{i=1}^{d(n)} a_i^n x_i^n \in (Q_n - Q_{n-1})(X) \text{ para cada } n \leq N, \tag{2.16}$$

e da observação que segue a Proposição 2.2.22 temos

$$Q_n \circ Q_m = Q_{\min\{m,n\}}.$$

Com isso, se $1 \leq j \leq k$ então

$$\begin{aligned} Q_k \circ (Q_j - Q_{j-1}) &= Q_k \circ Q_j - Q_k \circ Q_{j-1} \\ &= Q_j - Q_{j-1}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

e se $k+1 \leq j \leq N$ então

$$\begin{aligned} Q_k \circ (Q_j - Q_{j-1}) &= Q_k \circ Q_j - Q_k \circ Q_{j-1} \\ &= Q_k - Q_k = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Logo por (2.16), (2.17) e (2.18) temos

$$\begin{aligned} Q_k(\mathcal{S}) &= Q_k \left(\sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k + \cdots + \sum_{i=1}^{q} a_i^N x_i^N \right) \\ &= Q_k \left(\sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 \right) + Q_k \left(\sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 \right) + \cdots + Q_k \left(\sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k \right) + \cdots + Q_k \left(\sum_{i=1}^{q} a_i^N x_i^N \right) \\ &= \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k, \end{aligned}$$

assim

$$Q_k(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + ... + \sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k. \tag{2.19}$$

De modo análogo,

$$Q_{k-1}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + ... + \sum_{i=1}^{d(k-1)} a_i^{k-1} x_i^{k-1}.$$

Logo,

$$(Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k. \tag{2.20}$$

Segue que

$$\sum_{i=p+1}^{d(k)} a_i^k x_i^k = (Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) - \sum_{i=1}^{p} a_i^k x_i^k. \tag{2.21}$$

Para $1 \leq \tilde{p} \leq d(k)$, defina a projeção canônica

$$R_{\tilde{p}}^k : (Q_k - Q_{k-1})(X) \longrightarrow (Q_k - Q_{k-1})(X), \qquad R_{\tilde{p}}^k \left(\sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k \right) = \sum_{i=1}^{\tilde{p}} a_i^k x_i^k, \tag{2.22}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Lembre que por hipótese $\|R_{\tilde{p}}^k\| \leq \sup_n b_n = b < \infty$ para cada $1 \leq \tilde{P} \leq d(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Segue de (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) que

$$\|\mathcal{T}\| = \left\| \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{p} a_i^k x_i^k \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{p} a_i^k x_i^k + \sum_{i=p+1}^{d(k)} a_i^k x_i^k - \sum_{i=p+1}^{d(k)} a_i^k x_i^k \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{d(1)} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{d(2)} a_i^2 x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k - \sum_{i=p+1}^{d(k)} a_i^k x_i^k \right\| \\
&= \left\| Q_k(\mathcal{S}) - \left((Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) - \sum_{i=1}^{p} a_i^k x_i^k \right) \right\| \\
&= \left\| Q_k(\mathcal{S}) - (Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) + R_p^k \left(\sum_{i=1}^{d(k)} a_i^k x_i^k \right) \right\| \\
&= \left\| Q_k(\mathcal{S}) - (Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) + R_p^k \circ (Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) \right\| \\
&= \left\| Q_{k-1}(\mathcal{S}) + R_p^k \circ (Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) \right\| \\
&\leq \left\| Q_{k-1}(\mathcal{S}) \right\| + \left\| R_p^k \circ (Q_k - Q_{k-1})(\mathcal{S}) \right\| \\
&\leq \|Q_{k-1}\| \|\mathcal{S}\| + \|R_p^k\| \|Q_k - Q_{k-1}\| \|\mathcal{S}\| \\
&\leq K(1 + 2b) \|\mathcal{S}\|,
\end{aligned}
$$

onde $K = \sup_n \|Q_n\|$. Faça $C = K(1+2b) > 0$. Logo $\|\mathcal{T}\| \leq C\|\mathcal{S}\|$, como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.2.29. Se X é um espaço normado separável, então existe em X um subconjunto $\mathcal{D} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ enumerável tal que $\overline{\mathcal{D}} = X$. Podemos então selecionar $E_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, com $E_n \subset E_{n+1}$. Logo

$$X = \overline{\mathcal{D}} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} \subset X.$$

Assim

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}.$$

Isso ocorre seja qual for o espaço normado separável. Em particular, isto ocorre para subespaços de c_0. Desse modo obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.30. *Seja X um subespaço do espaço real c_0. Considere uma sequência $(E_n)_n$ de subespaços de dimensão finita de X com $E_n \subset E_{n+1}$ tal que*

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}.$$

Seja Y como em (2.10)*. Então Y tem base de Schauder.*

Demonstração. Vamos por Y nas hipóteses da Proposição 2.2.28. Pela Proposição 2.2.24 (c), Y tem decomposição em dimensão finita $(H_n)_n$, onde

$$H_n = \{(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, \ldots) : x \in E_n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Na Proposição 2.2.24 (c) foi mostrado que

$$P_n : Y \longrightarrow Y, \quad P_n((x_k)_k) = (0, \ldots, x_n \overset{(n)}{-} x_{n-1}, x_n - x_{n-1}, \ldots)$$

são projeções lineares e contínuas. Vejamos que, além disso, tem-se $P_n(Y) = H_n$. De fato, a inclusão $P_n(Y) \subset H_n$ é trivial. Vejamos a inclusão contrária. Seja $(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, \ldots) \in H_n$. Logo $P_n(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, \ldots) = (0, 0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, \ldots)$ e portanto $(0, 0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, \ldots) \in P_n(Y)$. Segue que as projeções $(Q_n)_n$ que determinam a decomposição em Y são tais que

$$(Q_n - Q_{n-1})(Y) = P_n(Y) = H_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Novamente pela Proposição 2.2.24 (c) tem-se que H_n e E_n são isométricos. Como veremos no Corolário 2.5.4, todo subespaço de c_0 de dimensão k é isomorfo isometricamente a $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right)$. Logo, H_n é isomorfo isometricamente a $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right)$ pois H_n e E_n são isométricos. Visto que $(Q_n - Q_{n-1})(Y) = H_n$, segue que $(Q_n - Q_{n-1})(Y)$ é isomorfo isometricamente a $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right)$. Sabemos que a base canônica de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ é monótona para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo pela Proposição 2.1.7 todo espaço isométrico a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ tem base monótona. Assim, podemos afirmar que $(Q_n - Q_{n-1})(Y)$ tem base monótona. Logo a constante de base é $b_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\sup_n b_n = 1$. Logo, pela Proposição 2.2.28, Y tem base de Schauder. ■

Lema 2.2.31. *Seja X um subespaço do espaço real c_0. Considere uma sequência $(E_n)_n$ de subespaços de dimensão finita de X com $E_n \subset E_{n+1}$ tal que*

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}.$$

Seja Z como em (2.9)*. Então Z tem base de Schauder.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.1.6, é suficiente mostrar que existe um sequência $(w_p)_p$ em Z satisfazendo:
(i) $Z = \overline{\text{span}}\{w_p : p \in \mathbb{N}\}$,
(ii) existe uma contante $C > 0$ tal que $\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j w_j \right\| \leq C \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j w_j \right\|$ para qualquer sequência de escalares $(a_i)_i$ em $\mathbb{K}$ e todo $n < m$ em $\mathbb{N}$.

Primeiramente exibiremos a sequência que será a base de Schauder. Seja $\{y_{n,j} : 1 \leq$

$j \leq d(n)\}$ a base de E_n, onde $d(n)$ é a dimensão de E_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 2.5.4 que mostraremos mais adiante, tem-se E_n isométrico a $\left(\mathbb{R}^{d(n)}, \|\cdot\|_\infty\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo pela Proposição 2.1.7, podemos supor que $\{y_{n,j} : 1 \leq j \leq d(n)\}$ é uma base monótona para E_n. Lembre que na demostração da Proposição 2.2.24 (d) mostramos que

$$Z = \overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}} D_N} \tag{2.23}$$

onde $D_N := \{(x_n)_n : x_n \in G_n \subset E_n \text{ para } 1 \leq n \leq N \text{ e } x_n = 0 \text{ para } n > N\}$. Por fim, considere a sequência

$$\begin{aligned}
w_1 &= (y_{1,1}, 0, 0, \ldots), w_2 = (y_{1,2}, 0, 0, \ldots), \ldots, w_{d(1)} = (y_{1,d(1)}, 0, 0, \ldots),\\
w_{d(1)+1} &= (0, y_{2,1}, 0, \ldots), w_{d(1)+2} = (0, y_{2,2}, 0, \ldots), \ldots, w_{d(2)} = (0, y_{2,d(2)}, 0, \ldots),\\
w_{d(2)+1} &= (0, 0, y_{3,1}, 0, \ldots), w_{d(2)+2} = (0, 0, y_{3,2}, 0, \ldots), \ldots, w_{d(3)} = (0, 0, y_{3,d(3)}, 0, \ldots), \ldots,\\
w_{d(n)+1} &= (0, 0, \ldots, y_{n+1,1}, 0, \ldots), \ldots, w_{d(n)} = (0, 0, \ldots, y_{n+1,d(n)}, 0, \ldots), \ldots.
\end{aligned}$$

Chame de $\mathcal{D}$ o conjunto formado pela sequência acima. É imediato que cada termo da sequência acima pertence a Z. Afirmamos que a sequência acima é uma base de Schauder para Z. De fato, vamos à demonstração de (i). Sejam $y \in Z$ e $\epsilon > 0$. Por (2.23) existe $z \in \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N$ tal que $\|y - z\| < \epsilon$. Segue que para algum $N_0 \in \mathbb{N}$ tem-se $z \in D_{N_0}$. Vamos mostrar que $z \in \operatorname{span}(\mathcal{D})$. De fato, pondo $z = (z_n)_n$ temos pelo fato de $z \in D_{N_0}$ e $z_n \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ que existem escalares $(a_{n,j})_{j=1}^{d(n)}$ com $1 \leq n \leq N_0$ tais que

$$\begin{aligned}
z &= (z_1, z_2, \ldots, z_{N_0}, 0, \ldots)\\
&= (z_1, 0, 0, \ldots) + (0, z_2, 0 \ldots) + \cdots + (0, 0, \ldots, z_{N_0}, 0, \ldots)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j}, 0, 0, \ldots\right) + \cdots + \left((0, 0, \ldots, \sum_{j=1}^{d(N_0)} a_{N_0,j} y_{N_0,j}, 0, \ldots\right)\\
&= (a_{1,1} y_{1,1}, 0, \ldots) + \cdots + (a_{1,d(1)} y_{1,d(1)}, 0, \ldots) + (0, a_{2,1} y_{1,1}, 0, \ldots) +\\
&+ \cdots + (0, a_{2,d(2)} y_{2,d(2)}, 0, \ldots) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_{N_0,1)} y_{N_0,1}, 0, \ldots) +\\
&+ \cdots + (0, 0, \ldots, a_{N_0,d(N_0)} y_{N_0,d(N_0)}, 0, \ldots)\\
&= a_{1,1}(y_{1,1}, 0, \ldots) + \cdots + a_{1,d(1)}(y_{1,d(1)}, 0, \ldots) + a_{2,1}(0, y_{1,1}, 0, \ldots) +\\
&+ \cdots + a_{2,d(2)}(0, y_{2,d(2)}, 0, \ldots) + \cdots + a_{N_0,1)}(0, 0, \ldots, y_{N_0,1}, 0, \ldots) +\\
&+ \cdots + a_{N_0,d(N_0)}(0, 0, \ldots, y_{N_0,d(N_0)}, 0, \ldots)\\
&= \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,i}(y_{1,i}, 0, \ldots) + \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,i}(0, y_{2,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{d(N_0)} a_{N_0,j}(y_{N_0,j}, 0, \ldots) \in \operatorname{span}(\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

Assim concluímos que $y \in \overline{\operatorname{span}}(\mathcal{D})$. Dado $\epsilon > 0$ mostramos que existe $z \in \operatorname{span}(\mathcal{D})$ tal que $\|y - z\| < \epsilon$.

Agora vamos à demonstração de (ii). Para isso sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$ e $(a_{n,j})_{j=1}^{d(n)}$ sequências de escalares em $\mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$. Seja

$$\mathcal{S} \ = \ \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{p} a_{N,j}(0, 0, \ldots, y_{N,j}, 0, \ldots), \tag{2.24}$$

onde $1 \leq p \leq d(N)$ para algum $N \in \mathbb{N}$, e

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \ &= \ \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j}(0, \ldots, y_{N,j}, 0, \ldots) + \cdots \\ &+ \ \sum_{j=1}^{q} a_{k,j}(0, \ldots, y_{k,j}, 0, \ldots), \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde $1 \leq q \leq d(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $N < k$. Vejamos que existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{S}\| \leq C\|\mathcal{T}\|$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\| \ &= \ \left\| \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j}(0, y_{2,j}, 0, ...) + ... + \sum_{j=1}^{p} a_{N,j}(0, 0, \ldots, y_{N,j}, 0, \ldots) \right\| \\ &= \ \left\| \left(\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j}, 0, \ldots \right) + \left(0, \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j} y_{2,j}, 0, \ldots \right) + \cdots + \left(0, 0, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{N,j} y_{N,j}, 0, \ldots \right) \right\| \\ &= \ \left\| \left(\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j}, \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j} y_{2,j}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{N,j} y_{N,j}, 0, \ldots \right) \right\|. \end{aligned}$$

Para cada $1 \leq \tilde{p} \leq d(N)$. Seja

$$R_{N,\tilde{p}} : E_N \longrightarrow E_N, \quad R_{N,\tilde{p}} \left(\sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j} y_{N,j} \right) = \sum_{j=1}^{\tilde{p}} a_{N,j} y_{N,j}$$

a projeção canônica. Lembre que a base de E_N é monótona e portanto $b_N = \sup\limits_{1 \leq \tilde{p} \leq d(N)} \|R_{N,\tilde{p}}\| = 1$. Segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\| \ &= \ \left\| \left(\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j}, \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j} y_{2,j}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{N,j} y_{N,j}, 0, \ldots \right) \right\| \\ &= \ \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j} \right\|, \left\| \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j} y_{2,j} \right\|, \ldots, \left\| \sum_{j=1}^{p} a_{N,j} y_{N,j} \right\| \right\} \\ &= \ \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j} \right\|, \left\| \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j} y_{2,j} \right\|, \ldots, \left\| R_{N,p} \left(\sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j} y_{N,j} \right) \right\| \right\} \\ &\leq \ \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j} y_{1,j} \right\|, \left\| \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j} y_{2,j} \right\|, \ldots, \|R_{N,p}\| \left\| \sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j} y_{N,j} \right\| \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}y_{1,j}\right\|, \left\|\sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j}y_{2,j}\right\|, \ldots, \left\|\sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j}y_{N,j}\right\|\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}y_{1,j}\right\|, \ldots, \left\|\sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j}y_{N,j}\right\|, \left\|\sum_{j=1}^{d(N+1)} a_{N+1,j}y_{N+1,j}\right\|, \ldots, \left\|\sum_{j=1}^{q} a_{k,j}y_{k,j}\right\|\right\} \\
&= \left\|\left(\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}y_{1,j}, \ldots, \sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j}y_{N,j}, \sum_{j=1}^{d(N+1)} a_{N+1,j}y_{N+1,j}, \ldots, \sum_{j=1}^{q} a_{k,j}y_{k,j}\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{d(N)} a_{N,j}(y_{N,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{q} a_{k,j}(y_{k,j}, 0, \ldots)\right\| = \|\mathcal{T}\|.
\end{aligned}
$$

Logo, $\|\mathcal{S}\| \leq \|\mathcal{T}\|$. Neste caso $C = 1$. Assim (ii) está provado e consequentemente o lema. ■

Lema 2.2.32. *Nas condições do Lema 2.2.31, Z é isomorfo a um subespaço de c_0.*

Demonstração. Seja

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (y_{1,1}, 0, 0, \ldots), w_2 = (y_{1,2}, 0, 0, \ldots), \ldots, w_{d(1)} = (y_{1,d(1)}, 0, 0, \ldots), \\
w_{d(1)+1} &= (0, y_{2,1}, 0, \ldots), w_{d(1)+2} = (0, y_{2,2}, 0, \ldots), \ldots, w_{d(2)} = (0, y_{2,d(2)}, 0, \ldots), \\
w_{d(2)+1} &= (0, 0, y_{3,1}, 0, \ldots), w_{d(2)+2} = (0, 0, y_{3,2}, 0, \ldots), \ldots, w_{d(3)} = (0, 0, y_{3,d(3)}, 0, \ldots), \ldots, \\
w_{d(n)+1} &= (0, 0, \ldots, y_{n+1,1}, 0, \ldots), \ldots, w_{d(n)} = (0, 0, \ldots, y_{n+1,d(n)}, 0, \ldots), \ldots,
\end{aligned}
$$

os vetores da base de Schauder de Z. Iremos supor que essa base de Schauder é normalizada, isto é, $\|w_p\| = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Assim, se $z = (z_k)_k \in Z$, então

$$
z = \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{d(k)} a_{k,j}(0, 0, \ldots, y_{k,j}, 0, \ldots) + \cdots ,
$$

onde os escalares $\{a_{k,1}, \ldots, a_{k,d(k)}\}$ são unicamente determinados por

$$
z_k = \sum_{j=1}^{d(k)} a_{k,j}y_{k,j}
$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Veja que para cada $1 \leq j \leq d(k)$ tem-se

$$
\begin{aligned}
|a_{k,j}| &= \|a_{k,j}y_{k,j}\| \\
&= \left\|R_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{d(k)} a_{k,i}y_{k,i}\right) - R_{k,j-1}\left(\sum_{i=1}^{d(k)} a_{k,i}y_{k,i}\right)\right\| \\
&= \|R_{k,j}(z_k) - R_{k,j-1}(z_k)\| \\
&\leq 2\|z_k\|, \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

onde para cada $1 \leq j \leq d(k)$, temos

$$R_{k,j} : E_k \longrightarrow E_k, \quad R_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{d(k)} a_{k,i} y_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{j} a_{k,i} y_{k,i}.$$

Para cada $z \in Z$ da forma

$$z = \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{d(k)} a_{k,j}(0, 0, \ldots, y_{k,j}, 0, \ldots) + \cdots,$$

defina

$$T : Z \longrightarrow c_0, \quad T(z) = (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,d(1)}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,d(2)}, \ldots).$$

Pela Proposição 2.1.3 o operador T está bem definido e T é linear. Vejamos que T é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} \|T((z_k)_k)\| &= \sup\{|a_{k,j}| : k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq d(k)\} \\ &\leq 2\sup_k \|z_k\| \quad (\text{ por } 2.26) \\ &= 2\|(z_k)_k\|. \end{aligned}$$

Vejamos também que T é injetor. De fato, se $z = (z_k)_k \in Z$ com

$$z = \sum_{j=1}^{d(1)} a_{1,j}(y_{1,j}, 0, \ldots) + \sum_{j=1}^{d(2)} a_{2,j}(0, y_{2,j}, 0, \ldots) + \cdots + \sum_{j=1}^{d(k)} a_{k,j}(0, 0, \ldots, y_{k,j}, 0, \ldots) + \cdots$$

e $T(z) = 0$, então

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,d(1)}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,d(2)}, \ldots) = T(z) = 0.$$

Logo para cada $1 \leq j \leq d(k)$ e $k \in \mathbb{K}$ temos que $a_{k,j} = 0$. Portanto $z = 0$. Segue que T é isomorfo a um subespaço de c_0. ■

O próximo resultado, envolve conceitos de redes, para um estudo mais detalhado sobre isso, recomendamos [4, p. 355].

Proposição 2.2.33. *Sejam X e Y espaços de Banach. Sejam T um operador de Y em X e $(F_\alpha)_\alpha$ uma rede de inclusões de subespaços de X (i.e se $\alpha \geq \alpha_0$ então $F_{\alpha_0} \subset F_\alpha$) tais que*

$$X = \overline{\bigcup_\alpha F_\alpha}.$$

Suponha que para cada α, exista um operador $L_\alpha : F_\alpha \longrightarrow Y$ tal que $T \circ L_\alpha = I|_{F_\alpha}$ e $\limsup_\alpha \|L_\alpha\| \leq \lambda < \infty$. Então T' é um isomorfismo de X' sobre um subespaço de Y', com inversa S satisfazendo $\|S\| \leq \lambda$, e existe uma projeção P de Y' sobre $T'X'$.

Demonstração. Veja [20, Proposition 1]. ■

Teorema 2.2.34. *Seja X um espaço de Banach. Então X tem a propriedade da aproximação limitada se, e somente se, é isomorfo a um subespaço complementado de um espaço com base de Schauder.*

Demonstração. Veja [27, Theorem 1.e.13]. ■

O próximo teorema, que é um dos principais desta seção, pode ser encontrado em [19].

Teorema 2.2.35. *Existe um espaço de Banach Y_1 isomorfo a um subespaço do espaço real c_0 que tem base de Schauder tal que Y_1' falha a propriedade da aproximação.*

Demonstração. Seja X um subespaço fechado de c_0 que falha a propriedade da aproximação (veja Teorema 2.2.3). Como X é separável, existe pela Observação 2.2.29 uma sequência $(E_n)_n$ de subespaços de dimensão finita de X tais que $X = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}$ com $E_n \subset E_{n+1}$. Sejam

$$Z = \Big\{(x_n) : x_n \in E_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ em } X\Big\},$$
$$Y = \Big\{(x_n) : x_n \in E_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X\Big\},$$
$$Q : Y \longrightarrow X, \quad Q((x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ a aplicação quociente.}$$

Para demonstrar o teorema, é necessário mostrar que Y é isomorfo a um subespaço de c_0. Segue da Proposição 2.2.24 (a) que $Q(Y) = X$. Assim pelo Teorema do Isomorfismo temos $Y/Z \backsimeq X$. Além disso, pelo Lema 2.2.32 temos Z isomorfo a um subespaço de c_0. Assim segue do Corolário 2.2.27 que Y é isomorfo a um subespaço de c_0. Como X não tem a propriedade da aproximação, segue do Teorema 2.2.10 que X' não tem a propriedade de aproximação. Na Proposição 2.2.33 faça

$$T = Q, \quad \alpha = n, \quad F_n = E_n \quad \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$
$$L_n : E_n \longrightarrow Y, \quad L_n(x) = (0, \ldots, \overset{(n)}{x}, x, \ldots).$$

Não é difícil ver que L_n é linear, contínuo, uma isometria, $Q \circ L_n = I|_{E_n}$ e $\limsup_n \|L_n\| = 1$. Portanto pela Proposição 2.2.33 tem-se X' isomorfo a um subespaço complementado F de Y'. Podemos então por $Y' = F \oplus G$ para algum subespaço fechado G de Y'. Pelo Teorema 2.2.4 a propriedade de aproximação é preservada por isomorfismo. Como X' falha a propriedade da aproximação, segue que F não tem a propriedade da aproximação. Visto que F é complementado em Y', segue da Proposição 2.2.16 que Y' não tem a propriedade de aproximação. Pela Proposição 2.2.24, Y tem a propriedade de aproximação limitada. Com isso, segue do Teorema 2.2.34 que Y é isomorfo a um subespaço H de um espaço $\tilde{H}$

com base de Schauder. Pelo Corolário 2.2.30 tem-se que Y possui base de Schauder, logo H tem base de Schauder. Tendo isto, defina

$$Y_1 := (Y \times \{0\}) \oplus (H \times \{0\})\,.$$

Veja que Y_1 é isomorfo a um subespaço de c_0. De fato, como Y é isomorfo a H e Y é isomorfo a F, temos que H isomorfo a F. Assim temos H e Y isomorfos a um subespaço de c_0. Logo $H \times Y$ é isomorfo a um subespaço de $c_0 \times c_0$. Na demonstração do Corolário 2.2.27 mostramos que $c_0 \times c_0 \simeq c_0$. Mas como

$$(Y \times \{0\}) \oplus (H \times \{0\}) \simeq H \times Y$$

segue que Y_1 é isomorfo a um subespaço de c_0. Veja que Y_1 tem base de Schauder pois $Y \times \{0\}$ e $H \times \{0\}$ tem base de Schauder, logo Y_1 tem a propriedade da aproximação. Vejamos que Y_1' não tem a propriedade da aproximação. De fato, Pelo Exercício 4.5.13 em [4], tem-se que Y_1' contém uma cópia E complementada de Y'. Como Y' não tem a propriedade de aproximação, segue novamente do Teorema 2.2.4 que E não tem a propriedade da aproximação. Como E é complementado em Y_1', tem-se pela Proposição 2.2.16 que Y_1' não tem a propriedade da aproximação. Assim temos o resultado. ■

2.3 Propriedades α e β

Lindenstrauss introduziu o estudo da *propriedade* α em seu artigo de operadores que atingem a norma em [26]. Mas, conceitos mais gerais de espaços de Banach com essa propriedade foram apresentados por Schachermayer em [33]. Apresentaremos alguns conceitos básicos que serão necessários para resultados mais adiante.

Definição 2.3.1. Um espaço de Banach X tem a *propriedade* α se existem dois conjuntos $\{x_i : i \in I\} \subset S_X$, $\{x_i' : i \in I\} \subset S_{X'}$ e uma constante $0 \leq \rho < 1$ satisfazendo as seguintes condições:
(a) $x_i'(x_i) = 1$ para todo $i \in I$.
(b) $|x_i'(x_j)| \leq \rho < 1$ se $i, j \in I$ e $i \neq j$.
(c) $B_X = \overline{\text{conv}}\{x_i : i \in I\}$.

Lema 2.3.2. *Sejam X, Y espaços de Banach, $\epsilon > 0$, $0 < \rho < 1$, $T \in L(X,Y)$, $T \neq 0$ e $\{x_i : i \in I\} \subset S_X$. Se $B_X = \overline{\text{conv}}\{x_i : i \in I\}$, então existe $i \in I$ tal que $\|Tx_i\| \geq \|T\|\left(\dfrac{1+\rho\epsilon}{1+\epsilon}\right)$.*

Demonstração. Note que

$$\rho < 1 \implies \epsilon\rho < \epsilon \Longrightarrow 1+\epsilon\rho < 1+\epsilon \Longrightarrow \frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} < 1 \Longrightarrow \|T\|\left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon}\right) < \|T\|.$$

Logo, existe $x \in B_X$ tal que

$$\|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) \leq \|T(x)\| < \|T\|.$$

Como $B_X = \overline{\text{conv}}\{x_i : i \in I\}$, existe uma sequência $(x_n)_n \subset \text{conv}\{x_i : i \in I\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Segue da continuidade de T que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ e portanto $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \|Tx\|$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $\|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) < \|Tx_n\|$. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo tal que $n \geq n_0$. Logo

$$\|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) < \|Tx_n\|. \tag{2.27}$$

Como $x_n \in \text{conv}\{x_i : i \in I\}$, existem $\lambda_{n,j} \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$ com $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} = 1$ tais que

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} x_{n,j}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) &< \|T(x_n)\| \\
&= \left\| T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} x_{n,j} \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} T(x_{n,j}) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \|T(x_{n,j})\|.
\end{aligned}$$

Afirmamos que existe $1 \leq j \leq k$ tal que $\|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) < \|T(x_{n,j})\|$. De fato, suponha por contradição que para todo $1 \leq j \leq k$ tem-se

$$\|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) \geq \|T(x_{n,j})\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|T(x_n)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} T(x_{n,j}) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} \|T(x_{n,j})\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} \|T\| \left(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \right) \\
&= \|T\| \Big(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \Big) \sum_{j=1}^{k} \lambda_{n,j} \\
&= \|T\| \Big(\frac{1+\epsilon\rho}{1+\epsilon} \Big),
\end{aligned}
$$

o que contradiz (2.27). Isto completa a prova do lema. ■

Como a propriedade α, a *propriedade* β foi introduzida por Lindenstrauss em [26], no qual ele estudou os operadores que atingem a norma. Também Partington em [32] apresentou resultados relacionados aos espaços com a propriedade β. Discutiremos um pouco sobre esta propriedade.

Seja Y um espaço de Banach. Um subconjunto $\{y'_i : i \in I\}$ de $S_{Y'}$ é dito *normante em* Y se $\|y\| = \sup\limits_{i \in I} |y'_i(y)|$ para todo $y \in Y$.

Definição 2.3.3. Um espaço de Banach Y tem a *propriedade* β se existem dois conjuntos $\{y_i : i \in I\} \subset S_Y$, $\{y'_i : i \in I\} \subset S_{Y'}$ e uma constante $0 \leq \rho < 1$ satisfazendo as seguintes condições:
(a) $y'_i(y_i) = 1$ para todo $i \in I$.
(b) $|y'_i(y_j)| \leq \rho < 1$ se $i, j \in I$ e $i \neq j$.
(c) $\{y'_i : i \in I\}$ é normante em Y.

Exemplo 2.3.4. O espaço real de sequências c_0 tem a propriedade β. De fato, considere os conjuntos $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_{c_0}$ e $\{e'_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_{c'_0}$ onde $(e_n)_n$ é a base de Schauder de c_0 e $(e'_n)_n$ é a sequência dos funcionais coordenados associados à base de Schauder $(e_n)_n$, isto é, para cada $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j e_j \in c_0$ tem-se

$$
e'_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad e'_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j \right) = y_n,
$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $y = (y_j)_i \in c_0$, então pela definição da norma usual de c_0 tem-se diretamente

$$
\|y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |e'_n(y)|.
$$

Ademais, tem-se $\|e'_n\| = e'_n(e_n) = 1$ e $e'_n(e_m) = 0$ para $n \neq m$. Observe que neste caso podemos tomar $\rho = 0$. Portanto c_0 tem a propriedade β.

O lema a seguir servirá como apoio para um teorema a ser demonstrado no último capítulo.

Lema 2.3.5. *Sejam X, Y espaços de Banach, $\{y_i' : i \in I\} \subset S_{Y'}$, $0 \leq \rho < 1$, $\epsilon > 0$ e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear e contínuo não nulo. Suponha que $\{y_i' : i \in I\}$ é normante em Y. Então existem $x_0 \in S_X$ e $i \in I$ tais que*

$$|y_i'(Tx_0)| > \|T\| \left(\frac{1 + \rho\epsilon}{1 + \epsilon} \right).$$

Demonstração. Suponha por contradição que para todo $i \in I$ e todo $x \in S_X$ se tenha

$$|y_i'(Tx)| \leq \|T\| \left(\frac{1 + \rho\epsilon}{1 + \epsilon} \right).$$

Logo

$$\sup_{i \in I} |y_i'(Tx)| \leq \|T\| \left(\frac{1 + \rho\epsilon}{1 + \epsilon} \right).$$

Como $\|y\| = \sup_{i \in I} \left| y_i'(y) \right|$ para todo $y \in Y$, segue que $\|Tx\| = \sup_{i \in I} \left| y_i'(Tx) \right|$ para todo $x \in X$. Em particular, para todo $x \in S_X$ tem-se $\|Tx\| = \sup_{i \in I} \left| y_i'(Tx) \right|$. Logo

$$\|Tx\| = \sup_{i \in I} |y_i'(Tx)| \leq \|T\| \left(\frac{1 + \rho\epsilon}{1 + \epsilon} \right),$$

para todo $x \in S_X$. Segue que

$$\|T\| \leq \|T\| \left(\frac{1 + \rho\epsilon}{1 + \epsilon} \right),$$

o que é uma contradição pois $\dfrac{1 + \rho\epsilon}{1 + \epsilon} < 1$ visto que $\rho < 1$. ■

2.4 Noção de espaço de Banach de codimensão finita

Em vista do Exemplo 1.2.2 sabemos que se X é uma espaço de Banach de dimensão infinita e E é um subespaço de X de dimensão finita, então E ser complementado em X é equivalente a afirmar que existe um subespaço fechado Y de X tal que $X = E \oplus Y$. Diante disso, trataremos agora de espaços que podem ser representados como soma de outros dois espaços na qual pelo menos um dos espaços tem dimensão finita.

Definição 2.4.1. Seja Y um subespaço do espaço de Banach X. Dizemos que Y tem *codimensão finita* se existe um espaço de dimensão finita $E \subset X$ tal que $X = Y \oplus E$. Isso equivale a afirmar que a dimensão de X/Y é finita (veja definição em [5, p.351]).

Veremos a seguir um resultado que envolve espaços de codimensão finita.

Lema 2.4.2. *Sejam X, Y espaços de Banach. Suponha que para todo $x_0 \in S_X$ o fecho do espaço vetorial gerado pelos vetores $z \in X$ tais que $\|x_0 \pm z\| \leq 1$ tenha codimensão finita. Se Y é estritamente convexo, então, $\mathcal{NA}(X, Y) \subset \mathcal{F}(X, Y)$.*

Demonstração. Iremos dividir a demonstração em dois casos:
Caso 1. Seja $T \in \mathcal{NA}(X,Y)$ e suponha que $1 = \|T\| = \|Tx_0\|$, onde $x_0 \in S_X$. Seja

$$Z = \overline{\text{span}}\{z \in X : \|z \pm x_0\| \leq 1\}.$$

Segue da hipótese que Z tem codimensão finita, isto é, existe um subespaço $E \subset X$ de dimensão finita tal que $X = Z \oplus E$. Note que para cada $z \in Z$, tem-se

$$\|Tx_0 \pm Tz\| \leq \|T\|\|x_0 \pm z\| \leq 1.$$

Como Y é estritamente convexo e $\|Tx_0\| = 1$, segue da Proposição 1.1.2 que $Tz = 0$. Logo para todo $z \in Z$ temos $Tz = 0$. Afirmamos que $T(X) = T(E)$. De fato, como E é subespaço de X, a inclusão $T(E) \subset T(X)$ é trivial. Vejamos que $T(X) \subset T(E)$. Seja $y \in T(X)$. Logo existe $x \in X$ tal que $Tx = y$. Como $X = Z \oplus E$, existem únicos $x_1 \in Z$ e $x_2 \in E$ tais que $x = x_1 + x_2$. Segue por linearidade que

$$y = Tx = Tx_1 + Tx_2 = Tx_2 \in T(E).$$

Isso mostra que $T(X) = T(E)$. Como $T(E)$ tem dimensão finita, visto que E tem dimensão finita, segue que $T \in \mathcal{F}(X,Y)$.
Caso 2. Seja $T \in \mathcal{NA}(X,Y)$ não nulo. Desse modo, defina

$$T_1 : X \longrightarrow Y, \quad T_1(x) = \frac{T(x)}{\|Tx_0\|},$$

onde $x_0 \in S_X$ e $\|T\| = \|Tx_0\|$. Logo $\|T_1\| = \|T_1x_0\| = 1$. Segue do Caso 1 que $T_1 \in \mathcal{F}(X,Y)$ e consequentemente $T \in \mathcal{F}(X,Y)$. Portanto o lema está provado. ■

Lema 2.4.3. *Seja X um subespaço de c_0. Então, para todo $x_0 \in S_X$ o espaço vetorial fechado gerado pelos pontos $z \in X$ que satisfazem $\|x_0 \pm z\| \leq 1$ é um subespaço de codimensão finita.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in S_X$ e $\tilde{Z} = \overline{\text{span}}\{z \in X : \|z \pm x_0\| \leq 1\}$. Chame $x_0 = (x_{0,n})_n \in S_X$. Como $x_0 \in c_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{0,n}| \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $n \geq N$. Defina

$$Z = \{z \in X : z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq N\}$$

e

$$Z_1 = \overline{\text{span}}\left\{z \in Z : \|z\| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

É claro que Z é subespaço de X. O objetivo é mostrar que $\tilde{Z}$ tem codimensão finita, para isso precisamos mostrar que:
(i) Z tem codimensão finita.
(ii) $Z \subset Z_1$.

(iii) $Z_1 \subset \tilde{Z}$.
Vejamos (i). Seja $E = \{y \in X : y_i = 0 \text{ para } i > N\}$. Note que E tem dimensão finita pois o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ é uma base de E, onde $e_j = (0, 0, \ldots, \overset{(n)}{1}, \ldots)$ para cada $1 \leq j \leq N$. Vejamos que $X = Z \oplus E$. De fato, dado $x = (x_n)_n \in X$ temos

$$\begin{aligned} x &= (x_1 x_2, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots) \\ &= (0, 0, \ldots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots) + (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Logo todo elemento de X se escreve como soma de elementos de Z e de E. Além disso, $Z \cap E = \{0\}$. De fato, se $x = (x_n)_n \in Z \cap E$, então para $n \leq N$ temos $x_n = 0$ e, por outro lado, para $n > N$ temos também $x_n = 0$. Logo $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $x = 0$. Concluímos assim que Z tem codimensão finita, isto é,

$$\dim X/Z < \infty. \tag{2.28}$$

Vamos mostrar (ii), isto é, $Z \subset Z_1$. De fato, seja $z = (z_n)_n \in Z$ não nulo. Logo $h = \dfrac{z}{2\|z\|} \in Z_1$ pois $\|h\| = \dfrac{1}{2}$ e $h = \dfrac{z}{2\|z\|} \in Z$. Portanto

$$z = \frac{z}{2\|z\|} 2\|z\| = 2\|z\| h \in Z_1,$$

como desejado.
Vejamos (iii). Para mostrar (iii) é suficiente mostrar que se $z \in Z$ com $\|z\| \leq \dfrac{1}{2}$ então $\|x_0 \pm z\| \leq 1$. De fato, dado $z = (z_n)$,

$$\begin{aligned} \|x_0 \pm z\| &= \sup\{|x_{0,n} \pm z_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{|x_{0,1}|, |x_{0,2}|, \ldots, |x_{0,N}|, |x_{0,N+1} \pm z_{N+1}|, |x_{0,N+2} \pm z_{N+2}|, \ldots\}. \end{aligned}$$

Visto que para cada $n > N$ tem-se

$$|x_{0,n} \pm z_n| \leq |x_{0,n}| + |z_n| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

e para cada $n \leq N$ tem-se $|x_{0,n}| \leq 1$ pois $x_0 \in S_X$, segue que $\|x_0 \pm z\| \leq 1$. Isso mostra que $Z_1 \subset \tilde{Z}$.
Por fim, vejamos que $\tilde{Z}$ tem codimensão finita. As inclusões $Z \subset Z_1 \subset \tilde{Z}$ implicam naturalmente $X/\tilde{Z} \subset X/Z_1 \subset X/Z$. Logo

$$\dim X/\tilde{Z} \leq \dim X/Z_1 \leq \dim X/Z.$$

Mas por (2.28) sabemos que $\dim X/Z < \infty$. Logo $\dim X/\tilde{Z} < \infty$ e portanto segue que $\tilde{Z}$ tem codimensão finita. ■

2.5 Noção de espaço de Banach cuja norma depende localmente de finitas coordenadas

A seguir será apresentado uma noção em espaços de Banach na qual a norma depende localmente de finitas coordenadas, como exemplo clássico apresentaremos os subespaços do espaço real c_0. Esses espaços também são importante na teoria de diferenciabilidade e na renormalização de espaços de Banach. Para um estudo mais profundo recomendamos [12].

Definição 2.5.1. A norma em um espaço de Banach real X *depende localmente de finitas coordenadas* se para todo $x \in X - \{0\}$ existem $\epsilon > 0$, um subconjunto finito $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ e uma função contínua $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|y\| = \varphi(x'_1(y), x'_2(y), \ldots, x'_n(y))$ sempre que $\|x - y\| < \epsilon$ e $y \in X$.

Proposição 2.5.2. *Seja X um subespaço fechado do espaço real c_0 e seja $\|\cdot\|$ a restrição de $\|\cdot\|_\infty$ a X. Então, para cada $x \in X - \{0\}$, existem $\delta > 0$ e um subconjunto finito $\{x'_n : n \in J\}$ de $B_{X'}$ tal que se $\|x - y\| < \delta$, $y \in X$ então*

$$\|y\| = \sup_{n \in J} |x'_n(y)|.$$

Em particular, X depende localmente de finitas coordenadas.

Demonstração. Sejam X o subespaço fechado de c_0, $(e_n)_n$ a base de Schauder usual de c_0 e $(e'_n)_n$ os funcionais coordenados associados a base $(e_n)_n$. Seja $x = (a_n)_n \in X - \{0\}$. Como $x \in c_0$ temos

$$\|x\| \;=\; \sup_n |a_n| = \sup_n |e'_n(x)|.$$

Além disso,

$$\lim_{n \to \infty} e'_n(x) = \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Como $x \in X - \{0\}$ temos $\|x\| > 0$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\limits_{n \geq n_0} |e'_n(x)| < \|x\|$. Denote

$$I = \{n \in \mathbb{N} : |e'_n(x)| < \|x\|\}$$

e por

$$J = \{n \in \mathbb{N} : |e'_n(x)| = \|x\|\}.$$

Veja que J é finito. De fato, se J fosse infinito poderíamos escolher uma subsequência $(e'_{n_k}(x))_k$ de $(e'_n(x))_k$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} |e'_{n_k}(x)| = \|x\|$. Assim, visto que

$$\lim_{n \to \infty} e'_n(x) = 0,$$

obteríamos

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} |e'_{n_k}(x)| = 0.$$

Mas isto é claramente uma contradição pois $\|x\| > 0$. Note que $J = \mathbb{N} - I$. Nosso objetivo é encontrar

$$\epsilon > 0 \text{ tal que para cada } z \in X \text{ com } \|z - x\| < \epsilon \text{ tem-se } \|z\| = \sup_{n\in J} |e'(z)|. \tag{2.29}$$

Dito isso, sejam $z \in X$, $k \in J$, $m \in I$. Mostraremos primeiro que existe $\epsilon > 0$ tal que $|e'_k(z)| - |e'_m(z)| > 0$ sempre que $z \in X$, $\|z - x\| < \epsilon$, $k \in J$ e $m \in I$; daí comprovaremos a veracidade de (2.29). Para isso, dados $x, z \in X$,

$$\begin{aligned}
|e'_k(z)| - |e'_m(z)| &= |e'_k(z)| - |e'_k(x)| + |e'_k(x)| + |e'_m(x)| - |e'_m(x)| - |e'_m(z)| \\
&= |e'_k(x)| - |e'_m(x)| + |e'_k(z)| - |e'_k(x)| + |e'_m(x)| - |e'_m(z)| \\
&\geq |e'_k(x)| - |e'_m(x)| - |e'_k(z) - e'_k(x)| - |e'_m(x) - e'_m(z)| \\
&= \|x\| - |e'_m(x)| - |e'_k(z) - e'_k(x)| - |e'_m(x) - e'_m(z)| \\
&\geq \|x\| - |e'_m(x)| - |e'_k(z) - e'_k(x)| - |e'_m(x) - e'_m(z)| \\
&\geq \|x\| - \sup_{n\in I} |e'_n(x)| - |e'_k(z) - e'_k(x)| - |e'_m(x) - e'_m(z)| \\
&\geq \|x\| - \sup_{n\in I} |e'_n(x)| - \|z - x\| - \|z - x\| \\
&\geq \|x\| - \sup_{n\in I} |e'_n(x)| - 2\|z - x\|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\|x\| - \sup_{n\in I} |e'_n(x)| > 0,$$

pois $x \in c_0$ e $|e'_n(x)| \leq \|x\|$ para cada $n \in I$. Com isso, faça $\epsilon = \|x\| - \sup_{n\in I} |e'_n(x)|$ e considere $z \in X$ com $\|z - x\| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Então,

$$\begin{aligned}
|e'_k(z)| - |e'_m(z)| &\geq \|x\| - \sup_{n\in I} |e'_n(x)| - 2\|z - x\| \\
&> \epsilon - \frac{2\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} > 0.
\end{aligned}$$

Logo $|e'_k(z)| > |e'_m(z)|$ sempre que $z \in X$ e $\|x - z\| < \dfrac{\epsilon}{3}$, $k \in J$ e $m \in I$. Mas como $z \in c_0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|z\| = |e'_{k_0}|$. Portanto devemos ter $k_0 \in J$, pois em particular $|e'_{k_0}(z)| > |e'_m(z)|$ para todo $m \in I$. Note que, como consequência disso, X depende localmente de finitas coordenados. Para isso basta considerar na Definição 2.5.1 $x'_i = e'_i$ com $i \in J$ e $\varphi = \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^{|J|} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo a norma do supremo em $\mathbb{R}^{|J|}$, onde $|J|$ é a cardinalidade de J. Portanto está mostrado o resultado. ■

Corolário 2.5.3. *Seja E um subespaço do espaço de Banach real c_0 de dimensão finita, então a norma em E pode ser calculada como o supremo de uma quantidade finita de funcionais de $B_{E'}$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.5.2 que para cada $x \in S_E$ existem $\epsilon(x) > 0$ e um conjunto $F(x) \subset B_{E'}$ finito tais que se $\|y - x\| < \epsilon(x)$ então $\|y\| = \sup\limits_{x' \in F(x)} |x'(y)|$. Note que

$$S_E \subset \bigcup_{x \in S_E} B(x, \epsilon(x)).$$

Como E tem dimensão finita tem-se que S_E é compacta. Logo existem $x_1, \ldots, x_k \in S_E$ tais que

$$S_E \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \epsilon(x_i)).$$

Faça $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F(x_i)$. Note que F é finito. Mostraremos que para todo $z \in E$ temos $\|z\| = \sup\limits_{x' \in F} |x'(z)|$. Para isso é suficiente mostrar que se $z \in S_E$ então $\|z\| = \sup\limits_{x' \in F} |x'(z)|$. De fato, seja $z \in S_E$. Logo para algum $1 \leq i \leq k$ tem-se $y \in B(x_i, \epsilon(x_i))$. Segue que

$$\|z\| = \sup\{|x'(z)| : x' \in F(x_i)\}.$$

Por outro lado tem-se $|x'(z)| \leq \|z\|$ para quaisquer $x' \in F \subset B_{E'}$ e $z \in S_E$. Portanto $\sup\{|x'(z)| : x' \in F\} \leq \|z\|$. Logo

$$\|z\| = \sup\{|x'(z)| : x' \in F\}.$$

Para verificar que vale para todo $z \in E$, veja primeiramente que o caso em que $z = 0$ é trivial. Para o caso $z \neq 0$ defina $y = \dfrac{z}{\|z\|} \in S_E$. Pelo o que foi mostrado anteriormente temos

$$\begin{aligned}
\|y\| = \sup\{|x'(y)| : x' \in F\} &\iff \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = \sup\left\{ \left| x'\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right| : x' \in F \right\} \\
&\iff \frac{\|z\|}{\|z\|} = \frac{\sup\{|x'(z)| : x' \in F\}}{\|z\|} \\
&\iff \|z\| = \sup_{x' \in F} |x'(z)|.
\end{aligned}$$

Logo concluímos a demonstração. ∎

Teorema 2.5.4. *Considere o espaço real c_0. Se $E \subset c_0$ tem dimensão k então E é isomorfo isometricamente a $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right)$ e existem $z'_1, \ldots, z'_k \in S_{E'}$ e $z_1, \ldots, z_k \in S_E$ satisfazendo*

(i) $\|z'\| = z'_i(z_i) = 1$ *e* $z'_i(z_j) = 0$ *para* $i \neq j$.

(ii) $\|z\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq k} |z'_i(z)|$ *para todo* $z \in E$.

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração, façamos uma observação. Seja F um espaço de dimensão n. Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base qualquer em F. Logo, dado $z \in F$ existem únicos escalares $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Não é difícil verificar que a aplicação

$$\|\cdot\|_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \|z\|_0 = \sup_{1 \leq i \leq n} |a_i| \tag{2.30}$$

é uma norma em F. Sabendo disso, vamos à demonstração do corolário. Primeiramente vamos mostrar que E é isometricamente isomorfo a $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right)$. Pelo Corolário 2.5.3 existem $x_1', \ldots, x_p'$ em $S_{E'}$ tais que para todo $z \in E$ tem-se $\|z\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i'(z)|$. Defina

$$\tilde{T} : E \longrightarrow (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty), \qquad \tilde{T}z = (x_1'(z), x_2'(z), \ldots, x_p'(z)).$$

É imediato que $\tilde{T}$ é linear, contínuo e

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}z\|_\infty &= \|(x_1'(z), x_2'(z), \ldots, x_p'(z))\|_\infty \\
&= \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i'(z)| \\
&= \|z\|.
\end{aligned}$$

Logo $\tilde{T}$ é uma isometria linear de E em $\mathbb{R}^p$. Portanto $T = \tilde{T} : E \longrightarrow T(E)$ é um isomorfismo isométrico. Faça $F = T(E)$. Assim F tem dimensão k. Diante disso, seja $\{y_1, \ldots, y_k\}$ uma base de F. Podemos supor que $\|y_i\| = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$. Logo, para cada $y = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i y_i \in F$ defina

$$\overline{T} : (F, \|\cdot\|_0) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right), \qquad \overline{T}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\right) = (a_i, \ldots, a_k),$$

em que $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ são unicamente determinados por y. A linearidade e continuidade de $\overline{T}$ são claras. Ademais, para cada $y \in F$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|\overline{T}y\|_\infty &= \|(a_1, \ldots, a_k)\|_\infty \\
&= \sup_{1 \leq i \leq k} |a_i| \\
&= \|y\|_0.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\overline{T}$ é uma isometria. Vejamos que a aplicação $T_1 = \overline{T} \circ T : E \longrightarrow \left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\right)$ é uma isomorfismo isométrico. Claramente T_1 é bijetor pois é composta de aplicações bijetoras. Vejamos que é uma isometria. De fato, para cada $z \in E$ tem-se

$$\|T_1 z\|_\infty = \|\overline{T}(Tz)\|_\infty$$

$$
\begin{aligned}
&= \|Tz\|_0 \\
&= \|\tilde{T}z\|_0 \\
&= \left\|(x_1'(z), \ldots, x_p'(x))\right\|_0 \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{p} x_n'(z)e_n\right\|_0 \\
&= \sup_{1\leq n\leq p} |x_n'(z)| \\
&= \|z\|.
\end{aligned}
$$

Iremos mostrar (i). Seja $\{e_i, \ldots, e_k'\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^k$. Defina

$$
e_i' : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad e_i'\left(\sum_{j=1}^{k} a_j e_j\right) = a_i.
$$

para cada $1 \leq i \leq k$ funcionais lineares e contínuos, com $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ e $a_i \in \mathbb{R}$. Não é difícil ver que $\|e_i'\| = 1$ para cada $1 \leq i \leq k$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
e_i'(e_i) &= 1 \text{ se } i = j, \\
e_i'(e_j) &= 0 \text{ se } i \neq j.
\end{aligned}
$$

Veja que para todo $x \in \mathbb{R}^k$ tem-se

$$
\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq k} |e_i'(x)|.
$$

Sejam $z_1, \ldots, z_k$ em S_E tais que $T_1 z_i = e_i$ para $1 \leq i \leq k$. Sejam $z_i' = e_i' \circ T_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais lineares e contínuos para cada $1 \leq i \leq k$. Veja que

$$
\|z_i'\| = \|e_i' \circ T_1\| \leq 1
$$

para cada $1 \leq i \leq k$. Ademais, como

$$
\begin{aligned}
z_i'(z_i) &= e_i'(T_1 z_i) = e_i'(e_i) = 1 \text{ se } i = j, \\
z_j'(z_i) &= e_j'(T_1 z_i) = e_j'(e_i) = 0 \text{ se } i \neq j,
\end{aligned}
$$

concluímos que $\|z_i'\| = 1$, o que mostra (i).
Além disso, para $z \in E$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\|z\| = \|T_1 z\|_\infty &= \sup_{1\leq i\leq k} |e_i' \circ T_1 z| \\
&= \sup_{1\leq i\leq k} |z_i'(z)|,
\end{aligned}
$$

o que mostra (ii). Logo o corolário está provado.

■

Lema 2.5.5. *Sejam V um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em V tais que $\bigcap_{i=1}^n Ker(\varphi_i) \subset Ker(\varphi)$. Então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$.*

Demonstração. Veja [4, Lema 6.3.5]. ∎

Lema 2.5.6. *Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Banach em que a norma depende localmente de finitas coordenadas. Então para todo $y_0 \in S_Y$ o espaço*

$$\tilde{Z} := \overline{span}\{z \in Y : \|x_0 \pm z\| \leq 1\}$$

tem codimensão finita.

Demonstração. Seja $x_0 \in S_Y$. Como Y depende localmente de finitas coordenadas, existem $\epsilon > 0$, $x'_1, \ldots, x'_n \in Y'$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que se $\|z - x_0\| < \epsilon$ então $\|y\| = \varphi(x'_1(y), \ldots, x'_n(y))$. Nosso objetivo é mostrar que $\tilde{Z}$ tem codimensão finita. Para isso precisamos mostrar que:

(i) $Z = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(x'_i)$ tem codimensão finita.

(ii) $Z \subset \overline{\mathrm{span}}\{Z_1\}$, onde $Z_1 = \{z \in Z : \|z\| < \epsilon\}$, e $\overline{\mathrm{span}}\{Z_1\} \subset \tilde{Z}$.

Pode-se considerar $Z \subsetneqq Y$ pois se $Z = Y$ teríamos $x'_1 = \cdots = x'_n = 0$ e assim não haveria nada o que fazer. Vamos mostrar (i), isto é, que Z tem codimensão finita. De fato, como $Z \subsetneqq Y$ existe $y_0 \in Y - Z$. Defina

$$\phi : Z \oplus [y_0] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi(z + \alpha y_0) = \alpha.$$

A linearidade de ϕ é clara, além disso $\mathrm{Ker}(\phi) = Z$. Em particular, $Z \subset \mathrm{Ker}(\phi)$, isto é, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(x'_i) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. Logo pelo Lema 2.5.5 existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i x'_i.$$

Isso mostra que $\phi \in Y'$ visto que $x'_1, \ldots, x'_n \in Y'$. Como $\mathrm{Ker}(\phi)$ tem codimensão finita, isto é, $\dim Y/\mathrm{Ker}(\phi) < \infty$, segue que

$$\dim Y/Z \leq \dim Y/\mathrm{Ker}(\phi) < \infty.$$

Logo obtemos que Z tem codimensão finita. Vejamos que vale (ii). De fato, temos

$$Z_1 = \{z \in Z : \|z\| < \epsilon\}.$$

Logo $\|x_0 \pm z - x_0\| < \epsilon$, e além disso,

$$\|z \pm x_0\| \;=\; \varphi(x'_1(z \pm x_0), \ldots, x'_n(z \pm x_0))$$

$$= \quad \varphi(x_1'(x_0), \ldots, x_n'(x_0)) = \|x_0\| = 1.$$

Isso mostra que $Z_1 \subset \tilde{Z}$ e portanto

$$\overline{\text{span}}\{Z_1\} \subset \tilde{Z}.$$

Falta verificar que $Z \subset \overline{\text{span}}\{Z_1\}$. Seja $z \in Z$ não nulo. Faça $h = \dfrac{z\epsilon}{2\|z\|} \in \overline{\text{span}}\{Z_1\}$. Segue que $z = \dfrac{z2\epsilon\|z\|}{2\epsilon\|z\|} = \dfrac{2\|z\|h}{\epsilon} \in \overline{\text{span}}\{Z_1\}$. Isso mostra que $Z \subset \overline{\text{span}}\{Z_1\}$. Como $Z \subset \overline{\text{span}}\{Z_1\}$ obtemos $Z \subset \tilde{Z}$. Logo, $X/\tilde{Z} \subset X/Z$ e portanto $\dim X/\tilde{Z} \leq \dim X/Z < \infty$. Segue assim que $\tilde{Z}$ tem codimensão finita. Portanto o resultado está mostrado. ■

Lema 2.5.7. *Seja X um espaço de Banach cuja norma depende localmente de finitas coordenadas e seja Y um espaço de Banach estritamente convexo. Então, $\mathcal{NA}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y)$.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in S_X$ e

$$\tilde{Z} = \overline{\text{span}}\{z \in X : \|x_0 \pm z\| \leq 1\}.$$

Como X depende localmente de finitas coordenadas, segue do Lema 2.5.6 que $\tilde{Z}$ tem codimensão finita. Como Y é estritamente convexo, segue do Lema 2.4.2 que $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$. Isto mostra o desejado. ■

Note que pela Proposição 2.5.2, para todo subespaço fechado X do espaço de Banach real c_0 tem-se $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ sempre que Y for estritamente convexo.

2.6 Noção de espaços de Banach poliedrais

Enuciaremos nesta seção algumas definições e propriedades acerca de espaços cuja bola unitária de seus subespaços de dimensão finita são poliedros. Alguns matemáticos como Lindenstrauss (1966), Lazar (1969), Gleit e McGuigan (1972), Hansen e Nielsen (1974), investigaram espaços com essa propriedade.

Definição 2.6.1. Um espaço de Banach X é dito ser *poliedral* se para todo subespaço Z de X de dimensão finita existe um subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_Z$ tal que

$$B_Z = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \leq n \right\}.$$

Proposição 2.6.2. *Seja X um subespaço de c_0 tal que a bola B_X tem pelo menos um ponto extremo. Então X tem dimensão finita e é poliedral. Além disso, um espaço F de dimensão finita é isométrico a subespaço de c_0 se, e somente se, F é poliedral.*

Demonstração. Veja [22, Proposition 4.7]. ■

Lema 2.6.3. *Seja F um espaço de Banach real poliedral de dimensão finita. Então F tem a propriedade β.*

Demonstração. Suponha que F tenha dimensão k. Pela Proposição 2.6.2 existe um subespaço G de c_0 tal que F é isomorfo isometricamente a G. Ademais, pelo Corolário 2.5.4 tem-se que G e isometricamente isomorfo a $\big(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\big)$. Portanto F é isometricamente isomorfo a $\big(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\big)$. Seja T o isomorfismo isométrico de F em $\big(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty\big)$. Usando o isomorfismo isométrico T mostraremos que F tem a propriedade β. De fato, Seja $\{e_1, \ldots, e_k\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^k$. Podemos de maneira simples definir

$$e_j' : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad e_j'\Big(\sum_{i=1}^k a_i e_i\Big) = a_j, \qquad a_i \in \mathbb{R},$$

para cada $1 \leq j \leq k$. Note que e_j' é linear e contínuo. Além disso,

$$\|e_j'\| = 1, \quad e_j'(e_j) = 1, \quad e_j'(e_i) = 0 \text{ se } i \neq j.$$

Ademais, para cada $x = (x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$ tem-se

$$\|x\| \;=\; \sup_{1\leq j\leq k} |x_j| = \sup_{1\leq j\leq k} |e_j'(x)|.$$

Sejam $z_1, \ldots, z_k \in F$ e $z_1', \ldots, z_k' \in F'$ dados por $Tz_j = e_j$ e $z_j' = e_j' \circ T$ para cada $1 \leq j \leq k$. Vamos mostrar que os conjuntos $\{z_1, \ldots, z_k\}$ e $\{z_1', \ldots, z_k'\}$ satisfazem as condições desejadas. Mostraremos primeiro que valem (a),(b) e (c) e por último mostraremos que $\{z_1, \ldots, z_k\} \subset S_F$ e $\{z_1', \ldots, z_k'\} \subset S_{F'}$.

Verificação de (a): De fato,

$$z'(z_j) \;=\; e_j'(Tz_j) = e_j'(e_j) = 1.$$

Verificação de (b): De fato,

$$z'(z_i) \;=\; e_j'(Tz_i) = e_j'(e_i) = 0(\text{ onde } 0 \leq \rho < 1 \text{ qualquer }),$$

Verificação de (c): De fato, para cada $z \in F$ tem-se

$$\|z\| \;=\; \|Tz\| = \sup_{1\leq j\leq k} |e_j'(Tz)| = \sup_{1\leq j\leq k} |z_j'(z)|.$$

Ademais, temos $\{z_1, \ldots, z_k\} \subset S_F$, visto que $Tz_j = e_j$ para cada $1 \leq i \leq k$ e T é uma isometria. O fato de $\{z_1', \ldots, z_k'\} \subset S_{F'}$ se justifica pela seguinte desigualdade:

$$\|z_j'\| \;=\; \|z_j\|\|z_j'\| \geq |z_j'(z_j)| = 1 \geq \|T\|\|e_j'\| \geq \|e_j' \circ T\| = \|z_j'\|.$$

Portanto F tem a propriedade β. ■

Teorema 2.6.4. *Para todo $p \in (1, \infty)$ existe um espaço de Banach E_p isomorfo a um espaço poliedral com base incondicional que admite um quociente isomorfo a l_p.*

Demonstração. Veja [11, Theorem 1.1]. ■

Nesta seção voltaremos a investigar os espaços de Banach que podem ser escritos como soma direta de seus subespaços; no entanto, focaremos naquela decomposição cujas projeções associadas satisfazem condições especiais.

Definição 2.6.5. Seja X um espaço de Banach. (a) A projeção linear P é chamada de *L-projeção* se $\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\|$ para todo $x \in X$.
(b) Um subespaço fechado G de X é chamado de *L-somado* se é imagem de uma L-projeção.
(c) Um subespaço fechado F de X é chamado de *M-ideal* se $F^{\perp}$ é L-somado em X'.

Definição 2.6.6. Um espaço de Banach X é chamado de *M-mergulho* se $J_X(X)$ é um M-ideal em X'', isto é, existe uma projeção linear $P : X''' \longrightarrow X'''$ com $P(X''') = J_X(X)^{\perp}$ tal que $\|x'''\| = \|P(x''')\| + \|P(x''') - x'''\|$.

Veja que pela Proposição 1.2.1 a definição acima é equivalente a dizer que existe um subespaço fechado Z de X''' tal que $X''' = J_X(X)^{\perp} \oplus Z$ e $\|x'''\| = \|x'''^{\perp}\| + \|z\|$ com $x'''^{\perp} \in J_X(X)^{\perp}$ e $z \in Z$.

Proposição 2.6.7. O espaço c_0 é um M-mergulho.

Demonstração. Veja [15, Example 1.4, p.105]. ■

Capítulo 3

Uma Breve Introdução as Propriedades A e B de Lindenstrauss

Através de um corolário do Teorema de Hahn-Banach ([4, Corolário 3.1.4]), é possível mostrar que todo funcional linear contínuo definido em um espaço reflexivo atinge a norma (veja Exemplo 1.2.7). No entanto quando o espaço normado não for reflexivo, sabemos que sempre existe funcional linear e contínuo que não atinge a norma (veja [17]). Apesar disso, em [3] os matemáticos Bishop e Phelps mostraram que dado um funcional linear contínuo φ, definido num espaço de Banach arbitrário, sempre existe um funcional que atinge a norma tão próximo de φ quanto se deseja.

À luz do Teorema de Bishop-Phelps surge uma pergunta natural: Dados X, Y espaços de Banach arbitrários, o resultado permanece verdadeiro caso consideremos operadores lineares e contínuos $T : X \longrightarrow Y$? Essa questão foi colocada em [3], e é também conhecida como propriedade de Bishop-Phelps. Tal pergunta foi abordada em 1963 pelo matemático Joram Lindenstrauss [26]. Ele observou que existiam par (X, Y) de espaços de Banach, na qual a propriedade de Bishop-Phelps era verdadeira, e par (X, Y) de espaços de Banach na qual a propriedade de Bishop-Phelps não era verdadeira. Com isso, ele concluiu que a pergunta era muito mais geral, e por causa disso ele introduziu duas propriedades conhecidas como propriedades A e B de Lindenstrauus.

Nesta seção trataremos alguns resultados referentes às propriedades A e B de Lindenstrauus. Isso ajudará a abrir as portas para posteriormente adentrarmos no Capítulo 4 da dissertação.

3.1 Propriedades A e B de Lindenstrauss

Motivado pelo artigo de Bishop-Phelps [3], Lindenstrauss [26] iniciou a investigação referente à densidade de operadores que atingem a norma no espaço dos operadores lineares e contínuos. Para isso, Lindenstrauss introduziu duas propriedades denominadas por *propriedades A e B de Lindenstrauss.* Nesta seção trataremos superficialmente essas propriedades.

Definição 3.1.1. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade A de Lindenstrauss* se para todo espaço de Banach Y tivermos $\mathcal{NA}(X,Y)$ denso em $L(X,Y)$.

Lembre que se X é um espaço normado e X' seu dual, então para cada $x_0' \in X'$, os conjuntos da forma

$$V(x_0'; x_1, \ldots, x_k; \epsilon) := \{x' \in X' : |x'(x_i) - x_0'(x_i)| < \epsilon \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, k\},$$

com $x_i \in X$, $k \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0' para a topologia fraca-estrela (veja [4, Proposição 6.3.2]). Mostraremos que espaços reflexivos têm a propriedade A de Lindenstrauss, para tal iremos apresentar alguns lemas e um teorema. O lema a seguir pode ser encontrado em [26].

Lema 3.1.2. Sejam X e Y espaço de Banach e $T \in L(X,Y)$. Então, T'' atinge a norma se, e somente se, existem $(x_k)_k$ em X e $(y_k')_k$ em Y' tais que

$$\begin{aligned} \|x_k\| = \|y_k'\| = 1,& \\ |y_j'(Tx_k)| \geq \|T\| - \frac{1}{j},& \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $j \leq k$ e $k = 1, 2, \ldots$.

Demonstração. Suponha que o operador

$$T'' : X'' \longrightarrow Y'', \quad T''(x'')(y') = x''(T'(y'))$$

atinja a norma em $x_0'' \in S_{X''}$, isto é, $\|T''\| = \|Tx_0''\|$. Como

$$\|T''x_0''\| = \sup_{y' \in S_{Y'}} \left|T''x_0''(y')\right|,$$

segue que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $y_j' \in S_{Y'}$ tal que

$$\|T''x_0''\| \geq \left|T''x_0''(y_j')\right| > \|T''x_0''\| - \frac{1}{j}.$$

Pelo Teorema de Goldstine (veja [4, Teorema 6.4.4]) $J_X(S_X)$ é denso em $S_{X''}$ na topologia fraca-estrela, o que implica que para $k \in \mathbb{N}$ e cada vizinhança $V\left(x_0''; T'y_1', \ldots, T'y_k'; \frac{1}{k}\right)$ de x_0'', existe $x_k \in S_X$ tal que

$$J_X(x_k) \in V\left(x_0''; T'y_1', \ldots, T'y_k'; \frac{1}{k}\right) \cap J_X(S_X),$$

onde $T'y_j' \in X'$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Logo

$$\left|T'y_j'(x_k) - x_0''(T'y_j')\right| = \left|J_X(x_k)(T'y_j') - x_0''(T'y_j')\right| < \frac{1}{k}.$$

Segue pela desigualdade triangular que

$$
\begin{aligned}
\left|x_0''(T'y_j')\right| &\leq \left|T'y_j'(x_k) - x_0''(T'y_j')\right| + \left|T'y_j'(x_k)\right| \\
&< \frac{1}{k} + \left|T'y_j'(x_k)\right|,
\end{aligned}
$$

o que implica

$$\left|T'y_j'(x_k)\right| > \left|x_0''(T'y_j')\right| - \frac{1}{k}.$$

Como $j \leq k$ segue que

$$
\begin{aligned}
\left|y_j'T(x_k)\right| = \left|T'y_j'(x_k)\right| &\geq \left|x_0''(T'y_j')\right| - \frac{1}{k} \\
&\geq \left|T''x_0''(y_j')\right| - \frac{1}{j} \\
&\geq \left\|T''x_0''\right\| - \frac{1}{j} \\
&\geq \left\|T''\right\| - \frac{1}{j} = \|T\| - \frac{1}{j}.
\end{aligned}
$$

Assim obtemos

$$
\begin{gathered}
\|x_k\| = \|y_k'\| = 1, \\
|y_j'(Tx_k)| \geq \|T\| - \frac{1}{j},
\end{gathered}
$$

onde $j \leq k$ e $k = 1, 2, \ldots$, como desejado.

Reciprocamente, suponha que (3.1) seja verdade. Como $(x_k)_k \subset B_X$, segue que $(J_X(x_k)) \subset B_{X''}$. Vale observar que o conjunto $\{J_X(x_k)\} \subset B_{X''}$ pode ser finito ou infinito. Suponha que $\{J_X(x_k)\} \subset B_{X''}$ seja infinito, logo o conjunto $\{J_X(x_k)\}$ tem um fraco-estrela ponto de acumulação x'', pois pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (veja [4, Teorema 6.3.9]) a bola $B_{X''}$ é compacta na topologia fraca-estrela. Como a topologia fraca-estrela é Hausdorff (veja [4, Proposição 6.3.2]) segue que a bola $B_{X''}$ é fechada em X'' na topologia fraca-estrela. Como x'' é ponto de acumulação de $\{J_X(x_k)\}$, existe um subrede $(x_{k_r})_r$ tal que a rede $(J_X(x_{k_r}))_r$ converge para x'' na topologia fraca-estrela, o que implica que $x'' \in B_{X''}$ pois a bola $B_{X''}$ é fechada em X'' na topologia fraca-estrela. Como $J_X(x_{k_r})(x') \longrightarrow x''(x')$ para todo $x' \in X'$, em particular, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos $J_X(x_{k_r})(T'y_j') \longrightarrow x''(T'y_j')$. Assim, se $j \in N$ existe r_j tal que para todo $r \geq r_j$ tem-se $\left|J_X(x_{k_r}) - x''\left(T'y_j'\right)\right| < \frac{1}{j}$. Portanto, para cada $r \geq r_j$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\|T''\| \geq \|T''x''\| \geq \|T''(x'')(y_j')\| &= \left|x''\left(T'y_j'\right)\right| \\
&\geq \left|J_X(x_{k_r})\left(T'y_j'\right)\right| - \left|J_X(x_{k_r}) - x''\left(T'y_j'\right)\right| \\
&> \left|J_X(x_{k_r})\left(T'y_j'\right)\right| - \frac{1}{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|T'\left(y_j'\right)(x_{k_r})\right| - \frac{1}{j} \\
&= \left|y_j'(T(x_{k_r}))\right| - \frac{1}{j} \\
&\geq \|T\| - \frac{1}{j} - \frac{1}{j} \\
&= \|T\| - \frac{2}{j}.
\end{aligned}
$$

Portanto para cada $j \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\|T\| = \|T''\| \geq \|T''x''\| > \|T\| - \frac{2}{j}.$$

Logo, fazendo $j \longrightarrow \infty$, temos que $\|T''\| = \|T''x''\|$. Portanto T'' atinge a norma. Quando $\{J_X(x_k)\}$ for finito, basta tomar uma rede constante, de elementos de $\{J_X(x_k)\}$ e repetir o argumento anterior. ■

Lema 3.1.3. *Sejam $(\epsilon_n)_n$, $(a_j)_j$ sequências reais de números positivos e $K > 0$ uma constante arbitrária com $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. Então existe uma subsequência $(\epsilon_{n_j})_j$ de $(\epsilon_n)_n$ que satisfaz as seguintes propriedades:*
(a) A subsequência $(\epsilon_{n_j})_j$ é decrescente.
(b) $\epsilon_{n_j} < a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
(c) $K \sum_{i=j+1}^{\infty} \epsilon_{n_i} < \epsilon_j^2$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos (a) e (b). Para isso, construiremos indutivamente a sequência $(\epsilon_{n_j})_j$. Note que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. Então, para $j = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_n < a_1$ sempre que $n \geq n_1$; em particular, $\epsilon_{n_1} < a_1$. Para $j = 2$ existe $n_2 \geq n_1$ tal que $\epsilon_n < \min\left\{\epsilon_{n_1}, a_2, \frac{\epsilon_{n_1}^2}{2^2K}\right\}$ sempre que $n \geq n_2$; em particular, $\epsilon_{n_2} < \min\left\{\epsilon_{n_1}, a_2, \frac{\epsilon_{n_1}^2}{2^2K}\right\}$. Analogamente para $j = 3$ existe $n_3 \geq n_2$ tal que $\epsilon_n < \min\left\{\epsilon_{n_2}, a_3, \frac{\epsilon_{n_2}^2}{2^3K}\right\}$ sempre que $n \geq n_3$; em particular, $\epsilon_{n_3} < \min\left\{\epsilon_{n_2}, a_3, \frac{\epsilon_{n_2}^2}{2^3K}\right\}$. Prosseguindo desta forma obteremos uma sequência crescente $(n_j)_j$ de números natutais tais que

$$\epsilon_{n_j} < \min\left\{\epsilon_{n_{j-1}}, a_j, \frac{\epsilon_{n_{j-1}}^2}{2^jK}\right\}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Logo, a subsequência $(\epsilon_{n_j})_j$ satisfaz as condições (a) e (b).

Mostraremos que a condição (c) é satisfeita. De fato,

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \epsilon_{n_i} < \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\epsilon_{n_{i-1}}^2}{2^iK} < \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\epsilon_{n_j}^2}{2^iK} < \frac{\epsilon_{n_j}^2}{K} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\epsilon_{n_j}^2}{K}$$

o que implica

$$K\sum_{i=j+1}^{\infty}\epsilon_{n_i} < \epsilon_{n_j}^2.$$

Portanto o lema está demonstrado. ∎

O lema a seguir foi retirado da demonstração em [26, Theorem 1].

Lema 3.1.4. *Sejam X e Y espaços de Banach, $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ e $T \in L(X,Y)$. Então existem sequências $(x_k)_k$ em S_X, $(y'_k)_k$ em $S_{Y'}$ e $(T_k)_k$ em $L(X,Y)$ que satisfazem as seguintes condições:*

$$T_1 = T \tag{3.2}$$

$$T_{k+1}x = T_kx + \epsilon_k y'_k(T_k(x))T_kx_k \tag{3.3}$$

$$y'_k(T_kx_k) = \|T_kx_k\| \tag{3.4}$$

$$\|T_kx_k\| \geq \|T_k\| - \epsilon_k^2, \tag{3.5}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente

$$\|T_j - T_k\| \leq 2\sum_{i=j}^{k-1}\epsilon_i \text{ e } \|T_k\| \leq \frac{4}{3}, \qquad (j < k) \tag{3.6}$$

$$\|T_{k+1}\| > \|T_k\| + \epsilon_k\|T_k\|^2 - 4\epsilon_k^2, \tag{3.7}$$

$$\|T_k\| \geq \|T_j\| \geq \|T_1\| = 1, \qquad (j < k) \tag{3.8}$$

$$|y'_j(T_jx_k)| \geq \|T_j\| - 6\epsilon_j, \qquad (j < k) \tag{3.9}$$

e a sequência $(\epsilon_k)_k$ satisfaz

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k < \epsilon, \quad 2\sum_{k=j+1}^{\infty}\epsilon_k < \epsilon_j^2, \quad \epsilon_k < \frac{1}{10k}, \quad \epsilon_k > \epsilon_{k+1},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $T \in L(X,Y)$ com $\|T\| = 1$ e $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$. No Lema 3.1.3 faça $K = 2$, $(\epsilon_n)_n$ tal que $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e $(a_k)_k$ tal que $a_k = \frac{1}{10k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue assim do Lema 3.1.3 que

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k < \epsilon, \quad 2\sum_{k=j+1}^{\infty}\epsilon_k < \epsilon_j^2, \quad \epsilon_k < \frac{1}{10k}, \quad \epsilon_k > \epsilon_{k+1}, \tag{3.10}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Vamos em busca das sequências $(x_k)_k$ em S_X, $(y'_k)_k$ em $S_{Y'}$ e $(T_k)_k$ em $L(X,Y)$. Como $\|T\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|Tx\|$, existe $x_1 \in S_X$ tal que

$$\|Tx_1\| \geq \|T\| - \epsilon_1^2. \tag{3.11}$$

Note que Tx_1 é diferente de zero, pois $\|Tx_1\| > \|T\| - \epsilon_1^2 > 0$ já que $\|T\| = 1$ e $\epsilon_1 < 1$. Logo, pelo Teorema de Hanh-Banach para Tx_1, existe $y'_1 \in Y'$ tal que $\|y'_1\| = 1$ e $y'_1(T(x_1)) = \|Tx_1\|$. Faça $T_1 = T$ e defina

$$T_2 : X \longrightarrow Y, \qquad T_2(x) = T_1(x) + \epsilon_1 y'_1(T_1(x))T_1(x_1). \tag{3.12}$$

A continuidade e a linearidade de T_2 seguem facilmente de T_1 e y'_1. Como $\|T_2\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|T_2 x\|$, existe $x_2 \in S_X$ tal que

$$\|T_2 x_2\| \geq \|T_2\| - \epsilon_2^2. \tag{3.13}$$

Note que Tx_2 é diferente de zero, pois

$$\begin{array}{rcl} \|T_2 x_2\| & \geq & \|T_2\| - \epsilon_2^2 \\ & \geq & \|T_2 x_1\| - \epsilon_2^2 \\ & \overset{(*)}{=} & \|T_1 x_1\| + \epsilon_1 \|T_1 x_1\|^2 - \epsilon_2^2 \\ & \geq & \|T_1 x_1\| - \epsilon_2^2 \\ & \overset{(3.11)}{\geq} & \|T_1\| - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 \\ & > & \|T_1\| - 2\epsilon_1^2 \\ & = & \|T_1\| - 2\dfrac{\epsilon}{2^2} \\ & = & \|T\| - \dfrac{\epsilon}{2} \\ & = & 1 - \dfrac{\epsilon}{2} \\ & > & 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0, \end{array}$$

onde $(*)$ segue da definição de T_2. Logo, pelo Teorema de Hanh-Banach para $T_2 x_2$, existe $y'_2 \in Y'$ tal que $\|y'_2\| = 1$ e $y'_2(T_2(x_2)) = \|T_2 x_2\|$. Defina

$$T_3 : X \longrightarrow Y, \qquad T_3(x) = T_2(x) + \epsilon_2 y'_2(T_2(x))T_2(x_2). \tag{3.14}$$

A continuidade e a linearidade de T_3 seguem facilmente de T_2 e y'_2. Como $\|T_3\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|T_3 x\|$, existe $x_3 \in S_X$ tal que

$$\|T_3 x_3\| \geq \|T_3\| - \epsilon_3^2. \tag{3.15}$$

Note que Tx_3 é diferente de zero pelo mesmo argumento anterior. Logo, pelo Teorema de Hanh-Banach para $T_3 x_3$, existe $y'_3 \in Y'$ tal que $\|y'_3\| = 1$ e $y'_3(T_3(x_3)) = \|T_3 x_3\|$.

Repetindo o argumento de (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos por recorrência que

$$\begin{aligned} T_1 &= T, \\ T_{k+1}(x) &= T_k(x) + \epsilon_k y_k'(T_k(x))T_k x_k, \\ y_k'(T_k x_k) &= \|T_k x_k\|, \quad \|y_k'\| = 1, \\ \|T_k x_k\| &\geq \|T_k\| - \epsilon_k^2, \quad \|x_k\| = 1, \end{aligned} \tag{3.16}$$

para todos $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Vejamos que vale (3.6). Note que para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ tem-se

$$\begin{aligned} \|T_{k+1}(x) - T_k(x)\| &= \|\epsilon_k y_k'(T_k(x))T_k x_k\| \\ &\leq \epsilon_k \|T_k\|^2 \|x\|. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|T_{k+1} - T_k\| \leq \epsilon_k \|T_k\|^2. \tag{3.17}$$

Agora veremos que $\|T_k\| \leq \dfrac{4}{3}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para isso, faremos indução sobre k. Para $k = 1$ é claramente verdadeiro. Se $k = 2$, então $j = 1$, e portanto

$$\begin{aligned} \|T_1(x) - T_2(x)\| &= \|T_1(x) - T_1(x) - \epsilon_1 y_1'(T_1(x))T_1 x_1\| \\ &= \|\epsilon_1 y_1'(T_1(x))T_1 x_1\| \\ &\leq \epsilon_1 \|T_1\|^2 \|x\| \quad (T = T_1) \\ &= \epsilon_1 \|x\| \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Isso implica $\|T_1 - T_2\| \leq \epsilon_1$ e

$$\|T_2\| \leq \|T_2 - T_1\| + \|T_1\| \leq \epsilon_1 + 1 < \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Suponha que seja verdadeiro para k e considere $1 \leq j < k$, ou seja,

$$\|T_j - T_k\| \leq 2\sum_{i=j}^{k-1} \epsilon_i \text{ e } \|T_k\| \leq \frac{4}{3}.$$

Segue de (3.17) que

$$\|T_{k+1} - T_k\| \leq \epsilon_k \|T_k\|^2 \leq \epsilon_k \frac{16}{9} < \epsilon_k \frac{16}{8} = 2\epsilon_k.$$

Assim,

$$\|T_j - T_{k+1}\| \leq \|T_j - T_k\| + \|T_k - T_{k+1}\|$$

$$
\begin{aligned}
&< 2\sum_{i=j}^{k-1}\epsilon_i + 2\epsilon_k \\
&= 2\sum_{i=j}^{k}\epsilon_i
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|T_{k+1}\| \leq \|T_{k+1} - T_1\| + \|T_1\| \quad &< \quad 2\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i + \|T_1\| \\
&\overset{(3.18)}{\leq} \quad 2\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon_i + \|T\| \\
&\overset{(3.10)}{\leq} \quad \epsilon + 1 \\
&< \quad \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Isso mostra (3.6). Vejamos que vale (3.7), ou seja, que

$$
\|T_{k+1}\| > \|T_k\| + \epsilon_k\|T_k\|^2 - 4\epsilon_k^2.
$$

De fato, por (3.16), obtemos também

$$
\begin{aligned}
\|T_{k+1}\| \geq \|T_{k+1}x_k\| \quad &= \quad \|T_kx_k + \epsilon_k y_k'(T_kx_k)T_kx_k\| \\
&= \quad \|T_kx_k(1 + \epsilon_k y_k'(T_kx_k))\| \\
&\overset{(3.16)}{\geq} \quad (\|T_k\| - \epsilon_k^2)(1 + \epsilon_k y_k'(T_kx_k)) \\
&= \quad (\|T_k\| - \epsilon_k^2)(1 + \epsilon_k\|T_kx_k\|) \\
&\overset{(3.16)}{\geq} \quad (\|T_k\| - \epsilon_k^2)(1 + \epsilon_k(\|T_k\| - \epsilon_k^2)) \\
&= \quad (\|T_k\| - \epsilon_k^2)(1 + \epsilon_k\|T_k\| - \epsilon_k^3) \\
&= \quad \|T_k\| + \epsilon_k\|T_k\|^2 - \Big(2\|T_k\|\epsilon_k^3 + \epsilon_k^2 - \epsilon_k^5\Big)
\end{aligned}
$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como

$$
\begin{aligned}
2\|T_k\|\epsilon_k^3 + \epsilon_k^2 - \epsilon_k^5 \quad &< \quad 2\|T_k\|\epsilon_k^3 + \epsilon_k^2 \\
&< \quad 2\|T_k\|\epsilon_k^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq \quad \frac{8}{3}\epsilon_k^2 + \epsilon_k^2 \\
&< \quad 3\epsilon_k^2 + \epsilon_k^2 = 4\epsilon_k^2,
\end{aligned}
$$

obtemos que $\|T_{k+1}\| > \|T_k\| + \epsilon_k\|T_k\|^2 - 4\epsilon_k^2$, como queríamos. Vejamos que vale (3.8), isto é, $\|T_k\| \geq \|T_j\| \geq \|T_1\| = 1$ para $k \geq j \geq 1$. Faremos novamente indução sobre k. É claro que $\|T_1\| = 1$. Se $k = 2$ então $j = 1$. Segue assim de (3.7) que

$$
\|T_2\| \geq \|T_1\| + \epsilon_1\|T_1\|^2 - 4\epsilon_1^2 > \|T_1\| = 1,
$$

pois

$$\begin{aligned}\epsilon_1\|T_1\|^2 - 4\epsilon_1^2 > 0 &\iff \|T_1\|^2 - 4\epsilon_1 > 0\\ &\iff 1 - 4\epsilon_1 > 0\\ &\iff 1 > 4\epsilon_1.\end{aligned}$$

Suponha agora que se tenha $1 \leq \|T_j\| \leq \|T_k\|$ com $j < k$ e $k \geq 2$. Segue de (3.7) que

$$\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| + \epsilon_k\|T_k\|^2 - 4\epsilon_k^2 \geq \|T_j\| + \epsilon_k\|T_j\|^2 - 4\epsilon_k^2 > \|T_j\|,$$

pois sabemos que $\|T_j\| \geq 1$ e $4\dfrac{\epsilon}{2^{k+1}} < 1$, e daí

$$\begin{aligned}\|T_j\|^2 - 4\frac{\epsilon}{2^{k+1}} > 0 &\iff \|T_j\|^2 - 4\epsilon_k > 0\\ &\iff \epsilon_k\|T_j\|^2 - 4\epsilon_k^2 > 0.\end{aligned}$$

Por fim, provaremos que vale (3.9). Primeiramente observe que para cada $j < k$, obtemos de (3.6), (3.10), (3.16) e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}\|T_{j+1}x_k\| &\geq \|T_kx_k\| - \|T_kx_k - T_{j+1}x_k\|\\ &\geq \|T_kx_k\| - \|T_k - T_{j+1}\|\\ &\geq \|T_kx_k\| - 2\sum_{i=j+1}^{k-1}\epsilon_i\\ &\geq \|T_k\| - \epsilon_k^2 - 2\sum_{i=j+1}^{k-1}\epsilon_i\\ &\geq \|T_k\| - \epsilon_k^2 - \epsilon_k - 2\sum_{i=j+1}^{k-1}\epsilon_i\\ &\geq \|T_k\| - \epsilon_k - \epsilon_k - 2\sum_{i=j+1}^{k-1}\epsilon_i\\ &= \|T_k\| - 2\epsilon_k - 2\sum_{i=j+1}^{k-1}\epsilon_i\\ &= \|T_k\| - 2\sum_{i=j+1}^{k}\epsilon_i\\ &\geq \|T_k\| - \epsilon_j^2\\ &\geq \|T_{j+1}\| - 2\epsilon_j^2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese de indução. Segue de (3.16) e (3.19) que

$$\begin{aligned}\epsilon_j|y_j'(T_jx_k)|\|T_j\| + \|T_j\| &\geq \|T_{j+1}x_k\|\\ &\geq \|T_{j+1}\| - 2\epsilon_j^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \|T_j\| + \epsilon_j \|T_j\|^2 - 4\epsilon_j^2 - 2\epsilon_j^2 \\ &= \|T_j\| + \epsilon_j \|T_j\|^2 - 6\epsilon_j^2, \end{aligned}$$

e portanto

$$|y_j'(T_j x_k)| \geq \|T_j\| - 6\epsilon_j.$$

Isso completa a demonstração. ■

O teorema a seguir garante que se X e Y são espaços de Banach, então o conjunto de todos os operadores lineares e contínuos $T : X \longrightarrow Y$ tais que $T'' : X'' \longrightarrow Y''$ atinge a norma é denso em $L(X,Y)$. Sua demonstração pode ser encontrada em [26]. Denotemos por $NA_0(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : T'' \text{ atinge norma}\}$.

Teorema 3.1.5. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então $\mathcal{NA}_0(X,Y)$ é denso em $L(X,Y)$.*

Demonstração. Sejam $T \in L(X,Y)$ com $\|T\| = 1$ e $0 < \epsilon < \dfrac{1}{3}$. Considere a sequência $(\epsilon_k)_k$ como no Lema 3.1.3 e as sequências $(x_k)_k$ em X, $(y_k')_k$ em Y' e $(T_k)_k$ em $L(X,Y)$ como no Lema 3.1.4. Note que pelo Lema 3.1.4, a sequência $(T_k)_k$ é de Cauchy, e portanto converge para um $\overline{T}$ em $L(X,Y)$. Ademais, temos

$$\|T - T_k\| = \|T_1 - T_k\| \leq 2\sum_{i=1}^{k-1} \epsilon_i.$$

Logo, fazendo $k \longrightarrow \infty$ obtemos

$$\|T - \overline{T}\| < \epsilon.$$

Vamos mostrar que $\overline{T} \in NA_0(X,Y)$. Para cada $j = 2, 3, \ldots$ e $k > j$ temos

$$\begin{aligned} \|\overline{T} - T_j\| &\leq \|\overline{T} - T_k\| + \|T_k - T_j\| \\ &\leq \|\overline{T} - T_k\| + 2\sum_{i=j}^{k-1} \epsilon_i, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é devida ao Lema 3.1.4. Fazendo $k \to \infty$ e aplicando (3.10), obtemos

$$\|\overline{T} - T_j\| < \epsilon_{j-1}^2. \tag{3.20}$$

Afirmamos que $\overline{T} \in NA_0(X,Y)$. Com efeito, para $j < k$,

$$\begin{aligned} |y_j'(\overline{T} x_k)| &\geq |y_j'(T_j x_k)| - |y_j'(T_j x_k) - y_j'(\overline{T} x_k)| \\ &\geq |y_j'(T_j x_k)| - \|T_j x_k - \overline{T} x_k\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq |y_j'(T_j x_k)| - \|T_j - \overline{T}\| \\
&\overset{(3.9)}{\geq} \|T_j\| - 6\epsilon_j - \|T_j - \overline{T}\| \\
&\geq \|\overline{T}\| - \|T_j - \overline{T}\| - \|T_j - \overline{T}\| - 6\epsilon_j \qquad \text{(desigualdade triangular)} \\
&= \|\overline{T}\| - 2\|T_j - \overline{T}\| - 6\epsilon_j \\
&\overset{(3.20)}{>} \|\overline{T}\| - 6\epsilon_j - 2\epsilon_{j-1}^2 \\
&> \|\overline{T}\| - 6\epsilon_j - 2\epsilon_j \\
&= \|\overline{T}\| - 8\epsilon_j \\
&= \|\overline{T}\| - 8\frac{\epsilon}{2^{j+1}} \\
&= \|\overline{T}\| - \frac{\epsilon}{2^{j-2}} \\
&> \|\overline{T}\| - \frac{1}{j},
\end{aligned}
$$

Portanto, segue do Lema 3.1.2 o desejado. ■

Corolário 3.1.6. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se X é reflexivo então $\mathcal{NA}(X,Y)$ é denso em $L(X,Y)$.*

Demonstração. Mostraremos que $\mathcal{NA}(X,Y) = \mathcal{NA}_0(X,Y)$. De fato, suponha que $T \in \mathcal{NA}(X,Y)$. Então, existe $x \in S_X$ tal que $\|T\| = \|Tx\|$. Seja $x'' = J_X(x)$. Note que

$$
\begin{aligned}
\|T''x''\| &= \sup_{y' \in B_{Y'}} \left|T''x''(y')\right| \\
&= \sup_{y' \in B_{Y'}} \left|x''(T'(y'))\right| \\
&= \sup_{y' \in B_{Y'}} \left|J_X(x)(T'(y'))\right| \\
&= \sup_{y' \in B_{Y'}} \left|T'(y')(x)\right| \\
&= \sup_{y' \in B_{Y'}} \left|y'(T(x))\right| \\
&= \sup_{y' \in B_{Y'}} \left|J_Y(Tx)(y')\right| \\
&= \|J_Y(Tx)\| \\
&= \|Tx\| = \|T\| = \|T''\|.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Portanto, $T \in \mathcal{NA}_0(X,Y)$. Reciprocamente, suponha que $T \in \mathcal{NA}_0(X,Y)$. Então, existe x'' em $S_{X''}$ tal que $\|T''\| = \|T''x''\|$. Como X é reflexivo, existe $x \in X$ tal que $J_X(x) = x''$. Visto que J_X uma isometria, segue que $\|x\| = \|J_X(x)\| = \|x''\| = 1$. Para concluir que $T \in \mathcal{NA}(X,Y)$, é suficiente repetir os argumentos fornecidos em (3.21). ■

Vejamos um exemplo de um espaço de Banach que não tem a propriedade A de Lindenstrauss.

Proposição 3.1.7. *Seja X um espaço de Banach separável cuja norma depende localmente de finitas coordenadas. Então X não tem a propriedade A de Lindenstrauss.*

Demonstração. Mostraremos a existência de um espaço de Banach Y e de um operador em $L(X,Y)$ que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Ora, como X é separável, podemos renormalizar X de modo que se torne estritamente convexo (veja Teorema 1.1.18). Denote por Y o espaço de Banach estritamente convexo renormalizado de X. Em outras palavras, o operador identidade $I : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo. Note que I não é compacto pois X tem dimensão infinita. Pelo Lema 2.5.7, $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$. Afirmamos que I não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. De fato, suponha que exista uma sequência $(T_n)_n$ em $\mathcal{NA}(X,Y)$ que convirja para I em $L(X,Y)$. Neste caso, teríamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ o operador T_n é compacto, pois $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$. Logo, pelo Teorema 1.1.22, deveríamos ter I operador compacto, o que é uma contradição. ■

Corolário 3.1.8. *Nenhum subespaço de c_0 de dimensão infinita satisfaz a propriedade A de Lindenstrauss.*

Demonstração. Pela Proposição 2.5.2, todo subespaço fechado de c_0 depende localmente de finitas coordenadas. Por outro lado, como c_0 é separável, todo subespaço fechado de dimensão infinita de c_0 também é separável. Desse modo, segue da Proposição 3.1.7 que todo subespaço fechado de c_0 não tem a propriedade A de Lindenstrauss. ■

Não muito diferente da definição da propriedade A de Lindenstrauss, a propriedade *B de Lindenstrauss* estuda as condições inerentes ao contradomínio do operador para garantir (ou não) a densidade dos operadores que atingem a norma, seja qual for o seu domínio.

Definição 3.1.9. Dizemos que um espaço de Banach Y tem a *propriedade B de Lindenstraus* se para todo espaço de Banach X tem-se $\mathcal{NA}(X,Y)$ denso em $L(X,Y)$.

O cometário que segue o Lema 2.5.7, nos afirma que se Y é estritamente convexo então $\mathcal{NA}(c_0,Y) \subset \mathcal{F}(c_0,Y)$. Com isso temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.10. *Seja Y um espaço de Banach. Se Y é estritamente convexo e se existe um operador não compacto de c_0 em Y, então Y não tem a propriedade B de Lindenstrauss.*

Demonstração. Seja $T \in L(c_0,Y)$ operador não compacto. Suponha, por contradição, que X tenha a propriedade B de Lindenstrauss. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe um operador $\overline{T} \in NA(c_0,Y)$ tal que $\|\overline{T} - T\| < \epsilon$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $T_n \in NA(c_0,Y)$ tal que $\|T_n - T\| < \dfrac{1}{n}$. Assim $T_n \longrightarrow T$ quando $n \longrightarrow \infty$. Como $\mathcal{NA}(c_0,Y) \subset \mathcal{F}(c_0,Y)$, segue que cada T_n tem posto finito. Segue do Teorema 1.1.22 que T é compacto, o que é uma contradição.

■

Capítulo 4

Versões das Propriedades A e B de Lindenstrauss para Operadores Compactos

Durante as pesquisas realizadas sobre espaços nos quais todo operador linear e contínuo pode ser aproximado por operadores que atingem a norma, observou-se que com as mesmas justificativas é possível mostrar que operadores compactos também são aproximados por operadores compactos que atingem a norma. Então uma questão levantada foi: Existe operador compacto linear e contínuo entre espaços de Banach que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma? No artigo [29] Martín apresentou uma resposta positiva para esta questão. Ele mostrou que existem espaços de Banach e operadores compactos que não são aproximados por operadores que atingem a norma. Sabendo disso, Martín introduziu duas propriedades conhecidas como propriedades A^k e B^k, ou versões das propriedades A e B de Lindenstrauss para operadores compactos.

Neste capítulo discutiremos o exemplo apresentado por Martín em [29]. Ademais, definiremos o conceito de propriedades A^k e B^k, e trataremos das relações entre as propriedade da aproximação e as propriedades A^k e B^k.

4.1 Operadores compactos que não podem ser aproximados por operadores que atingem a norma

A seguir apresentaremos o principal teorema desta dissertação, e que também, levou Martín a introduzir as propriedades A^k e B^k. Tal teorema foi colocado pela primeira vez como uma pergunta na década de 70 em [7], e foi respondida em 2014 por Miguel Martín em [29].

Teorema 4.1.1. *Existe operador compacto entre espaços de Banach que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.*

Demonstração. Seja X um subespaço fechado de c_0 que não tem a propriedade da aproximação (Teorema 2.2.3). Pelo Teorema 2.2.10, X' também não tem a propriedade da aproximação. Segue do Teorema 2.2.9 que existem um espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|)$, $\epsilon > 0$ e um operador compacto $T \in L(X,Y)$ tais que para todo operador de posto finito $T_1 \in L(X,Y)$ tem-se $\|T - T_1\| \geq \epsilon$. Como $X \subset c_0$ segue que X é separável, logo pelo Teorema 1.1.23 temos $T(X)$ separável. Podemos então supor que Y é separável (podemos tomar $Y = T(X)$). Como Y é separável, segue do Teorema 1.1.18 que Y pode ser renormalizado de modo que o espaço normado $(Y, \|\cdot\|_1)$ seja localmente uniformemente convexo e as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ sejam equivalentes, isto é, existem constantes a e b positivas tais que, para todo $y \in Y$ tem-se $a\|y\| \leq \|y\|_1 \leq b\|y\|$. Segue do Teorema 2.2.5 que o operador

$$T : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_1)$$

não pode ser aproximado por operadores de posto finito. Assim, como o espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|_1)$ é localmente uniformemente convexo, segue do Exemplo 1.1.13 que $(Y, \|\cdot\|_1)$ é estritamente convexo. Pelo comentário que segue o Lema 2.5.7 tem-se $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$, onde a norma em X é $\|\cdot\|_X$ e a norma em Y é $\|\cdot\|_1$. Portanto todo operador que atinge a norma em X é de posto finito, e como T não pode ser aproximado por operadores de posto finito, segue que T não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Isso mostra o resultado. ∎

O teorema a seguir é uma consequência da demonstração de Teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.2. *Para todo subespaço X fechado de c_0 tal que X' falha a propriedade da aproximação, existem um espaço de Banach Y e um operador compacto linear $T : X \longrightarrow Y$ que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.*

Corolário 4.1.3. *Existem um espaço de Banach X com base de Schauder, um espaço de Banach Y e um operador compacto linear $T : X \longrightarrow Y$ que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.*

Demonstração. De fato, segue do Teorema 2.2.35 que existe um subespaço de Banach Y_1 de c_0 com base de Schauder tal que Y_1' falha a propriedade da aproximação. Logo, segue do Teorema 4.1.2 que existe um espaço de Banach Y_2 e um operador compacto linear $T : Y_1 \longrightarrow Y_2$ que não pode ser aproximado por operadores que atinge a norma. ∎

O próximo teorema com auxílio do Lema 2.2.12 nos diz que em espaços de Banach estritamente convexos nos quais falha a propriedade da aproximação, é sempre possível garantir a existência de um espaço de Banach X e um operador compacto de X em Y linear contínuo que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.

Teorema 4.1.4. *Seja Y um espaço de Banach estritamente convexo que falha a propriedade da aproximação. Então, existem um espaço de Banach X e um operador compacto de X em Y que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.*

Demonstração. Como Y não tem a propriedade da aproximação, segue do Lema 2.2.12 que existem um subespaço fechado X de c_0, um operador $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ e $\epsilon > 0$ tais que para todo $\overline{T} \in \mathcal{F}(X, Y)$ tem-se $\|\overline{T} - T\| \geq \epsilon$. Como Y é estritamente convexo, segue do Lema **??** que $\mathcal{NA}(X, Y) \subset \mathcal{F}(X, Y)$. Em particular, temos $\|\overline{T} - T\| \geq \epsilon$ para todo $\overline{T} \in \mathcal{NA}(X, Y)$. Portanto T não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. ∎

Definição 4.1.5. Um espaço de Banach complexo Y é dito *complexo estritamente convexo* se para cada $y \in S_Y$ e $z \in Y$ com $\|y - \theta z\| \leq 1$ e $|\theta| = 1$ tem-se $z = 0$.

Vejamos alguns resultados envolvendo os espaços de Banach complexos estritamente convexos.

Lema 4.1.6. Seja X um subespaço fechado de c_0 e seja Y um espaço de Banach complexo estritamente convexo. Então, $\mathcal{NA}(X, Y) \subset \mathcal{F}(X, Y)$.

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{NA}(X, Y)$, $|\theta| = 1$ com $\theta \in \mathbb{C}$ e $x_0 = (x_{0,n})_n \in S_X$ tais que $\|Tx_0\| = \|T\| = 1$. Como $x_0 \in c_0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ implica $|x_{0,n}| \leq \dfrac{1}{2}$. Seja

$$Z = \{z \in X : z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n_0\}.$$

Não é difícil ver que Z é subespaço fechado de X. Note que para todo $n > n_0$ tem-se $e_n = (0, 0, \dots, \overset{(n)}{1}, 0, \dots) \in Z$. Como $\|x_0\|_\infty = 1$ tem-se $|x_{0,n}| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, além disso, $|x_{0,n}| \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $n > n_0$. Segue que

$$\left\| x_0 \pm \frac{1}{2}\theta e_n \right\|_\infty = \sup\left\{ |x_{0,1}|, \dots, |x_{0,n-1}|, \left| x_{0,n} \pm \frac{1}{2}\theta \right|, |x_{0,n+1}|, \dots \right\} \leq 1.$$

Logo

$$\left\| Tx_0 \pm \frac{1}{2}\theta Te_n \right\| \leq \|T\| \left\| x_0 \pm \frac{1}{2}\theta e_n \right\| \leq 1.$$

Por hipótese Y é complexo estritamente convexo e $\|Tx_0\| = 1$. Portanto $Te_n = 0$ para todo $n > n_0$. Como $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder para c_0, para cada $x \in X$ existe uma sequência de escalares $(a_n)_n$ em $\mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Segue que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T e_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n T e_n.$$

Portanto $T \in \mathcal{F}(X, Y)$, como queríamos. ■

Como o espaço de Banach $L_1(\mu)$ é complexo estritamente convexo (veja [16]), segue a seguinte proposição.

Proposição 4.1.7. *Sejam μ uma medida e Y um subespaço fechado do espaço complexo $L_1(\mu)$ que falha a propriedade da aproximação. Então, existem um espaço de Banach X e um operador linear compacto de X em Y que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.12, existe um subespaço fechado X de c_0 tal que $\mathcal{F}(X, Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X, Y)$. Como pelo Lema 4.1.6 temos $\mathcal{NA}(X, Y) \subset \mathcal{F}(X, Y)$, segue que existem operadores compactos de X em Y que não podem ser aproximados por operadores que atingem a norma. ■

A seguinte proposição que pode ser encontrada em [26, Proposition 5], nos ajudará a exibir um exemplo de um operador linear e contínuo que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Neste caso faremos $X = Y$. Lembre que existe um espaço de Banach estritamente convexo isomorfo a c_0.

Proposição 4.1.8. *Existe um espaço Banach X tal que $\mathcal{NA}(X, X)$ não é denso em $L(X, X)$.*

Demonstração. Seja $Y = c_0$ e considere Z um espaço de Banach estritamente convexo isomorfo a c_0. Faça $X = Y \times Z$ com $\|(y, z)\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}$ e $B_X = B_Y \times B_Z$. Claramente X é Banach pois Y e Z o são. Vamos mostrar que $\mathcal{NA}(X, X)$ não é denso em $L(X, X)$, mas antes disso precisaremos construir um operador T em $L(X, X)$ que nos ajudará nesta demonstração. Seja T_0 o isomorfismo de Y em Z. Segue da Proposição 1.1.20 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T_0 y\| \geq C\|y\| \tag{4.1}$$

para todo $y \in Y$. Seja $\epsilon_1 = \dfrac{C}{2} > 0$. Defina

$$T : X \longrightarrow X, \quad T(y, z) = (0, T_0 y).$$

A linearidade e continuidade de T seguem de T_0. Ademais,

$$\|T\| \ = \ \sup\Big\{\|T(y, z)\| : (y, z) \in B_X\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\Big\{\|(0,T_0y)\| : (y,z)\in B_X\Big\}\\
&= \sup\Big\{\|T_0y\| : y\in B_Y\Big\}\\
&= \|T_0\|.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $\mathcal{NA}(X,X)$ não é denso em $L(X,X)$. Suponha por absurdo que $\mathcal{NA}(X,X)$ seja denso em $L(X,X)$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe $\overline{T} \in \mathcal{NA}(X,X)$ tal que $\|\overline{T} - T\| < \epsilon$. Em particular, para $\epsilon = \epsilon_1$ existe $T_1 \in \mathcal{NA}(X,X)$ tal que $\|T_1 - T\| < \epsilon_1$. Vamos chegar ao absurdo de que $\epsilon_1 > 2\epsilon_1$. Seja $(y_0,z_0) \in S_X = S_Y \times S_Z$ tal que $\|T_1\| = \|T_1(y_0,z_0)\|$. Faça $T(y_0,z_0) = (u,v)$. Segue de (4.1) que $\|T_0y\| \geq C\|y\|$ para todo $y \in Y$. Como $\epsilon_1 = \dfrac{C}{2} > 0$, segue que $\|T_0y\| \geq 2\epsilon_1\|y\|$ para todo $y \in Y$. Logo, se $y \neq 0$ tem-se

$$\|T\| = \|T_0\| \geq \left\|T_0\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \geq 2\epsilon_1.$$

Pela desigualdade triangular obtemos

$$\|T\| \leq \|T_1 - T\| + \|T_1\|,$$

o que implica

$$\|T_1\| \geq \|T\| - \|T_1 - T\| > 2\epsilon_1 - \epsilon_1 = \epsilon_1. \tag{4.2}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\max\{\|u\|, \|v - T_0y_0\|\} &= \|(u, v - T_0y_0)\|\\
&= \|(u,v) - (0, T_0y_0)\|\\
&= \|T_1(y_0,z_0) - T(y_0,z_0)\| \qquad (T(y_0,z_0) = (0,T_0y_0))\\
&\leq \|T_1 - T\|\|(y_0,z_0)\|\\
&= \|T_1 - T\| < \epsilon_1.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|u\| < \epsilon_1. \tag{4.3}$$

Lembre que $\|T_1\| = \|T_1(y_0,z_0)\| = \|(u,v)\|$. Como por (4.2) temos $\|T_1\| > \epsilon_1$ e por (4.3) temos $\|u\| < \epsilon_1$, segue que $\|T_1\| = \|v\|$. Como Y não é estritamente convexo, segue da Proposição 1.1.2(e) que existe $y_1 \neq 0$ em Y tal que

$$\|y_0 \pm y_1\| \leq 1.$$

Portanto

$$\|T_1(y_0,z_0) \pm T_1(y_1,0)\| \;\leq\; \|T_1(y_0 \pm y_1, z_0)\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|T_1\|\|(y_0 \pm y_1, z_0)\| \\
&= \|T_1\|\max\{\|y_0 \pm y_1\|, \|z_0\|\} \\
&\leq \|T_1\| = \|(u,v)\| = \|T_1(y_0,z_0)\|,
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\left\| \frac{T_1(y_0,z_0)}{\|T_1(y_0,z_0)\|} \pm \frac{T_1(y_1,0)}{\|T_1(y_0,z_0)\|} \right\| \leq 1. \tag{4.4}
$$

Faça $T_1(y_1,0) = (y_2, z_2)$. Segue de (4.4) que

$$
\left\| \frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \pm \frac{(y_2,z_2)}{\|(u,v)\|} \right\| \leq 1.
$$

Lembre que $T_1(y_0,z_0) = (u,v)$ e $\|v\| = \|T_1\| = \|T_1(y_0,z_0)\| = \|(u,v)\|$. Assim

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{v}{\|v\|} \pm \frac{z_2}{\|v\|} \right\| &= \frac{\|v \pm z_2\|}{\|v\|} \\
&= \frac{\|v \pm z_2\|}{\|(u,v)\|} \\
&\leq max\left\{ \frac{\|u \pm y_2\|}{\|(u,v)\|}, \frac{\|v \pm z_2\|}{\|(u,v)\|} \right\} \\
&= max\left\{ \left\| \frac{u \pm y_2}{\|(u,v)\|} \right\|, \left\| \frac{v \pm z_2}{\|(u,v)\|} \right\| \right\} \\
&= \left\| \left(\frac{u \pm y_2}{\|(u,v)\|}, \frac{v \pm z_2}{\|(u,v)\|} \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \pm \frac{(y_2,z_2)}{\|(u,v)\|} \right\| \leq 1.
\end{aligned}
$$

Como Z é estritamente convexo, segue da Proposição 1.1.2(e) que $z_2 = 0$. Logo $T_1(y_1,0) = (y_2, 0)$. Assim

$$
\begin{aligned}
\epsilon_1 = \epsilon_1\|y_1\| &> \|T - T_1\|\|(y_1,0)\| \\
&\geq \|T(y_1,0) - T_1(y_1,0)\| \\
&= \|(0,T_0) - (y_2,0)\| \\
&= \|(y_2, T_0 y_1)\| \\
&\geq \|T_0 y_1\| \\
&\geq 2\epsilon_1\|y_1\| = 2\epsilon_1.
\end{aligned}
$$

Logo temos um absurdo. Portanto $\mathcal{NA}(X,X)$ não é denso em $L(X,X)$. ■

Apresentaremos a seguir uma versão da Proposição 4.1.8 para operadores compactos. Para isso, façamos a seguinte proposição.

Proposição 4.1.9. *Sejam X e Y espaços de Banach, $T_0 \in \mathcal{K}(X,Y)$ com $\|T_0\| = 1$ fixo e $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Seja $Z = X \times Y$. Considere em Z a norma $\|(x,y)\| = max\{\|x\|, \|y\|\}$ para $(x,y) \in Z$ e defina*

$$S_0 : Z \longrightarrow Z, \qquad S_0(x,y) = (0, T_0(x))$$

para todo $z = (x,y) \in Z$, com $S_0 \in \mathcal{K}(Z,Z)$. Se existir um operador $S \in \mathcal{NA}(Z,Z)$ tal que $\|S - S_0\| < \epsilon$, então existe um operador $T \in \mathcal{NA}(X,Y)$ tal que $\|T_0 - T\| < \epsilon$ e $\|S_0\| = \|T_0\| = 1$.

Demonstração. Primeiramente vejamos que $\|S_0\| = \|T_0\| = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \|S_0\| &= \sup\{\|S_0(z)\| : z \in B_Z\} \\ &= \sup\{\|(0, T_0(x))\| : (x,y) \in B_X \times B_Y\} \\ &= \sup\{\|T_0(x)\| : x \in B_X\} = \|T_0\| = 1. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe $T \in \mathcal{NA}(X,Y)$ tal que $\|T_0 - T\| < \epsilon$ com $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Seja $(x_0, y_0) \in S_Z$ tal que $\|S(x_0,y_0)\| = \|S\|$. Para construir o operador T usaremos os seguintes operadores

$$P_1 : Z \longrightarrow X, \qquad P_1(x,y) = x,$$

e

$$P_2 : Z \longrightarrow Y, \qquad P_2(x,y) = y.$$

A linearidade e continuidade de P_1 e P_2 são claras. Note que

$$\|P_1 \circ S\| = \|P_1 \circ S - P_1 \circ S_0\| \leq \|P_1\|\|S - S_0\| < \epsilon < \frac{1}{2}.$$

Ademais,

$$\|S_0\| \leq \|S_0 - S\| + \|S\|,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|S\| &\geq \|S_0\| - \|S_0 - S\| \\ &= 1 - \|S_0 - S\| \\ &> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Faça $S(x_0,y_0) = (x_1,y_1)$ para algum $(x_1,y_1) \in Z$. Note que

$$\|x_1\| = \|(P_1 \circ S)(x_0,y_0)\| \leq \|P_1 \circ S\| < \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Como
$$\|S\| = \|S(x_0, y_0)\| = \|(x_1, y_1)\| = \max\{\|x_1\|, \|y_1\|\},$$
segue de (4.5) e (4.6) que $\|x_1\| < \frac{1}{2} < \|S\|$, o que implica $\|S\| = \|y_1\|$. Logo,
$$\|y_1\| = \|P_2(x_1, y_1)\| = \|(P_2 \circ S)(x_0, y_0)\| \leq \|P_2 \circ S\| \leq \|S\| = \|y_1\|,$$
o que implica
$$\|(P_2 \circ S)(x_0, y_0)\| = \|P_2 \circ S\|. \tag{4.7}$$
Seja $x_0 \in S_X$. Segue do Teorema de Hanh-Banach que existe $x'_0 \in S_{X'}$ com $x'_0(x_0) = 1$. Defina $T \in L(X, Y)$ por
$$T : X \longrightarrow Y, \quad T(x) = (P_2 \circ S)(x, x'_0(x)y_0).$$
É fácil ver que T é linear e contínuo. Ademais, para cada $x \in X$ tem-se
$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|(P_2 \circ S)(x, x'_0(x)y_0)\| \\ &\leq \|P_2 \circ S\| \|(x, x'_0(x)y_0)\| \\ &\leq \|P_2 \circ S\| \|x\|, \end{aligned}$$
e portanto $\|T\| \leq \|P_2 \circ S\|$. Por outro lado,
$$\begin{aligned} \|T(x_0)\| &= \|(P_2 \circ S)(x_0, x'_0(x_0)y_0)\| \\ &= \|(P_2 \circ S)(x_0, y_0)\| \\ &\overset{(4.7)}{=} \|P_2 \circ S\| \\ &\geq \|T\|. \end{aligned}$$
Isto mostra que $\|T\| = \|T(x_0)\|$. Ademais, para cada $x \in B_X$ tem-se
$$\begin{aligned} \|T_0(x) - T(x)\| &= \|(P_2 \circ S_0)(x, x'_0(x)y_0) - (P_2 \circ S)(x, x'_0(x)y_0)\| \\ &\leq \|P_2 \circ S_0 - P_2 \circ S\| \\ &\leq \|P_2\| \|S_0 - S\| \\ &= \|S_0 - S\| < \epsilon. \end{aligned}$$
Logo, $\|T_0 - T\| < \epsilon$. Assim o resultado está demonstrado. ■

Como consequência da Proposição 4.1.9 obtemos a seguinte versão da Proposição 4.1.8 para operadores compactos.

Corolário 4.1.10. Existem um espaço de Banach Z e um operador compacto de Z em Z que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma.

Demonstração. Pelo Teorema 4.1.1, existem X, Y espaços de Banach e $T_0 : X \longrightarrow Y$ operador compacto que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Seja $Z = X \times Y$ com a norma $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. O operador T_0 não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Logo, aplicando a contra-positiva da Proposição 4.1.9 teremos que o operador compacto

$$S_0 : Z \longrightarrow Z, \qquad S_0(x, y) = (0, T_0 x) \tag{4.8}$$

não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. ■

Proposição 4.1.11. *Sejam X, Y espaços de Banach e $Z = X \times Y$, com a norma $\|(x, y)\| = max\{\|x\|, \|y\|\}$. Se $\mathcal{NA}(Z, Z) \cap \mathcal{K}(Z, Z)$ é denso em $\mathcal{K}(Z, Z)$ então $\mathcal{NA}(X, Y) \cap \mathcal{K}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Demonstração. Se $\mathcal{NA}(X, Y) \cap \mathcal{K}(X, Y)$ não é denso $\mathcal{K}(X, Y)$, então pela Proposição 4.1.9 temos que $NA(Z, Z)$ não seria denso em $K(Z, Z)$. Logo $\mathcal{NA}(Z, Z) \cap \mathcal{K}(Z, Z)$ é denso em $\mathcal{K}(Z, Z)$, o que é claramente uma contradição, pois $\mathcal{NA}(Z, Z) \cap \mathcal{K}(Z, Z)$ é denso em $\mathcal{K}(Z, Z)$. Portanto devemos ter $\mathcal{NA}(X, Y) \cap \mathcal{K}(X, Y)$ denso em $\mathcal{K}(X, Y)$. ■

4.2 Propriedade A^k

Sabemos que existem operadores compactos entre espaços de Banach que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma (veja Teorema 4.1.1). Com isso, apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.2.1. Dizemos que um espaço de Banach X tem *a propriedade A^k* se para todo espaço de Banach Y tem-se $\mathcal{NA}(X, Y) \cap \mathcal{K}(X, Y)$ denso em $\mathcal{K}(X, Y)$.

A seção anterior justifica o sentido de definir a propriedade A^k. Ademais, algumas questões que se encontram em aberto relacionadas à propriedade A^k são: A propriedade A de Lindenstrauss implica a propriedade A^k? Qual a relação entre a propriedade A^k e a propriedade da aproximação? Nesta seção investigaremos a propriedade A^k.

Exemplo 4.2.2. Espaços reflexivos têm a propriedade A^k, pois em espaços reflexivos todo operador compacto atinge a norma. De fato, sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador compacto linear e contínuo. Suponha que X seja reflexivo. Como $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$, existe uma sequência $(x_n)_n \subset B_X$ tal que $\lim_n \|Tx_n\| = \|T\|$. Por hipótese, X é reflexivo, logo a bola B_X é compacta na topologia fraca (veja [4, Teorema 6.4.5]). Pelo Teorema de Eberlein-Smulian (veja [4, Teorema 6.7.3]) existe uma subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ que converge fracamente para algum $y \in B_X$, isto é, $x_{n_j} \xrightarrow{w} y$. Como T é compacto tem-se $Tx_{n_j} \longrightarrow Ty$ na topologia da norma (veja [4, Proposição 7.2.8]). Portanto, obtemos $\|Ty\| = \lim_j \|Tx_{n_j}\| = \|T\|$. Isso mostra que T atinge a norma.

Ainda não se sabe se a propriedade A de Lindenstrauss implica a propriedade A^k, o que se sabe é que todos os espaços conhecidos que têm a propriedade A também têm a propriedade A^k. A seguinte proposição pode ser encontrada em [30].

Proposição 4.2.3. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que exista um rede $(P_\alpha)_\alpha$ de projeções contrativas (i.e, $\|P_\alpha\| = 1$ para todo α) de posto finito em X tal que para todo $x' \in X'$, $P'_\alpha(x') \longrightarrow x'$ em norma. Então X tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Sejam Y espaço de Banach, $T : X \longrightarrow Y$ um operador compacto e $\epsilon > 0$. Note que para cada α temos que P_α é compacto, pois tem posto finito. Logo o operador linear e contínuo $T \circ P_\alpha : X \longrightarrow Y$ é compacto. Nosso objetivo é mostrar que $T \circ P_\alpha$ atinge a norma para cada α e que $\|T \circ P_\alpha - T\| \xrightarrow{\alpha} 0$. Para isso, primeiramente mostraremos que

$$T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right) = T\left(B_{P_\alpha(X)}\right). \tag{4.9}$$

De fato, se $y \in T \circ P_\alpha(B_X)$ então existe $x \in B_X$ tal que $T \circ P_\alpha(x) = y$. Como $\|P_\alpha\| = 1$ para cada α tem-se

$$\|P_\alpha(x)\| \leq \|P_\alpha\|\|x\| \leq 1,$$

o que implica $P_\alpha(x) \in B_{P_\alpha(X)}$. Como $T \circ P_\alpha(x) = y$, segue que $y \in T\left(B_{P_\alpha(X)}\right)$. Mostraremos a inclusão inversa. Primeiramente note que $B_{P_\alpha(X)} \subset B_X$. Seja $y \in T\left(B_{P_\alpha(X)}\right)$. Logo, existe $x \in B_{P_\alpha(X)}$ tal que $T(x) = y$. Como $x \in P_\alpha(X)$ para cada α, existe $z \in X$ tal que $P_\alpha(z) = x$. Note que

$$P_\alpha(x) = P_\alpha(P_\alpha(z)) = P_\alpha(z) = x.$$

Portanto

$$y = T(x) = T(P_\alpha(x)) \in T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right).$$

Isso mostra (4.9). Como para cada α temos que P_α tem posto finito, então $B_{P_\alpha(X)}$ é compacto, e como T é contínuo segue que o conjunto $T\left(B_{P_\alpha(X)}\right)$ é compacto. De (4.9) obtemos que o conjunto $T \circ P_\alpha(B_X)$ é compacto. Vamos mostrar que $T \circ P_\alpha$ atinge a norma para cada α. Considere a aplicação

$$\overline{T}_\alpha : T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \overline{T}_\alpha(z) = \|z\|,$$

para cada $z \in T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right)$. Claramente $\overline{T}_\alpha$ é contínua para cada α. Como $T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right)$ é compacto para cada α existe $z_\alpha \in T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right)$ tal que

$$\overline{T}_\alpha(z_\alpha) = \sup\left\{\overline{T}_\alpha(z) : z \in T\left(P_\alpha\left(B_X\right)\right)\right\}. \tag{4.10}$$

Por outro lado, para cada $z \in T(P_\alpha(B_X))$ existe $x \in B_X$ tal que $T(P_\alpha(x)) = z$. Em particular, para cada α existe $x_\alpha \in B_X$ tal que $T(P_\alpha(x_\alpha)) = z_\alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} \|T \circ P_\alpha(x_\alpha)\| = \|z_\alpha\| &= \overline{T}_\alpha(z_\alpha) \\ &\overset{(4.10)}{=} \sup\left\{\overline{T}_\alpha(z) : z \in T(P_\alpha(B_X))\right\} \\ &= \sup\{\|T \circ P_\alpha(x)\| : x \in B_X\} \\ &= \|T \circ P_\alpha\|. \end{aligned}$$

Isto mostra que $T \circ P_\alpha$ atinge a norma para cada α. Resta mostrar que à rede $(T \circ P_\alpha)_\alpha$ converge para T em $L(X, Y)$. De fato, como T é compacto, segue que T' é compacto, ou seja, o conjunto $\overline{T'(B_{Y'})}$ é compacto. Logo existem $x'_1, \ldots, x'_n$ em $\overline{T'(B_{Y'})}$ tais que

$$\overline{T'(B_{Y'})} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x'_i, \frac{\epsilon}{3}\right).$$

Por hipótese $P'_\alpha(x') \longrightarrow x'$ em norma para cada $x' \in X'$. Logo existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que para todo $\alpha \geq \alpha_i$ implica

$$\|P_\alpha(x'_i) - x'_i\| < \frac{\epsilon}{3}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Seja $\alpha_0 \geq \alpha_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, assim para todo $\alpha \geq \alpha_0$ temos

$$\|P_\alpha(x'_i) - x'_i\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Note que para cada $y' \in B_{Y'}$ existe $x'_i \in X'$ com $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\|T'(y') - x'_i\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, para cada $y' \in B_{Y'}$ e $\alpha \geq \alpha_0$,

$$\begin{aligned} \|P'_\alpha(T'(y')) - T'(y')\| &\leq \|P'_\alpha(T'(y')) - P'_\alpha(x'_i)\| + \|P'_\alpha(x'_i) - x'_i\| + \|x'_i - T'(y')\| \\ &\leq \|P'_\alpha\|\|T'(y') - x'_i\| + \|P'_\alpha(x'_i) - x'_i\| + \|x'_i - T'(y')\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo

$$\|P'_\alpha \circ T' - T'\| \leq \epsilon \ \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0,$$

o que implica

$$\|T \circ P_\alpha - T\| \leq \epsilon \ \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

Isso mostra que à rede $(T \circ P_\alpha)_\alpha$ converge para T em $L(X, Y)$, como desejado. Portanto X tem a propriedade A^k. ■

Lema 4.2.4. *Sejam X um espaço de Banach e $R : X' \longrightarrow X'$ um operador linear e w^*-w^*-contínuo. Então existe um operador linear e contínuo $T : X \longrightarrow X$ tal que $T' = R$. Se além disso R for uma projeção, então T é uma projeção e, se R tiver posto finito, então T tem posto finito.*

Demonstração. Sejam

$$R' : X'' \longrightarrow X'', \quad R'(x'')(x') = x''(R(x')),$$

$$U : X \longrightarrow J_X(X), \quad U(x) = J_X(x)(x') = x'(x)$$

e

$$U^{-1} : J_X(X) \longrightarrow X.$$

Tem-se que $R'(J_X(X)) \subset J_X(X)$, isto segue como aplicação das proposições em [4, Proposição 6.3.2(e), Proposição 6.3.6]. Defina

$$T = U^{-1} \circ R' \circ U : X \longrightarrow X.$$

É claro que T é linear e contínuo. Vamos mostrar que $T' = R$. De fato,

$$\begin{aligned}
T'(x')(x) &= (U^{-1} \circ R' \circ U)'(x')(x) \\
&= U' \circ R'' \circ (U^{-1})'(x')(x) \\
&= R'' \circ (U^{-1})'(x') \circ U(x) \\
&= (U^{-1})'(x') \circ R' \circ U(x) \\
&= x'\big(U^{-1} \circ R' \circ U(x)\big) \\
&= U\big(U^{-1} \circ R' \circ U(x)\big)(x') \\
&= R' \circ U(x)(x') \\
&= U(x)(R(x')) \\
&= R(x')(x).
\end{aligned}$$

Se R é uma projeção, então

$$\begin{aligned}
T \circ T &= (U^{-1} \circ R' \circ U) \circ (U^{-1} \circ R' \circ U) \\
&= U^{-1} \circ R' \circ U \circ U^{-1} \circ R' \circ U \\
&= U^{-1} \circ R' \circ R' \circ U \\
&= U^{-1} \circ R' \circ U = T
\end{aligned}$$

Prosseguindo, se R tem posto finito, então pelo Lema 2.2.7 existem $k \in \mathbb{N}$, $x''_1, \ldots, x''_k \in X''$ e $x'_1, \ldots, x'_k \in X'$ tais que $R(x') = \sum_{j=1}^{k} x''_j(x')x'_j$ para todo $x' \in X'$. Veja que para todos

$x'' \in X''$ e $x' \in X'$ tem-se

$$R'(x'')(x') = x''(R(x')) = x''\left(\sum_{j=1}^{k} x_j''(x')x_j'\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j''(x')x''(x_j') = \sum_{j=1}^{k} x''(x_j')x_j''(x').$$

Isso mostra que

$$R'(x'') = \sum_{j=1}^{k} x''(x_j')x_j'',$$

para cada $x'' \in X''$. Logo, pelo Lema 2.2.7 tem-se que R' têm posto finito. Como $T = U^{-1} \circ R' \circ U$, concluímos que T é de posto finito. Portanto o lema está demonstrado. ■

Corolário 4.2.5. *Seja X um espaço de Banach tal que X' é isomorfo isometricamente a ℓ_1. Então X tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Seja $T : X' \longrightarrow \ell_1$ um isomorfismo isométrico, e seja $(e_n)_n$ a base de Schauder usual de ℓ_1. Não é difícil ver que a sequência $(x_n')_n$ é uma base de Schauder de X', onde $x_n' = T^{-1}(e_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que para cada $x' \in X'$ existe uma única sequência de escalares $(a_n)_n$ tais que

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n'.$$

Sob essas condições, na demonstração em [10, Corollary 4.1] é construída uma sequência de projeções $(P_n)_n$ contrativas de posto finito e w^*-w^*-contínua em X' que converge forte para a identidade em X', isto é, $P_n x' \longrightarrow x'$ em norma para cada $x' \in X'$. Pelo Lema 4.2.4, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{P}_n : X \longrightarrow X$ tal que $\tilde{P}_n{}' = P_n$ e cada $\tilde{P}_n$ é uma projeção em X de posto finito. Com isso, note que existe em X uma sequência de projeções $(\tilde{P}_n)_n$ de posto finito contrativas, com $\tilde{P}_n{}'(x') \longrightarrow x'$ em norma para todo $x' \in X'$ onde $P_n = \tilde{P}_n{}'$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Proposição 4.2.3 tem-se que X tem a propriedade A^k. ■

Corolário 4.2.6. *Todo espaço de Banach com base de Schauder contrátil monótona tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma base de Schauder monótona contrátil de X. Desse modo, cada $x \in X$ tem uma única representação

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

com $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(x_n')_n$ de funcionais coeficientes dadas por

$$x_n' : X \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x_n'\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n,$$

é uma base de Shauder para X', ou seja, cada $x' \in X'$ tem uma única representação

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x'_n$$

com $b_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ademais, a sequência $(P_n)_n$ de projeções dadas por

$$P_n : X \longrightarrow X, \qquad P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

é tal que $\|P_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pois $(x_n)_n$ é uma base monótona. Note que por hipótese a sequência $(P_n)_n$ é contrativa (dizer que a base de Schauder é monótona é o mesmo que dizer que a norma das projeções canônicas é 1) e tem posto finito. Vamos mostrar que $P'_n x' \longrightarrow x'$ em norma para cada $x' \in X'$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$P'_n : X' \longrightarrow X', \qquad P'_n(x')(x) = x'(P_n(x)).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
P'_n(x')(x) &= x'(P_n(x)) \\
&= x'\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j x'(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) b_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j x'_j(x),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$P'_n(x') = \sum_{j=1}^{n} b_j x'_j$$

para todos $x' \in X'$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $x' \in X'$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|x' - P'_n(x')\| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x'_j - \sum_{j=1}^{n} b_j x'_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j x'_j\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Logo segue da Proposição 4.2.3 que X tem a propriedade A^k. ■

Corolário 4.2.7. *Seja X um espaço de Banach com base de Schauder monótona incondicional que não contém ℓ_1. Então X tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ a base de Schauder monótona incondicional de X. Como X não contém ℓ_1, segue do Teorema 2.1.13 que $(x_n)_n$ é contrátil. Portanto, pelo Corolário 4.2.6, X tem a propriedade A^k. ■

Teorema 4.2.8. *Toda sequência básica em um espaço M-mergulho com constante de base < 2 é contrátil.*

Demonstração. Veja [15, Corollary 3.10, p.134]. ■

Corolário 4.2.9. *Todo espaço M-mergulho com base de Schauder monótona tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Sejam X um espaço M-mergulho e $(x_n)_n$ uma base de Schauder monótona de X. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ a sequência de projeções $(P_n)_n$ tem norma 1, segue que a constante de base é 1. Em particular, $(x_n)_n$ é uma sequência básica de X e tem constante de base < 2. Segue do Teorema 4.2.8 que $(x_n)_n$ é contrátil e portanto, pelo Corolário 4.2.6, X tem a propriedade A^k. ■

Proposição 4.2.10. *Seja X um espaço de Banach separável cuja norma depende localmente de finitas coordenadas e que o dual não tem a propriedade da aproximação. Então X não tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Como X' falha a propriedade da aproximação, segue do Teorema 2.2.9 que existem $\epsilon > 0$, um espaço de Banach Y e um operador compacto $T \in L(X, Y)$ tal que para todo $T_1 \in \mathcal{F}(X, Y)$ tem-se $\|T_1 - T\| \geq \epsilon$. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 4.1.1 podemos supor que Y é estritamente convexo. Assim, segue do Lema 2.5.7 que $\mathcal{NA}(X, Y) \subset \mathcal{F}(X, Y)$. Logo T não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Em particular, para todo $T_1 \in \mathcal{NA}(X, Y) \cap \mathcal{K}(X, Y)$ tem-se $\|T_1 - T\| \geq \epsilon$. Portanto X não tem a propriedade A^k. ■

Exemplo 4.2.11. Pelo Teorema 2.2.35, existe um espaço de Banach Y_1 isomorfo a um subespaço X do espaço de Banach real c_0, com base de Schauder, mas que o dual não tem a propriedade da aproximação. Seja $T : Y_1 \longrightarrow X$ o isomorfismo de Y_1 a X. Logo, pelo Teorema de Schauder tem-se que $T' : X' \longrightarrow Y_1'$ é um isomorfismo. Como Y_1' não tem a propriedade da aproximação, segue do Teorema 2.2.4 que X' não tem a propriedade da aproximação. Ademais, pela Proposição 2.5.2, a norma em X depende localmente de finitas coordenadas. Portanto, segue da Proposição 4.2.10 que X não tem a propriedade A^k.

Teorema 4.2.12. *Seja X um espaço de Banach separável. Então são equivalentes:*
(a) X é isomorfo a um espaço poliedral.
(b) X admite uma norma equivalente que depende localmente de finitas coordenadas.

Demonstração. Veja [9, Theorem 1]. ∎

Corolário 4.2.13. *Seja X um espaço de Banach separável real poliedral tal que X' não tem a propriedade da aproximação. Então X admite uma norma equivalente que falha a propriedade A^k.*

Demonstração. Segue do Teorema 4.2.12 que X admite uma norma equivalente que depende localmente de infinitas coordenadas. Como X' falha a propriedade da aproximação, segue da Proposição 4.2.10 que X não tem a propriedade A^k. ∎

Sabemos que espaços de Banach que têm a propriedade α têm a propriedade A de Lindenstrauss. Com uma demonstração adaptada, o seguinte resultado que pode ser encontrado em [30], nos diz que espaço com a propriedade α tem a propriedade A^k.

Proposição 4.2.14. *A propriedade α implica a propriedade A^k.*

Demonstração. Sejam Y espaço de Banach, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ com $T \neq 0$ e $\epsilon > 0$. Suponha que X tenha a propriedade α, isto é, existem dois conjuntos $\{x_i : i \in I\} \subset S_X$, $\{x'_i : i \in I\} \subset S_{X'}$ e uma constante $0 \leq \rho < 1$ satisfazendo as seguintes condições:
(*a*) $x'_i(x_i) = 1$ para todo $i \in I$.
(*b*) $|x'_i(x_j)| \leq \rho < 1$ se $i, j \in I$ e $i \neq j$.
(*c*) $B_X = \overline{\text{conv}}\{x_i : i \in I\}$.
Mostraremos que existe $S \in \mathcal{K}(X,Y) \cap \mathcal{NA}(X,Y)$ tal que $\|S - T\| \leq \epsilon$. De fato, como $T \neq 0$ tem-se $\|T\| > 0$. Segue do Lema 2.3.2 que existe $i \in I$ tal que

$$\|Tx_i\| > \frac{\|T\|\left(1 + \dfrac{\epsilon\rho}{\|T\|}\right)}{1 + \dfrac{\epsilon}{\|T\|}}.$$

Defina

$$S : X \longrightarrow Y, \qquad Sx = Tx + \frac{\epsilon}{\|T\|}x'_i(x)Tx_i.$$

Veja que S está bem definido e é linear. Ademais, S é um operador compacto, pois é soma de um operador compacto e um funcional linear contínuo que também é compacto. Mostraremos que S atinge a norma em x_i. De fato, para todo $j \neq i$ tem-se

$$\begin{aligned} \|Sx_j\| &= \left\|Tx_j + \frac{\epsilon}{\|T\|}x'_i(x_j)Tx_i\right\| \\ &\leq \|T\| + \frac{\epsilon\rho}{\|T\|}\|T\| \\ &= \|T\| + \epsilon\rho. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|Sx_i\| = \left\|Tx_i + \frac{\epsilon}{\|T\|}x'_i(x_i)Tx_i\right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\|Tx_i + \frac{\epsilon}{\|T\|}Tx_i\right\| \\
&= \left\|Tx_i\Big(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\Big)\right\| \\
&= \|Tx_i\|\Big(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\Big) \\
&> \frac{\|T\|\Big(1 + \frac{\epsilon\rho}{\|T\|}\Big)\Big(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\Big)}{\Big(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\Big)} \\
&= \|T\|\Big(1 + \frac{\epsilon\rho}{\|T\|}\Big) \\
&= \|T\| + \epsilon\rho \geq \|Sx_j\|.
\end{aligned}$$

Concluímos que para todo $j \neq i$ tem-se $\|Sx_i\| > \|Sx_j\|$. Sabemos que $\|Sx_i\| \leq \|S\|$. Afirmamos que $\|S\| = \|Sx_i\|$. De fato, se $\|S\| > \|Sx_i\|$ então existe $x \in B_X$ tal que $\|Sx\| > \|Sx_i\|$. Como $B_X = \overline{\text{conv}}\{x_i : i \in I\}$, existe uma sequência $(z_n)_n \subset \text{conv}\{x_i : i \in I\}$ tal que $z_n \longrightarrow x$. A continuidade de S nos fornece que $\|Sz_n\| \longrightarrow \|Sx\|$. Logo existe $n_0 \in N$ tal que $\|Sz_{n_0}\| > \|Sx_i\|$. Como $z_{n_0} \in \text{conv}\{x_i : i \in I\}$ existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$, com $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ e $x_1, \ldots, x_k \in \{x_i : i \in I\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$z_{n_0} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j.$$

Se $\|Sx_j\| \leq \|Sx_i\|$ para todo $1 \leq j \leq k$ então

$$\begin{aligned}
\|Sz_{n_0}\| &= \left\|S\left(\sum_{=1}^{k} \lambda_j x_j\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j S(x_j)\right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|Sx_j\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|Sx_i\| \\
&= \|Sx_i\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = \|Sx_i\|,
\end{aligned}$$

e isso é uma contradição pois $\|Sz_{n_0}\| > \|Sx_i\|$. Portanto deve existir $j \in I$, com $j \neq i$, tal que $\|Sx_j\| > \|Sx_i\|$, e isso é uma outra contradição pois $\|Sx_i\| \geq \|Sx_j\|$ sempre que $i \neq j$. Assim devemos ter $\|S\| = \|Sx_i\|$, como desejado. Ademais, para cada $x \in X$ tem-se

$$\|Sx - Tx\| = \left\|\frac{\epsilon}{\|T\|}x_i'(x)Tx_i\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\epsilon}{\|T\|}\|T\|\|x\| \\
&= \epsilon\|x\|.
\end{aligned}
$$

Daí, $\|S - T\| \leq \epsilon$, e portanto X tem a propriedade A^k. ■

Definiremos a seguir o que chamaremos de ℓ_1-soma para podermos apresentar uma caracterização nesses espaços em relação a propriedade A^k. Sejam I um conjunto arbitrário e $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços de Banach. Chamaremos de ℓ_1-*soma* desses espaços de Banach o conjunto

$$
\left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1} = \left\{(x_i)_i : \sum_{i\in I} \|x_i\| < \infty \text{ e } x_i \in X_i\right\},
$$

onde a soma é definida por

$$
\sum_{i\in I} \|x_i\| = \sup\left\{\sum_{i\in J} \|x_i\| : J \subset I \text{ é finito }\right\}.
$$

Afirmamos que o conjunto $\left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1}$ é um espaço vetorial. Ademais, não é difícil verificar que a função

$$
\|\cdot\| : \left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_i)_i\| = \sum_{i\in I} \|x_i\|,
$$

é uma norma e o espaço normado $\left(\left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1}, \|\cdot\|\right)$ é um espaço de Banach. Apesar das demonstrações não serem triviais, optamos, com o intuito de evitar tecnicalidades, não exibir demonstrações para essas afirmações. Para um estudo mais detalhado sobre esse espaço recomendamos [1] e [8].

Seja $x = (x_i)_i \in \left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1}$. Definiremos o *suporte* de x que denotaremos por $supp(x)$, como sendo $supp(x) = \{i \in I : x_i \neq 0\}$. Uma observação importante a se fazer, é que $supp(x)$ é enumerável. De fato, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $I_n = \{i \in I : \|x_i\| > \frac{1}{n}\}$. Como $\sum_{i\in I} \|x_i\| < \infty$ afirmamos que o conjunto I_n é finito para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, se existissem infinitos i tais que $\|x_i\| > \frac{1}{n}$, então para $N \in \mathbb{N}$ teríamos

$$
\sum_{i\in I} \|x_i\| \geq \sum_{k=1}^{N} \|x_{i_k}\| > \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{N}{n} \longrightarrow \infty \text{ quando } N \longrightarrow \infty,
$$

o que é uma contradição, pois $\sum_{i\in I} \|x_i\| < \infty$. Ademais, não é difícil verificar que $supp(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, o que implica que $supp(x)$ é enumerável. Sejam $i, j \in I$ e δ_{ij} o delta de Kronecker e $x = (x_i)_{i\in I}$. Considere as aplicações

$$I_i : X_i \longrightarrow X, \quad I_i x = (\delta_{ij} x)_{j\in J} \text{ e } P_i : X \longrightarrow X_i, \quad P_i x = x_i.$$

Claramente as aplicações I_i e P_i são lineares e contínuas para cada $i \in I$. Assim

$$I_i \circ P_i : X \longrightarrow X, \quad (I_i \circ P_i)(x) = (\delta_{ij} x_i)_{j\in I},$$

é uma aplicação linear e contínua para cada $i \in I$. Não é difícil ver que, dado $x = (x_i)_{i\in I} \in \left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1}$ temos

$$supp(x) = \{i \in I : x_i \neq 0\} = \{i \in I : (I_i \circ P_i)(x) \neq 0\}. \tag{4.11}$$

Logo o conjunto $\{i \in I : (I_i \circ P_i)(x) \neq 0\}$ é enumerável. Assim, podemos considerar uma enumeração $i_1, i_2, \ldots$ para (4.11). Vejamos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (I_{i_n} \circ P_{i_n})(x) = \sum_{i\in I} (I_i \circ P_i)(x). \tag{4.12}$$

De fato, seja $N \in \mathbb{N}$ e $J = \{i_1, \ldots, i_N\}$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (I_{i_n} \circ P_{i_n})(x) \right\| &= \left\| (x_i)_{i\in I} - \sum_{n=1}^{N} (I_{i_n} \circ P_{i_n})(x) \right\| \\
&= \left\| (x_i)_{i\in I} - \sum_{n=1}^{N} (\delta_{i_n i} x_{i_n})_{i\in I} \right\| \\
&= \left\| (y_i)_{i\in I} \right\|,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } \ i \in I - J \\ 0, & \text{se } \ i \notin I - J \end{cases}.$$

Assim

$$\left\| (y_i)_{i\in I-J} \right\| = \sum_{i\in I-J} \|y_i\| = \sum_{i\in I-J} \|x_i\| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_{i_k}\|. \tag{4.14}$$

De (4.13) e (4.14) obtemos

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (I_{i_n} \circ P_{i_n})(x) \right\| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \|x_{i_k}\| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, temos (4.12). A seguir demonstraremos alguns lemas que serão importantes para apresentarmos um resultado sobre propriedade A^k no espaço ℓ_1-soma da família de espaços de Banach $\{X_i : i \in I\}$.

Lema 4.2.15. *Sejam Z um espaço de Banach, $X = \left(\sum_{i\in I} \oplus X_i\right)_{\ell_1}$ e $I_i : X_i \longrightarrow X$ dado por $I_i x = (\delta_{ij} x)_{j\in I}$ para cada $x \in X_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Se $T \in L(X, Z)$, então $\|T\| = \sup_{i\in I} \|T \circ I_i\|$.*

Demonstração. De fato, seja $x = (x_i)_i \in X$. Considere a aplicação

$$P_i : X \longrightarrow X_i, \qquad P_i x = x_i.$$

Note que $x = \sum_{i\in I} (I_i \circ P_i)(x)$ e $x = (P_i x)_i$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \left\| T\left(\sum_{i\in I} (I_i \circ P_i) x\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i\in I} (T \circ I_i \circ P_i)(x)\right\| \\
&\le \sum_{i\in I} \|(T \circ I_i \circ P_i)(x)\| \\
&\le \sum_{i\in I} \|T \circ I_i\| \|P_i x\| \\
&\le \sup_{i\in I} \|T \circ I_i\| \sum_{i\in I} \|P_i x\| \\
&= \sup_{i\in I} \|T \circ I_i\| \|x\|.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\|T\| \le \sup_{i\in I} \|T \circ I_i\|$. Por outro lado, para cada $i \in I$ tem-se que $\|T \circ I_i\| \le \|T\|$. Portanto, $\sup_{i\in I} \|T \circ I_i\| \le \|T\|$ e o lema está demonstrado. ■

Lema 4.2.16. *Sejam X, Y espaços de Banach, $T, \tilde{T} \in L(X, Y)$ com $\|T\| = 1$, $\tilde{T} \neq 0$ e $\epsilon > 0$. Se $\|\tilde{T} - T\| < \frac{\epsilon}{2+\epsilon}$, então existe $\tilde{T_0} \in L(X, Y)$ com $\|\tilde{T_0}\| = 1$ tal que $\|\tilde{T_0} - T\| < \epsilon$.*

Demonstração. De fato, defina $\tilde{T_0} = \frac{\tilde{T}}{\|\tilde{T}\|}$. Note que

$$\|\tilde{T}\| \;\ge\; \|T\| - \|\tilde{T} - T\| > 1 - \frac{\epsilon}{2+\epsilon} = \frac{2}{2+\epsilon},$$

e

$$\frac{\epsilon}{2+\epsilon} \;>\; \|T - \tilde{T}\| \ge \big|\|T\| - \|\tilde{T}\|\big| = \big|1 - \|\tilde{T}\|\big|.$$

Segue que

$$\|\tilde{T_0} - T\| \;=\; \left\| \frac{\tilde{T}}{\|\tilde{T}\|} - T \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \frac{\tilde{T}}{\|\tilde{T}\|} - \frac{T}{\|\tilde{T}\|} \right\| + \left\| \frac{T}{\|\tilde{T}\|} - T \right\| \\
&= \frac{\|\tilde{T} - T\|}{\|\tilde{T}\|} + \left| \frac{1}{\|\tilde{T}\|} - 1 \right| \|T\| \\
&= \frac{\|\tilde{T} - T\|}{\|\tilde{T}\|} + \frac{\left|1 - \|\tilde{T}\|\right|}{\|\tilde{T}\|} \|T\| \\
&< \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \frac{2+\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \frac{2+\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ∎

Lema 4.2.17. *Sejam X, Z espaços de Banach arbitrários, $T \in L(X, Z)$ e $0 < \epsilon < 1$ tais que $1 \geq \|T\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Se existe $S \in L(X, Z)$, $S \neq 0$, tal que $\|S - T\| < \frac{(2-\epsilon)\epsilon}{8}$, então o operador $\tilde{S} = \frac{S}{\|S\|}$ satisfaz $\|\tilde{S} - T\| < \epsilon$.*

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{S} - T\| &= \left\| \frac{S}{\|S\|} - T \right\| \\
&\leq \left\| \frac{S}{\|S\|} - \frac{S}{\|T\|} \right\| + \left\| \frac{S}{\|T\|} - \frac{T}{\|T\|} \right\| + \left\| \frac{T}{\|T\|} - T \right\| \\
&\leq \left| \frac{1}{\|S\|} - \frac{1}{\|T\|} \right| \|S\| + \left\| \frac{S-T}{\|T\|} \right\| + \left| \frac{1}{\|T\|} - 1 \right| \|T\| \\
&\leq \left| \frac{\|T\| - \|S\|}{\|S\|\|T\|} \right| \|S\| + \frac{\|S-T\|}{\|T\|} + \left| \frac{1 - \|T\|}{\|T\|} \right| \|T\| \\
&= \left| \frac{\|T\| - \|S\|}{\|T\|} \right| + \frac{\|S-T\|}{\|T\|} + \left|1 - \|T\|\right| \\
&= \frac{\left|\|T\| - \|S\|\right|}{\|T\|} + \frac{\|S-T\|}{\|T\|} + \left|1 - \|T\|\right| \\
&\leq \frac{\|S-T\|}{\|T\|} + \frac{\|S-T\|}{\|T\|} + \left|1 - \|T\|\right| \\
&\leq 2\frac{\|S-T\|}{\|T\|} + \left|1 - \|T\|\right| \\
&< \frac{2(2-\epsilon)\epsilon}{8} \frac{2}{2-\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

e o lema está demonstrado. ∎

A seguinte proposição pode ser encontrada em [30].

Proposição 4.2.18. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços de Banach e denote por X a ℓ_1-soma desta família. Então X tem a propriedade A^k se, e somente se, X_i tem a propriedade A^k para todo $i \in I$.*

Demonstração. Sejam Z um espaço de Banach, $x = (x_i)_i \in X$, $0 < \epsilon < 1$ e

$$X \quad = \quad \left(\sum_{i \in I} \oplus X_i \right)_{\ell_1} . \tag{4.15}$$

Considere

$$\begin{aligned} P_j \quad &: \quad X \longrightarrow X_j, \qquad P_j(x) = x_j, \\ I_j \quad &: \quad X_j \longrightarrow X, \qquad I_j(y) = (\delta_{ij} y)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Como sabemos, a linearidade e continuidade de P_i e I_i são claras para cada $i \in I$. Suponha que X tenha a propriedade A^k. Sejam $j \in I$ fixo e $T \in \mathcal{K}(X_j, Z)$ com $\|T\| = 1$. Note que o operador $T \circ P_j : X \longrightarrow Z$ é compacto devido à propriedade de ideal. Veja que

$$\begin{aligned} 1 = \|T\| \quad &= \quad \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1 \text{ e } x \in X_j\} \\ &= \quad \sup\{\|T \circ P_j x\| : \|x\| \leq 1 \text{ e } x = (\delta_{ij} x)_{i \in I} \in X\} \\ &\leq \quad \|T \circ P_j\| \\ &\leq \quad \|T\| \|P_j\| \leq 1, \end{aligned}$$

e portanto $\|T \circ P_j\| = 1$. Como X tem a propriedade A^k e $T \circ P_j$ é compacto, existe um operador $\tilde{T_0} \in \mathcal{NA}(X, Z) \cap \mathcal{K}(X, Z)$ tal que $\|\tilde{T_0} - T \circ P_j\| < \epsilon$ e $\|\tilde{T_0}\| = 1$ (o fato de $\|\tilde{T_0}\| = 1$ segue do Lema 4.2.16). Afirmamos que o operador compacto $\tilde{T_0} \circ I_j : X_j \longrightarrow Z$ tem as propriedades desejadas, isto é, atinge a norma e $\|\tilde{T_0} \circ I_j - T\| < \epsilon$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\tilde{T_0} \circ I_j - T\| \quad &= \quad \|\tilde{T_0} \circ I_j - T \circ P_j \circ I_j\| \\ &\leq \quad \|\tilde{T_0} - T \circ P_j\| \|I_j\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Vejamos que $\tilde{T_0} \circ I_j$ atinge a norma. Primeiramente note que para cada $i \neq j$ tem-se

$$\begin{aligned} \|\tilde{T_0} \circ I_i\| \quad &= \quad \|\tilde{T_0} \circ I_i - T \circ P_j \circ I_i\| \\ &\leq \quad \|\tilde{T_0} - T \circ P_j\| < \epsilon < 1. \end{aligned}$$

Lembre que $\tilde{T_0} \in \mathcal{NA}(X, Z) \cap \mathcal{K}(X, Z)$, logo existe $x_0 \in S_X$ tal que $\|\tilde{T_0}\| = \|\tilde{T_0} x_0\| = 1$. Mostraremos que $\tilde{T_0} \circ I_j$ atinge a norma em $P_j x_0$. Veja que $x_0 = \sum_{i \in \tilde{J}} I_i \circ P_i x_0$ e como $x_0 = (P_i x_{i,0})_i$ temos $\|x_0\| = \sum_{i \in \tilde{J}} \|P_i x_0\|$, onde $\tilde{J} = supp(x_0)$. Segue que

$$1 = \|\tilde{T_0} x_0\| \quad = \quad \left\| \sum_{i \in \tilde{J}} \tilde{T_0} \circ I_i \circ P_i x_0 \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i\in\tilde{J}} \|\tilde{T_0}\circ I_i \circ P_i x_0\| \\
&\leq \|\tilde{T_0}\circ I_j \circ P_j x_0\| + \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|\tilde{T_0}\circ I_i \circ P_i x_0\| \\
&\leq \|P_j x_0\| + \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|\tilde{T_0}\circ I_i\|\|P_i x_0\| \\
&\leq \sum_{i\in\tilde{J}} \|P_{i_k} x_0\| \\
&\leq \|P_j x_0\| + \epsilon \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|P_i x_0\| \\
&\leq \|P_j x_0\| + \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|P_i x_0\| \\
&= \sum_{i\in\tilde{J}} \|P_i(x_0)\| = \|x_0\| = 1. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|P_j x_0\| + \epsilon \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|P_i x_0\| = \|P_j x_0\| + \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|P_i x_0\|,$$

o que implica

$$(1-\epsilon) \sum_{i\in\tilde{J}-\{j\}} \|P_i x_0\| = 0.$$

Consequentemente $P_i x_0 = 0$ para cada $i \in \tilde{J} - \{j\}$, e pela desigualdade (4.16) temos

$$\sum_{i\in\tilde{J}} \|\tilde{T_0}\circ I_i \circ P_i x_0\| = 1.$$

Como $P_i x_0 = 0$ para cada $i \in \tilde{J} - \{j\}$, obtemos $\|\tilde{T_0}\circ I_j \circ P_j x_0\| = 1$. Daí,

$$\|\tilde{T_0}\circ I_j\| \leq 1 = \|\tilde{T_0}\circ I_j \circ P_j x_0\| \leq \|\tilde{T_0}\circ I_j\|,$$

e portanto $\|\tilde{T_0}\circ I_j\| = 1 = \|\tilde{T_0}\circ I_j \circ P_j x_0\|$. Isso mostra o desejado.

Reciprocamente, sejam Z um espaço de Banach, $T \in \mathcal{K}(X, Z)$, $\|T\| = 1$ e $0 < \epsilon < 1$. Para cada $i \in I$ defina o operador $T_i = T \circ I_i : X_i \longrightarrow Z$. Segue do Lema 4.2.15 que $\|T\| = \sup\limits_{i\in I} \|T \circ I_i\| = \sup\limits_{i\in I} \|T_i\|$. Diante disso, escolha $j \in I$ tal que

$$\|T\| > \|T_j\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Como X_j tem a propriedade A^k e o operador $T_j = T \circ P_j$ é compacto, existe $S_j \in \mathcal{K}(X_j, Z) \cap \mathcal{NA}(X_j, Z)$ tal que $\|S_j - T_j\| < \frac{(2-\epsilon)\epsilon}{8}$. Para $\tilde{S_j} = \frac{S_j}{\|S_j\|}$, segue do Lema

4.2.17 que $\|\tilde{S}_i - T_i\| < \epsilon$. Vamos construir o operador $S \in L(X,Y)$ tal que $\|S - T\| < \epsilon$ e $S \in \mathcal{NA}(X,Z) \cap \mathcal{K}(X,Z)$. Faça $\tilde{T}_i = T_j$ se $i \neq j$, e faça $\tilde{T}_j = \tilde{S}_j$ se $i = j$. Para cada $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ a série $\displaystyle\sum_{i\in I} \tilde{T}_i x_i$ é convergente . De fato,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i\in\tilde{I}} \tilde{T}_i x_i \right\| &\leq \sum_{i\in\tilde{I}} \|\tilde{T}_i x_i\| \\ &\leq \sum_{i\in\tilde{I}} \|x_i\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Diante disso, defina

$$S : X \longrightarrow Z, \qquad Sx = \sum_{i\in\tilde{I}} \tilde{T}_i x_i,$$

onde $\tilde{I} = supp(x)$. Assim temos que S está bem definido. Ademais, a linearidade de S decorre da linearidade $\tilde{T}_i$ para cada $i \in I$, S é contínuo com $\|S\| \leq 1$, pois

$$\begin{aligned} \|Sx\| = \left\| \sum_{i\in\tilde{I}} \tilde{T}_i x_i \right\| &\leq \sum_{i\in\tilde{I}} \|\tilde{T}_i x_i\| \\ &\leq \sum_{i\in\tilde{I}} \|x_i\| = \|x\| \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Mostraremos que $\|S - T\| < \epsilon$. De fato, note que $\|S \circ I_i - T \circ I_i\| = 0$ para todo $i \neq j$, pois para todo $x \in X_i$

$$\begin{aligned} S \circ I_i x - T \circ I_i x &= \tilde{T}_j x - T \circ I_i x \\ &= T_j x - T \circ I_i x \\ &= T \circ I_i x - T \circ I_i x = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ademais, $\|S \circ I_i - T \circ I_i\| < \epsilon$ para cada $j = i$, pois se $x \in X_i$ então

$$\begin{aligned} S \circ I_i x - T \circ I_i x &= \tilde{S}_i x - T \circ I_i x \\ &= \tilde{S}_i x - T_i x. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Isso implica $\|S \circ I_i - T \circ I_i\| = \|\tilde{S}_i - T_i\| < \epsilon$. Segue de (4.17), (4.18) e do Lema 4.2.15 que

$$\|S - T\| = \sup\{\|S \circ I_i - T \circ I_i\| : i \in I\} < \epsilon.$$

Mostraremos agora que S atinge a norma. Como $\tilde{S}_j \in \mathcal{K}(X_j, Z) \cap \mathcal{NA}(X_j, Z)$, existe $x \in S_{X_j}$ tal que $\|\tilde{S}_j\| = \|\tilde{S}_j x\| = 1$. Mostraremos que S atinge a norma em $x = (\delta_{ij} x)_{i\in I}$. De fato, temos

$$\|Sx\| = \|S(\delta_{ij} x)_{i\in I})\| = \|\tilde{S}_j x\| = \|\tilde{S}_j\| = 1 \geq \|S\|,$$

o que mostra que $\|S\| = \|Sx\|$ com $x = (\delta_{ij}x)_{i\in I}$. Por fim, resta mostrar que S é compacto. Para isso, é suficiente notar que para cada $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ tem-se

$$\begin{aligned}
Sx &= \sum_{i\in I} \tilde{T}_i x_i \\
&= \sum_{i\in I\setminus\{j\}} \tilde{T}_i x_i + \tilde{S}_j x_j \\
&= \sum_{i\in I\setminus\{j\}} T \circ I_i x_i + \tilde{S}_j x_j \\
&= \sum_{i\in I\setminus\{j\}} T \circ I_i \circ P_i x + \tilde{S}_j x_j \\
&= \sum_{i\in I\setminus\{j\}} T \circ I_i \circ P_i x + T \circ I_j \circ P_j x + \tilde{S}_j x_j - T \circ I_j \circ P_j x \\
&= \sum_{i\in I} T \circ I_i \circ P_i x + \tilde{S}_j x_j - T \circ I_j \circ P_j x \\
&= Tx + \tilde{S}_j \circ P_j x - T_j \circ P_j x \\
&= (T + \tilde{S}_j \circ P_j - T_j \circ P_j)(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $S = T + \tilde{S}_j \circ P_j - T_j \circ P_j$. Como a soma de operadores compactos é compacto, concluímos que S é compacto. Isso mostra que X tem a propriedade A^k. ■

A proposição a seguir relaciona a propriedade da aproximação e a propriedade A^k. Uma pergunta colocada por Martín em [30] é a seguinte: Qual a relação entre a propriedade da aproximação e a propriedade A^k?

Proposição 4.2.19. *Seja X um espaço de Banach que tem a propriedade A de Lindenstrauss e tal que X' tem a propriedade da aproximação. Então, X tem a propriedade A^k.*

Demonstração. Sejam Y espaço de Banach, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ e $\epsilon > 0$. Como X' tem a propriedade da aproximação, segue do Teorema 2.2.9 que existe $\tilde{T} \in \mathcal{F}(X,Y)$ tal que $\|\tilde{T} - T\| < \frac{\epsilon}{2}$. Faça $Z = \tilde{T}(X)$. Visto que $\tilde{T}$ tem posto finito, é claro que Z tem dimensão finita. Com isso, temos a seguinte igualdade:

$$\mathcal{NA}(X,Z) = \mathcal{NA}(X,Z) \cap \mathcal{K}(X,Z).$$

Como X tem a propriedade A de Lindenstrauss, existe $T_1 \in \mathcal{NA}(X,Z)$ tal que $\|T_1 - \tilde{T}\| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo,

$$\|T_1 - T\| \leq \|T_1 - \tilde{T}\| + \|\tilde{T} - T\| < \epsilon.$$

Como $T_1 \in \mathcal{NA}(X,Z) \cap \mathcal{K}(X,Z)$, segue que $T_1 \in \mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$. Assim, concluímos que X tem a propriedade A^k. ■

4.3 Propriedade B^k

Nesta seção forneceremos alguns exemplos de espaços com a propriedade B^k. Em particular, mostraremos que c_0 tem a propriedade B^k.

Definição 4.3.1. Um espaço de Banach Y tem a *propriedade* B^k se para todo espaço de Banach X tem-se $\mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$ denso em $\mathcal{K}(X,Y)$.

Vejamos como o primeiro resultado desta seção relaciona a propriedade B^k e a propriedade da aproximação.

Proposição 4.3.2. *Seja Y um espaço de Banach separável que satisfaz a propriedade B^k em toda norma equivalente. Então Y tem a propriedade da aproximação.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que Y não tenha a propriedade da aproximação. Como Y é separável, segue do Teorema 1.1.18 e do Exemplo 1.1.13 que Y admite uma norma equivalente estritamente convexa. Segue do Teorema 2.2.8 que existem um espaço de Banach X e um operador linear compacto T de X em Y que não pode ser aproximado por operadores que atingem a norma. Em particular, T não pode ser aproximado por operadores de $\mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$. Portanto Y não tem a propriedade B^k. E isso é uma contradição, pois, Y tem a propriedade B^k para toda norma equivalente. ■

Definiremos a seguir o que chamaremos de l_∞-soma e c_0-soma para podermos apresentar uma caracterização desses espaços em relação à propriedade B^k. Sejam J um conjunto arbitrário e $\{Y_j : j \in J\}$ uma família de espaços de Banach. A *l_∞-soma* desses espaços de Banach é o conjunto

$$\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{l_\infty} = \left\{(y_j)_j : \sup_{j\in J} \|y_j\| < \infty \text{ e } y_j \in Y_j\right\}.$$

Afirmamos que o conjunto $\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{\ell_\infty}$ é um espaço vetorial. Ademais, não é difícil verificar que a função

$$\|\cdot\| : \left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{\ell_\infty} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(y_j)_j\| = \sup_{j\in J} \|y_j\|,$$

é uma norma e o espaço normado $\left(\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{\ell_\infty}, \|\cdot\|\right)$ é um espaço de Banach. Apesar das demonstrações não serem triviais, optamos, com o intuito de evitar tecnicalidades, não exibir demonstrações para essas afirmações. A c_0-soma da família $\{Y_j : j \in J\}$ é o subconjunto

$$\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{c_0} = \left\{(y_j)_j \in \left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{l_\infty} : \text{ para cada } \epsilon > 0 \text{ o conjunto } \{j \in J : \|y_j\| > \epsilon\} \text{ é finito}\right\}$$

de $\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{l_\infty}$. Afirmamos que o conjunto $\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{c_0}$ é um subespaço vetorial fechado de $\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{l_\infty}$ e portanto o espaço normado $\left(\left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{\ell_\infty}, \|\cdot\|\right)$ é um espaço de Banach. Ainda com o intuito de evitar tecnicalidades, não exibiremos as demonstrações para essas afirmações. Para um estudo mais detalhado sobre esse espaço recomendamos [1] e [8].

Como consequência da definição de c_0-soma para cada $y = (y_j)_{j\in J} \in \left(\sum_{i\in I} \oplus Y_i\right)_{c_0}$, tem-se que $supp(y)$ é enumerável. De fato, pela definição de c_0-soma, para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $J_n = \left\{ j \in J : \|y_j\| > \dfrac{1}{n} \right\}$ é finito, e portanto enumerável. Desse modo, é suficiente notar que

$$supp(y) = \{j \in J : \|y_j\| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n.$$

Lema 4.3.3. *Sejam Z um espaço de Banach e $Y = \left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{l_\infty}$ ou $Y = \left(\sum_{j\in J} \oplus Y_j\right)_{c_0}$. Então para cada $T \in L(Z, Y)$ tem-se $\|T\| = \sup_{j\in J} \|P_j \circ T\|$, onde $P_j : Y \longrightarrow Y_j$ dado por $P_j y = y_j$ para cada $y = (y_j)_j$.*

Demonstração. Para cada $x \in Z$, tem-se $Tx = y$ para algum $y \in Y$. Assim, faça $y = (y_j)_j$. Logo,

$$\begin{aligned} \|Tx\| = \|y\| &= \sup_{j\in J} \|y_j\| \\ &= \sup_{j\in J} \|P_j \circ Tx\| \\ &\leq \sup_{j\in J} \|P_j \circ T\|\|x\| \\ &= \sup_{j\in J} \|P_j \circ T\|\|x\|, \end{aligned}$$

o que implica $\|T\| \leq \sup_{j\in J} \|P_j \circ T\|$. Por outro, lado para cada $j \in J$ tem-se $\|P_j \circ T\| \leq \|T\|$ e portanto $\sup_{j\in J} \|P_j \circ T\| \leq \|T\|$. Isso mostra o lema. ■

A seguinte proposição pode ser encontrada em [30].

Proposição 4.3.4. *Seja $\{Y_j : j \in J\}$ uma família de espaços de Banach não vazia. Denote por Y a c_0-soma ou a l_∞-soma da família $\{Y_j : j \in J\}$. Então Y tem a propriedade B^k se, e somente se, Y_j tem a propriedade B^k para todo $j \in J$.*

Demonstração. Faremos a demostração da proposição para a l_∞-soma da família de espaços de Banach $\{Y_j : j \in J\}$. Seja $i \in J$ fixo,

$$\begin{aligned} P_i &: Y \longrightarrow Y_i, \quad P_i y = y_i \\ I_i &: Y_i \longrightarrow Y, \quad I_i y = (\delta_{ij} y)_{j \in J}, \end{aligned}$$

$T \in \mathcal{K}(Z, Y_i)$, $\|T\| = 1$ e $0 < \epsilon < 1$. Note que o operador $I_i \circ T : Z \longrightarrow Y$ é compacto pela propriedade de ideal e

$$\begin{aligned} \|I_i \circ T\| &= \sup\{\|I_i \circ Tx\| : \|x\| \leq 1 \text{ e } x \in Z\} \\ &= \sup\{\|(\delta_{ij} Tx)_{j \in J})\| : \|x\| \leq 1, x \in Z\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1, x \in Z\} = \|T\| = 1. \end{aligned}$$

Como Y tem a propriedade B^k e $I_i \circ T$ é compacto, existe $\tilde{T} \in \mathcal{K}(Z, Y) \cap \mathcal{NA}(Z, Y)$ tal que $\|\tilde{T} - I_i \circ T\| < \epsilon$ e $\|\tilde{T}\| = 1$ (o fato de $\|\tilde{T}\| = 1$ segue do Lema 4.2.16). Note que o operador $P_i \circ \tilde{T} : Z \longrightarrow Y_i$ é compacto pela propriedade de ideal. Vejamos que $P_i \circ \tilde{T}$ atinge a norma e $\|P_i \circ \tilde{T} - T\| < \epsilon$. De fato,

$$\begin{aligned} \|P_j \circ \tilde{T} - T\| &= \|P_j \circ \tilde{T} - P_j \circ I_j \circ T\| \\ &\leq \|\tilde{T} - I_j \circ T\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\tilde{T} \in \mathcal{K}(Z, Y) \cap \mathcal{NA}(Z, Y)$, existe $x \in S_Z$ tal que $\|\tilde{T}x\| = \|\tilde{T}\| = 1$. Vejamos que $P_j \circ \tilde{T}$ atinge a norma em x. Seja $y = (y_j)_{j \in J} \in Y$ tal que $\tilde{T}x = y = (y_j)_{j \in J}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \|\tilde{T}x\| \\ &= \sup_{j \in J} \|\tilde{T}_j x\| \\ &= \sup_{j \in J} \|P_j \circ \tilde{T}x\| \\ &\leq \sup_{j \in J} \|P_j \circ \tilde{T}\| \|x\| \\ &= \|x\| \sup_{j \in J} \|P_j \circ \tilde{T}\| \\ &\leq \sup_{j \in J} \|P_j \circ \tilde{T}\| \\ &= \|\tilde{T}\|, \qquad \text{(Lema 4.3.3)} \end{aligned}$$

o que implica $\sup_{j \in J} \|P_j \circ \tilde{T}x\| = \|\tilde{T}\| = 1$. Por outro lado, para cada $j \neq i$ tem-se $P_j \circ I_i \circ T = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \|P_j \circ \tilde{T}\| &= \|P_j \circ \tilde{T} - P_j \circ I_i \circ T\| \\ &\leq \|\tilde{T} - I_i \circ T\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que $\sup\{\|P_j \circ \tilde{T}\| : j \in J - \{i\}\} \leq \epsilon < 1$. Afirmamos que $\|P_j \circ \tilde{T}\| = 1$. De fato, se $\|P_j \circ \tilde{T}\| < 1$ então $\sup\limits_{j \in J} \|P_j \circ \tilde{T}\| < 1 = \|\tilde{T}\|$, o que é uma contradição pois $\sup_{j\in J} \|P_j \circ \tilde{T}\| = \|\tilde{T}\| = 1$. Como $x \in S_Z$ tem-se também que para todo $j \neq i$

$$\|P_j \tilde{T} x\| \leq \|P_j \circ \tilde{T}\| < \epsilon < 1.$$

Usando a mesma justificativa anterior mostra-se que $\|P_j \tilde{T} x\| = 1$, logo

$$\|P_j \circ \tilde{T}\| = 1 = \|P_j \tilde{T} x\|.$$

Portanto $P_j \circ \tilde{T}$ atinge a norma, como o desejado.

Reciprocamente, sejam Z espaço de Banach, $T \in \mathcal{K}(Z, Y)$, $\|T\| = 1$ e $0 < \epsilon < 1$. Para cada $j \in J$ defina o operador $T_j = P_j \circ T : Z \longrightarrow Y_j$. Segue do Lema 4.3.3 que $\|T\| = \sup\limits_{j\in J} \|P_j \circ T\| = \sup\limits_{j \in J} \|T_j\|$. Escolha $i \in J$ tal que

$$\|T\| > \|T_i\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Como Y_i tem a propriedade B^k e T_i é compacto, existe $S_i \in \mathcal{K}(Z, Y_i) \cap \mathcal{NA}(Z, Y_i)$ tal que $\|S_i - T_i\| < \dfrac{(2-\epsilon)\epsilon}{8}$. Seja $\tilde{S}_i = \dfrac{S_i}{\|S_i\|}$. Segue do Lema 4.2.17 que $\|\tilde{S}_i - T_i\| < \epsilon$. Definiremos um operado S tal que $S \in \mathcal{K}(Z, Y) \cap \mathcal{NA}(Z, Y)$ e $\|S - T\| < \epsilon$. Seja

$$S : Z \longrightarrow Y, \qquad Sx = (\tilde{T}_j x)_{j \in J},$$

onde $\tilde{T}_j = T_i$ se $j \neq i$ e $\tilde{T}_j = \tilde{S}_i$ se $j = i$. Veja que $\sup\limits_{j \in J} \|\tilde{T}_j x\| < \infty$ para cada $x \in Z$, pois $\|\tilde{T}_i x\| \leq \|x\|$ para cada $j \in J$ e cada $x \in Z$. A linearidade de S decorre da linearidade $\tilde{T}_j$ para cada $j \in J$. Ademais, S é continuo e $\|S\| \leq 1$. De fato,

$$\|Sx\| = \sup_{j \in J} \|\tilde{T}_j x\| \leq \|x\|$$

para cada $x \in Z$. Vamos mostrar que $\|S - T\| < \epsilon$. Para isso, note primeiramente que $\|P_j \circ S - P_j \circ T\| = 0$ para todo $j \neq i$, pois

$$\|P_j \circ S - P_j \circ T\| = \|\tilde{T}_j - P_j \circ T\| = \|P_j \circ T - P_j \circ T\| = 0. \tag{4.19}$$

E $\|P_j \circ S - P_j \circ T\| < \epsilon$ para $j = i$, pois

$$\|P_j \circ S - P_j \circ T\| = \|\tilde{S}_i - P_j \circ T\| = \|\tilde{S}_i - T_i\| < \epsilon. \tag{4.20}$$

Segue de (4.19), (4.20) e do Lema 4.3.3 que

$$\|S - T\| = \sup_{j \in J} \|P_j \circ S - P_j \circ T\| < \epsilon.$$

Mostraremos que S atinge a norma. Lembre que $\tilde{S}_i \in \mathcal{K}(Z,Y_i) \cap \mathcal{NA}(Z,Y_i)$. Logo, existe $x \in S_Z$ tal que $\|\tilde{S}_i\| = \|\tilde{S}_i x\| = 1$. Mostraremos que S atinge a norma em x. Note que

$$\begin{aligned}
\|Sx\| &= \|(\tilde{T}_j x)_j\| \\
&= \sup_{j\in J} \|\tilde{T}_j x\| \\
&\leq 1 \\
&= \|\tilde{S}_i x\| \\
&= \|\tilde{T}_j x\| \\
&\leq \sup_{j\in J} \|\tilde{T}_j x\| \\
&= \|Sx\|.
\end{aligned}$$

Logo, $\|Sx\| = 1 \geq \|S\|$. Isto mostra que $\|S\| = \|Sx\|$. Para terminar a demonstração falta mostrar que S é compacto. Para isso, note que para cada $x \in Z$, temos $Tx = \big((P_j \circ T)(x)\big)_{j\in J}$. Assim, teremos

$$\begin{aligned}
S(x) &= (\tilde{T}_j x)_{j\in J} \\
&= (\tilde{T}_j x)_{j\in J\setminus\{i\}} + (I_j \circ \tilde{S}_i)(x) \\
&= (T_j x)_{j\in J\setminus\{i\}} + (I_i \circ T_i)(x) + (I_i \circ \tilde{S}_i)(x) - (I_i \circ T_i)(x) \\
&= (T_j x)_{j\in J} + (I_i \circ \tilde{S}_i)(x) - (I_i \circ T_i)(x) \\
&= \big((P_j \circ T)(x)\big)_{j\in J} + (I_i \circ \tilde{S}_i)(x) - (I_i \circ T_i)(x) \\
&= Tx + (I_i \circ \tilde{S}_i)(x) - (I_i \circ T_i)(x) \\
&= (T + I_i \circ \tilde{S}_i - I_i \circ T_i)(x).
\end{aligned}$$

Daí $S = T + I_i \circ \tilde{S}_i - I_i \circ T_i$. Como soma de operadores compactos é compacto, segue que S é compacto. Portanto Y tem a propriedade B^k. ■

Observação 4.3.5. Para uma demonstração da proposição acima para a c_0-soma da família de espaços de Banach $\{Y_j : j \in J\}$, é necessário observar apenas a boa definição do operador S, isto é, verificar que dado $\epsilon > 0$ o conjunto $\{j \in J : \|\tilde{T}_j x\| > \epsilon\}$ é finito. Veja que isso é verdade pois para cada $j \in J$ com $j \neq i$ tem-se

$$\begin{aligned}
\{j \in J, j \neq i : \|\tilde{T}_j x\| > \epsilon\} \text{ é finito} &\iff \{j \in J, j \neq i : \|T_j x\| > \epsilon\} \text{ é finito} \\
&\iff \{j \in J, j \neq i : \|P_j \circ Tx\| > \epsilon\} \text{ é finito} \\
&\iff \{j \in J, j \neq i : \|P_j\big((\overline{T_j} x)_j\big)\| > \epsilon, Tx = (\overline{T_j} x)_j\} \text{ é finito} \\
&\iff \{j \in J, j \neq i : \|\overline{T_j} x\| > \epsilon\} \text{ é finito} .
\end{aligned}$$

Quando $j = i$ ainda teremos que o conjunto $\{j \in J : \|\tilde{T}_j x\| > \epsilon\}$ é finito.

Com auxilio do Lema 2.2.12 obtemos mais uma relação entre a propriedade da aproximação e a propriedade B^k.

Proposição 4.3.6. *Todo espaço de Banach estritamente convexo que não tem a propriedade da aproximação falha a propriedade B^k.*

Demonstração. Seja Y um espaço de Banach estritamente convexo que falha a propriedade da aproximação. Segue do Lema 2.2.12 que existe um subespaço fechado X de c_0 tal que $\mathcal{F}(X,Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X,Y)$. O comentário que segue o Lema 2.5.7 diz que, $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$. Portanto $\mathcal{NA}(X,Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X,Y)$. Segue que $\mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{NA}(X,Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X,Y)$. Logo Y não tem a propriedade B^k. ■

Espaços complexos estritamente convexos são em particular estritamente convexos. Logo obtemos a seguinte proposição.

Proposição 4.3.7. *Se Y é subespaço fechado do espaço complexo estritamente convexo $L_1(\mu)$ que não tem a propriedade da aproximação, então Y não tem a propriedade B^k.*

Demonstração. Seja Y um subespaço fechado do espaço complexo estritamente convexo $L_1(\mu)$ que falha a propriedade da aproximação. Segue do Lema 2.2.12 que existe um subespaço fechado X de c_0 tal que $\mathcal{F}(X,Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X,Y)$. Pelo Lema 4.1.6 temos $\mathcal{NA}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$, e portanto $\mathcal{NA}(X,Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X,Y)$. Segue que $\mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{NA}(X,Y)$ não é denso em $\mathcal{K}(X,Y)$. Logo Y não tem a propriedade B^k. ■

A seguinte proposição pode ser encontrada em [30].

Proposição 4.3.8. *A propriedade β implica na propriedade B^k.*

Demonstração. Sejam X, Y espaços de Banach, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ não nulo e $\epsilon > 0$. Suponha que Y tenha a propriedade β. Pelo Lema 2.3.2, existem $x_0 \in S_X$ e $i \in I$ fixos tais que

$$\left|y_i'(Tx_0)\right| > \|T\| \left(\frac{1 + \dfrac{\rho\epsilon}{\|T\|}}{1 + \dfrac{\epsilon}{\|T\|}} \right).$$

Seja

$$S : X \longrightarrow Y, \qquad S(x) = T(x) + \frac{\epsilon}{\|T\|} y_i'(Tx) y_i.$$

Note que S é compacto, pois a soma de operadores compactos é compacto. Seja

$$S' : Y' \longrightarrow X', \qquad S'(y')(x) = y'(S(x)) = y'(Tx) + \frac{\epsilon}{\|T\|} y_i'(Tx) y'(y_i).$$

Mostraremos que S' atinge a norma. Note que para todo $j \neq i$ e todo $x \in X$ tem-se

$$\left|S'(y_j')(x)\right| = \left| y_j'(Tx) + \frac{\epsilon}{\|T\|} y_i'(Tx) y_j'(y_i) \right| \leq (\|T\| + \epsilon\rho)\|x\|,$$

o que implica $\|S'y'_j\| \leq \|T\| + \epsilon\rho$. Se $i = j$ e $x = x_0$, então

$$\begin{aligned}
\|S'y'_i\| &\geq \left|S'(y'_i)(x_0)\right| \\
&= \left|y'_i(Tx_0) + \frac{\epsilon}{\|T\|} y'_i(Tx_0) y'_i(y_i)\right| \\
&= \left|y'_i(Tx_0)\right| \left(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\right) \\
&> \|T\| \left(\frac{1 + \frac{\rho\epsilon}{\|T\|}}{1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\right) \\
&= \|T\| + \rho\epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|S'y'_i\| > \|T\| + \rho\epsilon \geq \|S'y'_j\|$$

para todo $j \neq i$. Afirmamos que $\|S'\| = \|S'y'_i\|$. De fato, suponha que $\|S'\| > \|S'y'_i\|$. Como existe uma sequência $(x_n)_n$ em S_X tal que $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n\| = \|S\|$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|S'y'_i\| < \|Sx_n\|$. Como $Sx_n \in Y$ temos

$$\|Sx_n\| = \sup_{i \in I} \left|y'_i(Sx_n)\right|.$$

Segue que existe $j \in I$ com $j \neq i$ tal que $\left|y'_j(Sx_n)\right| > \|S'y'_i\|$. Logo

$$\begin{aligned}
\|S'y'_i\| &< \left|y'_j(Sx_n)\right| \\
&= \left|S'(y'_j)(x_n)\right| \\
&\leq \|S'y'_j\|,
\end{aligned}$$

e isso é uma contradição, visto que $\|S'y'_i\| > \|S'y'_j\|$ para todo $j \neq i$. Portanto devemos ter $\|S'\| = \|S'y'_i\|$. Mostraremos que $S'' \in NA(X'', Y'')$. Veja que

$$S'' : X'' \longrightarrow Y'', \qquad S''(x'')(y') = x''(T'y') + \frac{\epsilon}{\|T\|} y'(y_i) x''(T'y'_i).$$

Faça $J_X(x_0) = x''_0$. Mostraremos que $\|S''\| = \|S''x''_0\|$. Note que

$$\begin{aligned}
|S''(x''_0)y'_i| &= \left|x''_0(T'y'_i) + \frac{\epsilon}{\|T\|} y'_i(y_i) x''_0(T'y'_i)\right| \\
&= |x''_0(T'y'_i))| \left(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\right) \\
&= |J_X(x_0)(T'y'_i)| \left(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\right) \\
&= |T'y'_i(x_0)| \left(1 + \frac{\epsilon}{\|T\|}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |y_i'(Tx_0)|\left(1+\frac{\epsilon}{\|T\|}\right)\\
&> \|T\|\left(\frac{1+\frac{\rho\epsilon}{\|T\|}}{1+\frac{\epsilon}{\|T\|}}\right)\left(1+\frac{\epsilon}{\|T\|}\right)\\
&= \|T\|+\rho\epsilon,
\end{aligned}
$$

o que implica

$$\|S''x_0''\| \leq \|S''\| = \|S'\| = \|S'y_i'\|.$$

Afirmamos que $\|S''x_0''\| = \|S'y_i'\|$. De fato, se tivéssemos $\|S''x_0''\| < \|S'y_i'\| = \|S\|$ existiria $x \in S_X$ tal que

$$\|S''x_0''\| < \|Sx\| = \sup_{j\in I}\left|y_j'(Sx)\right|,$$

e portanto existiria $j \neq i$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|T\|+\rho\epsilon &< \|S''x_0''y_i'\|\\
&\leq \|S''x_0''\|\\
&< \left|y_j'(Sx)\right|\\
&= \left|S'y_j'(x)\right|\\
&\leq \|S'y_j'\|,
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição, visto que $\|S'y_j'\| \leq \|T\|+\rho\epsilon$ para todo $j\neq i$. Portanto temos

$$\|S''x_0''\| = \|S'y_i'\| = \|S'\| = \|S''\|.$$

Provaremos agora que S atinge a norma em x_0. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|S\| = \|S''\| = \|S''x_0''\| &= \sup_{\|y'\|\leq 1}\left|S''x_0''(y')\right|\\
&= \sup_{\|y'\|\leq 1}\left|x_0''(S'y')\right|\\
&= \sup_{\|y'\|\leq 1}\left|J_X(x_0)(S'y')\right|\\
&= \sup_{\|y'\|\leq 1}\left|S'y'(x_0)\right|\\
&= \sup_{\|y'\|\leq 1}\left|y'(Sx_0)\right|\\
&\leq \sup_{\|y'\|\leq 1}\|y'\|\|Sx_0\| \leq \|Sx_0\|,
\end{aligned}
$$

logo $\|S\| = \|Sx_0\|$. Ademais, para todo $x \in X$ temos

$$\|Sx - Tx\| = \left\|\frac{\epsilon}{\|T\|}y_i'(Tx)y_i\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\epsilon}{\|T\|}\|T\|\|x\| \\
&= \epsilon\|x\|,
\end{aligned}
$$

o que implica $\|S - T\| \leq \epsilon$. Logo, Y tem a propriedade B^k. ■

Proposição 4.3.9. *Se Y é um espaço de Banach real poliedral com a propriedade da aproximação, então Y tem a propriedade B^k. Em particular, todo subespaço fechado do espaço real c_0 com a propriedade da aproximação tem a propriedade B^k.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Como Y tem a propriedade da aproximação, dado $\epsilon > 0$ existe $\tilde{T} \in \mathcal{F}(X,Y)$ tal que $\|\tilde{T} - T\| < \epsilon$. Seja $Z = \tilde{T}(X)$. Note que Z é poliedral, pois $Z \subset Y$ e Y é poliedral. Além disso, é claro que Z tem dimensão finita, pois $\tilde{T}$ é de posto finito. Segue do Lema 2.6.3 que Z tem a propriedade β. Logo, pela Proposição 4.3.8 tem-se que Z tem a propriedade B^k. Portanto, existe uma sequência $(T_n)_n$ em $\mathcal{NA}(X,Z) \cap \mathcal{K}(X,Z)$ que converge em norma para $\tilde{T}$. Ademais, tem-se $\|\tilde{T} - T\| < \epsilon$, logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_0} - T\| < \epsilon$. Sabendo que, $T_{n_0} \in \mathcal{NA}(X,Z) \cap \mathcal{K}(X,Z)$ é imediato que $T_{n_0} \in \mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$. Logo Y tem a propriedade B^k. ■

Proposição 4.3.10. *Seja Y um espaço de Banach com a propriedade do aproximação. Suponha que para todo subespaço W de Y de dimensão finita, exista um subespaço Z que tenha a propriedade B de Lindenstrauus e que $W \leq Z \leq Y$. Então Y tem a propriedade B^k.*

Demonstração. Suponha por contradição que Y não tenha a propriedade B^k. Então, existem $\epsilon > 0$, um espaço de Banach X e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ tais que

$$\|\overline{T} - T\| \geq 2\epsilon, \tag{4.21}$$

para todo $\overline{T} \in \mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y)$. Por hipótese, Y tem a propriedade da aproximação, segue então do Teorema 2.2.8 que existe $T_1 \in \mathcal{F}(X,Y)$ tal que

$$\|T_1 - T\| < \epsilon.$$

Seja $W = T_1(X)$. Com a mesma notação, considere $T_1 \in \mathcal{F}(X,W)$ (i.e $T_1 : X \longrightarrow W$ ainda será denotado por T_1). Seja $\tilde{T}$ em $\mathcal{NA}(X,W)$. Veja que

$$\mathcal{NA}(X,W) = \mathcal{NA}(X,W) \cap \mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{NA}(X,Y) \cap \mathcal{K}(X,Y).$$

Logo, segue de (4.21) que

$$\|\tilde{T} - T\| \geq 2\epsilon.$$

Assim

$$\|\tilde{T} - T_1\| \geq \|\tilde{T} - T\| - \|T_1 - T\|$$

$$> \quad 2\epsilon - \epsilon = \epsilon. \tag{4.22}$$

Seja Z um subespaço fechado de Y tal que $W \leq Z \leq Y$ e $T_2 \in L(X, Z)$. Note que $T_2 - T_1 \in L(X, Z)$. Considere a restrição de $T_2 - T_1$ a um subespaço V de X tal que

$$(T_2 - T_1)_{|V} : V \longrightarrow W.$$

Segue de (4.22) que

$$\|T_2 - T_1\| \geq \|(T_2 - T_1)_{|V}\| > \epsilon.$$

Logo Z não tem a propriedade B de Lindenstrauss, e isso é uma contradição. Portanto Y tem a propriedade B^k. ■

Corolário 4.3.11. *Espaços de Banach poliedrais com a propriedade de aproximação têm a propriedade B^k.*

Demonstração. Seja Y um espaço de Banach poliedral que tem a propriedade de aproximação. Segue que todos os seus subespaços W de dimensão finita são poliedrais, portanto tem propriedade B de Lindenstraus (veja comentário que segue [26, Proposition 3]). Faça $Z = W$ na Proposição 4.3.10. Logo, segue da Proposição 4.3.10 que Y tem a propriedade B^k. ■

Proposição 4.3.12. *Um espaço de Banach Y tem a propriedade B^k se existe uma rede de projeções $(Q_\lambda)_\lambda$ em Y, com $\sup \|Q_\lambda\| < \infty$, que converge para I_Y fortemente (i.e $Q_\lambda(y) \longrightarrow y$ em Y para cada $y \in Y$) e que $Q_\lambda(Y)$ tem a propriedade B^k para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach $\epsilon > 0$ e $T \in \mathcal{K}(X, Y) \cap \mathcal{NA}(X, Y)$. Temos que $Q_\lambda y \longrightarrow y$ para todo $y \in Y$. Uma demonstração adaptada do Teorema 1.1.19 mostra que para todo compacto $K \subset Y$ temos $\sup\limits_{y \in K} \|Q_\lambda y - y\| \longrightarrow 0$. Como $\overline{T(B_X)}$ é compacto, então $\sup\limits_{y \in \overline{T(B_X)}} \|Q_\lambda y - y\| \longrightarrow 0$, em particular temos que $\sup\limits_{Tx \in \overline{T(B_X)}} \|Q_\lambda \circ Tx - Tx\| \longrightarrow 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
\|Q_\lambda \circ T - T\| &= \sup_{x \in B_X} \|Q_\lambda \circ Tx - Tx\| \\
&= \sup_{Tx \in T(B_X)} \|Q_\lambda \circ Tx - Tx\| \\
&\leq \sup_{Tx \in \overline{T(B_X)}} \|Q_\lambda \circ Tx - Tx\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Seja λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implique $\|Q_\lambda \circ T - T\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Considere o operador compacto $Q_{\lambda_0} \circ T : X \longrightarrow Q_{\lambda_0}(Y)$. Por hipótese, $Q_{\lambda_0}(Y)$ tem a propriedade B^k, logo existe $\tilde{T} \in \mathcal{K}(X, Q_{\lambda_0}(Y)) \cap \mathcal{NA}(X, Q_{\lambda_0}(Y))$ tal que $\|\tilde{T} - Q_{\lambda_0} \circ T\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Note que $\tilde{T} \in \mathcal{K}(X, Y)) \cap \mathcal{NA}(X, Y)$. Mostraremos que $\|\tilde{T} - T\| < \epsilon$. De fato, temos

$$\|\tilde{T} - T\| \quad \leq \quad \|\tilde{T} - Q_{\lambda_0} \circ T\| + \|Q_{\lambda_0} \circ T - T\|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto Y tem a propriedade B^k. ■

Bibliografia

[1] M.D. Acosta, Norm-attaining operators into $L_1(\mu)$, Func. Spaces. Contemp. Math. 232, (1999), 1–11.

[2] F. Albiac, N. Kalton, Topics in Banach Space Theory, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, New York, 2006.

[3] I. Bishop e R.R. Phelps, A proof that every Banach space is subreflexive, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 97-98.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015, 2^a Edição.

[5] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.

[6] N. L. Carothers, A Short Course on Banach Space Theory, London Mathematical Society Student Texts 64, Cambridge University Press, 2005.

[7] J. Diestel e J.J. Uhl, The Radon-Nikodým theorem for Banach space valued measures, Rocky Mountain J. Math. 6 (1976), 1-46.

[8] M. Fabian, P. Habala, P. Hajék, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant e V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CMS Books in Mathematics, Springer Verlag, 2001.

[9] V. F. Fonf, Three characterizations of polyhedral Banach spaces, (1991), 1145-1148.

[10] I. Gasparis, On contractively complemented subspaces of separable L_1-preduals, Israel J. Math. 128 (2002), 77-92.

[11] I. Gasparis, New examples of c_0-saturated Banach spaces, Math. Ann. 344, 491–500, 2009.

[12] G. Godefroy, The Banach space c_0, Extracta. Math. 16, (2001), 1-25.

[13] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires, Memo. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[14] P. Hajék, V. Santalucia, J. Vanderweff, V. Zizler, Biorthogonal Systems in Banach Spaces, CMS Books in Mathematics. Springer 2000.

[15] P. Harmand, D. Werner, M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras, Lecture Notes in Math. 1547, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[16] V.I Istratescu, Strict convexity and complex strict convexity, Lecture Notes in pure and applied mathematics, vol. 89. Marcel Dekker, New York 1984.

[17] R.C. James, Weak compactness and reflexivity, Isr. J. Math. 2, 1964.

[18] H. Jarchow, Locally Convex Spaces, Teubner, Stuttgart, 1981.

[19] W. B. Johnson and T. Oikhberg, Separable lifting property and extensions of local reflexivity, Illinois J.Math. 45 (2001), 123-137.

[20] W. Johnson, A complementably universal conjugate Banach space and its relation to the approximation problem, Israel J. Math. 13 (1972), 301–310.

[21] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal e M. Zippin, On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, Israel J. Math. 9, (1971), 488-506.

[22] V. Klee, Polyhedral sections of convex bodies, Acta Math. 103, Nos. 3-4, (1960), 243-267.

[23] A. Lima, Intersection properties of balls compact operators, Ann. Inst. Fourier Grenoble. 28, (1978), 35-65.

[24] E. Lima, Elementos de Topologia Geral, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[25] E. Lima, Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, 4a. Edição, 4a. impressão, 2011.

[26] J. Lindenstrauss, On operators which attain their norm, Israel J. Math. 1 (1963), 139-148.

[27] J. Lindenstrauss and L.Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[28] W. Lusky, A note on Banach spaces containing c_0 or C_∞, J. Funct. Anal. 62 (1985), 1–7.

[29] M. Martín, Norm-attaining compact operators, J. Funct. Anal. 627 (2014), 1585-1592.

[30] M. Martín, The version for compact operators of Lindenstrauss proprety A and B, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. (2016), 269-284.

[31] J. Mujica, Topologia Geral, IMECC-UNICAMP, 2013.

[32] J.R. Partington, Norm attaining operators, Isr. Math. 43, (1982), 273-276.

[33] W. Schachermayer, Norm attaining operators and renormings of Banach spaces, Isr. J.Math. 44, (1983), 201–212.

[34] V. Zizler, On some extremal problems in Banach spaces, Math. Scand. 32, (1973), 214-224.