UM MODELO MULTIVARIADO PARA PREDIÇÃO DE TAXAS E PROPORÇÕES DEPENDENTES

Alice Nascimento de Assis

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Cardoso Neto

Manaus

Março de 2018

UM MODELO MULTIVARIADO PARA PREDIÇÃO DE TAXAS E PROPORÇÕES DEPENDENTES

Alice Nascimento de Assis

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, COMO PARTE DOS REQUESITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. José Cardoso Neto, D.Sc. – Orientador

Universidade Federal do Amazonas

Prof. João Caldas do Lago Neto, D.Sc

Universidade Federal do Amazonas

Prof. Jeremias da Silva Leão, D.Sc.

Universidade Federal do Amazonas

MANAUS, AM – BRASIL

MARÇO DE 2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A848u

Assis, Alice Nascimento de
Um modelo multivariado para predição de taxas e proporções dependentes / Alice Nascimento de Assis. 2018
96 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: José Cardoso Neto
Dissertação (Mestrado em Matemática - Estatística) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Distribuição Kumaraswamy. 2. Distribuição alfa-estável. 3. Algoritmo MCEM. 4. Umidade relativa do ar. I. Cardoso Neto, José II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Este trabalho dedicado à Deus e

toda minha família

Agradecimentos

A Deus, por todas as bençãos recebidas, pelo ar que respiro, pelos dons que me deste e pelos relacionamentos que possibilitam que eu cresça a cada dia.

Ao meu Orientador, professor José Cardoso, pelo incentivo, confiança e por suas valiosas contribuições para a elaboração deste trabalho.

Ao professor Max Lima pela sua significativa contribuição e incetivo durante o mestrado.

A todos os professores do curso de Estatística da Universidade Federal do Amazonas por me proporcionar o conhecimento. A coordenadora da pós graduação em Matemática, professora Juliana Ferreira. Aos meus professores do mestrado, James Dean, Celso Rômulo e Flávia Morgana. Em especial, quero muito agradecer ao professor José Raimundo, por ter sempre acreditado em mim, desde o período da graduação.

Aos secretários da Pós-Graduação, Ari e Elclimar, pelo interesse em sempre ajudar e esclarecer prontamente qualquer dúvida.

Aos professores João Caldas do Lago Neto e Jeremias da Silva Leão, membros da banca, por suas contribuições e melhorias dadas a esta pesquisa.

Ao meu querido marido Diego e os meus lindos filhos Iago e Eloá, paciência e amor incondicional dado todos os dias.

Agradeço as minhas amigas de mestrado, Renata Evangelista, Regina Aparecida, Sarah Barbosa que desde o início do curso, sempre enfrentamos unidas todas as barreiras das dificuldades e no final sempre vencemos.

Agradeço especialmente ao meu amigo Guilherme Peña pela significativa contribuição na parte computacional da minha dissertação.

À Milena, Alex, Jhonata Kiss, Vinícius, Thiago Parente, Ozana, Danilo, Natan, Cícero e Erico pelo companheirismo, amizade e aprendizagem em equipe.

À minha amiga Carina, pela mão amiga sempre estendida nos momentos de dificuldade; pela generosidade, pela motivação constante e pelo exemplo de humildade.

À Márcia, Carla, Camila, Nelson, José Mir, Amazoneida, Leonardo e dona Neisa, pela amizade, generosidade e motivação constante.

Aos meus irmãos Hudson, Hilton e Hunilson, que estão sempre comigo.

Ao meu pai falecido, apesar que ele não está comigo e sim com o Pai, mas estará sempre no meu coração. À minha mãe, apesar das dificuldades de convício, esteve sempre presente e nunca me deixou faltar nada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudo concedida.

Enfim a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

"Bem aventurado o homem que acha sabedoria e o homem que adquire conhecimento." (Provérbios 3:13).

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. (M.Sc.)

UM MODELO MULTIVARIADO PARA PREDIÇÃO DE TAXAS E PROPORÇÕES DEPENDENTES

Alice Nascimento de Assis

Março/2018

Orientador: Prof. Dr. José Cardoso Neto

Linha de Pesquisa: Estatística

A umidade relativa interfere em vários aspectos na vida do ser humano, e devido as muitas consequências que um baixo ou um alto percentual podem acarretar, o controle de seu nível é de suma importância. Dessa forma, a modelagem de situações extremas dessa variável pode auxiliar no planejamento de atividades humanas que sejam suscetíveis aos seus efeitos danosos, como a saúde pública. O principal interesse é prever com base em funções densidade de probabilidade aplicadas aos dados observados, os valores que possam ocorrer em uma certa localidade. A distribuição Generalizada de Valores Extremos tem sido amplamente utilizada com essa finalidade e pesquisas utilizando análise de Séries Temporais de dados meteorológicos e climáticos. Neste trabalho, é proposto um modelo estatístico para predição de taxas e proporções temporais e/ou espacialmente dependentes. O modelo foi construído através da marginalização da distribuição Kumaraswamy G-exponencializada condicionada a um campo aleatório com distribuição alfa-estável positivo. Algumas propriedades desse modelo foram apresentadas, procedimentos para estimação e inferência foram discutidos e um algoritmo MCEM foi desenvolvido parar estimar os parâmetros. Como um caso particular, o modelo foi utilizado para predição espacial da umidade relativa do ar observada nas estações meteorológicas do Estado do Amazonas.

Palavras-chave: Distribuição Kumaraswamy; Distribuição alfa-estável; Algoritmo MCEM; Umidade relativa do ar.

Abstract of Dissertation presented to Postgraduate in Mathematics, of the Federal University of Amazonas, as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Mathematics. (M.Sc.)

A MULTIVARIATE MODEL FOR PREDICTING DEPENDENT RATES AND ROPORTIONS

Alice Nascimento de Assis

March/2018

Advisor: Prof. Dr. José Cardoso Neto

Research lines: Statistics

Relative humidity interferes in many aspects in the life of the human being, and due to the many consequences that a low or a high percentage can entail, the control of its level is of paramount importance. Thus, the modeling of extreme situations of this variable can aid in the planning of human activities that are susceptible to their harmful effects, such as public health. The main interest is to predict, based on probability density functions applied to observed data, the values that may occur in a certain locality. The Generalized Distribution of Extreme Values has been widely used for this purpose and research using Time Series analysis of meteorological and climatic data. In this work, a statistical model is proposed for prediction of rates and temporal proportions and/or spatially dependents. The model was constructed by marginalizing the Kumaraswamy G-exponentialised distribution conditioned to a random field with positive alpha-stable distribution. Some properties of this model were presented, procedures for estimation and inference were discussed and an MCEM algorithm was developed to estimate the parameters. As a particular case, the model was used for spatial prediction of relative humidity in weather stations at Amazonas state, Brazil.

Keywords: Kumaraswamy distribution; Alpha-stable distribution; MCEM algorithm; Relative humidity.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresentaremos os aspectos gerais do trabalho, justificativa e relevância, os objetivos e exemplos de aplicações. Descreveremos a organização do trabalho.

1.1 Aspectos gerais

Na região Amazônica os padrões de descrições de temperatura e umidade são altos quando comparados a outras regiões brasileiras, esses fatores são fundamentais para a existência da maior Biodiversidade do planeta nessa localidade, entretanto o que vem observando nos últimos anos é o aumento cada vez maior da temperatura e redução da umidade do ar ocasionadas pela substituição progressiva das áreas verdes por edificações e pavimentação, especialmente nas grandes cidades Monteiro *et al.* (2014).

A área da saúde é uma das mais afetadas pelas mudanças climatológicas. Segundo Pinto *et al.* (2008), a baixa umidade relativa do ar (UR) pode gerar vários problemas de saúde, como respiratórios, alergias, sinusites, asmas e outras doenças que tendem a se agravar. Já de acordo com De Camargo (2007), quando a UR é muito alta, pode ocorrer estresse por calor, sensação desagradável, elevação da temperatura corporal, doenças térmicas brandas e doenças relacionadas com o quadro de disidratação e hipertermia. Entender o comportamento desta variável na atualidade e determinar previsões seguras para o futuro podem auxiliar em medidas preventivas na área da saúde, assim como, em previsões climáticas e no gerenciamento dos recursos hídricos.

Dessa forma, é de fundamental importância o uso de modelos estatísticos adequados para se fazer previsões e produzir diagnósticos o mais próximo do real colaborando para uma tomada de decisão nos diversos setores da sociedade, tendo em vista que os fatores climáticos de uma forma geral afetam a todos.

Modelos físicos matemáticos foram testados por Delgado *et al.* (2007), para o cálculo de umidade relativa do ar em escala a partir de dados de temperatura máxima e mínima no município de Muriaé em Minas Gerais. Os autores concluíram que modelos de previsão de umidade relativa do ar tem importância significativa principalmente em locais que dispõem de dados de temperatura máxima e mínima em locais que apresentem séries históricas falhas. Estudos realizados por Soebiyanto *et al.* (2010) verificam efeitos diretos das principais variáveis climáticas (umidade do ar, precipitação, temperatura) no inverno como fator de transmissão da gripe em climas temperados. Os procedimentos realizados por Li *et al.* (2013) concentra-se na questão de mineração de dados meteorológicos para a construção do algoritmo ARIMA no ambiente Hadoop e construir um clima escalável, fácil de manter e eficaz sistema de previsão. Na análise de variabilidade e previsão de umidade relativa do ar feita por Syeda (2013) foi uma tentativa de investigar em seis estações divisórias em Bangladesh, No trabalho de Tibulo *et al.* (2014) tem por objetivo apresentar uma comparação do desempenho das classes de modelos de séries temporais ARIMA, ARMAX e Alisamento Exponencial, ajustados a dados de umidade relativa do ar. O monitoramento feito por Bayer & Bayer (2015) utilizou modelo beta autorregressivo de média móvel, captando o comportamento da série e gerando previsões coerentes.

Neste trabalho propormos um Modelo Estatístico para predição de taxas e proporções temporais e/ou espacialmente dependentes. A distribuição de probabilidade base para está dissertação é a distribuição Kumaraswamy foi originalmente concebida para modelar processos aleatórios limitados com aplicações hidrológicas Kumaraswamy (1980), e tem sido usado para isso, mas também para outros fins ver, (por exemplo, Fletcher & Ponnambalam (1996); Ganji *et al.* (2006); Sánchez *et al.* (2007); Seifi *et al.* (2000); Sundar & Subbiah (1989); Courard-Hauri (2007)). No entanto, apesar das vantagens que a disponibilidade de uma função de distribuição em forma fechada implica, e apesar de Poondi Kumaraswamy ter introduzido a distribuição de duplo alinhamento que tem seu nome quase quatro décadas atrás, pesquisas sobre a própria distribuição não foram desenvolvidas até recentemente (Garg (2008); Nadarajah (2008); Jones (2009); Mitnik (2013); e mais notavelmente Eudes *et al.* (2015)). O modelo foi construído através da marginalização da distribuição Kumaraswamy G-exponencializada condicionada a um campo aleatório com distribuição alfa-estável positivo. Algumas propriedades desse modelo foram apresentadas, procedimentos para estimação e inferência foram discutidos e um algoritmo MCEM foi desenvolvido parar estimar os parâmetros. Como um caso particular, o modelo foi utilizado para predição espacial da umidade relativa do ar observada nas estações meteorológicas do Estado do Amazonas.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é a construção de um modelo multivariado para modelagem e predição de taxas e proporções .

Como objetivos específicos, temos:

1. Construção do modelo multivariado;

2. Apresentar algumas propriedades deste modelo;

3. Desenvolver e implementar o algoritmo MCEM para a inferência e estimação dos parâmetros do modelo proposto;

4. Aplicar o modelo proposto em dados reais para predição de umidade relativa do ar.

1.3 Organização do trabalho

Em termos de estruturação, esta dissertação está dividida em 6 capítulos.

No capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos que fundamentam esta dissertação.

No Capítulo 3, é introduzida uma classe multivariada. Derivamos também algumas de suas propriedades, modelos particulares e discutimos métodos de estimação de seus parâmetros.

No Capítulo 4, propomos o modelo multivariado para predição espacial e apresentamos suas propriedades. Além disso, desenvolvemos o algoritmo MCEM para a inferência e estimação dos parâmetros deste modelo.

No Capítulo 5, aplicamos o modelo proposto no problema de predição da umidade relativa do ar para o Estado do Amazonas.

No Capítulo 6, descrevemos as considerações finais e, com base neste trabalho, sugerimos algumas ideias para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Neste capítulo é feito um breve levantamento da teoria utilizada no desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, apresentamos na Seção 2.1 a forma geral da distribuição Kumaraswamy. A classe de distribuição de probabilidade chamada estável e suas propriedades mais importantes têm destaque na Seção 2.2. Na Seção 2.3 apresentamos a distribuições condicionais G-exponencializada aplicadas no contexto multivariado usando como base a técnica introduzida por Lehmann (1953). Em seguida, na Seção 2.4 é apresentado marginais de distribuições condicionais G-exponencializada e, por último, na Seção 2.5 são introduzidos os Algoritmos **EM** e **MCEM** .

2.1 Forma geral da distribuição Kumaraswamy

A distribuição de Kumaraswamy (chamada, de agora em diante, de distribuição Kw).

A densidade de probabilidade, distribuição cumulativa, e as funções quantis da forma geral da distribuição Kumaraswamy (Mitnik & Baek (2013)),- ou seja, a forma da distribuição com suporte em qualquer intervalo aberto da reta real com limite superior b e limite inferior c - são as seguintes:

$$f(y) = (b-c)^{-1}\lambda\beta\left(\frac{y-c}{b-c}\right)^{\lambda-1}\left[1-\left(\frac{y-c}{b-c}\right)^{\lambda}\right]^{\beta-1}$$

$$F(y) = 1-\left[1-\left(\frac{y-c}{b-c}\right)^{\lambda}\right]^{\beta}$$

$$y = F^{-1}(u) = c + (b-c)\left[1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{2.1}$$

onde $c < y < b$, $0 < u < 1$, e $\lambda > 0$ e $\beta > 0$ são parâmetros de forma. Denotaremos esta forma geral de distribuição por $Kw(\lambda, \beta, c, b)$.

O r-ésimo momento em torno de zero de $Y \sim Kw(\lambda, \beta, c, b)$ (Mitnik (2013)) é

$$\mu_r^{'}(Y) = (b-c)^r \sum_{j=0}^{r} \left(\begin{array}{c} r \\ j \end{array} \right) \mu_{r-j}^{'}(Y) \left(\frac{c}{b-c}\right)^j, \tag{2.2}$$

onde $\mu_n^{'}(Y) = \beta B\left(1+\frac{n}{\lambda}, \beta\right)$ é o n-ésimo momento em tono de zero de $Y \sim Kw(\lambda, \beta) \equiv Kw(\lambda, \beta, 0, 1)$, $B(a,d) = \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{d-1}ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(d)}{\Gamma(a+d)}$ é a função Beta, e $\Gamma(v) = \int_0^{\infty} t^{v-1}e^{-1}dt$ é a função Gama. De (2.2), a esperança e variância da forma geral da distribuição são $E(Y) = c + (b-c)\lambda B\left(1+\frac{1}{\lambda}, \beta\right)$ e $Var(Y) = (b-c)^2\left\{\beta B\left(1+\frac{2}{\lambda}, \beta\right) - \left[\beta B\left(1+\frac{1}{\lambda}, \beta\right)\right]^2\right\}$. De (2.1), a expressão da mediana,

$$md(Y) = \kappa = c + (b-c)\left(1-0,5^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

2.1.1 Forma padrão da distribuição Kumaraswamy

A forma padrão da distribuição Kumaraswamy é obtida quando c = 0 e b = 1.

Definição 2.1 (Função densidade de probabilidade). *Uma variável aleatória tem distribuição Kumaraswamy com parâmetros $\lambda > 0$ e $\beta > 0$ se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por*

$$g(y) = \begin{cases} \lambda\beta y^{\lambda-1}(1-y^{\lambda})^{\beta-1} & , \quad 0 < y < 1, \\ 0 & , \quad caso\ contrário. \end{cases} \tag{2.3}$$

Os parâmetros λ e β são chamados parâmetros de forma da distribuição.

A representação gráfica da função densidade (2.3), para alguns valores de λ e β é dada na Figura 2.1.

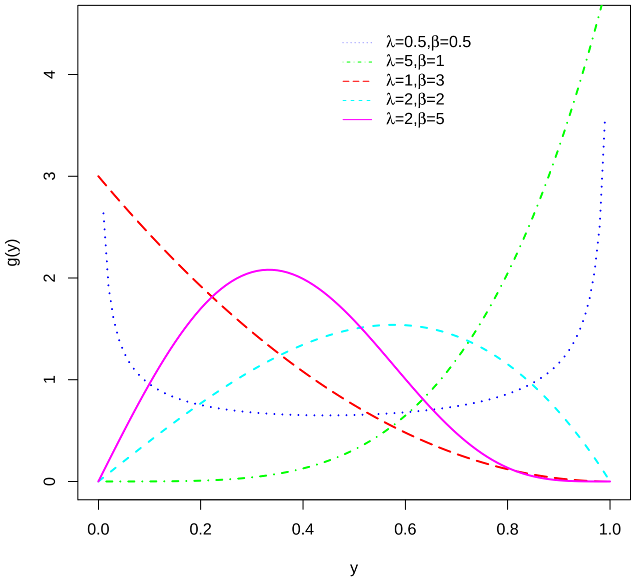

Figura 2.1: Função densidade da distribuição $Kw(\lambda,\beta)$ para alguns valores de λ e β.

A Kumaraswamy é capaz e acomodar as taxas de falha monótonas e não monótonas.

Definição 2.2 **(Função de distribuição acumulada).** *Se Y é uma variável aleatória tal que $Y \sim Kw(\lambda,\beta)$, temos que sua função de distribuição acumulada (fda) é expressa por*

$$G(y) = G(y) = 1-(1-y^{\lambda})^{\beta}, \quad y \in (0,1) \tag{2.4}$$

A representação gráfica da função de distribuição (2.4), para alguns valores de λ e β é dada na Figura 2.2.

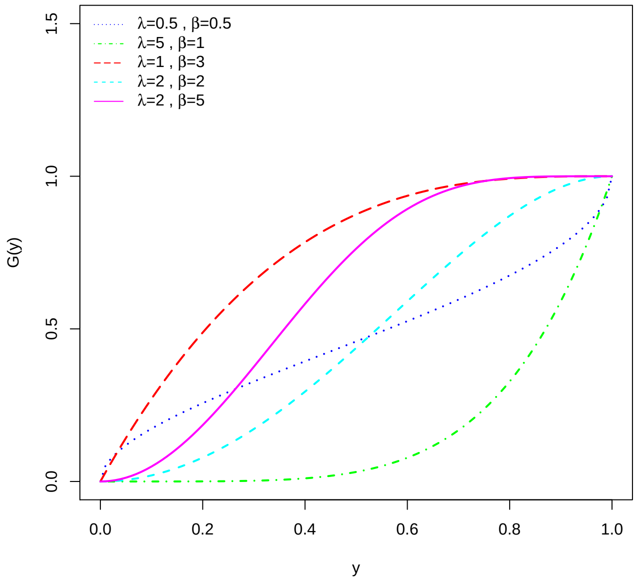

Figura 2.2: Função de distribuição $Kw(\lambda, \beta)$ para alguns valores de λ e β.

Definição 2.3 (Função de excedência). *Seja $Y \sim Kw(\lambda, \beta)$, definimos função de excedência da variável Y, indicada por $\overline{G}$, como sendo o complementar da sua respectiva função distribuição, isto é,*

$$\overline{G}(y) = 1 - G(y) = 1 - \left[1 - (1 - y^{\lambda})^{\beta}\right] = \left(1 - y^{\lambda}\right)^{\beta}, \quad y \in (0,1) \tag{2.5}$$

Definição 2.4 (Função de risco). *A função de risco de uma variável aleatória $Y \sim Kw(\boldsymbol{\theta})$ é dada por:*

$$r(y;\boldsymbol{\theta}) = \frac{g(y;\boldsymbol{\theta})}{\overline{G}(y;\boldsymbol{\theta})} = \frac{\lambda \beta y^{\lambda-1}}{1 - y^{\lambda}}, \quad y \in (0,1) \tag{2.6}$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \beta)$ é o vetor de parâmetros.

Na Figura 2.3 são exibidas algumas formas possíveis da função de risco (2.6), para diferentes valores de λ e β.

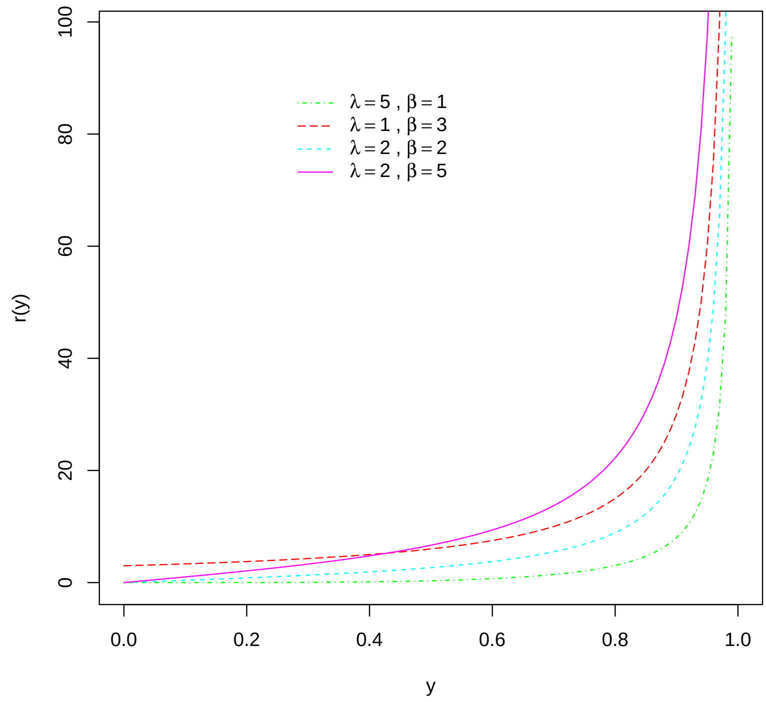

Figura 2.3: Função de risco da distribuição $Kw(\lambda, \beta)$ para alguns valores de λ e β.

Definição 2.5 (Função quantil). *Os quantis de uma variável aleatória Y com distribuição Kumaraswamy padrão (2.4), podem serem obtidos da seguinte maneira dada por*

$$y = F^{-1}(u) = \left[1 - (1-u)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad u \in (0,1) \tag{2.7}$$

Propriedade 2.1 (Esperança e Variância). *Segundo Garg (2009), a distribuição Kw é tão versátil quanto a distribuição beta, mas com uma forma mais simples de uso, especialmente em estudos de simulação já que ela tem uma forma fechada simples para fdp e fda.*

Os momentos dessa distribuição são diretamente obtidos por

$$\mathbb{E}(Y^m) = \beta B\left(\frac{\lambda + m}{\lambda}, \beta\right)$$

lembrando que $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ é a função beta.

Assim, sua esperança e variância são dadas por

$$\mathbb{E}(Y) = \beta B\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda}, \beta\right)$$

e
$$Var(Y) = \beta B\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}, \beta\right) - \left[\beta B\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}, \beta\right)\right]^2$$

Propriedade 2.2 (**Mediana**). *De (2.7), obtemos imediatamente uma expressão simples para a mediana,*

$$md(Y) = \kappa = \left(1 - 0.5^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \tag{2.8}$$

que fornece a base para as reparametrizações de dispersão mediana.

2.1.2 Relação com a distribuição Beta

A função de densidade na Expressão (2.3) tem as mesmas propriedades que a distribuição *Beta*, porém com algumas vantagens. Segundo Sindhu *et al.* (2013) a distribuição *Kw* parece não ser muito familiar para os estatísticos e não foi investigada sistematicamente com detalhes, nem tem a sua intercambialidade em relação a distribuição *Beta* como tem sido amplamente apreciada. No entanto, Jones (2009) explorou a fundo a gênese da distribuição *Kw* e, o mais importante, deixou claro algumas semelhanças e diferenças entre as distribuições *Beta* e *Kw*.

Por exemplo, as densidades *Kw* e *Beta* são unimodais, crescentes, decrescentes ou constantes, dependendo da mesma maneira como a distribuição beta é definida sobre os valores de seus parâmetros. Ele destacou várias vantagens que a distribuição *Kw* tem sobre a distribuição *Beta*: a constante de normalização, fórmulas explícitas para a distribuição e funções quantis que não envolve qualquer função especial; uma fórmula para geração de variáveis aleatórias; fórmulas explícitas para os *L*-momentos e mais fórmulas para momentos de estatísticas de ordem. Além disso, segundo Jones (2009), a distribuição beta tem as seguintes vantagens sobre a distribuição *Kw*: fórmulas para momentos e para função geradora dos momentos; uma sub-família uniparamétrica de distribuições simétricas; estimativas simples para os momentos e várias maneiras de gerar a distribuição por meio de processos físicos.

A distribuição Kumaraswamy é relacionada com a distribuição Beta, pois $Y \sim Kw(\lambda, \beta)$ é a λ-ésima raiz de uma variável aleatória $X \sim Beta(1, \beta)$. Ou seja,

$$Y = \sqrt[\lambda]{X},$$

com igualdade em distribuição.

A seguir apresentamos a relação entre a distribuição Kumaraswamy e outras distribuições:

- Se $Y \sim Kw(1,1)$, então $Y \sim U(0,1)$;
- Se $Y \sim U(0,1)$, então $\left(1-(1-Y)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \sim Kw(\lambda,\beta)$;
- Se $Y \sim Beta(1,\beta)$, então $Y \sim Kw(1,\beta)$;
- Se $Y \sim Beta(\lambda,1)$, então $Y \sim Kw(\lambda,1)$;
- Se $Y \sim Kw(\lambda,1)$, então $1-Y \sim Kw(1,\lambda)$;
- Se $Y \sim Kw(1,\lambda)$, então $1-Y \sim Kw(\lambda,1)$;
- Se $Y \sim Kw(\lambda,1)$, então $-\log(Y) \sim Exponencial(\lambda)$;
- Se $Y \sim Kw(1,\beta)$, então $-\log(1-Y) \sim Exponencial(\beta)$;
- Se $Y \sim Kw(\lambda,\beta)$ então $Y \sim BG1(\lambda,1,1,\beta)$, em que $BG1$ é a distribuição *Beta Generalizada* do tipo 1, com função densidade

$$f(y;m,n,p,q) = \frac{|m|y^{mp-1}\left(1-(y/n)^m\right)^{q-1}}{n^{mp}B(p,q)},$$

para $0 < x^m < n^m$ em que m,n,p e q são positivos.

2.1.3 Reparametrizações através da mediana

Admitindo a forma padrão da Kw (2.1.1), fazemos $c=0$ e $b=1$, sem perda de generalidade. Será apresentada duas reparametrizações possíveis de dispersão mediana para os parâmetros de forma.

De (2.8), o parâmetro de forma β pode ser expresso como

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left(1-0.5^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\kappa^{\lambda} &= \left(1-0.5^{\frac{1}{\beta}}\right) \\
0.5^{\frac{1}{\beta}} &= 1-\kappa^{\lambda} \\
\frac{1}{\beta} &= \frac{\ln(1-\kappa^{\lambda})}{\ln 05} \\
\beta &= \frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa^{\lambda})}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Analogamente, para o parâmetro λ temos,

$$\lambda = \frac{\ln(1-0.5^{1/\beta})}{\ln\kappa}. \qquad (2.10)$$

Substituindo sucessivamente (2.9) e (2.10) em (2.3), (2.4) e (2.7).Obtemos duas reparametrizações possíveis da distribuição Kumaraswamy. A primeira reparametrização denotada por $Kw(\kappa,\lambda^{-1},0,1)$ é:

$$f_{\lambda}(y) = \frac{\lambda\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa^{\lambda})} y^{\lambda-1}(1-y^{\lambda})^{\frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa^{\lambda})}-1}$$

$$F_{\lambda}(y) = 1-(1-y^{\lambda})^{\frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa^{\lambda})}}$$

$$F_{\lambda}^{-1}(u) = \left[1-(1-u)^{\frac{\ln(1-\kappa^{\lambda})}{\ln(0,5)}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

A segunda reparametrização, denotada por $Kw(\kappa,\beta^{-1},0,1)$ é:

$$f_{\beta}(y) = \frac{\ln(1-0.5^{\beta^{-1}})}{\ln\kappa}\beta y^{\frac{\ln(1-0.5^{\beta^{-1}})}{\ln\kappa}-1}\left[1-y^{\frac{\ln(1-0.5^{\beta^{-1}})}{\ln\kappa}}\right]^{\beta-1}$$

$$F_{\beta}(y) = 1-\left[1-y^{\frac{\ln(1-0.5^{\beta^{-1}})}{\ln\kappa}}\right]^{\beta}$$

$$F_{\beta}^{-1}(u) = y = \left[1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{\ln\kappa}{\ln(1-0.5^{\beta^{-1}})}}$$

O objetivo principal das reparametrizações é mostrar que os parâmetros λ^{-1} e β^{-1} são parâmetros de dispersão.

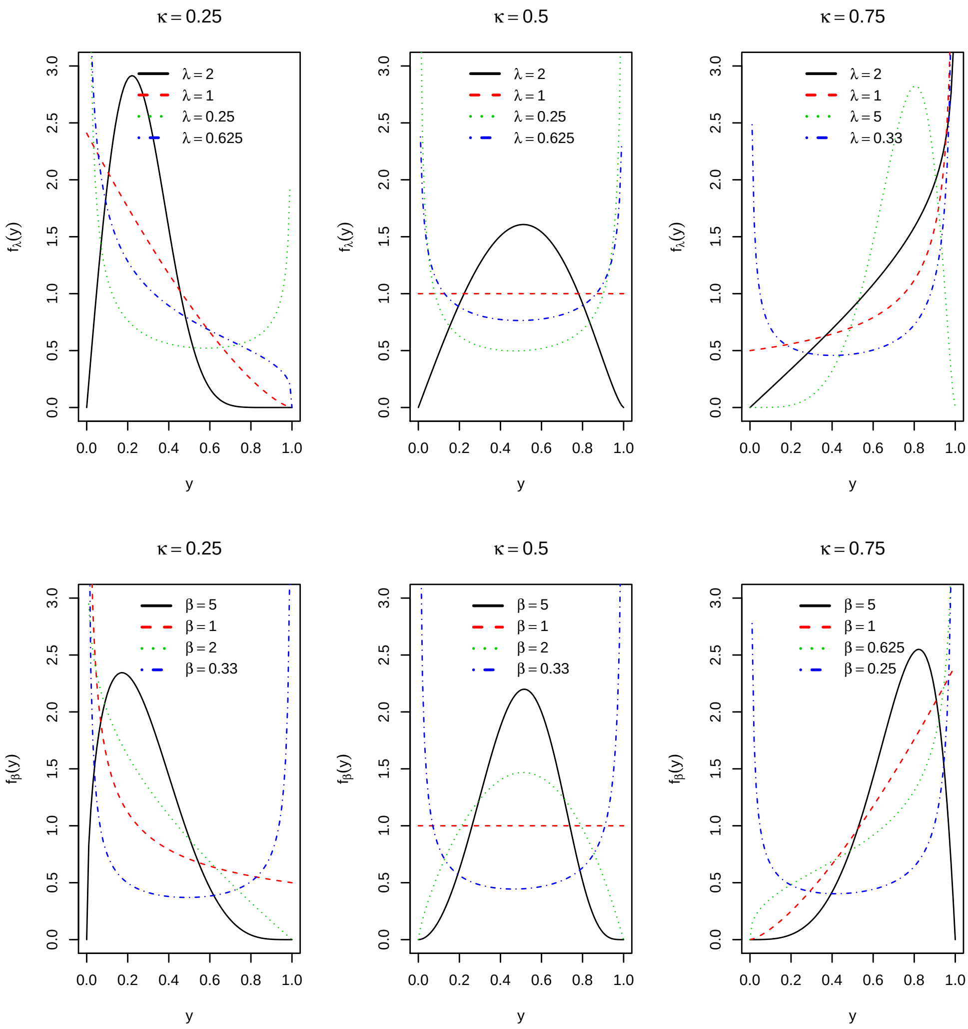

Figura 2.4: Algumas densidades da Kumaraswamy, ambas reparametrizações

A Figura 2.4 mostra a densidade de distribuições Kumaraswamy reparametrizadas com suporte em $(0,1)$, para vários valores de seus parâmetros. A figura ilustra bem quão flexível e versátil é a distribuição Kumaraswamy. Ela também ilustra uma série de propriedades da versão reparametrizada da distribuição que podem ser derivadas diretamente das propriedades conhecidas da distribuição em sua parametrização padrão (ver Jones (2009), Seção 3; Kumaraswamy (1980), pag. 81-83; Mitnik (2013), Seção 2).

2.2 Distribuições estáveis

As distribuições estáveis são uma rica classe de distribuições de probabilidade que permitem assimetria, e caudas pesadas e têm propriedades interessantes tais como estabilidade e independência de escala, Nolan (2015). Essa classe foi introduzida pelo matemático Levy (1925) em seu estudo de somas de termos independentes e identicamente distribuídos.

Em geral, as distribuições estáveis não possuem uma forma fechada para sua função densidade de probabilidade, por isso a forma mais concreta para descrever todas as possíveis distribuições estáveis é através da função característica ou transformada de Fourier, exceto para três casos particulares de distribuições: Normal, Cauchy e Lévy, com as quais é possível escrever suas densidades e verificar diretamente que elas fazem parte da família de distribuições estáveis.

Existem várias parametrizações da função característica para distribuições estáveis. Por esse motivo, é importante escolher a parametrização adequada para diferentes situações. Nesse trabalho a função característica foi parametrizada de acordo com a definição apresentada abaixo.

Definição 2.6 (Distribuição estável). *Uma variável estável E, denotada por* $\mathbf{S}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$*, se sua função característica é expressa por*

$$\mathbb{E}\left[\exp(itE)\right] = \exp\left(-\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 + i\beta\left(tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\sin(t))(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1)\right] + i\delta t\right) \quad se \quad \alpha \neq 1.$$

Esta forma de parametrização para a função característica é muito recomendada.

As distribuições estáveis são descritas por quatro parâmetros: um índice de estabilidade $\alpha \in (0,2]$ também chamado de expoente característico; um parâmetro de assimetria $\beta \in [-1,1]$. Se $\beta = 0$, a distribuição é simétrica, se $\beta > 0$ é assimétrica para direita, e se $\beta < 0$ é assimétrica para esquerda. Além desses parâmetros também tem um parâmetro de escala $\gamma > 0$ e um parâmetro de locação $\delta \in \mathbb{R}$.

O índice de estabilidade α é considerado o parâmetro mais importante, pois determina a forma (taxa de variação) da cauda da distribuição. Quanto maior seu valor maior será a frequência e o tamanho de eventos extremos, ver por exemplo Ghahfarokhi & Ghahfarokhi (2009).

Quando a distribuição é padronizada, ou seja, escala $\gamma = 1$ e locação $\delta = 0$, a distribuição estável é representada pela notação $\mathbf{S}(\alpha,\beta,1,0)$. Uma propriedade básica das distribuições estáveis é que soma de variáveis aleatórias estáveis resultam em variáveis estáveis, ver Nolan (2015).

Seja $E_m \sim \mathbf{S}(\alpha,0,1,0)$, $m = 1,2,...,M$ e $\beta = 0$, então sua função característica será da forma

$$\phi_E(t) = \mathbb{E}\left[\exp(itE)\right] = e^{-t^{\alpha}}, \quad \alpha \neq 1; \quad t > 0. \tag{2.11}$$

Considere a mistura $H_\ell = \sum_{m=1}^{M} \omega_{m,\ell} E_m$. Então, a função característica de H_ℓ será dada por

$$\begin{aligned}
\phi_{H_\ell}(t) &= \phi_{\sum_{m=1}^{M} \omega_{m,\ell} E_m}(t) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{it\sum_{m=1}^{M} \omega_{m,\ell} E_m}\right] \quad \text{(por independência de } E_1, E_2, ..., E_M) \\
&= \prod_{m=1}^{M} \mathbb{E}\left[e^{it\omega_{m,l} E_m}\right] \\
&= \prod_{m=1}^{M} \phi_{E_m}(\omega_{m,\ell} t) \\
&= \prod_{m=1}^{M} e^{-\omega_{m,\ell}^{\alpha_m} t^{\alpha_m}} \quad com \quad \alpha_m = \alpha, \quad \text{então} \\
\phi_{H_\ell}(t) &= e^{-t^{\alpha} \sum_{m=1}^{M} \omega_{m,\ell}^{\alpha}}, \quad \text{portanto}
\end{aligned}$$

$$H_\ell = \sum_{m=1}^{M} \omega_{m,\ell} E_m \sim \mathbf{S}(\alpha, 0, \gamma_\ell, 0),$$

com $\gamma_\ell^{\alpha} = \sum_{m=1}^{M} \omega_{m,\ell}^{\alpha}$.

Definição 2.7 (Distribuição α-estável positiva). *Uma variável $E_\alpha \equiv \mathbf{S}(\alpha,0,1,0)$ é chamada α-estável positiva, descrita pela equação (2.11). Então, a sua transformada de Laplace é dada por,*

$$\mathbb{E}\left[\exp(-aE_\alpha)\right] = e^{-a^{\alpha}}, \quad a > 0, \tag{2.12}$$

em que necessariamente $\alpha \in (0,1]$ é o parâmetro de estabilidade da distribuição E_α e quando $\alpha = 1 \to E_1 = 1$.

A representação da densidade de E_α é dada por

$$p(e^*;\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{e^*}\right)^{(1-\alpha)^{-1}} \int_0^{\pi} b(\phi) exp\left\{-\left(\frac{1}{e^*}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} b(\phi)\right\} d\phi$$

onde,

$$b(\phi) = \left(\frac{\sin(\alpha\phi)}{\sin(\phi)}\right)^{(1-\alpha)^{-1}} \left(\frac{\sin((1-\alpha)\phi)}{\sin(\alpha\phi)}\right)$$

Os momentos da distribuição estável não existem, porém Zolotarev (1986) mostrou que os momentos log-estáveis são bem conhecidos. Usando estes resultados, temos que:

$$\mathbb{E}(\log E) = \frac{\gamma^*}{\alpha}(1-\alpha)$$

e,

$$\mathbb{V}ar(\log E) = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right).$$

em que, $\gamma^* \approx 0.57721$ é a constante de Euller.

Um resultado importante que nos auxiliará na geração de variáveis aleatórias α-estáveis positivas é dada no seguinte corolário:

Corolário 2.1. *Kanter* et al. *(1975). Sejam V e U variáveis aleatórias independentes onde* $V \sim Exp(1)$ *e* $U \sim \mathscr{U}[0,\pi]$. *Então para* $\alpha \in (0,1)$ *tem-se que* $p(e^*;\alpha)$ *é a densidade de* $\left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

Os valores de E_α podem ser gerados através dos seguintes passos:

1. Gere U $\sim \mathscr{U}(0,\pi)$ e V $\sim Exp(1)$, independentes.
2. Obtenha $e^* = \left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

Pelo Corolário (2.1), segue que $e^* \sim E_\alpha$.

Teorema 2.1 (Aproximação da densidade de H_ℓ). *Seja* $H_\ell \sim \mathbf{S}(\alpha, 0, \sum_{m=1}^{M}\omega_{m,\ell}^{\alpha}, 0)$ *com* $0 < \alpha \leq 1$. *Se para algum m,* $E_m \to \infty$. *Então* $h_\ell \to \infty$ *e pelo Teorema 1.12 Nolan (2012).*

$$P(H_\ell > h_\ell) \sim \gamma_\ell^\alpha c_\alpha h_\ell^{-\alpha},$$

$$f(h_\ell;\alpha,0,\gamma_\ell) \sim \alpha\gamma_\ell^\alpha c_\alpha h_\ell^{-(\alpha+1)},$$

em que $c_\alpha = \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$.

E a densidade aproximada de h_ℓ é dada por

$$
\begin{aligned}
f(h_\ell;\alpha) &= -\frac{\partial}{\partial h_\ell}P(H_\ell > h_\ell;\alpha,\gamma_\ell)\\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial h_\ell}\gamma_\ell^{\alpha}c_\alpha h_\ell^{-\alpha}\right]\\
&\sim \alpha\gamma_\ell^{\alpha}c_\alpha h_\ell^{-(\alpha+1)} com \quad h_\ell > 0.
\end{aligned}
$$

Definição 2.8 (Variáveis aleatórias exponenciais-estáveis). *Diz-se que a variável aleatória M possui distribuição exponencial estável com vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta} = (\alpha,\mu,\sigma)$, se $M = \mu + \sigma\log(E)$. Notação: $M \sim ExpS(\boldsymbol{\theta})$.*

2.3 Distribuições condicionais G-exponencializadas

Distribuições de probabilidade são utilizadas para modelar dados e possibilitar diversas inferências sobre os mesmos. Nas décadas recentes diversas novas distribuições de probabilidade foram propostas, estudadas e aplicadas a conjuntos de dados reais. Parte dos esforços nesse ramo da Estatística é dedicado a estender as distribuições clássicas. Várias técnicas utilizadas para expandir famílias de distribuições de probabilidade e construir novos modelos mais flexíveis que incorporem alguma propriedade de interesse têm sido proposto na literatura. Uma técnica bastante utilizada é baseada na exponencialização de uma função de distribuição acumulada G, chamada classe de distribuições G-exponencializada. Esta técnica foi introduzida por Lehmann (1953) no contexto de teste de hipótese e recentemente tem recebido bastante atenção.

Existem vários trabalhos abordando algumas famílias de distribuições na classe de distribuições exponencializadas Gupta *et al.* (1998) propos a distribuição Pareto Exponencializada, Gupta & Kundu (2001) introduziram a distribuição Exponencial Exponencializada, Nadarajah & Kotz (2006) apresentaram resultados e discussões sobre as distribuições Exponencial, Weibull, Gumbel, Gama e Fréchet Exponencializadas, Ristić & Balakrishnan (2012) introduziram a distribuição Gama-exponencializada Exponencial; ver Bakouch *et al.* (2012) propuseram a distribuição Binomial-Exponencial Exponencializada; Pinho *et al.* (2012) introduziram a distribuição Gama-Exponecializada Weibull e uma generalização de várias destas distribuições é a família de distribuições $T-X$ Exponencializada desenvolvida em Alzaghal *et al.* (2013).

Estas distribuições têm sido desenvolvidas e aplicadas em um contexto univariado e amostras de variáveis independentes e identicamente distribuídas. No entanto, existem dados de natureza multivariada que exibem algum tipo de dependência entre eventos, indivíduos e/ou grupo de indivíduos. Então, distribuições multivariadas que acomodem esta dependência conjunta podem produzir inferências mais robustas. Um exemplo, é a modelagem de valores extremos ambientais e/ou meteorológicos. Desde que os valores extremos tais como precipitação, temperatura, ou a poluição do ar são medidas em localizações especificas, como estações de monitoramento, estes são multivariados e, possivelmente, espacialmente correlacionados. No contexto de valores extremos, algumas distribuições multivariadas podem ser encontradas, por exemplo, Fougeres *et al.* (2009), Cooley & Sain (2010), Padoan (2011), Reich & Shaby, 2012 e uma classe mais geral é descrita em Fougeres *et al.* (2013).

Um conceito fundamental a ser abordado é o de distribuições condicionais *G*-exponencializada, caracterizada pela função de distribuição acumulada G de uma variável aleatória elevada a um expoente E. Embora este tipo de distribuição, com E fixo, tenha sido apresentada a mais de meio século por Lehmann (1953), aqui a utilizaremos com o objetivo de introduzir a dependência em distribuições Kumaraswamy multivariadas, que será abordado no próximo capítulo.

Definição 2.9. *Sejam Y e $E > 0$ duas variáveis aleatórias. Dizemos que, condicional a E, Y possui distribuição G-exponencializada, se a distribuição de Y é da forma,*

$$\mathbb{P}(Y \leq y; \boldsymbol{\theta}|E) = F(y; \boldsymbol{\theta}|E) = [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E \tag{2.13}$$

ou, se sua função de excedência é dada por,

$$\mathbb{P}(Y > y; \boldsymbol{\theta}|E) = \overline{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E) = [1 - G(y; \boldsymbol{\theta})]^E = \overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})^E. \tag{2.14}$$

Onde G e $\overline{G}$ são chamadas, respectivamente, de função de distribuição e função de excedência de base dependendo do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

- interpretando a Definição. 1) Suponha $W_1, W_2, \ldots, W_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (v.a.i.i.d) com Função de distribuição igual a G e, ainda, $W_i, i = 1, \ldots, n$ é independente de E. Então Y representa a distribuição do Máximo (2.13) ou do Mínimo (2.14) de E dessas $W_i^{'}s$ variáveis. Portanto, podemos usar F para modelar valores extremos. No caso do Valor Máximo, fazendo $x_1 = G \sim U(0,1)$ e $x_2 = F = G^E$,

$$\mathbb{P}(W_i < Y; \boldsymbol{\theta}|E) = \int_0^1 \left(\int_0^{x_2} dx_1 \right) dx_2^E = \int_0^1 x_2 dx_2^E = \frac{E}{E+1}, \quad i = 1,2,...,n$$

podemos interpretar E como um parâmetro de estocasticidade, no sentido que descreve o quanto a variável aleatória Y é, estocasticamente, maior que W_i.

- interpretando a Definição. 2) considere a função de excedência

$$\mathbb{P}(Y > y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha) = \left[\overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})\right]^{E_\alpha}. \tag{2.15}$$

Então a densidade condicional de Y é

$$f(y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha) = E_\alpha \left[\overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})\right]^{E_\alpha - 1} g(y; \boldsymbol{\theta})$$

de modo que a função de risco condicional é

$$h(y; \boldsymbol{\theta}|E_\alpha) = E_\alpha h(y; \boldsymbol{\theta})$$

que pode ser interpretada como a função de risco para um modelo de fragilidade.

Exemplo 2.1. *Seja $\overline{G} \sim Kw(\lambda, \beta)$, isto é, a distribuição de base é Kumaraswamy. Então, $Y|E \sim Kw(\lambda, \beta E)$, ou seja,*

$$P(Y > y|E) = \left(1 - y^\lambda\right)^{\beta E}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} P(Y \geq y|E) &= [\overline{G}(y; \boldsymbol{\theta})]^E \\ &= \left[\left(1 - y^\lambda\right)^\beta\right]^E \\ &= \left(1 - y^\lambda\right)^{\beta E} \end{aligned}$$

$\therefore Y|E \sim Kw(\lambda, \beta E)$

Exemplo 2.2. *Seja $G \sim Gumbel(\mu,\sigma)$, isto é, a distribuição de base é Gumbel. Então, $Y|E \sim Gumbel(\mu+\sigma\log E,\sigma)$, ou seja,*

$$P(Y \leqslant y|E) = \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{y-(\mu+\sigma logE)}{\sigma}\right\}\right\}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant y|E) &= [G(y;\boldsymbol{\theta})]^E \\
&= \left[\exp\left\{-\exp\left\{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right\}\right]^E \\
&= \exp\left\{-E\exp\left\{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right\} \\
&= \exp\left\{-\exp\{\log E\}\times\exp\left\{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right\} \\
&= \exp\left\{-\exp\left\{\frac{\sigma logE}{\sigma}-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right\} \\
&= \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{y-(\mu+\sigma logE)}{\sigma}\right\}\right\}
\end{aligned}$$

$\therefore Y|E \sim$ Gumbel $(\mu+\sigma logE,\sigma)$

2.4 Marginais univariadas de distribuições condicionais G-exponencializadas

Uma aplicação interessante da Definição (2.9) é vista quando consideramos $E \sim$ α-estável positiva Fougeres *et al.* (2009), denotada por E_α. Primeiramente, note que podemos expressar (2.13) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
F(y;\boldsymbol{\theta}|E_\alpha) &= [G(y;\boldsymbol{\theta})]^{E_\alpha} \\
&= \exp\left\{\log\left[G(y;\boldsymbol{\theta})^{E_\alpha}\right]\right\} \\
&= \exp\{E_\alpha\log[G(y;\boldsymbol{\theta})]\} \\
F(y;\boldsymbol{\theta}|E_\alpha) &= \exp\{-E_\alpha\log[1/(G(y;\boldsymbol{\theta}))]\}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Aplicando a esperança ambos os lados em (2.16),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(F(y;\boldsymbol{\theta}|E_\alpha)\right) &= \mathbb{E}\left[F(y;\boldsymbol{\theta}|E_\alpha)\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[-E_\alpha \log\left(1/\left(G(y;\boldsymbol{\theta})\right)\right)\right]\right\} \\
F(y;\boldsymbol{\theta}) &= \mathbb{E}\left\{\exp\left[-E_\alpha\left(-\log\left(G(y;\boldsymbol{\theta})\right)\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

em seguida aplicando a transformada de Laplace (2.12),

$$F(y;\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\left[-\log\left(G(y;\boldsymbol{\theta})\right)\right]^\alpha\right\}.$$

Analogamente, usando a Expressão (2.14) e marginalmente por (2.12) obtemos

$$\overline{F}(y;\boldsymbol{\theta}) = P(Y > y) = \mathbb{E}\left[\overline{F}(y;\boldsymbol{\theta}|E_\alpha)\right] = \exp\left\{-[-\log(\overline{G}(y;\boldsymbol{\theta}))]^\alpha\right\}. \tag{2.17}$$

Em alguns casos o parâmetro α é chamado parâmetro de forma. Em outros casos, entretanto, ele apenas modifica (aumenta ou diminui) os parâmetros da função (distribuição ou excedência) de base.

A seguir vamos apresentar alguns exemplos de marginais univariadas. As notações $Y \sim G(y;\boldsymbol{\theta})$ ou $Y \sim \overline{G}(y;\boldsymbol{\theta})$ será utilizada para especificar que G ou $\overline{G}$ é a distribuição de base para a variável Y.

Exemplo 2.3. *Dizemos que Y possui distribuição Kumaraswamy se sua função de excedência é expressa por (2.5). Agora, se $E \sim \alpha$-estável positiva e $Y \sim Kw(\lambda,\beta)$ então $Y|E \sim Kw(\lambda,\beta E)$. Portanto, por (2.17) a distribuição marginal é dada por:*

$$\overline{F}(y;\boldsymbol{\theta},\alpha) = \exp\left\{-\beta^\alpha[-\log(1-y^\lambda)]^\alpha\right\}, \quad y \in (0,1). \tag{2.18}$$

Na Figura 2.5 apresentamos o gráfico dessa função de excedência com $\lambda = 0.5$, $\beta = 2$ e variando os valores do parâmetro de forma α.

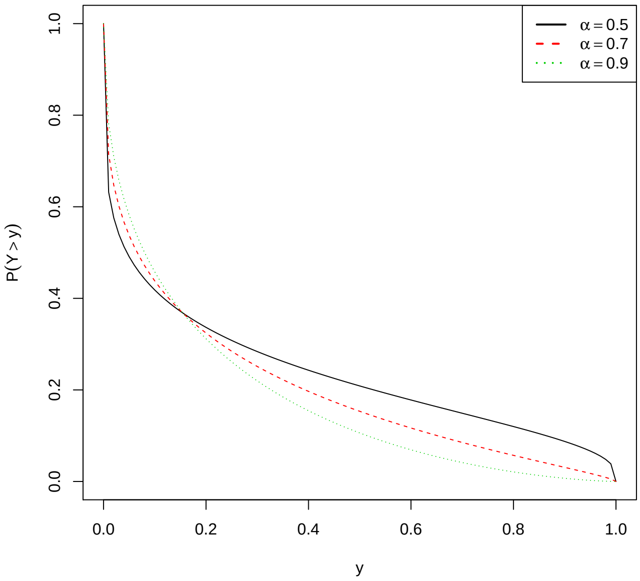

Figura 2.5: Função de excedência Kumaraswamy-Exponencializada

Exemplo 2.4. *Considere $E \sim \alpha$-estável positiva e $Y \sim P(I)(\mu, 1/\sigma)$ então $Y|E \sim P(I)(\mu, E/\sigma)$, isto é,*

$$\overline{F}(y; \boldsymbol{\theta}|E) = \left(\frac{y}{\mu}\right)^{-\dfrac{E}{\sigma}}, \quad y > \mu.$$

Logo, por (2.17), temos que

$$\overline{F}(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{\log y - \log \mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right\}, \quad y > \mu$$

que representa a função de excedência Log-Poly-Weibull$(\log \mu, \sigma, \alpha)$ Berger & Sun (1993).

Nos exemplos acima, vemos que após a marginalização, as distribuições não pertencem à mesma família. No entanto, existem casos em que as distribuições tanto condicionais quanto incondicionais pertencem a mesma classe de distribuições. Os exemplos a seguir ilustram esse fato.

Exemplo 2.5. *Se a distribuição de base é $Y \sim Gumbel(\mu, \sigma)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, isto é*

$$G(y; \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

então,

$$F(y;\boldsymbol{\theta}|E) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{y-(\mu+\sigma\log E)}{\sigma}\right)\right]\right\} = \exp\left\{-E\exp\left[-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

ou seja, $Y|E \sim Gumbel(\mu+\sigma\log E, \sigma)$. *Logo, aplicando (2.17), temos que*

$$F(y;\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{y-\mu}{\sigma/\alpha}\right)\right]\right\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

com $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma/\alpha)$. *Portanto,* $Y \sim Gumbel\left(\mu, \frac{\sigma}{\alpha}\right)$.

Portanto, após a marginalização, Y também possui distribuição na mesma família Gumbel. Neste caso α não representa um parâmetro de forma. Deste modo, dizemos que a distribuição estável positiva simplesmente aumentou $(0 < \alpha \leq 1)$ o parâmetro de escala de σ para σ/α.

Exemplo 2.6. *Suponha que* $E \sim \alpha$*-estável positiva e* $Y \sim Weibull(\beta, \lambda)$*, isto é,* Y *possui função de excedência*

$$\overline{G}(y;\beta,\lambda) = \exp\left\{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\lambda}\right\}, \quad y > 0.$$

Então, $Y|E \sim Weibull(\beta/E^{1/\lambda}, \lambda)$ *e aplicando (2.17), temos*

$$\overline{F}(y;\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\lambda\alpha}\right\}, \quad y > 0$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \lambda\alpha)$.

Portanto, após a marginalização, $Y \sim Weibull(\beta, \lambda\alpha)$, ou seja, Y também possui distribuição na mesma família Weibull. Neste caso, dizemos que o parâmetro α diminuiu $(0 < \alpha \leq 1)$ o parâmetro de forma λ para $\lambda\alpha$.

2.4.1 Distribuição Kumaraswamy exponencializada univariada

Nesta seção será apresentado o estudo da distribuição Kumaraswamy Exponencializada, identificada como (EKw).

Considere que Y tem distribuição de base em (2.4), com parâmetro de forma $\alpha > 0$, diz-se que $Y \sim EKw(\alpha, \lambda, \beta)$ com $\lambda, \beta, > 0$ e $y \in (0,1)$ sendo definida pela Expressão (2.15) e usando o resultado (2.18). A função distribuição correspondente é expressa por

$$F(y;\boldsymbol{\theta}) = [1 - G(y;\boldsymbol{\theta})]^{\alpha} = \left\{1 - \exp\left[-\beta(-\log(1-y^{\lambda}))\right]\right\}^{\alpha},$$

e sua função densidade utilizando a Expressão (2.16) definida como,

$$f(y;\boldsymbol{\theta}) = \alpha\lambda\beta y^{\lambda-1}\left(1-y^{\lambda}\right)^{\beta-1}\left[1-\left(1-y^{\lambda}\right)^{\beta}\right]^{\alpha-1}.$$

A distribuição Kumaraswamy tem sido usada no contexto de modelagem de taxas, proporções, números índices e variáveis aleatórias com suporte limitado. Na literatura, diversos casos dessa distribuição foram estudados, alguns deles são: Kumaraswamy normal Correa *et al.* (2012), Kumaraswamy log-logística De Santana *et al.* (2012), Kumaraswamy pareto Bourguignon *et al.* (2013), Kumaraswamy pareto generalizada Nadarajah & Eljabri (2013), Kumaraswamy gamma generalizada De Pascoa *et al.* (2011), Kumaraswamy $half$-normal generalizada Correa *et al.* (2012), Kumaraswamy Weibull inversa Shahbaz *et al.* (2012) e Kumaraswamy Rayleigh inversa Hussian & Amin (2014).

Algumas vezes fazer inferência no modelo multivariado é uma tarefa complexa, pois as densidades e as propriedades são difíceis de serem obtidas. No entanto, no próximo capítulo será apresentado um novo modelo Kumaraswamy multivariado com inferência mais simples de ser realizada.

2.5 Algoritmo EM e MCEM

2.5.1 Algoritmo EM

Neste trabalho o estimador de máxima verossimilhança (EMV) será encontrado via algoritmo **EM**, ver Dempster *et al.* (1977), pois a maximização da função verossimilhança do modelo proposto não é analiticamente tratável.

O algoritmo **EM** é uma ferramenta computacional utilizada para o cálculo do EMV de forma iterativa, e é principalmente utilizado para problemas que envolvem dados incompletos ou quantidades não observáveis (variáveis latentes). As variáveis latentes podem ser incorporadas ao modelo com o propósito de capturar a característica de interesse (neste caso, a dependência) e facilitar a estimação dos parâmetros de interesse, tendo em vista que, com sua inserção no modelo, a log-verossimilhança completa pode ser reescrita como a soma de duas log-verossimilhanças completas. Cada iteração do algoritmo **EM** tem dois passos, chamado o passo **E** (esperança) e o passo **M** (maximização).

Para construir o algoritmo, seja $\mathbf{y}$ o vetor de dados observados ou dados incompletos e $\mathbf{E}$ um vetor de quantidades aleatórias não observáveis (chamados de efeitos aleatórios, variáveis latentes ou dados faltantes). O dado completo ou aumentado $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{E})$ é $\mathbf{y}$ aumentado com $\mathbf{E}$ e sua função de densidade é $\mathrm{f}(\mathbf{y}_c|\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Denota-se por $\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)$ a funçao log-verossimilhança dos dados completos e por $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ a função log-verossimilhança dos dados observados.

Segundo Zhu & Lee (2001), na maioria das aplicações estatísticas, a função log-verossimilhança dos dados completos geralmente tem forma mais simples que a log-verossimilhança dos dados observados.

Seja $\mathrm{k}(\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ a distribuição condicional de $\mathbf{E}$ com esperança $\mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{Y},\boldsymbol{\theta}}$ e defina $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ como a estimativa do parâmetro na k-ésima iteração. Então os dois passos na $(k+1)$-ésima iteração são:

1. Passo **E**: Calcule $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbb{E}[\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}]$, onde a esperança é tomada com respeito a distribuição condicional $\mathrm{f}(\mathbf{y}_c|\boldsymbol{\theta})$.

2. Passo **M**: Maximize $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ com respeito a θ. Se o valor $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ = argmax $(Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}))$ satisfaz $|e_{(k)} = \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}| < \varepsilon$, em que ε é um valor especificado para o erro na aproximação, então, o EMV de $\boldsymbol{\theta}$ é $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$. Caso contrário, repita os passos **E** e **M** até que a convergência seja obtida.

Segundo Casella & Berger (2011), o **EM** é um algoritmo que seguramente converge para o EMV e tem como base a ideia de substituir uma difícil maximização da verossimilhança por uma sequência de maximizações mais fáceis, cujo limite é a resposta para o problema original. A demonstração original da convergência do **EM** realizada por Dempster *et al.* (1977) tinha uma falha, mas provas válidas de convergência foram apresentadas posteriormente por Boyles (1983) e Wu (1983).

2.5.2 Algoritmo Monte Carlo EM

Em algumas aplicações do algoritmo **EM**, o passo **E** é complexo e não admite uma solução analítica, isto é, a função $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ não pode ser calculada explicitamente. Uma solução é calcular a função $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ através do método Monte Carlo (**MC**). Note que

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{Y},\boldsymbol{\theta}}[\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}^{(k)}]. \tag{2.19}$$

O algoritmo **MCEM**, ver Wei & Tanner (1990), consiste nos seguintes passos:

1. Passo **E** (**MC**): na $(k+1)$-ésima iteração, seja $\mathbf{E}^{(k,1)},\ldots,\mathbf{E}^{(k,M)}$ amostras geradas da distribuição condicional de $\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Aproxime $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ por,

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left\{\log[f(\mathbf{y},\mathbf{E}^{(m,k)};\boldsymbol{\theta})]|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}^{(k)}\right\},$$

2. Passo **M**: Maximize essa versão aproximada de $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$, ou seja, obter

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} = \text{Argmax}_{\boldsymbol{\theta}}\left(Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})\right)$$

Em muitas situações, a esperança condicional (2.19) no passo E não pode ser calculada analiticamente, dificultando a maximização da função log-verossimilhança completa. Quando este problema ocorre, geralmente, usamos o método de Monte Carlo para solucioná-lo e, assim, o algoritmo EM passa a ser chamado MCEM. Este é caso para modelo Kumaraswamy multivariado descrito no próximo capítulo.

Capítulo 3

Classe multivariada para predição de taxas e proporções dependentes

3.1 Introdução

Neste capítulo construiremos uma classe de distribuições multivariadas para predições de taxas e proporções dependentes através da marginalização de uma distribuição Kumaraswamy G-exponencializada, condicionada a um campo aleatório com distribuição alfa-estável positivo e representada por $EKw(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\alpha})$. Algumas propriedades e métodos para a estimação dos parâmetros serão discutidos.

3.2 Construção do modelo

Considere os conjuntos $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_L\}$ e $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_M\}$. Onde $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^d$ e $\mathbf{s}_l \in \mathbb{R}^p$ com d e $p = 1,2$. Quando $d = p = 1$, dizemos que $\mathbf{S}$ e $\mathbf{U}$ são conjuntos de índices, $\{1,2,\ldots,L\}$ e $\{1,2,\ldots,M\}$, respectivamente. Para d ou $p = 2$, dizemos que $\mathbf{U}$ e/ou $\mathbf{S}$ são conjuntos com L e M localizações espaciais contidas em algum subconjunto finito de $\mathbb{R}^2$ ou, ainda, que são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Sejam $\left\{\omega_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{s}_\ell) = \omega_{m,\ell} : m = 1,2,\ldots,M \quad \text{e} \quad \ell = 1,2,\ldots,L\right\}$ constantes não negativas, $\{E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m) : m = 1,2,\ldots,M\}$ um campo aleatório latente (ou não observável) construído por variáveis independentes α_m-estável e defina por $H_\alpha(\mathbf{s}_\ell) = \sum_{m=1}^{M} \omega_m(\mathbf{s}_\ell) E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)$. Note que $\mathbf{H}_\alpha = (H_\alpha(\mathbf{s}_1),\ldots,H_\alpha(\mathbf{s}_\ell))$, com $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ é um vetor aleatório formado por marginais que são misturas de distribuições α_m-estáveis. Agora assuma que

$\overline{G}(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta})$ é uma distribuição para $Y(s_\ell)$ e $Y(s_1)|H_\alpha(s_1),\ldots,Y(s_\ell)|H_\alpha(s_\ell)$ são condicionalmente independentes com distribuição G-exponencializada da Seção (2.3). Então,

$$F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_\alpha)=\prod_{\ell=1}^{L}F(Y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}|H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)).$$

Usando a Expressão (2.16) e $G(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta})$ dada em (2.4), obtem-se

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_\alpha) &= \prod_{\ell=1}^{L}\left[G(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta})\right]^{H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)}\\
&= \prod_{\ell=1}^{L}\exp\left\{\log\left[(1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell})^{H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)}\right]\right\}\\
&= \prod_{\ell=1}^{L}\exp\left\{H_\alpha\log\left[1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}\right]\right\}\\
&= \prod_{\ell=1}^{L}\exp\left\{-H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}\\
&= \exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{L}H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}
\end{aligned}$$

Substituindo $H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)=\sum_{m=1}^{M}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)$, temos:

$$F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_\alpha) = \exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\log\left[\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}.$$

Aplicando a esperança em ambos lados, consequentemente temos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_\alpha)\right) &= \mathbb{E}\left\{\exp\left[-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\log\left(\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\prod_{m=1}^{M}\exp\left[-E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\sum_{\ell=1}^{L}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}\\
&= \prod_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left\{\exp\left[-E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\sum_{\ell=1}^{L}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Como $E_{\boldsymbol{\alpha}_m}(\mathbf{u}_m)$ são variáveis com distribuição de probabilidade $\boldsymbol{\alpha}_m$-estável positiva, aplicamos a transformada de Laplace (2.12) e,

$$F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{-\left[\sum_{\ell=1}^{L} \omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}$$

Portanto, a função conjunta multivariada é dada por,

$$F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{-\left[-\sum_{\ell=1}^{L} \omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}. \tag{3.1}$$

Ou de forma similar, a função de excedência conjunta é dada por

$$\begin{aligned}\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{-\left[-\sum_{\ell=1}^{L} \omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\overline{G}(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta})\right)\right]^{\alpha_m}\right\}\\ &= \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{-\left[-\sum_{\ell=1}^{L} \omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

As distribuições de probabilidades com função de distribuição conjunta dada em (3.1) ou excedência expressa por (3.2), são funções de uma mistura de distribuições elevada a um expoente α_m. Por isso dizemos que estas distribuições pertencem a uma classe multivariada chamada *Kumaraswamy G-exponencializada*, para dados com dependência (entre eventos, indivíduos ou grupo de indivíduos) denotado por $\boldsymbol{Y} \sim EKw(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\alpha})$. Neste caso, $0 < \alpha_m \leq 1$ pode ser interpretado como uma medida de dependência entre as variáveis. No limite quando $\alpha_m \to 1$ teremos a completa independência.

3.3 Casos particulares do modelo EKw multivariado

Nesta seção apresentaremos alguns modelos multivariados que decorrem imediatamente do modelo *EKw* multivariado da Expressão (3.2). Os modelos são desenvolvidos em vários contextos o que torna-os bastante úteis.

3.3.1 Modelo EKw multivariado para séries temporais com componentes autoregressivos (AR)

Sejam $\mathbf{U} = \mathbf{S} = \{1,...,t\}$, $\omega_t(\ell) = \rho^{t-\ell}$, $\ell = 1,2,...,t$ e 0 caso contrário. Para $0 < \rho < 1$ definimos o processo autorregressivo estável positivo H_a por:

$$H_a = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_{a-i}$$

Temos:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_{-i} \\ H_1 &= \rho H_0 + E_1 \\ &\vdots \\ H_n &= \rho^n H_0 + \rho^{n-1} E_1 + ... + \rho E_{n+1} + E_n. \end{aligned}$$

Então, para a distribuição da série temporal $\{Y_t; t = 1,...,n\}$ temos,

$$\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\alpha) = \prod_{\ell=1}^{n} \exp\left\{ - \left[-\sum_{t=\ell}^{n} \rho^{t-\ell} \beta \log\left(1 - y(\mathbf{s}_t)^{\lambda}\right)\right]^{\alpha}\right\}.$$

3.3.2 Modelo EKw multivariado para processos de variação espacial discreta

Considere $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região contínua do plano. Seja $n_{i,j}$ um sistema de vizinhanças com as seguintes propriedades: $(i,j) \in n_{(i,j)}$, $(k,\ell) \in n_{(i,j)} \Leftrightarrow (i,j) \in n_{(k,\ell)}$.

Um exemplo simples é quando as vizinhanças são os quatro pontos mais próximos e o próprio ponto, ou seja, quando $n_{(i,j)} = \{(i,j),(i-1,j),(i+1,j),(i,j-1),(i,j+1)\}$ (Veja fig.3.1 caso A).

Considere $\mathbf{U}$ e $\mathbf{S}$ pares de índices com $\omega_{m,\ell} \equiv \omega_{(i,j)}(k,\ell) = \delta$ se $(i,j) \in n_{(k,\ell)}$ e zero caso contrário, com δ constante e positivo. Defina $H_\alpha(i,j) = \sum_{(k,\ell)\in n_{(i,j)}} \delta E_\alpha(k,\ell)$ e $\overline{n}_{(i,j)} \cup \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq n\}$. Então, o processo de variação espacial discreta $\{Y_{(i,j)} : 1 \leq i,j \leq n\}$ possui distribuição conjunta,

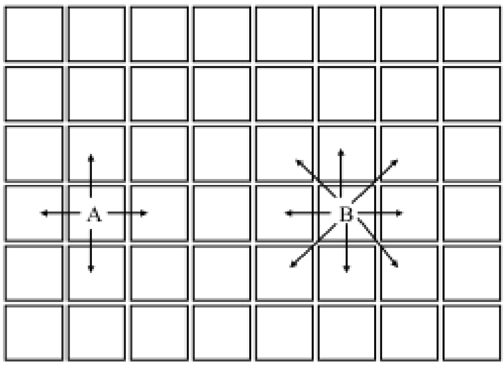

Figura 3.1: Sistemas de vizinhança A e B.

$$\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\alpha)=\prod_{(k,\ell)}\exp\left\{-\delta^{\alpha}\left[-\sum_{(i,j)\in\overline{n}_{(k,\ell)}}\beta\log\left(1-y(\mathbf{s}_{\ell})^{\lambda}\right)\right]^{\alpha}\right\}.$$

Este é um modelo que pode ser utilizado em análise de imagens com o par $\ell=(i,j)$ representando a posição $s_{(i,j)}$ de um pixel.

3.4 Propriedades

Apresentamos algumas propriedades do modelo *EKw* multivariado proposto na função de excedência conjunta (3.2). Demonstrações estão descritas no **Apêndice A** e foram desenvolvidas de forma minuciosa, que demandou bastante tempo, depois de vários cálculos tediosos temos: Distribuição do mínimo (A.1); Distribuição marginal (A.2); Dependência positiva (A.3); Função densidade conjunta (A.4); Função densidade de probabilidade por grupos (A.5); Geração de vetores aleatório por grupos (A.6) e Inferência via máxima verossimilhança por grupos (A.7).

Com a construção da classe multivariada para predição de taxas e proporções, a estrutura e propriedades serão retomadas para construção do modelo multivariado.

Capítulo 4

O modelo multivariado para predição de taxas e espacialmente dependentes

Neste capítulo propomos o modelo *EKw* multivariado para a modelagem e predição. Esse modelo surge como caso particular do modelo Kumaraswamy multivariado dado na Expressão (3.2), quando utilizamos como base a Kumaraswamy na forma padrão. A estrutura e propriedades do modelo descrito no capítulo anterior serão retomadas para uma melhor compreensão no contexto específico de modelagem de dados.

4.1 Um modelo Kumaraswamy multivariado

Considere uma região espacialmente contínua $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ na qual somente para um conjunto $\mathbf{S} \subset \mathbf{D}$ de posições fixas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_L$ e tempos $t = 1, 2, ..., T$ são conhecidas as medidas de interesse de um processo estocástico $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}'_1, ..., \boldsymbol{Y}'_T)'$.

O objetivo da nossa modelagem é ser capaz de fornecer a qualquer localização $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{D}$ e $t \geq 1$, em que não se conhece o valor da medida de interesse, a estimativa $\widehat{Y}_t(\mathbf{s}_0)$ a partir do processo observado $\boldsymbol{Y}_t$.

4.1.1 Construção do modelo

Sejam $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_L$ as localizações espaciais, como por exemplo, L estações meteorológicas, em que para cada tempo t é observado o processo estocástico espacial $\boldsymbol{Y}_t(\mathbf{s}) = (Y_t(\mathbf{s}_1), ..., Y_t(\mathbf{s}_L))'$. A variável $Y_t(\mathbf{s}_\ell) \equiv Y_{t,\ell} \in (0,1)$ representa uma medida de taxa e proporção na ℓ-ésima estação no tempo t (semana, mês ou ano). Considere $\mathbf{U} =$

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_M\} \subset \mathbf{D}$, um conjunto com M localizações espaciais arbitrárias próximas às localizações $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 ..., \mathbf{s}_L$. Sejam $\{\omega(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{u}_m) \equiv \omega_{\ell,m} : m = 1, 2, ..., M \quad \text{e} \quad \ell = 1, 2, ..., L\}$ constantes representando uma medida de distância entre o par de localizações $(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{u}_m)$. A região $\mathbf{D}$ é particionada em M sub-regiões/grupos com centros em $\mathbf{u}_m$. Quanto mais próximo a localização $\mathbf{s}_\ell$ estiver do ponto $\mathbf{u}_m$ maior será $\omega_{\ell,m}$. Em cada $\mathbf{u}_m$, $m = 1, 2, ..., M$ atribuímos variáveis aleatórias latentes $E(\mathbf{u}_m)$ independentes, isto é

$$E(\mathbf{u}_m) \sim \alpha_m\text{-estável positiva.}$$

O processo espacial $\{E(\mathbf{u}_m) : m = 1, 2, ..., M\}$ é um campo aleatório latente construído por variáveis independentes α_m-estável positivas e é incorporado ao modelo para capturar a dependência espacial entre os componentes do processo observado $\boldsymbol{Y}_t(\mathbf{s})$. Para acomodar essa dependência espacial, definimos $K(\log(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||); \tau_m)$ como sendo a função Kernel Gaussiana centrada em $\mathbf{u}_m$ e avaliada em $\mathbf{s}_\ell$:

$$K(\log(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||); \tau_m) = \frac{1}{2\pi\tau_m} \exp\left(-\frac{(\log(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||))^2}{2\tau_m^2} \right), \quad \tau_m > 0.$$

A notação $||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||$ representa a distância euclidiana da ℓ-ésima estação para o ponto $\mathbf{u}_m$. Os parâmetros τ_m, $m = 1, 2, ..., M$, são chamados de parâmetros de suavização da função núcleo. Quanto maiores os valores de τ_m mais suave é o processo final observado, Cunha *et al.* (2017).

Os pesos $\omega_{\ell,m}$ são definidos em função de $K(\log(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||); \tau_m)$, tal que $0 < \omega_{\ell,m} < 1$ e $\sum_{m=1}^{M} \omega_{\ell,m} = 1$, similar ao descrito em Banerjee *et al.* (2004).

Para exemplificar nossa modelagem (Cunha *et al.* (2017)), na Figura (4.1) apresentamos uma região $\mathbf{D} = [0, 100] \times [0, 100]$ composta de 40 localizações arbitrárias $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_{40})$ em que são observadas as medidas de interesse $y_{t,\ell}$. O conjunto $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ representa 4 localizações arbitrárias em que são alocados os processos latentes $E(\mathbf{u}_m)$, $m = 1, 2, 3, 4$.

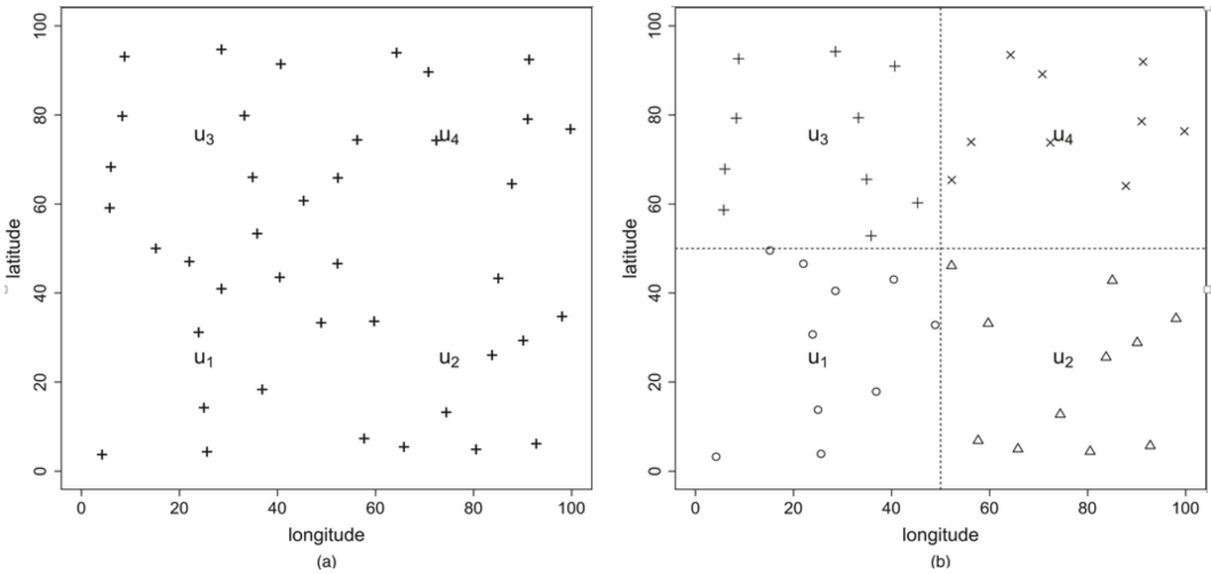

Figura 4.1: Exemplo de representação espacial do processo de modelagem.

Para cada m fixo, definimos $H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) = \omega_{\ell,m}E(\mathbf{u}_m)/\sigma_t$, $\sigma_t > 0$. Neste caso, dizemos que $E(\mathbf{u}_m)$ é um efeito espacialmente compartilhado por todas as estações meteorológicas próximas do ponto $\mathbf{u}_m$ e $H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)$ é a contribuição desse efeito para a medida na ℓ-ésima estação próxima de $\mathbf{u}_m$ ajustado por um fator de larga escala temporal σ_t. Assumindo que dado o valor do efeito aleatório $\{E(\mathbf{u}_m) : \mathbf{u}_m \in \mathbf{U}\}$, $Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)|H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \sim Kw\left(1, H_{t,\ell}^{(m)}\frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa_\ell)}\right)$ se $H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) = 1$ e são condicionalmente independentes para todo $\ell = 1,2,...,L_m$, $m = 1,2,...,M$ e $t = 1,2,...,T$, κ_ℓ é a mediana. Então,

$$\overline{F}\left(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}|H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)\right) = \left(1 - y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{H_{t,\ell}^{(m)}\frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa_\ell)}}, 0 < y_{t,\ell}^{(m)}, \kappa_\ell < 1 \tag{4.1}$$

em que $\boldsymbol{\theta}_{t,\ell} = (\kappa_\ell, \sigma_t)$.

Para cada t fixo, a distribuição condicional conjunta é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(\boldsymbol{y}_t;\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{H}_t) &= \prod_{m=1}^{M}\overline{F}(\boldsymbol{y}_t^{(m)};\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{H}_t^{(m)})\\
&= \prod_{m=1}^{M}\prod_{\ell=1}^{L_m}\overline{F}\left(y_{t,\ell}^{(m)};\boldsymbol{\theta}_{t,\ell}|H_{t,\ell}^{(m)}\right)\\
&= \prod_{m=1}^{M}\prod_{\ell=1}^{L_m}\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{H_{t,\ell}^{(m)}\frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa_\ell)}}\\
&= \prod_{m=1}^{M}\prod_{\ell=1}^{L_m}\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{\frac{\omega_{\ell,m}E(\mathbf{u}_m)\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}}\\
&= \prod_{m=1}^{M}\exp\left\{-E(\mathbf{u}_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\left[\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{-\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, aplicando esperança em ambos os lados, temos que

$$
\overline{F}(\boldsymbol{y}_t;\boldsymbol{\theta}_t,\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}\left\{\prod_{m=1}^{M}\exp\left[-E(\mathbf{u}_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\left(-\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right)\right]\right\}.
$$

Como $E(\mathbf{u}_m)$ são variáveis independentes α_m-estáveis, resulta de (2.12) que o modelo marginal do processo observado é expresso por:

$$
\overline{F}(\boldsymbol{y}_t;\boldsymbol{\theta}_t,\boldsymbol{\alpha}) = \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{\ell=1}^{L_m}\left(\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right)\right]^{\alpha_m}\right\},\quad 0<y_{t,\ell}^{(m)}<1 \tag{4.2}
$$

que representa o modelo Kumaraswamy G-exponencializado multivariado.

4.1.2 Propriedades

Nesta seção, apresentamos propriedades para o modelo EKw multivariado semelhantes as desenvolvidas no **Apêndice A** e acrescentamos outras, todas baseadas no contexto da aplicação.

1. **Distribuição do mínimo**: Seja $\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}$ não-vazio. Considere m e t fixos e defina

$$
Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_0) = \min_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0} Y_t(\mathbf{s}_\ell).
$$

Observe que,

$$\overline{F}_{Y_{t,0}^{(m)}}(y_{t,0};\boldsymbol{\theta}_{t,0},\alpha_m) = \mathbb{E}\left[P\left(\min_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0} Y_t(\mathbf{s}_\ell) > y_{t,0};\boldsymbol{\theta}_{t,0}|H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)\right)\right]$$

Agora, como $\{Y_t(\mathbf{s}_\ell)|H_t(\mathbf{s}_\ell) : \forall \mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0\}$ são variáveis condicionalmente independentes com distribuição de excedência (4.1), vem que

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{Y_{t,0}^{(m)}}(y_{t,0};\boldsymbol{\theta}_{t,0},\alpha_m) &= \mathbb{E}\left[\prod_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0} P\left(Y_{t,\ell} > y_{t,0};\boldsymbol{\theta}_{t,0}|H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\prod_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0} \exp\left[-H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)\ln\left(1-y_{t,0}^{(m)}\right)^{-\frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa_\ell)}}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[-E(\mathbf{u}_m)\sum_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0} -\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,0}^{(m)}\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

e, por (2.12), obtemos a distribuição do mínimo que é dada por:

$$\overline{F}_{Y_{t,0}^{(m)}}(y_{t,0};\boldsymbol{\theta}_{t,0},\alpha_m) = \exp\left\{-\left[-\sum_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0}\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,0}^{(m)}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}, \quad 0 < y_{t,0} < 1.$$

2. **Distribuição marginal**: Se $\mathbf{S}_0$ é unitário, então a distribuição marginal de $Y_{t,\ell}$ é dada por:

$$\overline{F}_{Y_{t,\ell}^{(m)}}(y_{t,\ell};\boldsymbol{\theta}_{t,\ell},\alpha_m) = \exp\left\{-\left[-\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}}\right]^{\alpha_m}\right\}, \quad 0 < y_{t,\ell} < 1. \tag{4.3}$$

A função mediana pode ser um preditor para umidade relativa do ar na ℓ-ésima estação e tempo t pode ser dado por:

$$\widehat{Y}_{t,\ell}^{(m)} = 1-\exp\left\{-\frac{\widehat{\sigma}_t\ln(1-\widehat{\kappa}_\ell)}{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}\left(-\ln(0,5)\right)^{1/\widehat{\alpha}_m}\right\} \tag{4.4}$$

3. **Densidade de probabilidade por grupos**: Considere as L_m observações $\boldsymbol{y}_t^{(m)}$ que compartilham $E(\mathbf{u}_m)$ e possuem distribuição conjunta

$$\overline{F}(\boldsymbol{y}_t^{(m)};\boldsymbol{\theta}_t,\alpha_m) = \exp\left\{-\left[-\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}.$$

Então, sua função densidade conjunta é dada por

$$f(\boldsymbol{y}_t^{(m)};\boldsymbol{\theta}_t,\alpha_m)=\alpha_m^{L_m}\left(\prod_{\ell=1}^{L_m}\omega_{\ell,m}r(y_{\ell,m};\boldsymbol{\theta})\right)e^{-z_{t,m}}z_{t,m}^{1-\frac{L_m}{\alpha_m}}Q_{L_m}(z_{t,m},\alpha_m). \tag{4.5}$$

em que, $\boldsymbol{\theta}_t^{(m)}$ é o subvetor de parâmetros, $r(y_{\ell,m};\boldsymbol{\theta})=\frac{\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}}$
$z_{t,m}=\left\{\sum_{\ell=1}^{L_m}\left[-\omega_{\ell,m}\frac{\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right]\right\}^{\alpha_m}$, $Q_1(z_{t,m},\alpha_m)=1$ e para $L_m\geq 2$

$$Q_{L_m}(z_{t,m},\alpha_m)=\left(\frac{L_m-1-\alpha_m}{\alpha_m}+z_{t,m}\right)Q_{L_m-1}(z_{t,m},\alpha_m)-z_{t,m}\frac{\partial}{\partial z_{t,m}}Q_{L_m-1}(z_{t,m},\alpha_m).$$

Demonstração. É análoga à demonstração do (A.5). □

4. **Geração de valores da distribuição conjunta por grupos**: Considere $\boldsymbol{y}_t^{(m)}=(y_t(\mathbf{s}_1),y_t(\mathbf{s}_2),...,y_t(\mathbf{s}_{L_m}))$ com densidade conjunta (4.5). Introduzimos a seguinte transformação

$$(x_{t,1},x_{t,2},...,x_{t,L_{M-1}},Z_{t,m})=\left(\frac{\upsilon_{t,1}^{(m)}}{\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{t,\ell}^{(m)}},\frac{\upsilon_{t,2}^{(m)}}{\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{t,\ell}^{(m)}},...,\frac{\upsilon_{t,L_m-1}^{(m)}}{\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{t,\ell}^{(m)}},\left(\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{t,\ell}^{(m)}\right)^{\alpha_m}\right)$$

em que $\upsilon_{t,\ell}^{(m)}=\left(-\omega_{\ell,m}\frac{\ln(0,5)}{\sigma_t\ln(1-\kappa_\ell)}\ln\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right)$ para $\ell=1,2,3,...,L_m$ e, obviamente, $\sum_{\ell=1}^{L_m}x_{t,\ell}=1$. Então,

$$\upsilon_{t,\ell}^{(m)}=x_{t,\ell}^{(m)}z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}\quad \text{e}\quad \frac{\partial y_{t,\ell}^{(m)}}{\partial x_{t,\ell}}=\frac{\partial y_{t,\ell}^{(m)}}{\partial\upsilon_{t,\ell}^{(m)}}\times\frac{\partial\upsilon_{t,\ell}^{(m)}}{\partial x_{t,\ell}}=\frac{\partial y_{t,\ell}^{(m)}}{\partial\upsilon_{t,\ell}^{(m)}}\times z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}},$$

então, o jacobiano da transformação $(y_t(\mathbf{s}_1),y_t(\mathbf{s}_2),...,y_t(\mathbf{s}_{L_m}))\longmapsto(x_{t,1},x_{t,2},...,x_{t,L_{m-1}},z_{t,m})$ é dado por

$$\mathbf{J}=\frac{z_{t,m}^{\frac{L_m}{\alpha_m}-1}}{\alpha_m\left(\prod_{\ell=1}^{L_m}\left|\omega_{\ell,m}r(y_{\ell,m};\boldsymbol{\theta})\right|\right)^{-1}}.$$

Segue que,

$$f(x_{t,1},...,x_{t,L_{m-1}},z_{t,m})\;=\;\Gamma(L_m)\times\frac{\alpha_m^{L_m-1}}{\Gamma(L_m)}Q_{L_m}(z_{t,m},\alpha_m)e^{-z_{t,m}}.$$

Assim, $\boldsymbol{X}_t^{(m)}$ e $Z_{t,m}$ são independentes, e temos que $\boldsymbol{X}_t^{(m)}\sim Dirichlet(1,1,...,1)$

simétrica, Frigyik *et al.* (2010), e $Z_{t,m}$ é uma mistura de distribuições Gamma com pesos determinados por $Q_{L_m}(z_{t,m}, \alpha_m)$, Shi (1995). Por exemplo, se $L_m = 2$, teremos

$$Z_{t,m} \sim (1-\alpha_m)\text{Gamma(1,1)} + \alpha_m\text{Gamma(2,1)} \quad \text{e} \quad x_{t,1} \sim Beta(1,1).$$

Agora, da transformação $\upsilon_{t,\ell}^{(m)} = x_{t,\ell}^{(m)} z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}$, obtemos

$$y_{t,\ell}^{(m)} = \left\{ 1 - \left[\exp\left(-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_{\ell,m}} \right) \right]^{\frac{\widehat{\sigma}_t \ln(1-\widehat{\kappa}_\ell)}{\ln(0,5)}} \right\}, \quad \ell = 1,2,...,L_m.$$

Então, após a estimação dos parâmetros, geramos valores das distribuição conjunta X e Z e obtemos, Y através da transformação.

5. **Um representação hierárquica do modelo**: Seja $med_{t,\ell}$ a mediana do modelo condicional (4.2). Então, o modelo proposto, neste capítulo,

   1º nível:

   $$Y_{t,\ell} | med_{t,\ell} \sim \text{Kumaraswamy}(1, med_{t,\ell})$$

   2º nível:

   $$\eta(med_{t,\ell}) = x(s_\ell)\beta + \log\left(H_{t,\ell}^{(m)}\right) \tag{4.6}$$

   em que, $\eta(a) = -\log(-\log(a))$ é a função de ligação do modelo, $\eta(\kappa_\ell) = x(s_\ell)\beta$ é uma medida de tendência ou locação do modelo, sendo $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{L_m})'$ a matriz do modelo, de dimensão $L_m \times (p+1)$. Cada vetor $\boldsymbol{x}_\ell = (x_{1\ell}, x_{2\ell}, ..., x_{p\ell})$ representa um conjunto de $p-$covariáveis associadas a $\ell-$ésima estação e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)'$ um vetor de parâmetros de regressão.

   Pela Definição (2.8) o $\log(H_{t,\ell}) \sim$ exp S $(\alpha, \log(\omega_{m,\ell})/\sigma_t, 1)$. $H_{t,\ell}$ é interpretado como o efeito aleatório espacialmente compartilhado com variação temporal de larga escala σ_t. Esse modelo será utilizado no próximo capítulo, no contexto de aplicação a dados de umidade relativa do ar.

4.2 Estimação dos parâmetros

Como os dados são condicionalmente independentes no tempo, a partir da densidade dada em (4.5), obtemos que a função log-verossimilhança para o modelo proposto (4.6) é,

$$
\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{y}) &= \sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\log[f(\boldsymbol{y}_t^{(m)};\boldsymbol{\theta}_t,\alpha_m)] \\
&= \sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\left(L_m\log\alpha_m+\sum_{\ell=1}^{L_m}\log\omega_{\ell,m}+\sum_{\ell=1}^{L_m}\log r(y_{\ell,m};\boldsymbol{\theta})-z_{t,m}\right) \\
&+ \sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\left(\log z_{t,m}-\frac{L_m}{\alpha_m}\log z_{t,m}+\log Q_{L_m}(z_{t,m},\alpha_m)\right).
\end{aligned}
$$

A maximização de $l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{y})$ por Newton-Raphson apresentou problemas numéricos. Por isso, uma alternativa mais simples e que quase sempre converge é apresentada a seguir via algoritmo (**MCEM**) discutido na Subseção 2.5.2.

4.2.1 Construção do algoritmo MCEM para o modelo proposto

Considere $\boldsymbol{y}_c=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{E})$ o vetor de dados completos e $\boldsymbol{\phi}=(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ seu respectivo vetor de parâmetros. A função de verossimilhança completa é dada por:

$$
\begin{aligned}
L_c(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{y}_c) &= f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{E};\boldsymbol{\phi})=f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{E};\boldsymbol{\alpha}) \\
&= \prod_{m=1}^{M}\left[\left(\prod_{t=1}^{T}\prod_{\ell=1}^{L_m}f(y_{t,\ell}^{(m)};\theta_{t,\ell}|E_m)\right)p(E_m;\alpha_m)\right] \\
&= \prod_{m=1}^{M}\left[\left(\prod_{t=1}^{T}\prod_{\ell=1}^{L_m}\frac{H_{t,\ell}^{(m)}(-\log(0,5))}{-\log(1-\kappa_\ell)}\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{H_{t,\ell}^{(m)}\frac{\log(0,5)}{\log(1-\kappa_\ell)}}\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{-1}\right)p(E_m;\alpha_m)\right]
\end{aligned}
$$

Seja $B_m\in(0,1)$ uma variável auxiliar tal que a distribuição conjunta de (E_m,B_m) é

$$
p(E_m,B_m;\alpha_m)=\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}}c(B_m)e^{-c(B_m)E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}},\quad E_m>0.
$$

em que,

$$
c(B_m)=\left\{\frac{\sin(\pi\alpha_mB_m)}{\sin(\pi B_m)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha_m}}\frac{\sin\{(1-\alpha_m)\pi B_m\}}{\sin(\pi\alpha_mB_m)}.
$$

Então, marginalmente a B_m, E_m é α_m-estável Stephenson (2009).

Logo, a função log-verossimilhança completa $\ell_c(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{y}_c)$ é dada por:

$$\ell_c(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{y}_c) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{L_m}\left[\left(\log(H_{t,\ell}^{(m)}) + \log(-\log(0,5)) - \log(-\log(1-\kappa_\ell))\right) + H_{t,\ell}^{(m)}\frac{\log(0,5)}{\log(1-\kappa_\ell)}\right.$$
$$\left.\times \log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right) - \log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right] + \sum_{m=1}^{M}\log(p(E_m;\alpha_m))$$

Fazendo $-\log(-\log(1-\kappa_\ell)) = \beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell}$ e $\log(1-\kappa_\ell) = -e^{-(\beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell})}$ na função log-verossimilhança completa temos,

$$\ell_1(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}_c,\boldsymbol{E}) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{L_m}\left[\log(H_{t,\ell}^{(m)}) + \log(-\log(0,5)) + \beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell} - H_{t,\ell}^{(m)}\log(0,5)\right.$$
$$\left.\times \log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)e^{(\beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell})} - \log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right]$$
$$\ell_2(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{E}) = \sum_{m=1}^{M}\log(p(E_m;\alpha_m))$$

Então,

$$\ell_c(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{y}_c) = \ell_1(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}_c,\boldsymbol{E}) + \ell_2(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{E}) \tag{4.7}$$

Para maximizarmos (4.7), a seguinte proposição tem o objetivo de calcular a distribuição condicional $\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}$ que será utilizada no Passo E do algoritmo MCEM.

Proposição 4.1. *A distribuição condicional de $\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}$ é dada por*

$$p(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M}\frac{(\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_{m+1}}E_m^{TL_m}e^{-E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)}{\Gamma(TL_{m+1})\mathbb{E}_{\mathscr{G}}(\varphi_0(E_m,\alpha_m))}$$

em que $\mathscr{G} \sim Gamma(TL_{m+1},\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$,

$\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{l_m}\frac{\log(0,5)}{\sigma_t}\omega_{\ell,m}\log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)e^{(\beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell})}$

e

$$\varphi_0(E_m,\alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}}\int_0^1 c(B_m)e^{-c(B_m)E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}}dB_m.$$

Demonstração. Observe que por definição de distribuição condicional e por Bayes, temos que

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{E};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})} \\
&= \frac{f(\boldsymbol{E};\boldsymbol{\alpha})\times f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})}{\int_{E_m} f(\boldsymbol{E};\boldsymbol{\alpha})\times f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{E})dE_m}.
\end{aligned}
$$

Como $\int_{E_m} f(\boldsymbol{E};\alpha)\times f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{E})dE_m$ é constante em relação a $\boldsymbol{h}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &\propto f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{E};\boldsymbol{\alpha}) \\
&\propto \prod_{m=1}^{M}\left[\left(\prod_{t=1}^{T}\prod_{\ell=1}^{L_m} E_m\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)^{-\frac{\omega_{\ell,m}E_m}{\sigma_t}\log(0{,}5)e^{(\beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell})}}\right)p(E_m;\alpha_m)\right] \\
&\propto \prod_{m=1}^{M}\left[E_m^{TL_m}\left(\prod_{t=1}^{T}\prod_{\ell=1}^{L_m} e^{-E_m\frac{\log(0{,}5)}{\sigma_t}\omega_{\ell,m}e^{(\beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell})}\log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)}\right)p(E_m;\alpha_m)\right] \\
&\propto \prod_{m=1}^{M}\left[E_m^{TL_m}e^{-E_m\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{l_m}\frac{\log(0{,}5)}{\sigma_t}\omega_{\ell,m}e^{(\beta_0+\beta_1x_{1\ell}+\beta_2x_{2\ell}+\ldots+\beta_px_{p\ell})}\log\left(1-y_{t,\ell}^{(m)}\right)\right)}p(E_m;\alpha_m)\right] \\
&\propto \prod_{m=1}^{M}\left(E_m^{TL_m}e^{E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)\right) \\
&= \frac{\prod_{m=1}^{M}\left(E_m^{TL_m}e^{E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{M}E_m^{TL_m}e^{-E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)\right)dE_m} \\
&= \prod_{m=1}^{M}\left[\frac{\left(E_m^{TL_m}e^{E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)\right)}{\int_0^{\infty}\left(E_m^{TL_m}e^{-E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)\right)dE_m}\right]
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_{E_m} f(\boldsymbol{E};\alpha)\times f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{E})dE_m &= \int_0^{\infty}\varphi_0(E_m,\alpha_m)E_m^{TL_m}e^{-E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}dE_m \\
&= \frac{\Gamma(TL_m+1)}{\upsilon(\boldsymbol{\theta})^{TL_m+1}}\underbrace{\frac{\upsilon(\boldsymbol{\theta})^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)}\int_0^{\infty}\varphi_0(E_m,\alpha_m)E_m^{TL_m}e^{-E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}dE_m}_{\mathbb{E}_{\mathscr{G}}[\varphi_0(E_m,\alpha_m)]}
\end{aligned}
$$

em que, $\mathscr{G}\sim Gamma(TL_m+1,\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$.

$$
\therefore f(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M}\frac{(\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}E_m^{TL_m}e^{-E_m\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})}\varphi_0(E_m,\alpha_m)}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathscr{G}}(\varphi_0(E_m,\alpha_m))}
$$

como queríamos. $\square$

Agora, considere $Q(\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\ell_c(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{y}_c))$, então a partir da Proposição 4.1, temos

$$Q(\boldsymbol{\phi}) = Q_1(\boldsymbol{\theta}) + Q_2(\boldsymbol{\alpha})$$

em que,

$$Q_1(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\ell_1(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{E})) = \sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{L_m}\big(\log\omega_{\ell,m} + \mathbb{E}_{m,2} - \log(\sigma_t) + \log(-\log(0.5))\right.$$
$$\left. +\beta_0 + \beta_1 x_{1\ell} + \beta_2 x_{2\ell} + \ldots + \beta_p x_{p\ell}\big) - \mathbb{E}_{m,1}\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta})\right]$$

e,

$$Q_2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\ell_2(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{E})) = \sum_{m=1}^{M}\left(\log\left(\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}\right) - \left(\frac{1}{1-\alpha_m}\right)\mathbb{E}_{m,2} + \alpha_m T\sum_{\ell=1}^{L_m}\log\omega_{\ell,m}\right)$$

em que

$$\mathbb{E}_{m,1} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m,\alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m,\alpha_m))}$$

$$\mathbb{E}_{m,2} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m)) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log E_m \times \varphi_0(E_m,\alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m,\alpha_m))}$$

$$\mathbb{E}_{m,3} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{E}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}}\varphi_2(E_m;\alpha_m)) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \times \varphi_2(E_m,\alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m,\alpha_m))}$$

Essas esperanças $\mathbb{E}_{m,1}, \mathbb{E}_{m,2}$ e $\mathbb{E}_{m,3}$ não possuem forma fechada e por isso serão aproximadas através de simulação de Monte Carlo em que $E_m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha} \sim Gamma(TL_m + 1, \upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$ (veja Mota (2017) **Apêndice B**) e

$$\varphi_1(E_m,\alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}}\int_0^1 c^2(B_m)e^{-c(B_m)E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}}dB_m.$$

Desta forma, o algoritmo MCEM para maximização de $\ell_c(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{y}_c)$ é da seguinte forma:

1. Passo **E**: Inicialize o processo iterativo com $\boldsymbol{\phi}^{(0)} = (\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)})$ e na c-ésima iteração, obtenha $\upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$, gere $\{(B_m^{j_k}, E_m^{j_k}) : j_k = 1,2,...,N\}$, em que $E_m^{j_k} \sim Gamma(TL_m + 1, \upsilon^{(m)}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}))$ e $B_m^{j_k} \sim U(0,1)$. Compute $\mathbb{E}_{m,1}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,2}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,3}^{j_k}$ e, finalmente, aproxime, $\mathbb{E}_{m,1}, \mathbb{E}_{m,2}$ e $\mathbb{E}_{m,3}$ por Monte Carlo,

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{m,1}^{(k)} = \frac{1}{N}\sum_{j_k=1}^{N} \mathbb{E}_{m,1}^{j_k}, \quad \widetilde{\mathbb{E}}_{m,2}^{(k)} = \frac{1}{N}\sum_{j_k=1}^{N} \mathbb{E}_{m,2}^{j_k}, \text{ e } \widetilde{\mathbb{E}}_{m,3}^{(k)} = \frac{1}{N}\sum_{j_k=1}^{N} \mathbb{E}_{m,3}^{j_k}.$$

2. Passo **M**: Considerando $-\log(-\log(1-\kappa_\ell)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1\ell}$ em que x_ℓ indica a temperatura de bulbo seco na ℓ-ésima estação, então temos que o estimador de máxima verossimilhança para κ_ℓ é $\widehat{\kappa}_\ell = 1 - \exp\left[-e^{-(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_\ell)}\right]$ (por invariância) para $0 < \kappa_\ell < 1$.

   Após algumas manipulações algébricas, obtemos diretamente, na $(n+1)$-iteração que os estimadores de máxima verossimilhança para σ_t e α_m são:

$$\widehat{\sigma}_t^{(n+1)} = -\frac{1}{L}\sum_{m=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{L_m} \widetilde{\mathbb{E}}_{m,1}^{(n)} \frac{\log(0,5)}{\log(1-\widehat{\kappa}_\ell)} \omega_{\ell,m} \log\left(1 - y_{t,\ell}^{(m)}\right), \quad \widehat{\alpha}_m^{(n+1)} = \frac{1}{\widetilde{\mathbb{E}}_{m,2}^{(n)} + 1}.$$

4.3 Predição para estado de atenção

Para realizar a predição espaço-temporal, consideramos inicialmente os parâmetros estimados na seção anterior $(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) = (\widehat{\boldsymbol{\kappa}}, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}})$.

Como para cada $Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) | H_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \sim Kw\left(1, H_{t,\ell}^{(m)} \frac{\ln(0,5)}{\ln(1-\kappa_\ell)}\right)$. Desta maneira, admitindo a mesma distribuição para cada $s_0 \in D$, obtemos o seguinte preditor de probabilidade para a faixa de porcentagem da umidade relativa do ar entre (20% e 30%) que indica o estado de atenção.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(0,2 \le Y_{t(s)} \le 0,3\right) &= \widehat{F}_{Y(s)}(0,30) - \widehat{F}_{Y(s)}(0,20)\\ &= \exp\left[-\left(-\ln(0,7)^{\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\widehat{\sigma}_t}\ln(1-\widehat{\kappa}_\ell)}\right)^{\widehat{\alpha}_m}\right] - \exp\left[-\left(-\ln(0,8)^{\frac{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)}{\widehat{\sigma}_t}\ln(1-\widehat{\kappa}_\ell)}\right)^{\widehat{\alpha}_m}\right]\end{aligned}$$

Segundo recomendações da Organização Mundial de Saúde - OMS níveis abaixo de 60% de umidade relativa do ar não são favoráveis para a saúde SGE-SP (2017). Quando a umidade relativa do ar fica entre 20% e 30% é classificada como estado de atenção (Pinto *et al.* (2008)).

Outra forma que pode ser utilizada para fazer as predições espaço-temporais é através do preditor da função mediana da distribuição marginal dada na Expressão (4.4), sendo este assumido válido para toda localização $\mathbf{s}_0$ pertencente à região $\mathbf{D}$. Isto é,

$$\widehat{Y}_{t,\ell}^{(m)} = 1 - \exp\left\{ -\frac{\widehat{\sigma}_t \ln(1-\widehat{\kappa}_\ell)}{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)} \left(-\ln(0,5)\right)^{1/\widehat{\alpha}_m} \right\}.$$

Em decorrência da variação climática da região em estudo, a menor marca registrada de umidade relativa do ar foi de 20%. As faixas de porcentagem da umidade relativa do ar são descritas no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Aplicação do modelo proposto em dados reais

Neste capítulo aplicaremos o modelo Kumaraswamy G-exponencializado multivariado (4.2) no problema de predição de umidade relativa do ar para o Estado do Amazonas.

5.1 Sobre a umidade relativa do ar

A umidade relativa do ar (UR) é definida por Nascimento & Tubelis (1984), como sendo a quantidade de água, na fase de vapor, existente na atmosfera. Segundo Da Silva *et al.* (2007), a transferência de vapor para atmosfera é causada pela evaporação da água, a qual tem como fontes naturais as superfícies de águas, o gelo, a neve, a superfície do solo além das superfícies animais e vegetais.

O vapor d'água que surge na interfase globo-atmosfera mistura-se ao ar, sendo rapidamente transportada pelas correntes aéreas. Posteriormente, encontra condições favoráveis e, então volta ao estado sólido ou líquido na própria atmosfera.

Para Oliveira *et al.* (2010), a UR é determinada pela radiação solar, que ativa os demais mecanismos para a entrada de água sob forma de precipitação, bem como, pela geração de calor. São as variáveis climáticas as principais responsáveis pela entrada de energia de sistema.

A umidade do ar é mais baixa principalmente no final do inverno e inicio da primavera, no período da tarde, entre 12 e 16 horas (Pinto *et al.* (2008)). A umidade fica mais alta:

- Sempre que chove devido à evaporação que ocorre posteriormente;
- Em áreas florestadas ou próximas aos rios ou represa;
- Quando a temperatura diminui (orvalho).

O clima predominante no Estado do Amazonas é o clima equatorial, que é quente e úmido, com temperaturas bastante altas. A grande UR resulta da intensa evapotranspiração da enorme quantidade de água da rede fluvial, do alto índice de chuvas e da exuberante vegetação.

A temperatura média no Estado atinge 31,4ºC, os meses mais quentes são agosto, setembro e outubro e os índices pluviométricos variam de 1,750 mm e 3,652mm e a UR anualmente varia de 80 a 90%, Ribeiro (2017).

5.1.1 Interferências da umidade relativa do ar para saúde

Estudos voltados a entender o comportamento climático vêm ganhando importância significativa nos últimos anos. Temas como aquecimento global, emissão de gases na atmosfera, índices pluviométricos, impactos da constante poluição, principalmente nas grandes cidades, qualidade do ar, índices de poluentes, raios solares, efeito estufa etc. estão sendo constantemente debatidos e podem ser vistos em trabalhos de Magalhães & Zanella (2011).

Tais tópicos podem explicar uma série de fatores ligados à saúde e às mudanças climáticas a entender o comportamento destas séries climáticas, por meio de estudos de seus registros históricos pode auxiliar na orientação de adoção de novas políticas públicas. Problemas decorrentes da baixa umidade do ar:

- Complicações alérgicas e respiratórias devido ao ressecamento de mucosas;
- Sangramento pelo nariz;
- Ressecamento da pele;
- Irritação dos olhos;
- Eletricidade estática nas pessoas e em equipamentos eletrônicos;

- Aumento do potencial de incêndios em pastagens e florestas.

De acordo com Pinto *et al.* (2008), alguns cuidados devem ser tomados observando-se as faixas de porcentagem da umidade relativa do ar:

Entre 20 e 30% - Estado de atenção

- Evitar exercícios físicos ao ar livre entre 11 e 15 horas;
- Umidificar o ambiente através de vaporizadores, toalhas molhadas, recipientes com água, molhamento de jardins etc;
- Sempre que possível permanecer em locais protegidos do sol, em áreas vegetadas etc;
- Consumir água à vontade.

Entre 12 e 20% - Estado de alerta

- Observar as recomendações do estado de atenção;
- Suprimir exercícios físicos e trabalhos ao ar livre entre 10 e 16 horas;
- Evitar aglomerações em ambientes fechados;
- Usar soro fisiológico para olhos e narinas.

Abaixo de 12% - Estado de emergência

- Observar as recomendações para os estados de atenção e de alerta;
- Determinar a interrupção de qualquer atividade ao ar livre entre 10 e 16 horas como aulas de educação física, coleta de lixo, entrega de correspondência etc;
- Determinar a suspensão de atividades que exijam aglomerações de pessoas em recintos fechados como aulas, cinemas etc entre 10 e 16 horas;
- Durante as tardes, manter com umidade os ambientes internos, principalmente quarto de crianças, hospitais etc.

  Na Figura 5.1, é mostrado o diagrama de conforto humano da UR em função da temperatura. Fonte: (Instituto Nacional de Meteorologia)

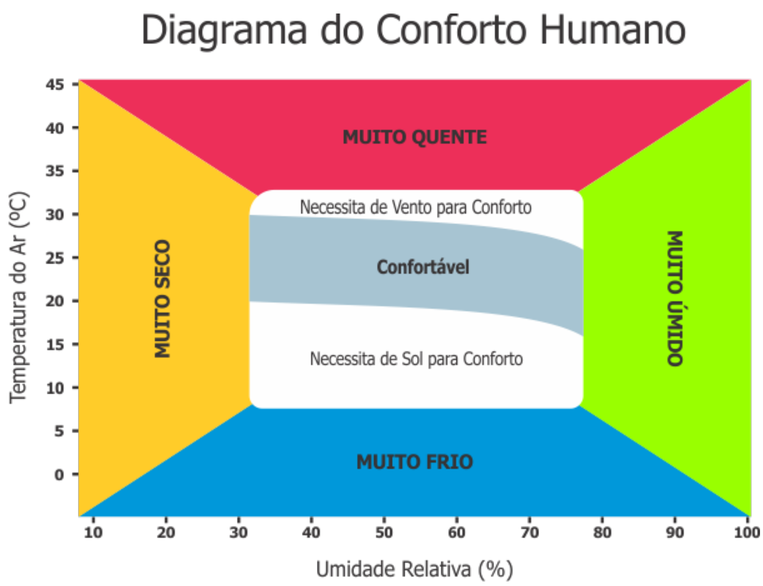

Figura 5.1: Diagrama do conforto humano

De acordo Marins (1998), é característico do clima brasileiro durante boa parte do ano, registrar altas temperaturas e altas umidades do ar o que recomenda cuidados especiais para a prática de exercícios físicos. As condições climáticas podem alterar as condições saudáveis dessas atividades e causar o surgimento do quadro de hipertemia ou hipotermia.

5.1.2 Processo de obtenção da umidade relativa do ar

De acordo com o (Instituto Nacional de Meteorologia), o psicômetro mede a umidade relativa do ar de modo indireto em porcentagem (%). Compõe-se de dois termômetros idênticos, um denominado termômetro de bulbo seco (termômetro de mercúrio, com seu bulbo apenas exposto ao ar), e o outro com o bulbo envolvido em gaze ou cadarço de algodão mantido constantemente molhado, denominado termômetro de bulbo úmido (tem seu bulbo envolvido com um condão umedecido em água a qual evapora, possibilitando assim o cálculo da umidade relativa do ar pela diferença de temperatura).

De acordo com Barbiero (2004), a umidade relativa do ar (e) é a relação da pressão parcial do vapor de água (pa) e a pressão de saturação de vapor de água (pas) na mesma temperatura e pressão atmosférica, dada pela equação:

$$\text{pas} = 0,621 \exp\left(\frac{17,20\,\text{ta}}{\text{ta} + 237,3}\right)$$

$$\mathrm{pa} = -6,27 \times 10^{-4}\,(\mathrm{ta} - \mathrm{tbu})$$

$$\mathrm{e} = \frac{\mathrm{pa}}{\mathrm{pas}}$$

onde,

ta = temperatura do ar °C;

tbu = temperatura de bulbo úmido °C;

A umidade relativa do ar é utilizada em (%), de acordo com a equação:

$$\mathrm{UR} = 100 \times \mathrm{e}$$

5.2 Descrição dos dados

Para a realização das análises, foram obtidos os dados das estações meteorológicas do Estado (Fig. (5.2)) disponíveis na Base de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa do Instituto Nacional de Meteorologia (Instituto Nacional de Meteorologia).

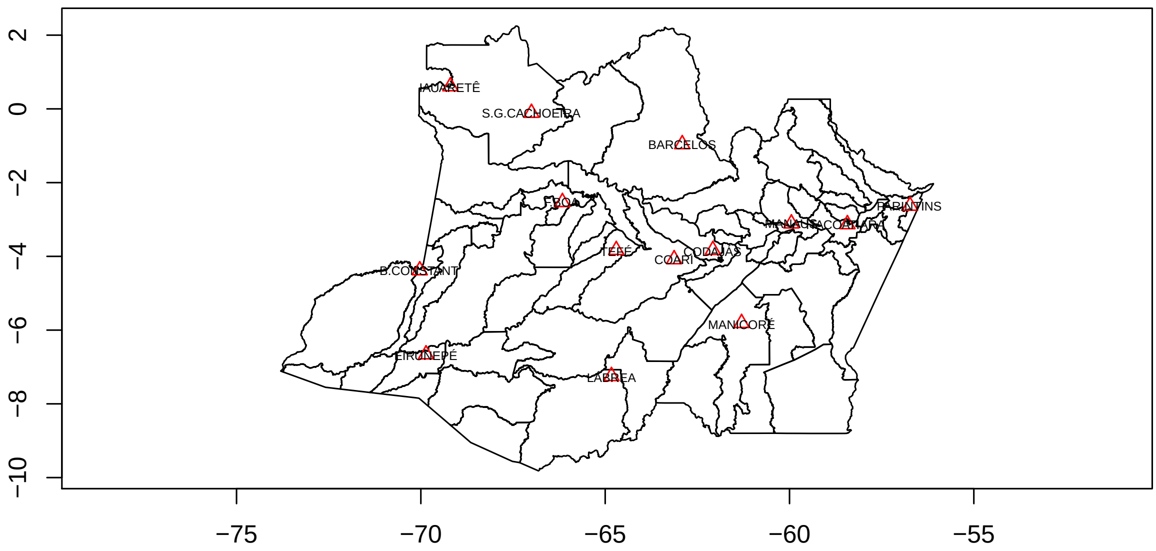

Figura 5.2: Distribuição espacial das estações meteorológicas do Estado do Amazonas segundo o INMET.

Os dados referem-se a registros de umidade relativa mínima do ar[1] mensais observadas nos anos de 1998 a 2017 ($T = 20$ anos) nas $L = 14$ estações do Estado distribuídas em 13 municípios (o município São Gabriel da Cachoeira possui duas estações: Iauaretê e S.G. da Cachoeira) e monitoradas pelo INMET. A Tabela (5.1) mostra as coordenadas geográficas (longitude, latitude e altitude) de cada uma dessas estações.

Tabela 5.1: Coordenadas geográfica das estações meteorológicas do Estado do Amazonas-INMET

Estações Meteorológicas	Longitude	Latitude	Altitude
Barcelos	-62,91	-0,96	40
Iauaretê	-69,2	0,61	120
S,G da Cachoeira	-67	-0,11	90
Fonte Boa	-66,16	-2,53	55,57
Tefé	-64,7	-3,83	47
Benjamin Constant	-70,03	-4,38	65
Eirunepé	-69,86	-6,66	104
Lábrea	-64,83	-7,25	61
Coari	-63,13	-4,08	46
Codajás	-62,08	-3,83	48
Manicoré	-61,3	-5,81	50
Manaus	-59,95	-3,11	67
Itacoatiara	-58,43	-3,13	40
Parintins	-56,73	-2,63	29

A partir desses dados, consideramos a menor umidade relativa mínima anual do período - agosto, setembro e outubro - que representam os meses mais quentes do Estado. A Figura (5.3) mostra o comportamento desses dados para o período considerado. Observe que a menor UR foi $20,0\%$ registrada no ano de 2004 na estação de Lábrea e em 2010 na estação de Codajás, enquanto que a maior foi 87% observada no ano de 2017 na estação de Benjamin Constant.

[1]Nas estações meteorológicas são feitas leituras das umidades relativas do ar em três horários prédeterminados pela OMM (Organização Meteorológica Mundial), que são chamados de "horários sinóticos". Somente nestes três horários temos os valores de umidade relativa do ar (UR), além da média das três observações. Eventualmente no horário das 14 horas local é quando ocorre a UR mínima diária.

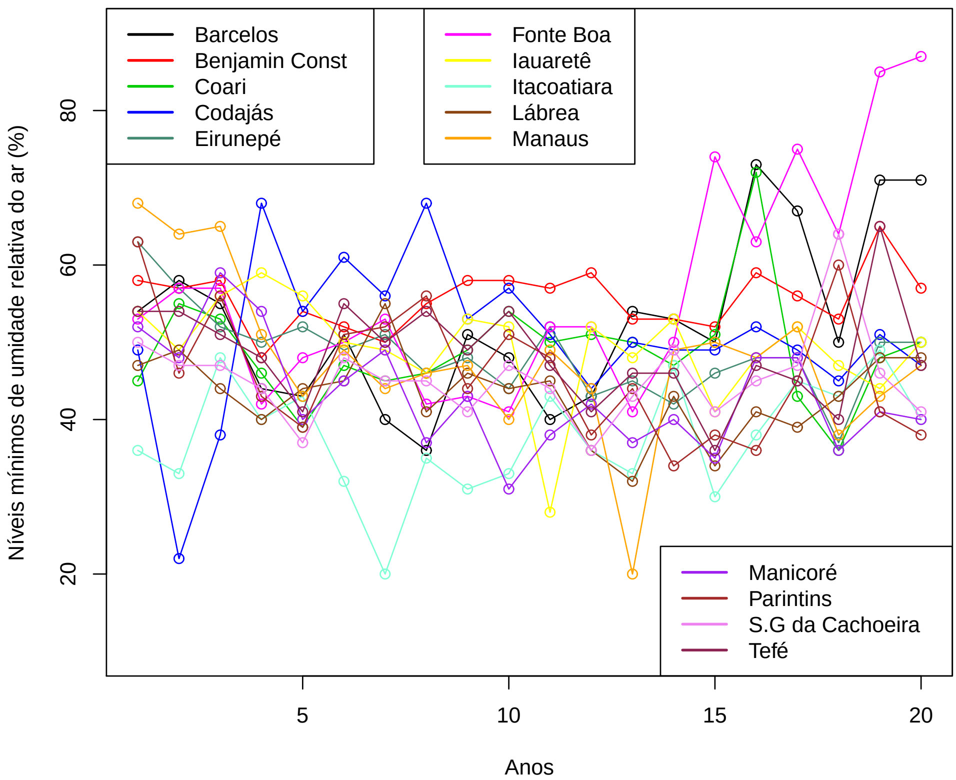

Figura 5.3: Séries de níveis mínimos de umidade relativa do ar anuais observadas nas 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas no período de 1998 a 2017.

Na Tabela 5.2 estão apresentadas os resultados das estatísticas descritivas dos níveis mínimos de umidade relativa do ar para cada estação meteorológica. Observa-se na Tabela que o menor valor do coeficiente de variação (CV) foi 11,25% para Benjamin Constant e o maior, 24,0% para o município de Lábrea. Conforme a classificação dos limites do CV propostos por Warrick (1980), a variabilidade dos dados, em todas estações, foi classificada como média, apresentando valores entre 12% e 60%.

Tabela 5.2: Estatísticas descritivas dos níveis mínimos de umidade relativa do ar nas estações meteorológicas, no período de 1998 a 2017.

		Estatística descritiva (%)				
Estações	Mínimo	Desvio padrão	Mediana	Média	Coeficiente de variação (%)	Máximo
Barcelos	36,00	8,17	51,00	52,60	15,53	73,00
Iauaretê	48,00	10,92	56,50	55,60	19,64	65,00
S. G. da Cachoeira	36,00	6,87	48,50	48,85	14,06	72,00
Fonte Boa	22,00	7,81	50,50	50,65	15,42	68,00
Tefé	37,00	6,39	48,50	48,65	13,13	63,00
Benj. Constant	41,00	6,35	52,50	56,45	11,25	87,00
Eirunepé	28,00	8,96	50,00	49,35	18,16	59,00
Lábrea	20,00	9,06	37,00	37,75	24,00	49,00
Coari	32,00	6,51	44,00	43,20	15,07	55,00
Codajás	20,00	8,39	47,50	47,85	17,53	68,00
Manicoré	31,00	7,26	41,50	43,15	16,83	59,00
Manaus	34,00	7,04	44,50	46,15	15,25	63,00
Itacoatiara	36,00	9,39	45,00	45,35	20,71	45,35

Ainda na Tabela 5.2, observa-se que as estações apresentam, em média, os menores valores de umidade do ar, sendo Lábrea com a menor média (37,0%). A média dos níveis mínimos de umidade do ar nas estações oscilou entre 37,0% e 56,45%.

As estações meteorológicas foram dispostas em $M = 3$ sub-regiões/grupos com centros, respectivamente, em $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ em que alocamos as variáveis latentes α_m-estáveis, $m = 1,2,3$. Essa divisão foi feita de acordo com o regime pluviométrico para o Estado Quadro (2017). A composição desses grupos é mostrada na Figura (5.4). Observe que $L_1 = 5$, $L_2 = 3$ e $L_3 = 6$, representam a quantidade de estações próximas a $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, respectivamente.

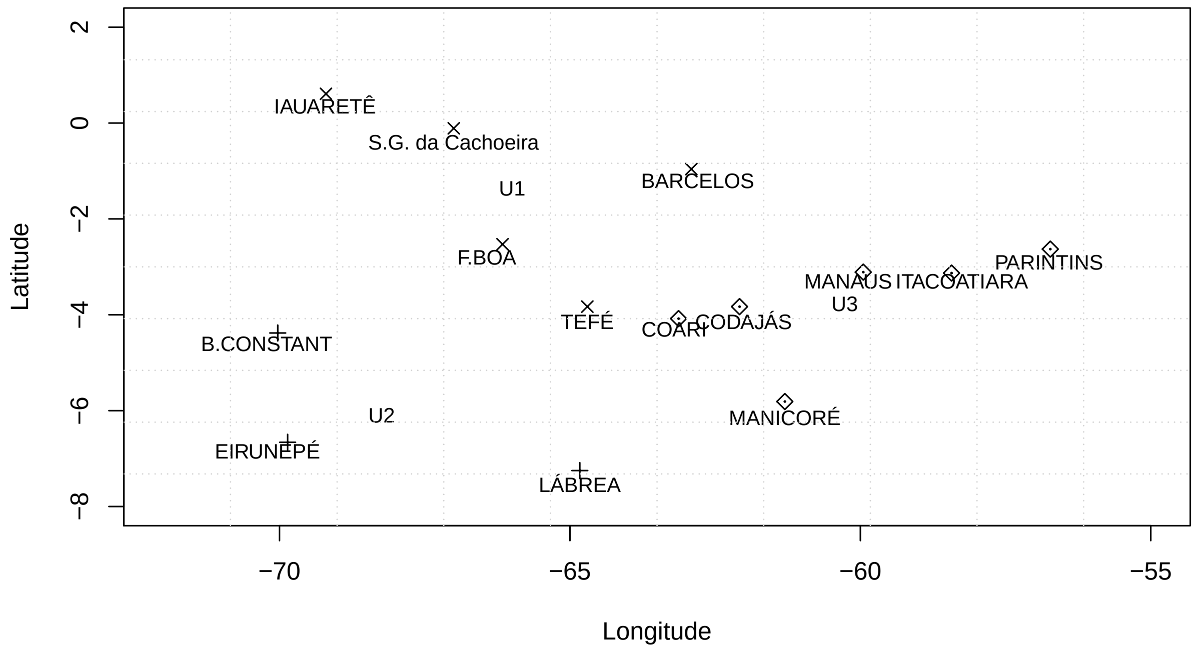

Figura 5.4: Divisão das estações meteorológicas em 3 sub-regiões com centros $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$. Os pontos com os mesmos símbolos pertencem a mesma sub-região/grupo.

Como a distância entre as estações são grandes, pois o Estado do Amazonas apresenta extensões continentais, os pesos $\omega_{\ell,m}$ foram normalizados utilizando a Expressão (4.1) e representando da seguinte maneira

$$\omega_{\ell,m} = \frac{K(\log(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||);\tau_m)}{\sum_{m=1}^{M} K(\log(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||);\tau_m)}, \quad m = 1,2,3.$$

Os parâmetros de suavização τ_m, $m = 1,2,3$, foram estimados por:

$$\widehat{\tau}_m = \left(\frac{4}{3L_m}\right)^{\frac{1}{5}} \times \frac{\mathrm{Me}\{|(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||) - \mathrm{Me}(||\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m||)|; \forall \mathbf{s}_\ell \sim \mathbf{u}_m\}}{0,6745}, \quad m = 1,2,3$$

em que Me indica a mediana Bowman & Azzalini (1997).

5.3 Resultados do modelo

Nesta seção, apresentamos os resultados referentes a aplicação do modelo Kumaraswany multivariado no problema espaço-temporal de umidade relativa do ar. Os parâmetros do modelo foram estimados usando o algoritmo MCEM descrito na Subseção (4.2).O algoritmo foi implementados no *software* R R (2017).

A Tabela (5.3) mostra os valores estimados para o parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$.

Tabela 5.3: Estimativas do parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$

Parâmetros	Estimativas
α_1	0,15
α_2	0,72
α_3	0,43

Percebe-se que todas as estimativas $\widehat{\alpha}_m$ indicam uma razoável dependência entre as observações pertencentes à mesma sub-região com centro em $\mathbf{u}_m$. Essa dependência é esperada desde que estamos trabalhando com dados medidos em estações meteorológicas. Note que as observações pertencentes a sub-região centrada em $\mathbf{u}_2$ são menos espacialmente dependentes que as demais. Isto porque as estações pertencentes a essa sub-região são as mais distantes uma das outras.

No que diz respeito, a predição do menor valor da UR em cada estação, κ_ℓ, este foi estimado com o auxílio de regressão não linear, em que usamos como variável regressora a média das temperaturas de bulbo seco (°C) $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ de cada estação meteorológica. Os valores estimados para os parâmetros β_0 e β_1 foram, respectivamente, $\widehat{\beta}_0 = 1,656493$ e $\widehat{\beta}_1 = 0,004610503$. Aqui, o parâmetro β_0 representa o gradiente horizontal de umidade relativa e o parâmetro β_1 o gradiente vertical. Deste modo, temos que

$$\widehat{\kappa}_{(\ell)} = 1 - \exp\left[-e^{-(1{,}656493+0{,}004610503x_\ell)}\right]$$

A variação em larga escala, σ_t, estimadas para cada tempo é descrita na Tabela (5.4). Percebe-se que durante os 20 anos avaliados foi estimada uma variação média de aproximadamente 0,86% em torno da umidade relativa do ar.

Tabela 5.4: Estimativas do parâmetro de larga escala temporal

Parâmetros	Estimativas	Parâmetros	Estimativas
σ_1	0,9579733	σ_{11}	1,3333160
σ_2	0,6423506	σ_{12}	1,0177888
σ_3	0,9788864	σ_{13}	0,6079223
σ_4	1,3842883	σ_{14}	0,5999210
σ_5	0,5073724	σ_{15}	0,5100196
σ_6	0,7368799	σ_{16}	0,1978524
σ_7	0,6721836	σ_{17}	0,7173672
σ_8	1,0275379	σ_{18}	1,2725584
σ_9	0,9143790	σ_{19}	1,3343123
σ_{10}	0,7809492	σ_{20}	1,0156240

Com estes parâmetros estimados obtivemos as umidades relativas do ar preditas utilizando o preditor dado na Seção (4.3). Após a realização das predições em cada município, o pacote *kriging* do *software* R R (2017) foi utilizado para a suavização dos mapas. As Figuras (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) apresentam resultados gerados pela aplicação do modelo para os últimos 20 anos (1998 - 2017) para o estado de atenção. Podemos perceber que a probabilidade de ocorrência do estado de atenção é muito pequena na região Norte do Estado (1% em média), enquanto que esta tem maior incidência na região Sudoeste (15% em média). Com este resultado percebe-se que o estado de atenção é muito improvável de ocorrer no Estado do Amazonas, devido as suas condições climáticas.

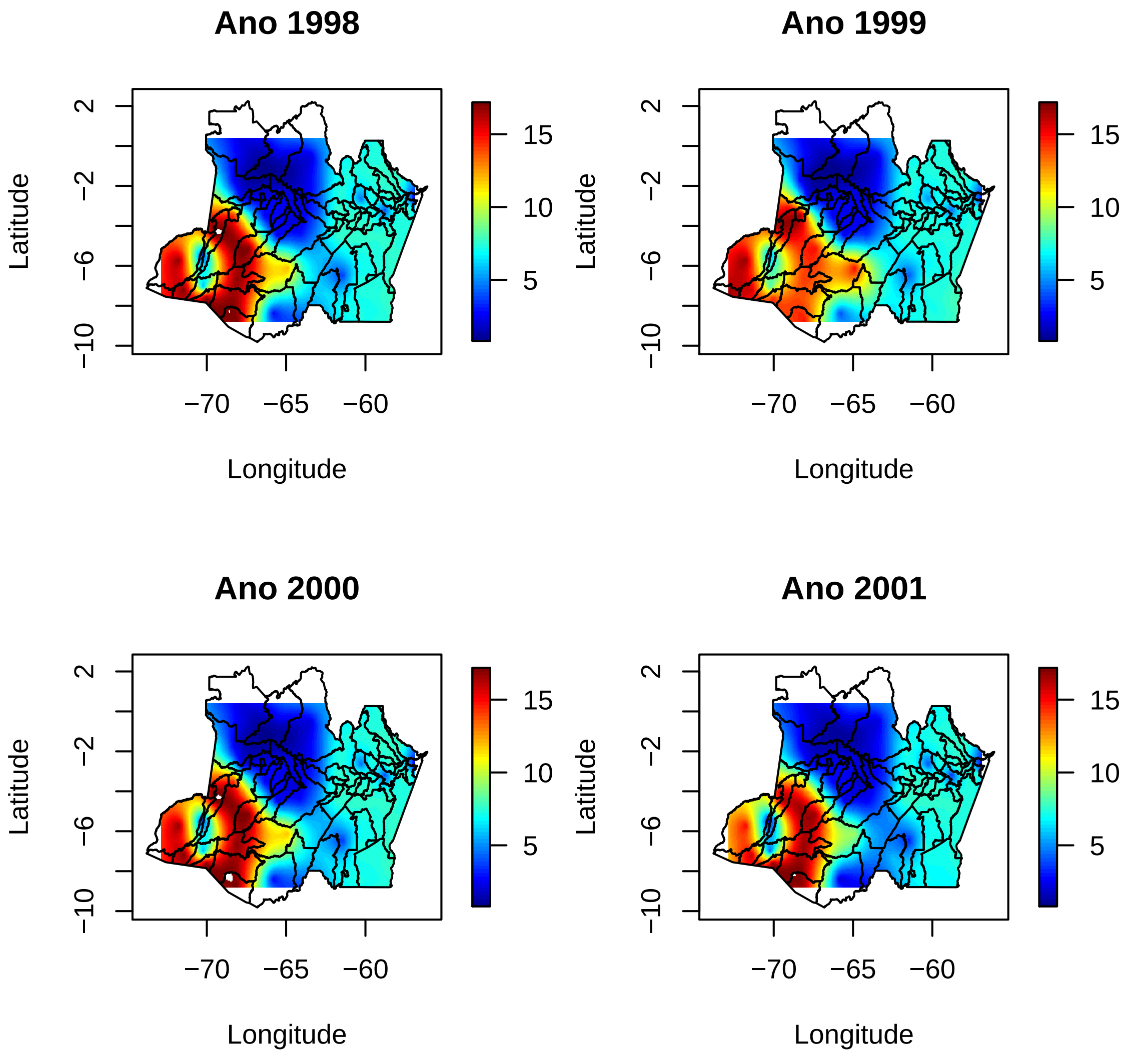

Figura 5.5: Predições de probabilidades para o estado de atenção (%) no Estado do Amazonas 1998-2001

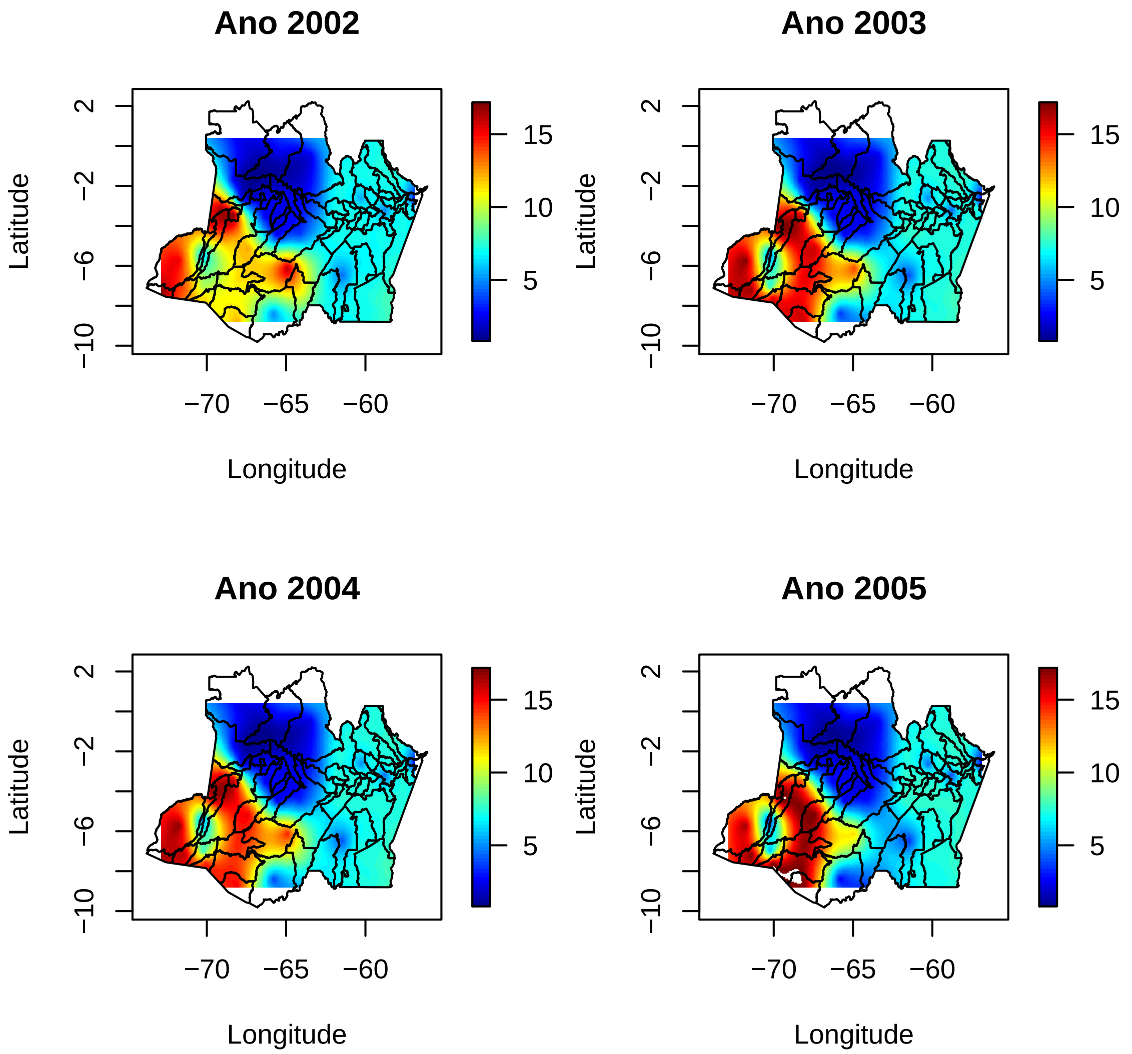

Figura 5.6: Predições de probabilidades para o estado de atenção (%) no Estado do Amazonas 2002-2005

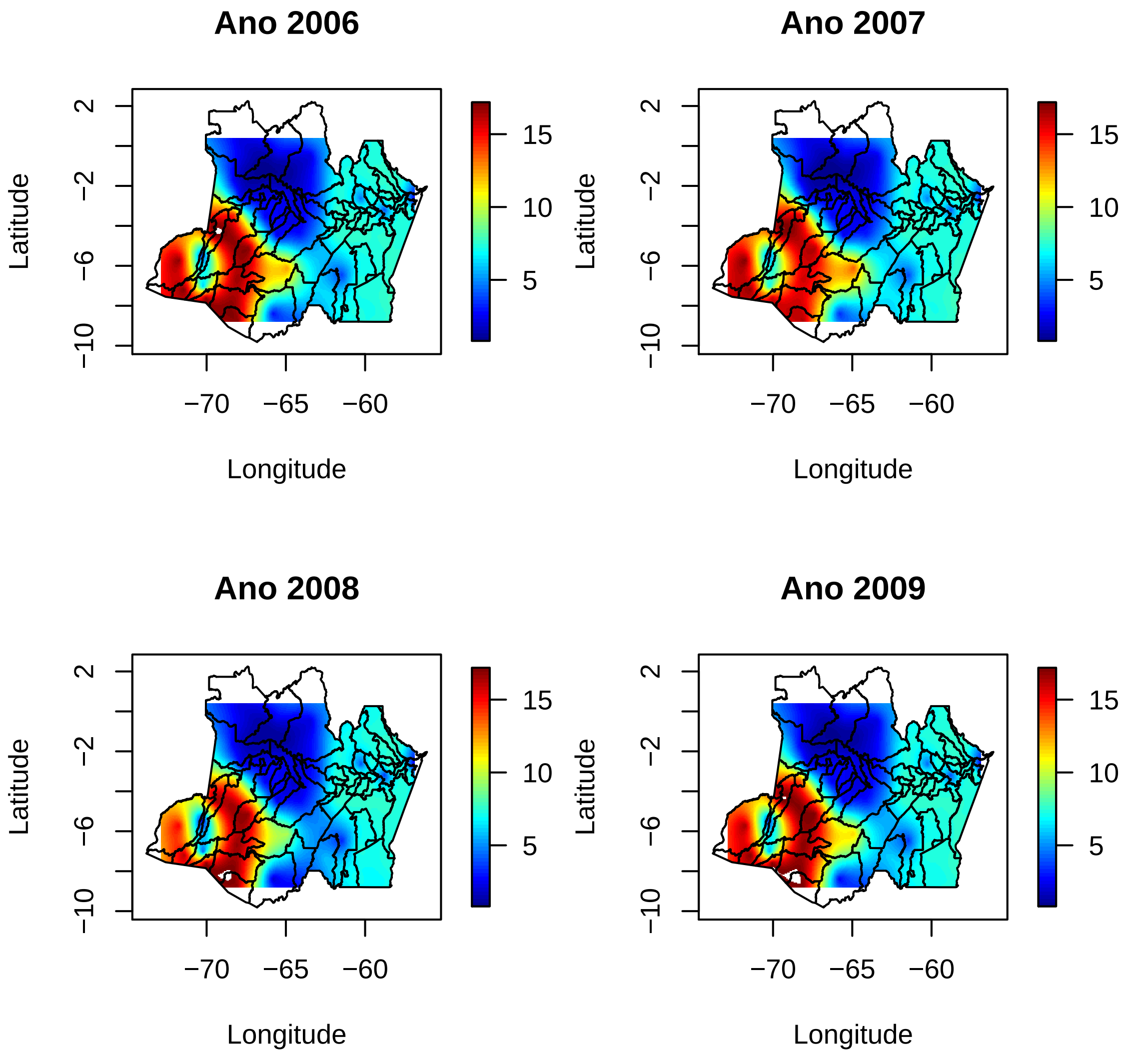

Figura 5.7: Predições de probabilidades para o estado de atenção (%) no Estado do Amazonas 2006-2009

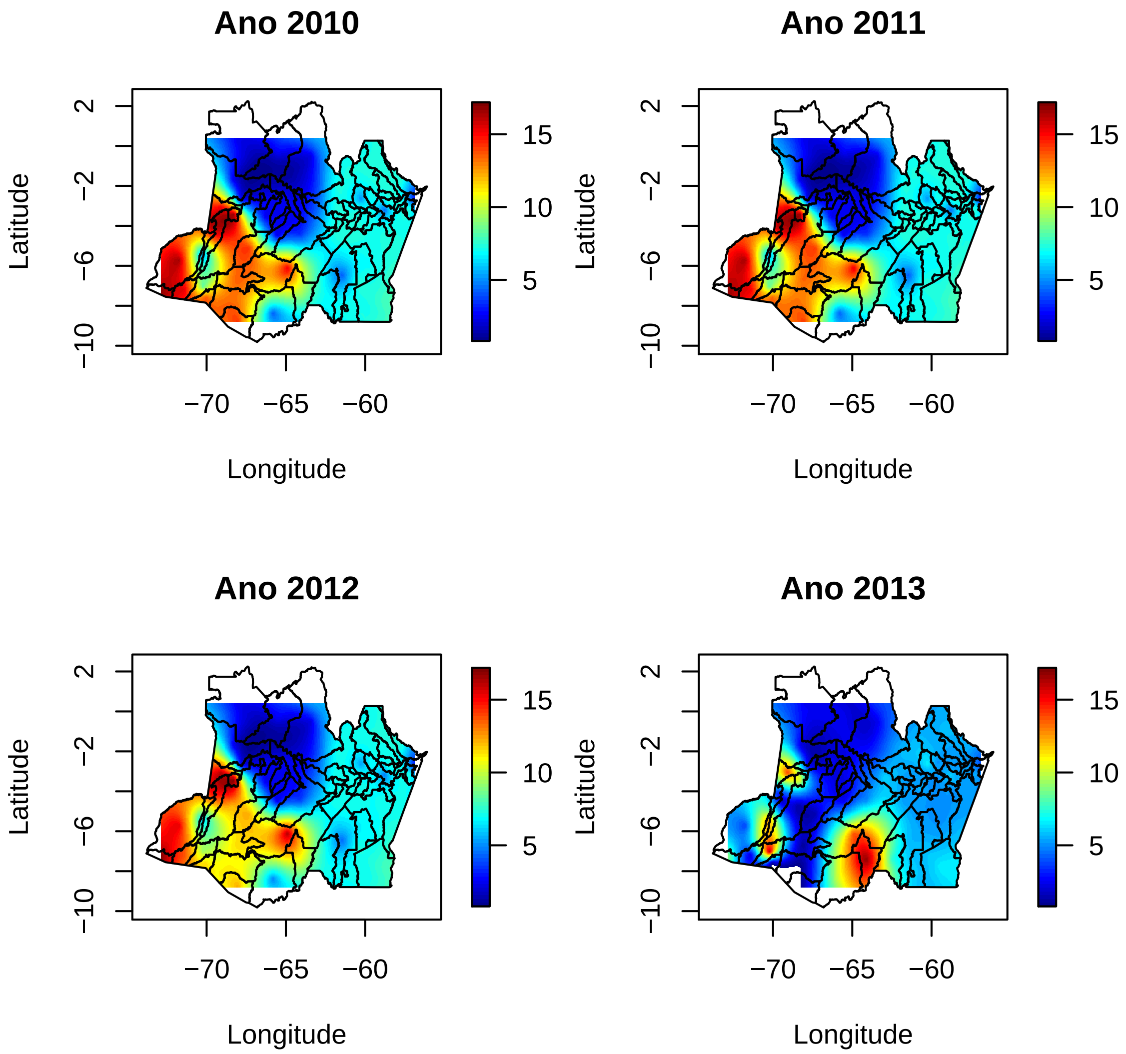

Figura 5.8: Predições de probabilidades para o estado de atenção (%) no Estado do Amazonas 2010-2013

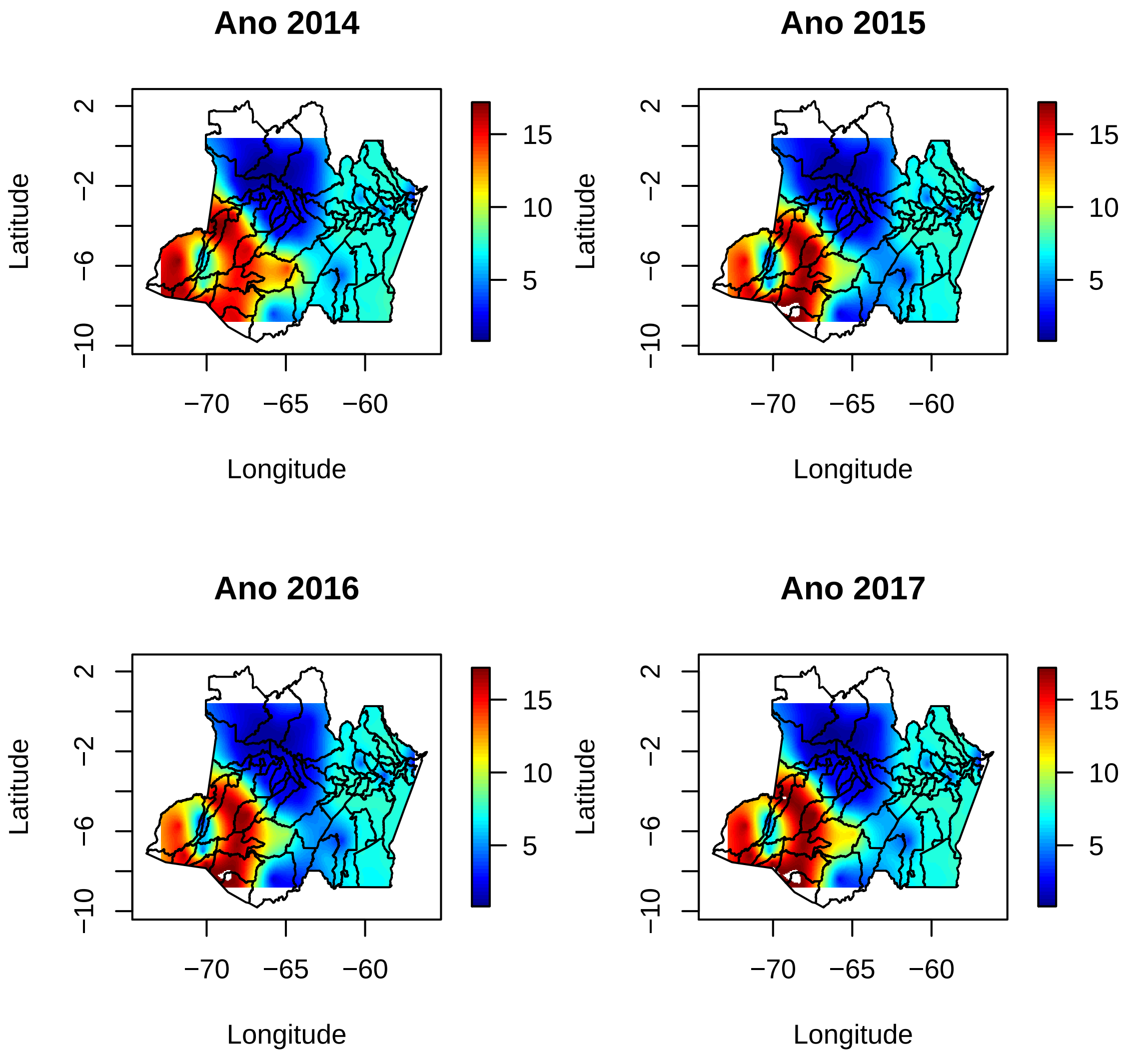

Figura 5.9: Predições de probabilidades para o estado de atenção (%) no Estado do Amazonas 2014-2017

Uma medida importante quando trabalhamos com variáveis ambientais é o tempo de retorno, que é defino por

$$T = \frac{1}{\widehat{F}(y;\boldsymbol{\theta})}$$

em que $\widehat{F}(y;\boldsymbol{\theta})$ é a função de excedência marginal.

Pela Equação (4.3) temos que o tempo de retorno é calculado por

$$\widehat{Y}_{t,\ell}^{(m)} = 1 - \exp\left\{ -\frac{\overline{\sigma}\ln(1-\widehat{\kappa}_\ell)}{\omega_{\ell,m}\ln(0,5)} \left[-\ln\left(\frac{1}{T}\right)\right]^{1/\widehat{\alpha}_m} \right\}$$

em que, $\widehat{\sigma}_t = \overline{\sigma}$.

Os níveis mínimos de umidade relativa do ar anuais esperados para os tempos de retorno de 20, 40, 60, 80 e 100 anos, obtidos via distribuição Kumaraswamy G-Exponencializada multivariada podem ser observados nas Figuras 5.10 a 5.12.

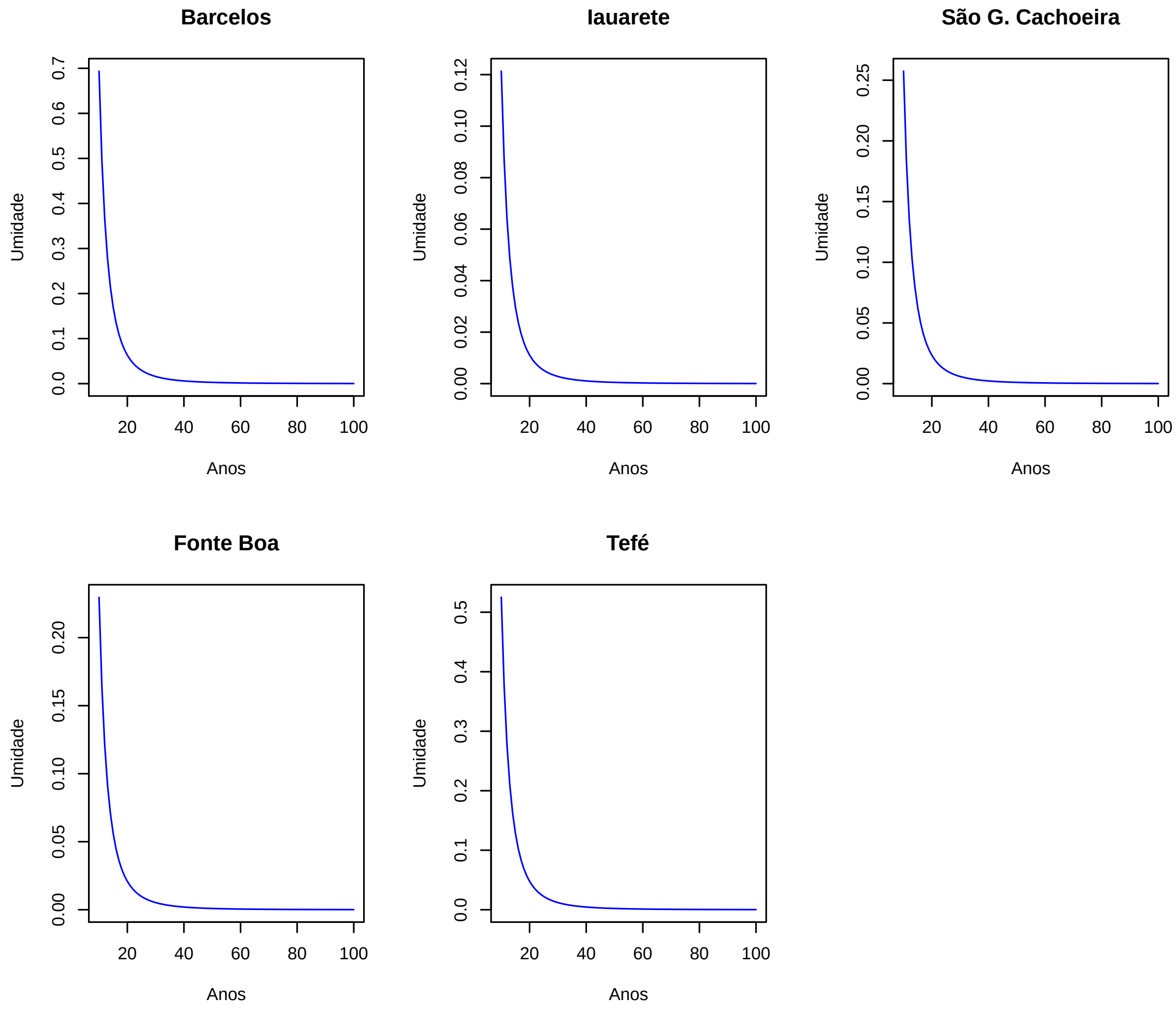

Figura 5.10: Níveis mínimos de umidade relativa do ar no grupo 1, para diferentes tempos de retorno.

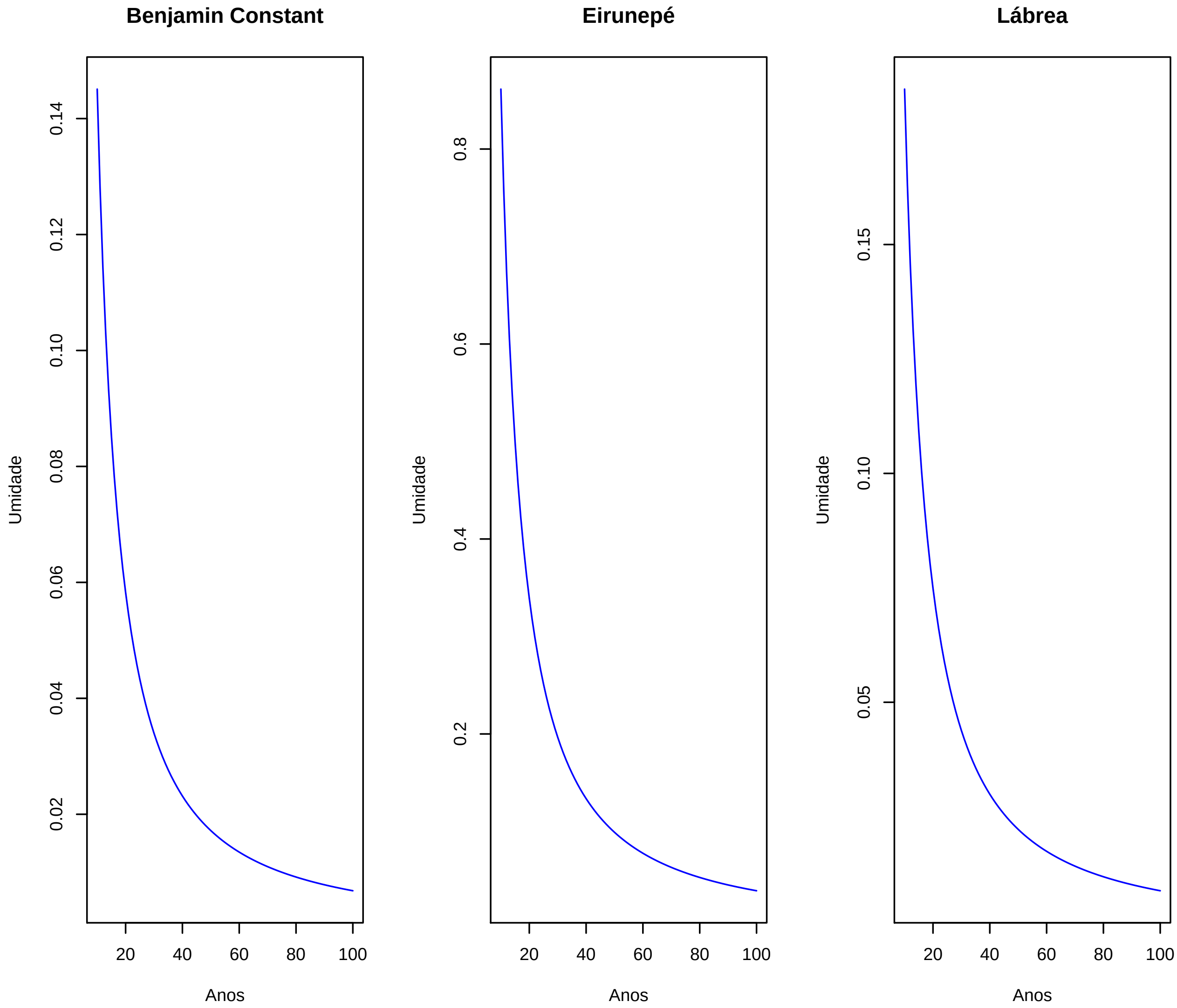

Figura 5.11: Níveis mínimos de umidade relativa do ar no grupo 2, para diferentes tempos de retorno.

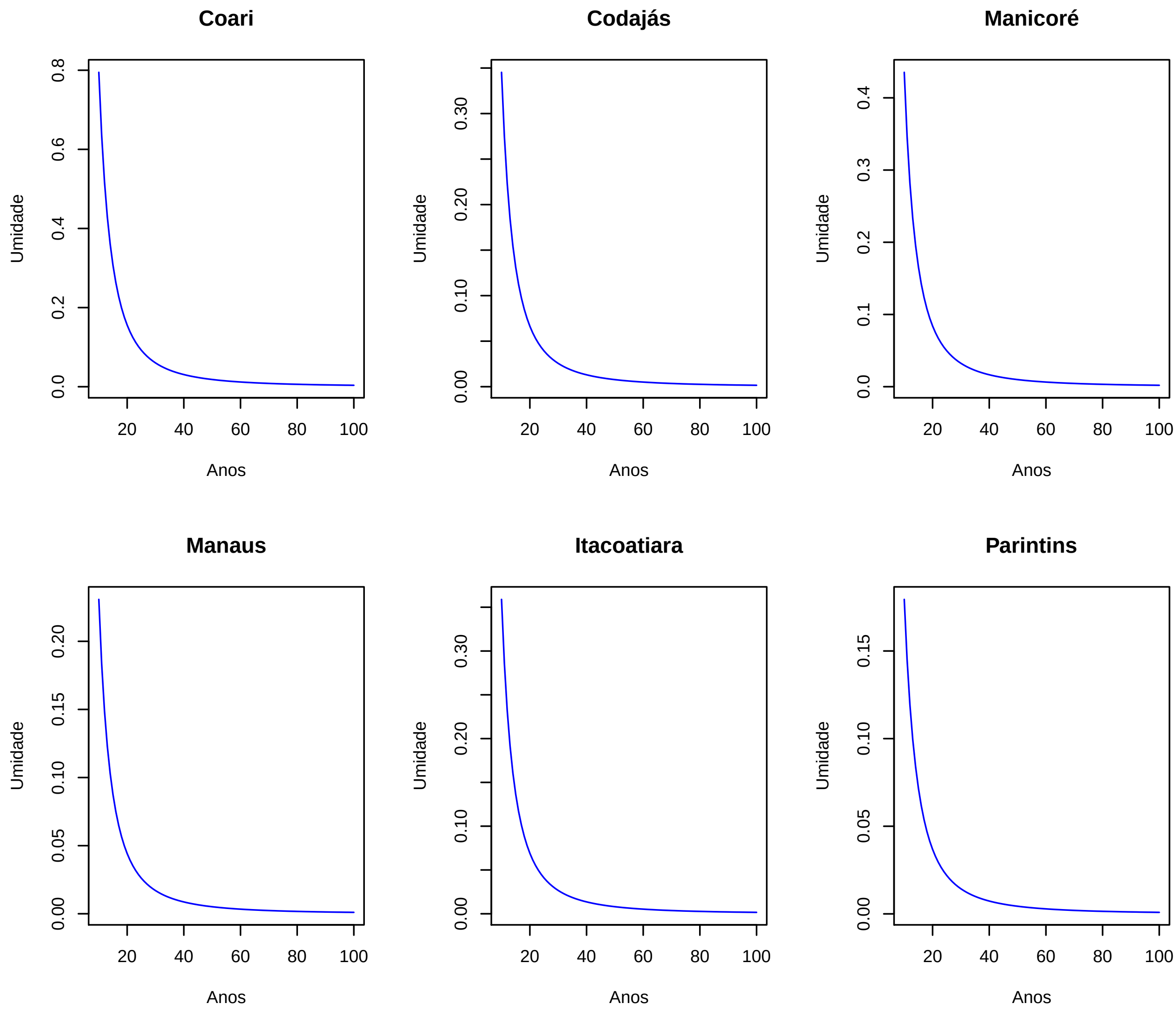

Figura 5.12: Níveis mínimos de umidade relativa do ar no grupo 3, para diferentes tempos de retorno.

Verificou-se no município de Barcelos na Figura (5.10) que para os tempos de retorno de 18 e 20 anos, previu valores mínimos de umidade relativa do ar de 10% e 5% respectivamente. No município de Eirunepé na Figura (5.11) que para os tempos de retorno de 20, 40 e 60 anos, previu valores mínimos de umidade relativa do ar de 33,9%, 13,4% e 6,4% respectivamente. No município de Manaus na Figura (5.12) que para os tempos de retorno de 10 e 20 anos, previu valores mínimos de umidade relativa do ar de 23% e 4,4% respectivamente. De acordo com a escala empírica de umidade divulgada pelo Pinto *et al.* (2008), as previsões obtidas se encontram na faixa de atenção (entre 20% e 30%), sendo sugeridas para essa faixa algumas recomendações quanto aos cuidados a serem tomados com a saúde e as ações a serem realizadas pela defesa civil.

Capítulo 6

Considerações finais

Nesta dissertação construímos uma classe de distribuições multivariadas para dados possivelmente correlacionados (por grupos, objetos e/ou indivíduos) chamada Kumaraswamy G-Exponencializada, denotada por EKw. A classe foi caracterizada por sua função de excedência e construída através de distribuições α_m-estáveis positivas. A dependência espacial neste modelo foi mensurada por grupos. Para isso, as medidas de distâncias foram calculadas através da função Kernel Gaussiana. As variáveis latentes foram incorporadas ao modelo para capturar a dependência de interesse. Apresentamos algumas de suas propriedades como, por exemplo, a distribuição do mínimo e a geração de vetores aleatórios por grupos e, além disso, discutimos métodos para a estimação e inferência dos parâmetros. Como um caso particular, propomos o modelo multivariado para a modelagem e predição da umidade relativa do ar. As propriedades deste modelo foram apresentadas de maneira semelhante às do modelo geral e outras foram acrescentadas, todas no contexto temporais e ou/ espaciais. O modelo proposto é positivamente dependente, ou seja, o modelo será negativamente dependente se a formulação algébrica for tratada através da função $\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$. A função de densidade de probabilidade multivariada foi obtida através da derivada da $\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$. Devido a complexidade analítica da densidade conjunta para estimação de parâmetros foi usado como alternativa a obtenção dos estimadores via MCEM.

O foco da nossa aplicação foi a análise dos dados de umidade relativa do ar observados nas 14 estações meteorológicas do Estado do Amazonas, nos anos de 1998 a 2017 do período considerado quente - agosto, setembro e outubro, obtendo o nível mínimo de UR e a temperatura máxima associada ao nível. A baixa umidade significa que o ar que a população do Amazonas respira contém apenas 20% de água e os outros 80% são de partículas sólidas como monóxido de enxofre, gás carbônico e outras substâncias prejudiciais à saúde. O nível aceitável de 60% é estabelecido pela Organização Mundial de Saúde (OMS). Os menores níveis de umidade relativa do ar verificados pelo tempo de retorno para os municípios de Barcelos, Eirunepé e Manaus, podendo essas previsões serem utilizadas no planejamento de ações dos órgãos de saúde e da defesa civil.

Com base neste trabalho, algumas abordagens futuras podem ser desenvolvidas:

1. Estudos de simulações;

2. Testar hipóteses e construir intervalos de confiança para os parâmetros do modelo Kumaraswamy G-Exponencializado através do método Bootstrap paramétrico;

3. Aplicar o modelo Kumaraswamy G-Exponencializado multivariado para modelar dados de saúde pública e confiabilidade (Análise de Sobrevivência multivariada para dados dependentes);

4. Considerar as observações dependentes tanto no espaço quanto no tempo (série espaço-temporal multivariada);

5. Estudo de simulação para estabelecer a melhor divisão das estações meteorológicas além do previsto pelo regime pluviométrico para o Estado;

6. Versão Bayesiana do modelo Kumaraswamy G-Exponencializado.

Apêndice A

Propriedades

A.1 Distribuição do mínimo

Considere $\boldsymbol{Y}$ $\sim$Kumaraswamy G-Exponencializada. A distribuição do mínimo sobre qualquer subconjunto $\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}$ pertence a mesma classe Kumaraswamy G-Exponencializada. Para esta propriedade temos que $Y(\mathbf{s}_1)|H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_1),...,Y(\mathbf{s}_L)|H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_L)$ são variáveis aleatórias condicionalmente independentes com distribuição EKw multivariada, então:

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(c;\boldsymbol{\theta}|H_{\boldsymbol{\alpha}}) &= \mathbb{P}\left(\min_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0}\{Y(\mathbf{s}_1),...,Y(\mathbf{s}_\ell)\} > c;\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_{\boldsymbol{\alpha}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(Y(\mathbf{s}_1) > c;\boldsymbol{\theta}|H_\alpha(\mathbf{s}_1)\right).\mathbb{P}\left(Y(\mathbf{s}_2) > c;\boldsymbol{\theta}|H_\alpha(\mathbf{s}_2)\right).....\mathbb{P}\left(Y(\mathbf{s}_L) > c;\boldsymbol{\theta}|H_\alpha(\mathbf{s}_L)\right)\\
&= \prod_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0} \mathbb{P}\left(y(\mathbf{s}_\ell) > c;\boldsymbol{\theta}|H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_\ell)\right)\\
&= \prod_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0} \left[\overline{G}_\ell(c;\boldsymbol{\theta})\right]^{H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_\ell)}\\
&= \prod_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0} \exp\left\{-H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{(1-c^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}\\
&= \exp\left\{-\sum_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0} H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{(1-c^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}\\
&= \exp\left\{-\sum_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0}\sum_{m=1}^{M} \omega_m(\mathbf{s}_\ell)E_{\boldsymbol{\alpha}_m}(\mathbf{u}_m)\log\left[\frac{1}{(1-c^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}\\
&= \prod_{m=1}^{M}\exp\left\{-E_{\boldsymbol{\alpha}_m}(\mathbf{u}_m)\sum_{\mathbf{s}_\ell \in \mathbf{S}_0}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{(1-c^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a esperança e em seguida a transformada de Laplace (2.12) temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\overline{F}(c;\boldsymbol{\theta}|H_{\boldsymbol{\alpha}})\right) &= \mathbb{E}\left\{\prod_{m=1}^{M}\exp\left[-E_{\boldsymbol{\alpha}_m}(\mathbf{u}_m)\sum_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\frac{1}{(1-c^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}\\
&= \prod_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left\{\exp\left[-E_{\boldsymbol{\alpha}_m}(\mathbf{u}_m)\sum_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\frac{1}{(1-c^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto a função de distribuição do mínimo é:

$$
\overline{F}(c;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M}\exp\left\{-\left[-\sum_{\mathbf{s}_\ell\in\mathbf{S}_0}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-c^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}. \tag{A.1}
$$

A.2 Distribuição marginal

Seja $\mathbf{S}_0 = \{\mathbf{s}_\ell\}$, pela propriedade (A.1), a distribuição marginal de $Y(\mathbf{s}_\ell)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_\alpha) &= \overline{F}(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}|H_\alpha(\mathbf{s}_\ell))\\
&= \exp\left\{-H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{\overline{G}(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta})}\right]\right\}\\
&= \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\log\left[\frac{1}{(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a esperança em ambos,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\overline{F}(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}|\mathbf{H}_\alpha)\right) &= \mathbb{E}\left\{\exp\left[-\sum_{m=1}^{M}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\log\left(\frac{1}{(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\prod_{m=1}^{M}\exp\left[-E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left(\frac{1}{(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right)\right]\right\}\\
&= \prod_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left\{\exp\left\{-E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m)\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\log\left[\frac{1}{(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}}\right]\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

Aplicando a equação (2.12) a transformada de Laplace,

$$
\overline{F}(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M}\exp\left\{-\left[-\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}.
$$

A.3 Dependência positiva

Para o caso geral, Shaked (1982) define $Y(\mathbf{s}_1), \ldots, Y(\mathbf{s}_L)$ são positivamente dependentes quando

$$\frac{F(y(\mathbf{s}_1), \ldots, y(\mathbf{s}_L))}{\prod_{\ell=1}^{L} F(y(\mathbf{s}_\ell))} > 1.$$

Agora, de forma similar a construção do modelo, tem-se que

$$\begin{aligned}
F(y(\mathbf{s}_\ell); \boldsymbol{\theta} | \mathbf{H}_\alpha) &= F(y(\mathbf{s}_\ell); \boldsymbol{\theta} | H_\alpha(\mathbf{s}_\ell)) \\
&= \exp\left\{ -H_\alpha(\mathbf{s}_\ell) \log \left[\frac{1}{G(y(\mathbf{s}_\ell); \boldsymbol{\theta})} \right] \right\} \\
&= \exp\left\{ -\sum_{m=1}^{M} \omega_m(\mathbf{s}_\ell) E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m) \log \left[\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando a esperança em ambos membros temos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(F(y(\mathbf{s}_\ell); \boldsymbol{\theta} | \mathbf{H}_\alpha)\right) &= \mathbb{E}\left\{ \exp\left[-\sum_{m=1}^{M} \omega_m(\mathbf{s}_\ell) E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m) \log \left(\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}} \right) \right] \right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{ \prod_{m=1}^{M} \exp\left[-E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m) \omega_m(\mathbf{s}_\ell) \log \left(\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}} \right) \right] \right\} \\
&= \prod_{m=1}^{M} \mathbb{E}\left\{ \exp\left\{ -E_{\alpha_m}(\mathbf{u}_m) \omega_m(\mathbf{s}_\ell) \log \left[\frac{1}{1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell}} \right] \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

E pela transformada de Laplace (2.12) temos,

$$F(y(\mathbf{s}_\ell); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{ -\left[-\omega_m(\mathbf{s}_\ell) \log \left(1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell} \right) \right]^{\alpha_m} \right\}. \tag{A.2}$$

Pela construção das expressões (3.1) e (A.2), temos que

$$\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})}{\prod_{l=1}^{L} F(y(\mathbf{s}_\ell); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})} = \frac{\prod_{m=1}^{M} \exp\left\{ -\left[-\sum_{\ell=1}^{L} \omega_m(\mathbf{s}_\ell) \log \left(1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell} \right) \right]^{\alpha_m} \right\}}{\prod_{\ell=1}^{L} \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{ -\left[-\omega_m(\mathbf{s}_\ell) \log \left(1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell} \right) \right]^{\alpha_m} \right\}}$$

Definindo $d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}) = -\omega_m(\mathbf{s}_\ell) \log \left[1-(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell})^{\beta_\ell} \right] > 0$. Assim, a razão será dada da forma,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{m=1}^{M} \exp\left\{-\left(\sum_{\ell=1}^{L} d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right\}}{\prod_{\ell=1}^{L}\prod_{m=1}^{M} \exp\left\{-\left(d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right\}} = \frac{\exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{\ell=1}^{L} d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right\}}{\exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{L}\left(d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right\}} \\
&= \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{\ell=1}^{L} d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{L}\left(d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right\} \\
&= \exp\left\{\sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{\ell=1}^{L}\left(d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m} - \left(\sum_{\ell=1}^{L} d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando o logaritmo, temos

$$
\log\left(\frac{F(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\prod_{\ell=1}^{L} F(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}\right) = \sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{\ell=1}^{L}\left(d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m} - \left(\sum_{\ell=1}^{L} d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m}\right].
$$

Observa-se que

$$
\sum_{\ell=1}^{L}\left(d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m} - \left(\sum_{\ell=1}^{L} d_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m} > 0 \quad \text{se} \quad 0 < \alpha_m < 1, \quad m = 1,2,\ldots,M.
$$

e zero se $\alpha_m = 1$, $m = 1,2,\ldots,M$. Portanto, a propriedade (A.3) está satisfeita, ou seja, o modelo proposto é positivamente dependente e de forma similar é dito que o modelo é negativamente dependente se toda esta formulação algébrica é tratada através da função $\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$.

A.4 Função densidade conjunta

A função densidade de probabilidade multivariada $f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ de uma função de distribuição multivariada pode ser obtida pela diferenciação da função de excedência multivariada com respeito a cada variável. Li (1997) mostrou pela seguinte fórmula:

$$
f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = (-1)^L \frac{\partial^{(L)}\overline{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1,\ldots,\partial y_L} = \overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,\ldots,L}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}), \tag{A.3}
$$

em que

$$
D_{1,2,\ldots,L}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = D_{1,2,\ldots,(L-1)}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) D_L(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_L} D_{1,2,\ldots,(L-1)}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})
$$

e, usando a função de excedência conjunta (3.2), com

$$\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}) = -\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell \log\left(1 - y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right). \tag{A.4}$$

prova:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{F}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_\ell} &= \overline{F}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\left[-\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\left(-\sum_{\ell=1}^{L}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right)^{\alpha_m-1}\right]\\
&\quad\times\left[-\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\left(-\frac{\lambda_\ell\beta_\ell y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell-1}}{1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}}\right)\right]\\
&= -\overline{F}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\left(\frac{\lambda_\ell\beta_\ell y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell-1}}{1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}}\right)\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\left(-\sum_{\ell=1}^{L}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right)^{\alpha_m-1}.
\end{aligned}$$

Usando as equações (2.6) e (A.4), obtem-se

$$\begin{aligned}
&= -\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})r(y_\ell;\boldsymbol{\theta})\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\left(\sum_{\ell=1}^{L}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m-1}\\
&= -\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})r(y_\ell;\boldsymbol{\theta})c(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

Sendo que $c(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{m=1}^{M}\alpha_m\omega_{m,\ell}\left(\sum_{\ell=1}^{L}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\alpha_m-1}$;
$D_\ell(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = r(y_\ell;\boldsymbol{\theta})c(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$, para $\ell = 0,1,2,\ldots,L$ e $D_0(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 1$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}))}{\partial y_\ell} &= -\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_\ell(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&= -\exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{\ell=1}^{L}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}D_\ell(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

A quantidade $r(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta})$ é chamada taxa de falha de base. Então $D_\ell(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ pode ser interpretado como um modelo para taxa de falha proporcional (ver Kundu & Gupta (2010); Kundu *et al.* (2014)).

É válido para qualquer ℓ, então para $L = 2$, temos:

$$\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}$$

e

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^2\frac{\partial^2\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1\partial y_2}\\
&= \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1}\right).
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1} &= -\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})r(y_1;\boldsymbol{\theta})c(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}), \text{ então}\\
f(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\left[-\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})r(y_1;\boldsymbol{\theta})c(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right].
\end{aligned}
$$

Definindo $D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = r(y_1;\boldsymbol{\theta})c(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ e aplicando a regra do produto, logo

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\left[-\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - \overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial}{\partial y_2}D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&= -\left[-\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})r(y_2;\boldsymbol{\theta})c(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&\quad -\overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial}{\partial y_2}D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&= \overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_2(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - \overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&\quad \times\frac{\partial}{\partial y_2}D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&= \overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\left[D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_2(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_2}D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]\\
&= \overline{F}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_{1,2}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}), \text{ logo}\\
f(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}D_{1,2}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}), \text{ em que}
\end{aligned}
$$

$$
D_{1,2}(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \left[D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_2(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - \tfrac{\partial}{\partial y_2}D_1(y_1,y_2;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right].
$$

Portanto o resultado é válido para $L=2$. Agora fazendo para $L=3$

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^3\frac{\partial^3\overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}\\
&= (-1)\frac{\partial}{\partial y_3}\left[(-1)^2\frac{\partial^2\overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1\partial y_2}\right]\\
&= -\frac{\partial}{\partial y_3}\left[\overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]\\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial y_3}\overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})-\overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&\quad\times\frac{\partial}{\partial y_3}D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&= \overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_3(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&\quad-\overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial}{\partial y_3}D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&= \overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\\
&\quad\times\left[D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_3(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})-\frac{\partial}{\partial y_3}D_{l,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]\\
&= \overline{F}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_{1,2,3}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}),\text{ logo}\\
f(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{\ell=1}^{3}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_\ell\log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_\ell}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}D_{1,2,3}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}),
\end{aligned}
$$

em que,

$$D_{1,2,3}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})=\left[D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_3(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})-\tfrac{\partial}{\partial y_3}D_{1,2}(y_1,y_2,y_3;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right].$$

Logo, o resultado também é válido para $L=3$. Suponha agora que o resultado é válido para $L=k$, para algum $k>2$. Isto é,

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2,...,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^k\frac{\partial^k\overline{F}(y_1,....,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1...\partial y_k}\\
&= \overline{F}(y_1,y_2,...,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}),\text{ de modo que}
\end{aligned}
$$

$$D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})=\frac{g(y_1,y_2,...,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\overline{G}(y_1,y_2,...,y_k;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}\text{ é a taxa de risco multivariada.}$$

Agora mostrando que vale para $L=k+1,\forall k\in\mathbb{N}^*$. De fato, pois

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= (-1)^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1...\partial y_k\partial y_{k+1}}\\
&= (-1)\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\left(\frac{(-1)^k\partial^k\overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})}{\partial y_1...\partial y_k}\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\left[\overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \left[-\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right] D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) \\
&- \overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) \\
&= \overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) \left[D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right. \\
&\left. D_{k+1}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} D_{1,2,...,k}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right] \\
f(y_1,y_2,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \overline{F}(y_1,....,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) D_{1,2,...,k+1}(y_1,...,y_k,y_{k+1};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}
$$

Portanto, o resultado é válido para todo $k \geq 2$. Essa forma recursiva da densidade pode ser conveniente para programação computacional.

A.5 Função densidade de probabilidade por grupos

Suponha que as L_m observações $y(s_\ell)$, para $\ell = 1,2,\ldots,L_m$ que ocorrem nos M grupos (pontos e/ou áreas, dependendo de d e p) distintos, são independentes. Então

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{m=1}^{M} \overline{F}(\mathbf{y}_m;\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) \quad \text{onde} \\
\overline{F}(\mathbf{y}_m;\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) &= \exp\left\{-\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{\ell=1}^{L_m}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_m \log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_m}\right)\right]^{\alpha_m}\right\} \\
&= \exp\left\{-\left[-\sum_{\ell=1}^{L_m}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)\beta_m \log\left(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_m}\right)\right]^{\alpha_m}\right\}.
\end{aligned}
$$

Sua função de densidade é dada por

$$
f(\mathbf{y}_m;\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) = \alpha_m^{L_m}\left(\prod_{\ell=1}^{L_m}\omega_m(s_\ell)r(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)\exp\{-z_m\}\, z_m^{1-\frac{L_m}{\alpha_m}} Q_{L_m}(z_m,\alpha_m), \quad \text{(A.5)}
$$

em que $\mathbf{y}_m$ é o subvetor de observações que ocorrem nos $m = 1,2,\ldots,M$ grupos (pontos e/ou áreas), $\boldsymbol{\theta}_m$ é o subvetor de parâmetros, pela equação (A.4) definindo $z_m = \left(\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)^{\alpha_m}$, $Q_1(z_m,\alpha_m) = 1$ para $L_m = 1$ e

$$
Q_{L_m}(z_m,\alpha_m) = \left(\frac{L_m-1-\alpha_m}{\alpha_m}+z_m\right)Q_{L_m-1}(z_m,\alpha_m) - z_m\frac{\partial}{\partial z_m}Q_{L_m-1}(z_m,\alpha_m),\ L_m \geq 2.
$$

A Expressão dada em (A.5) é obtida através da propriedade (A.4) com derivadas recursivas para cada m fixo e a função $Q_{L_m}(z_m, \alpha_m)$ é um polinômio de ordem $(L_m - 1)$ em z_m obtida de forma similar em Shi (1995). Sendo assim,

$$\overline{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = \exp\{-z_m\} \quad \text{e} \quad f(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = (-1)^{L_m} \frac{\partial^{L_m} \overline{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{L_m}}.$$

Note que

$$\frac{\partial \overline{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_\ell} = \frac{\partial \overline{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial z_m} \times \frac{\partial z_m}{\partial y_\ell}, \quad \text{tal que}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial y_\ell} = \frac{\partial z_m}{\partial \upsilon_{m,\ell}} \times \frac{\partial \upsilon_{m,\ell}}{\partial y_\ell}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{F}(\mathbf{y}_m; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_\ell} &= -\exp\{-z_m\} \, \alpha_m \left(\sum_{\ell=1}^{L_m} \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) \right)^{\alpha_m - 1} (-\omega_m(s_\ell))(-r(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}_m)) \\
&= -\alpha_m \omega_m(s_\ell) r(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}_m) \exp\{-z_m\} \, z_m^{1 - \frac{1}{\alpha_m}}
\end{aligned}$$

prova:

Vamos usar o princípio da indução finita sob $L_m \geq 2$. Com efeito, para $L_m = 2$, temos que pela Expressão (A.3),

$$f(y_{1m}, y_{2m}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m) = (-1)^2 \frac{\partial^{(2)} \overline{F}(y_{1m}, y_{2m}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_{1m} \partial y_{2m}} = \frac{\partial}{\partial y_{2m}} \left(\frac{\partial \overline{F}(y_{1m}, y_{2m}; \boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)}{\partial y_{1m}} \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_{2m}} \left[-\alpha_m \omega_m(\mathbf{s}_1) r(y(\mathbf{s}_1); \boldsymbol{\theta}_m) e^{-z_m} z_m^{1 - \frac{1}{\alpha_m}} \right] &= -\alpha_m \omega_m(\mathbf{s}_1) r(y(\mathbf{s}_1); \boldsymbol{\theta}_m) \\
\times \left[\frac{\partial}{\partial y_{2m}} e^{-z_m} z_m^{1 - \frac{1}{\alpha_m}} + e^{-z_m} \frac{\partial}{\partial y_{2m}} z_m^{1 - \frac{1}{\alpha_m}} \right]
\end{aligned}$$

$$= -\alpha_m \omega_m(\mathbf{s}_1).r(y(\mathbf{s}_1);\boldsymbol{\theta}_m)\left[-\alpha_m\omega_m(\mathbf{s}_2)r(y(\mathbf{s}_2);\boldsymbol{\theta}_m)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}} + e^{-z_m}(\alpha_m-1)\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{\ell=1}^{2}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)^{\alpha_m-2}(-\omega_m(\mathbf{s}_2)r(y(\mathbf{s}_2);\boldsymbol{\theta}_m))\right]$$

$$= \alpha_m^2\left(\prod_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}}z_m - \alpha_m^2\left(\prod_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}}$$

$$+ \alpha_m\left(\prod_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}}$$

$$\begin{aligned}
f(y_{1m},y_{2m};\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) &= \alpha_m^2\left(\prod_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}}\left(z_m-1+\frac{1}{\alpha_m}\right)\\
&= \alpha_m^2\left(\prod_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}}\left(\frac{2-1-\alpha_m}{\alpha_m}+z_m\right)\\
f(\mathbf{y}_m;\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) &= \alpha_m^2\left(\prod_{\ell=1}^{2}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{2}{\alpha_m}}Q_2(z_m,\alpha_m),
\end{aligned}$$

onde

$$Q_2(z_m,\alpha_m) = \left(\tfrac{2-1-\alpha_m}{\alpha_m}+z_m\right)Q_1(z_m,\alpha_m) - z_m\frac{\partial}{\partial z_m}Q_1(z_m,\alpha_m) \;\text{ e } Q_1(z_m,\alpha_m)=1$$

e, portanto, o resultado é válido.

Suponha agora que o resultado é válido para $L_m = k$ com $k\in\mathbb{N}^*$, para algum $k\geq 2$, isto é,

$$f(y_{1m},\ldots,y_{km};\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) = \alpha_m^k\left(\prod_{\ell=1}^{k}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m).$$

Devemos provar que vale para $L_m = k+1$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. De fato, por diferenciação recursiva temos que

$$\begin{aligned}
f(y_{1m},y_{2m},\ldots,y_{km},y_{(k+1)m};\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m) &= (-1)^{k+1}\frac{\partial^{(k+1)}\overline{F}(y_{1m},y_{2m},\ldots,y_{km},y_{(k+1)m};\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m)}{\partial y_{1m}\partial y_{2m}\ldots\partial y_k,\partial y_{(k+1)m}}\\
&= -\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}\left((-1)^k\frac{\partial^{(k)}F(y_{1m},y_{2m},\ldots,y_{km},y_{(k+1)m};\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m)}{\partial y_{1m},\partial y_{2m},\ldots,\partial y_{km}}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}\left[\alpha_m^k\left(\prod_{l=1}^k \omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)\right]=-\alpha_m^k$$

$$\times\left(\prod_{l=1}^k \omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)\left[\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)\right]$$

$$=-\alpha_m^k\left(\prod_{l=1}^k \omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)\left[\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}(e^{-z_m})z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)+e^{-z_m}\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}(z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m))\right]$$

$$=-\alpha_m^k\left(\prod_{l=1}^k \omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)\left\{-\alpha_m\omega_m(\mathbf{s}_{k+1})r(y(\mathbf{s}_{k+1});\boldsymbol{\theta}_m)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)\right.$$

$$\left.+e^{-z_m}\left[\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)+z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}Q_k(z_m,\alpha_m)}_{(a)}\right]\right\}$$

sendo,

$$(a)\quad \frac{\partial}{\partial y_{(k+1)m}}Q_k(z_m,\alpha_m)=\frac{\partial}{\partial z_m}Q_k(z_m,\alpha_m)\times\frac{\partial z_m}{\partial y_{(k+1)m}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial z_m}Q_k(z_m,\alpha_m)\alpha_m\left(\sum_{l=1}^{k+1}\upsilon_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)^{\alpha_m-1}(-\omega_m(\mathbf{s}_{k+1}))\,(-r(y(\mathbf{s}_{k+1});\boldsymbol{\theta}_m))$$

logo,

$$=-\alpha_m^k\left(\prod_{l=1}^k \omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)\left\{-\alpha_m\omega_m(\mathbf{s}_{k+1})r(y(\mathbf{s}_{k+1});\boldsymbol{\theta}_m)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}z_mQ_k(z_m,\alpha_m)\right.$$

$$+e^{-z_m}\left[(\alpha_m-k)\left(\sum_{l=1}^{k+1}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)^{a_m-k-1}(-\omega_m(\mathbf{s}_{k+1}))\,(-r(y(\mathbf{s}_{k+1});\boldsymbol{\theta}_m))\,Q_k(z_m,\alpha_m)+z_m^{1-\frac{k}{\alpha_m}}\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial z_m}Q_k(z_m,\alpha_m)\alpha_m\left(\sum_{l=1}^{k+1}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)^{\alpha_m-1}\omega_m(\mathbf{s}_{k+1})r(y(\mathbf{s}_{k+1});\boldsymbol{\theta}_m)\right)\right]\right\}$$

$$= \alpha_m^{k+1}\left(\prod_{l=1}^{k+1}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}z_mQ_k(z_m,\alpha_m)-\alpha_m^{k+1}\left(\prod_{l=1}^{k+1}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)$$
$$\times e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)+k\alpha_m^k\left(\prod_{l=1}^{k+1}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}Q_k(z_m,\alpha_m)-\alpha_m^{k+1}$$
$$\times\left(\prod_{l=1}^{k+1}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}z_m\frac{\partial}{\partial z_m}Q_k(z_m,\alpha_m)$$
$$= \alpha_m^{k+1}\left(\prod_{l=1}^{k+1}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}\Bigg[z_mQ_k(z_m,\alpha_m)-Q_k(z_m,\alpha_m)+\frac{k}{\alpha_m}$$
$$\times Q_k(z_m,\alpha_m)-z_m\frac{\partial}{\partial z_m}Q_k(z_m,\alpha_m)\Bigg]$$

$$f(y_{1m},y_{2m},...,y_{km},y_{(k+1)m};\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m)=\alpha_m^{k+1}\left(\prod_{l=1}^{k+1}\omega_m(\mathbf{s}_\ell)r(y(\mathbf{s}_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right)e^{-z_m}z_m^{1-\frac{k+1}{\alpha_m}}Q_{k+1}(z_m,\alpha_m)$$

onde

$$Q_{k+1}(z_m,\alpha_m)=\left(\tfrac{(k+1)-1-\alpha_m}{\alpha_m}+z_m\right)Q_k(z_m,\alpha_m)-z_m\frac{\partial}{\partial z_m}Q_k(z_m,\alpha_m).$$

Portanto, segue o resultado para todo $L_m \geq 2$

A.6 Geração de vetores aleatório por grupos

Considere que a condição imposta na Propriedade (A.5) é satisfeita. Para todas as L_m observações $y(\mathbf{s}_\ell)$ pertencente ao m-ésimo grupo introduzimos a seguinte transformação

$$(y_1,y_2,\ldots,y_{L_m})\mapsto(x_1,x_2,\ldots,x_{L_{m-1}},z_m),\text{ onde}$$
$$x_\ell=\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}=\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{z_m^{\frac{1}{\alpha_m}}}\Rightarrow\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)=x_\ell z_m^{1/\alpha_m};\ \ x_\ell\in(0,1)\ \text{ tal que}$$

$\sum_{\ell=1}^{L_m}x_\ell=1\Rightarrow x_\ell=1-\sum_{j\neq\ell}^{L_{m-1}}x_j;$ e $z_m^{1/\alpha_m}=\sum_{\ell=1}^{L_m}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\Rightarrow\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)=z_m^{1/\alpha_m}-\sum_{j\neq\ell}^{L_m-1}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m),$ logo

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{L_m-1},z_m)=f_{\mathbf{y}}\left(\frac{\upsilon_{m,1}(\boldsymbol{\theta}_m)}{z_m^{1/\alpha_m}},\frac{\upsilon_{m,2}(\boldsymbol{\theta}_m)}{z_m^{1/\alpha_m}},\ldots,z_m\right)\times|J|.$$

Note que,

$$\frac{\partial y(s_\ell)}{\partial x_\ell} = \begin{cases} \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)} \quad \times \quad \frac{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\partial x_\ell}, & \text{se} \quad j = \ell, \\ 0 & \text{se} \quad j \neq \ell. \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)} \times z_m^{1/\alpha_m} & \text{se} \quad j = \ell, \\ 0 & \text{se} \quad j \neq \ell. \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial z_m} &= \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)} \times \frac{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\partial z_m} \\ &= \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)} \frac{1}{\alpha_m} z_m^{\frac{1}{\alpha_m}-1}. \end{aligned}$$

Assim o jacobiano da transformação é dado por

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_{L_m-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_{L_m-1}} & \frac{\partial y_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{L_m}}{\partial t_1} & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial t_{L_m-1}} & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial z_m} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y_1}{\partial z_m} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial y_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y_{L_m}}{\partial z_m} \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\left| \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)} \right| = \left| \frac{\partial \upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\partial y(s_\ell)} \right|^{-1}, \text{ então por (2.6)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s_\ell)}{\partial x_\ell} &= \left(-\omega_m(s_\ell) \frac{\lambda_\ell \beta_\ell y^{\lambda_\ell - 1}}{1 - y^{\lambda_\ell}} \right)^{-1} \\ &= (-\omega_m(s_\ell) r(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}))^{-1} z_m^{1/\alpha_m}. \end{aligned}$$

e

$$|J| = \frac{1}{\alpha_m} \left[\prod_{\ell=1}^{L_m} (-\omega_m(s_\ell) r(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}))^{-1} \right] z_m^{\frac{L_m}{\alpha_m}-1}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\ldots,x_{L_m-1},z_m) &= \alpha_m^{L_m}\left(\prod_{\ell=1}^{L_m}(\omega_m(s_\ell)r(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}))\right)\exp\{-z_m\}\,z_m^{1-\frac{L_m}{\alpha_m}}Q_{L_m}(z_m,\alpha_m)|J| \\
&= \alpha_m^{L_m}\left(\prod_{\ell=1}^{L_m}(\omega_m(s_\ell)r(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}))\right)\exp\{-z_m\}\,z_m^{1-\frac{L_m}{\alpha_m}}Q_{L_m}(z_m,\alpha_m) \\
&\times\frac{1}{\alpha_m}\left(\prod_{\ell=1}^{L_m}(\omega_m(s_\ell)r(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}))^{-1}\right)z_m^{\frac{L_m}{\alpha_m}-1} \\
&= \alpha_m^{L_m-1}\exp\{-z_m\}\,Q_{L_m}(z_m,\alpha_m) \\
&= \alpha_m^{L_m-1}\exp\{-z_m\}\,\frac{Q_{L_m}(z_m,\alpha_m)}{\Gamma(l_m)}\Gamma(L_m) \\
&= \underbrace{\Gamma(L_m)x_1^{1-1}x_2^{1-1}\ldots x_{L_m-1}^{1-1}x_{L_m}^{1-1}}_{\text{Dirichlet}}\underbrace{\frac{\alpha_m^{L_m-1}}{\Gamma(L_m)}\exp\{-z_m\}\,Q_{L_m}(z_m,\alpha_m)}_{\text{Mistura de Gamas}}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
f(x_1,x_2,...,x_{L_m-1},z_m)=\Gamma(L_m)\frac{\alpha_m^{L_m-1}}{\Gamma(L_m)}\exp\{-z_m\}\,Q_{L_m}(z_m,\alpha_m),\ z_m>0.
$$

Assim, $(X_1,...,X_{L_m-1})$ é independente de Z_m e $(X_1,...,X_{L_m-1})\sim Dir(1,1,...,1,1)$ simétrica, Frigyik *et al.* (2010), onde $\sum_i x_i=1$; $x_i\in(0,1)$ e Z_m é uma mistura de distribuições Gama, ver Shi (1995) com pesos determinados por $Q_{L_m}(z_m,\alpha_m)$. Por exemplo, se $L_m=2$, temos

$$
\begin{aligned}
f_{Zm}(z_m) &= \alpha_m\exp\{-z_m\}\,Q_{L_m}(z_m,\alpha_m) \\
&= \alpha_m\exp\{-z_m\}\left(\frac{1-\alpha_m}{\alpha_m}+z_m\right) \\
&= (1-\alpha_m)\exp\{-z_m\}+\alpha_m z_m\exp\{-z_m\},\ z_m>0.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
Z_m\sim(1-\alpha_m)Gama(1,1)+\alpha_m Gama(2,1)\quad\text{e}
$$

$$
f_{X_1}(x_1)=1;\quad x_1\in(0,1)\to X_1\sim Beta(1,1)\quad\text{e}\quad X_2\sim 1-X_1.
$$

Como $f(x_2,z_m)=f_{X1}(x_1)f_{Zm}(z_m)$ segue que X_1 e Z_m são independentes. Agora pela transformação $\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)=x_\ell z_m^{1/\alpha_m}$ e sendo que $\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)=-\omega_m(s_\ell)\log\overline{G}(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)$, então

$$
\begin{aligned}
-\omega_m(s_\ell)\log\overline{G}(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}_m) &= x_\ell z_m^{1/\alpha_m}\\
\log\overline{G}(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}_m) &= -\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\\
\exp\left\{\log\overline{G}(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}_m)\right\} &= \exp\left\{-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\right\}\\
\overline{G}(y(s_\ell);\boldsymbol{\theta}_m) &= \exp\left\{-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\right\}.
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

Substituindo (2.5) em (A.6) é obtida a expressão

$$
\begin{aligned}
\left(1-y(s_\ell)^{\lambda_m}\right)^{\beta_m} &= \exp\left(-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\right)\\
1-y(s_\ell)^{\lambda_m} &= \left[\exp\left(-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\right)\right]^{\frac{1}{\beta_m}}\\
y(s_\ell)^{\lambda_m} &= 1-\left[\exp\left(-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\right)\right]^{\frac{1}{\beta_m}}\\
y(s_\ell) &= \left\{1-\left[\exp\left(-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(s_\ell)}\right)\right]^{\frac{1}{\beta_m}}\right\}^{\frac{1}{\lambda_m}}.
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

Através de (A.7) podemos gerar valores das distribuições de $(X_1,\ldots,X_{L_m-1})$ e Z_m e obter $(y(s_1),\ldots,y(s_{Lm}))$ através da transformação inversa. Nas Figuras A.1 −A.3 são apresentados os gráficos de distribuição acumulada bivariada variando o parâmetro α.

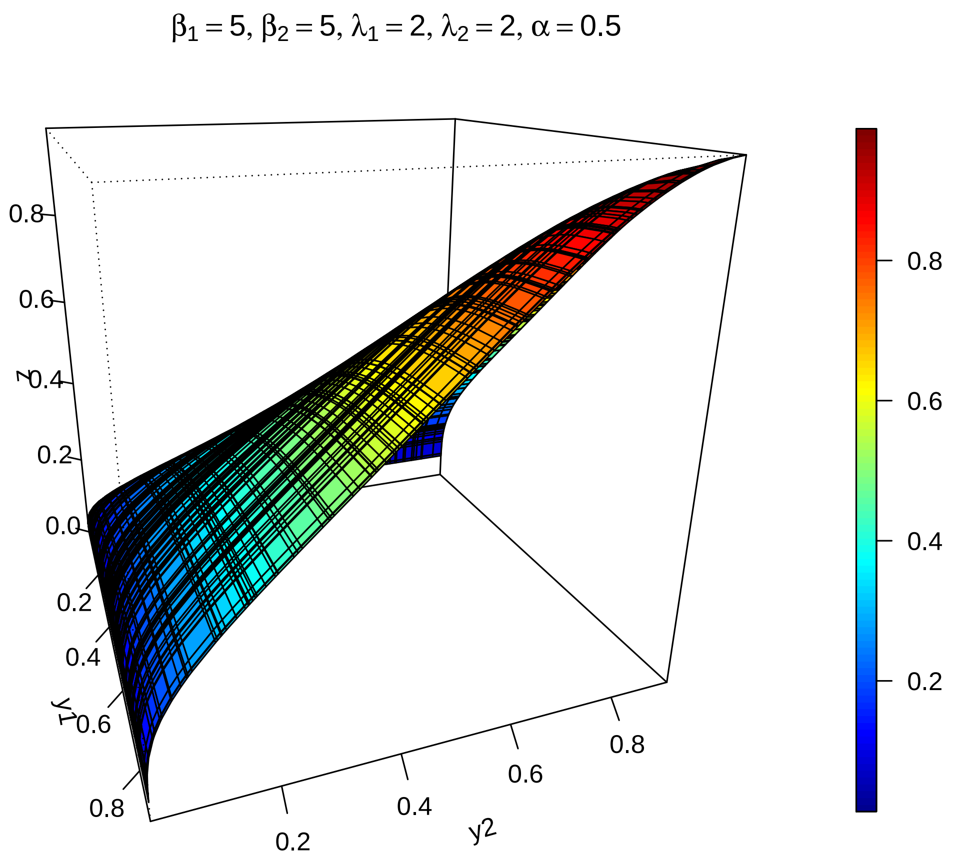

Figura A.1: Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.50$.

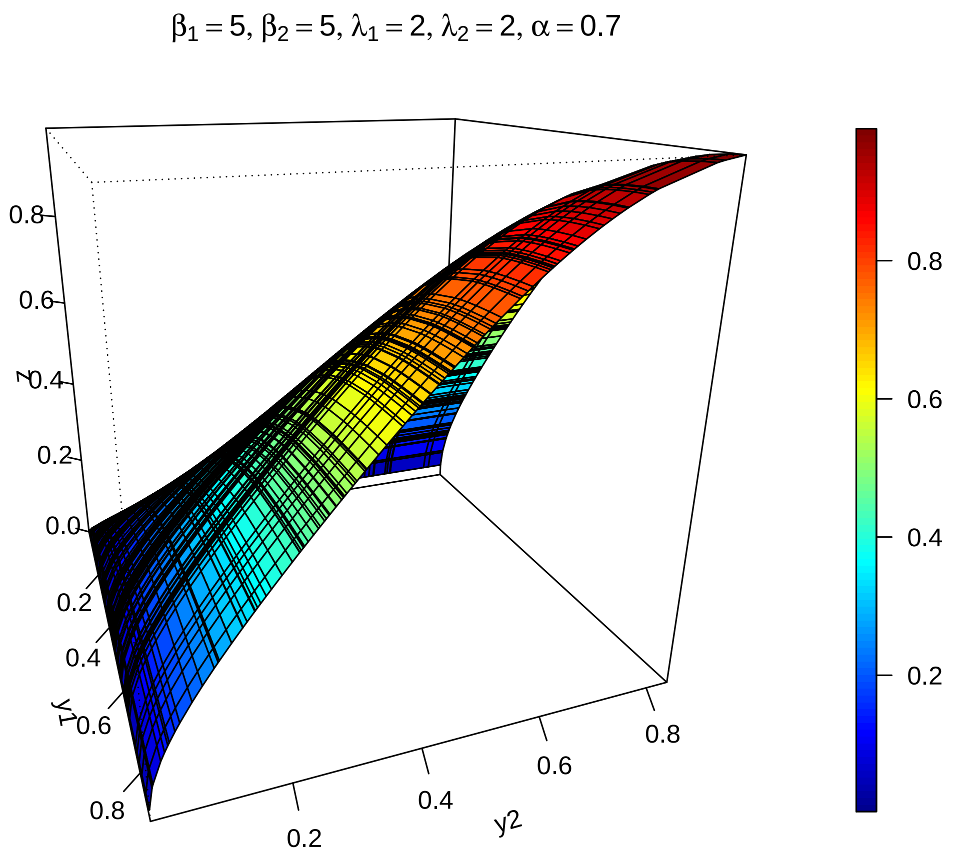

Figura A.2: Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.70$.

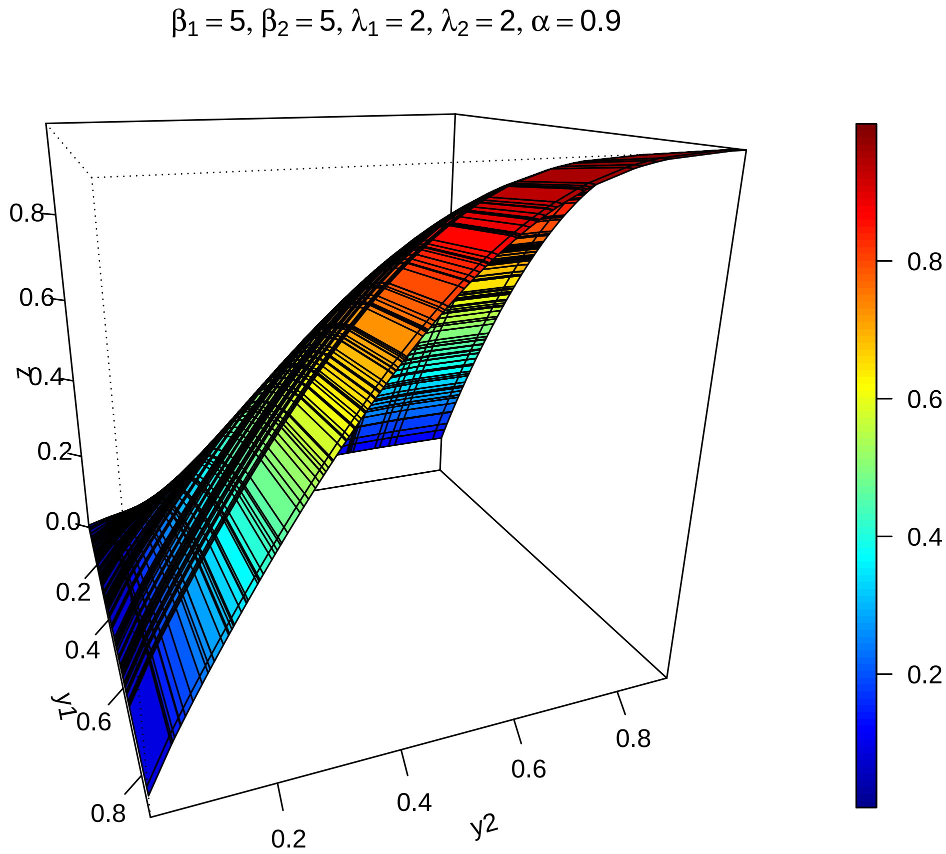

Figura A.3: Função de distribuição acumulada bivariada para $\alpha = 0.90$.

A.7 Inferência via máxima verossimilhança por grupos

A estimação de parâmetros do modelo usando a densidade conjunta da Propriedade A.4 é complexa em vista da dificuldade da representação analítica da densidade. Uma alternativa é considerar a estimação por grupos através da densidade apresentada na Propriedade A.5. Para tanto, defina $\boldsymbol{\theta}_m = (\lambda_m, \beta_m)$, considere a função de densidade por grupos dada em (A.5) com distribuição de base $\overline{G}(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}_m)$ expressa por (2.5), densidade $g(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}_m)$ por (2.3), $r(y(s_\ell); \boldsymbol{\theta}_m)$ como em (2.6) e log-verossimilhança denotada por $\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m)$. Então para cada m fixo a log-verossimilhança é expressa por,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= L_m\log\alpha_m+\sum_{\ell=1}^{L_m}\log\omega_m(\mathbf{s}_\ell)+\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L_m}\log\left[\lambda_m\beta_m y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_m-1}(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_m})^{\beta_m-1}\right]}_{\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m)}\\
&\quad-\sum_{\ell=1}^{L_m}\log\left[(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_m})^{\beta_m}\right]-z_m+\left(1-\frac{L_m}{\alpha_m}\right)\log z_m+\log Q_{L_m}(z_m,\alpha_m)\\
\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= L_m\log\alpha_m+\sum_{\ell=1}^{L_m}\log\omega_m(\mathbf{s}_\ell)+\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m)+\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\upsilon_{m,l}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)}-z_m\\
&\quad+\left(1-\frac{L_m}{\alpha_m}\right)\log z_m+\log Q_{L_m}(z_m,\alpha_m),
\end{aligned}$$

em que, $\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)=-\omega_m(s_\ell)\log\left[(1-y(\mathbf{s}_\ell)^{\lambda_m})^{\beta_m}\right]=x_\ell z_m^{1/\alpha_m}$. As funções escore para α_m e um particular θ_j, igual a λ_m ou β_m, em termos de z_m são dadas a partir das expressões seguintes:

Derivadas de 1ª Ordem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= L_m\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\log\alpha_m-\frac{\partial z_m}{\partial\alpha_m}+\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\left[\left(1-\frac{1}{\alpha_m}\right)\log z_m\right]\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\log Q_{L_m}(z,\alpha_m)\\
&=\frac{L_m}{\alpha_m}-\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m+\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\left(1-\frac{L_m}{\alpha_m}\right)\log z_m+\left(1-\frac{L_m}{\alpha_m}\right)\right.\\
&\quad\left.\times\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\log z_m\right]+\left[\frac{\partial}{\partial z_m}\log Q_{L_m}(z,\alpha_m)\frac{\partial z_m}{\partial\alpha_m}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\log Q_{L_m}(z,\alpha_m)\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha_m}\right]\\
&=\frac{L_m}{\alpha_m}-\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m+\frac{L_m}{\alpha_m^2}\log z_m+\left(1-\frac{L_m}{\alpha_m}\right)\log z_m^{\frac{1}{\alpha_m}}\\
&\quad+S_1(z_m,\alpha_m)\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m+S(z_m,\alpha_m)\\
&=\frac{L_m}{\alpha_m}-\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m+\frac{L_m}{\alpha_m^2}\log z_m+\frac{1}{\alpha_m}\log z_m-\frac{L_m}{\alpha_m^2}\log z_m\\
&\quad+S_1(z_m,\alpha_m)\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m+S(z_m,\alpha_m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha_m}\left[L_m - z_m \log z_m + \log z_m + S_1(z_m,\alpha_m) z_m \times z_m \log z_m\right] \\
&\quad + S(z_m,\alpha_m)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \alpha_m}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) = \frac{A(z_m,\alpha_m)}{\alpha_m} + S(z_m,\alpha_m).
$$

Onde, $S(z_m,\alpha_m) = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_m}\log Q_{L_m}(z_m,\alpha_m), \quad S_1(z_m,\alpha_m) = \dfrac{\partial}{\partial z_m}\log Q_{L_m}(z_m,\alpha_m),$

$$
A(z_m,\alpha_m) = L_m - z_m \log z_m + \log z_m + S_1(z_m,\alpha_m) z_m \times z_m \log z_m
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= \frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} - \alpha_m z_m^{1-\frac{1}{\alpha}{}_m}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) \\
&\quad + \alpha_m z_m^{-\frac{1}{\alpha_m}}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) - \frac{L_m}{\alpha_m}\left(\alpha_m z_m^{-\frac{1}{\alpha_m}}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \theta_j}\log Q_{L_m}(z_m,\alpha_m) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} + \alpha_m z_m^{-\frac{1}{\alpha_m}}\left(-z_m + 1 - \frac{L_m}{\alpha_m}\right) \\
&\quad \times \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} + \frac{\partial}{\partial z_m}\log Q_{L_m}(z_m,\alpha_m)\alpha_m z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} + \alpha_m z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\left(1 - \frac{L_m}{\alpha_m} - z_m + z_m\right. \\
&\quad \left.\times S_1(z_m,\alpha_m)\right)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} + B(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m).
$$

Onde,

$$
B(z_m,\alpha_m) = \alpha_m z_m^{-\frac{1}{\alpha_m}}\left(1 - \frac{1}{\alpha_m} - z_m + z_m S_1(z_m,\alpha_m)\right)
$$

Derivadas de 2ª Ordem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_m}\left[\frac{A(z_m,\alpha_m)}{\alpha_m}+S(z_m,\alpha_m)\right] = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_m}A(z_m,\alpha_m)\alpha_m\right.\\
&\quad \left. - A(z_m,\alpha_m)\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha_m}\right)\alpha_m^{-2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_m}S(z_m,\alpha_m) = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{\partial}{\partial z_m}A(z_m,\alpha_m)\right.\\
&\quad \left.\times\frac{\partial z_m}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial}{\partial \alpha_m}A(z_m,\alpha_m)\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha_m}\right) - A(z_m,\alpha_m)\alpha_m^{-2}\\
&\quad \times\left(\frac{\partial}{\partial z_m}S(z_m,\alpha_m)\frac{\partial z_m}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial}{\partial \alpha_m}S(z_m,\alpha_m)\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha_m}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{\partial}{\partial z_m}A(z_m,\alpha_m)\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m + \frac{\partial}{\partial \alpha_m}A(z_m,\alpha_m)\right) - A(z_m,\alpha_m)\\
&\quad \times\alpha_m^{-2} + \frac{\partial}{\partial z_m}S(z_m,\alpha_m)\frac{z_m}{\alpha_m}\log z_m + \frac{\partial}{\partial \alpha_m}S(z_m,\alpha_m)\\
\frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= -\alpha_m^{-2}A(z_m,\alpha_m) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha_m}\left(A(z_m,\alpha_m)+\alpha_m S(z_m,\alpha_m)\right)\\
&\quad + \frac{1}{\alpha_m^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_m}A(z_m,\alpha_m) + \alpha_m\frac{\partial}{\partial z_m}S(z_m,\alpha_m)\right)z_m\log z_m.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \theta_k\partial \theta_j}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= \frac{\partial}{\partial \theta_k}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + B(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right.\\
&\quad \left. + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)}\right)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial \theta_k\theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \frac{\partial}{\partial \theta_k}B(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) + B(z_m,\alpha_m)\\
&\quad \times\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial \theta_k\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial \theta_k\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial \theta_k\theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \frac{\partial}{\partial z_m}B(z_m,\alpha_m)\frac{\partial z_m}{\partial \theta_k}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\\
&\quad + B(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial \theta_k\partial \theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial \theta_k\partial \theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2}{\partial\theta_k\theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + \frac{\partial}{\partial z_m}B(z_m,\alpha_m)\alpha_m z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\frac{\partial z_m}{\partial\theta_k}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\\
&\quad\times\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) + B(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\\
&\quad+\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)}\\
\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_k\theta_j}\mathscr{L}_G(\boldsymbol{\theta}_m) + B_1(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\\
&\quad+B(z_m,\alpha_m)\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m) + \sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\frac{\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)},
\end{aligned}
$$

com

$$
B_1(z_m,\alpha_m) = \alpha_m z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\frac{\partial}{\partial z_m}B(z_m,\alpha_m).
$$

Derivadas parciais

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\alpha_m\partial\theta_j}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_j\partial\alpha_m}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\frac{A(z_m,\alpha_m)}{\alpha_m}+S(z_m,\alpha_m)\right]\\
&= \frac{1}{\alpha_m}\frac{\partial}{\partial\theta_j}A(z_m,\alpha_m) + \frac{\partial}{\partial\theta_j}S(z_m,\alpha_m) = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{\partial}{\partial z_m}A(z_m,\alpha_m)\right.\\
&\quad\left.\times\frac{\partial z_m}{\partial\theta_j}\right) + \frac{\partial}{\partial z_m}S(z_m,\alpha_m)\frac{\partial z_m}{\partial\theta_j} = \frac{1}{\alpha_m}\left[\frac{\partial}{\partial z_m}A(z_m,\alpha_m)\left(\alpha_m\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z_m}S(z_m,\alpha_m)\left(\alpha_m z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\right.\\
&\quad\left.\times\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m)\right)\\
\frac{\partial^2}{\partial\alpha_m\partial\theta_j}\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}_m,\alpha_m;\mathbf{y}_m,z_m) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_m}A(z_m,\alpha_m)+\alpha_m\frac{\partial}{\partial z_m}S(z_m,\alpha_m)\right)z_m^{1-\frac{1}{\alpha_m}}\sum_{\ell=1}^{L_m}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\upsilon_{m,\ell}(\boldsymbol{\theta}_m).
\end{aligned}
$$

Notando pela transformação em (A.6) e (A.6) que,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta_\ell}\log\upsilon_{m,\ell}(\theta_\ell) &= \tfrac{1}{\upsilon_{m,\ell}(\theta_\ell)}\times\tfrac{\partial}{\partial\theta_\ell}\upsilon_{m,\ell}(\theta_\ell)\\
&= \tfrac{1}{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}\times\tfrac{\partial}{\partial\theta_\ell}\upsilon_{m,\ell}(\theta_\ell)\\
\frac{\partial}{\partial\theta_\ell}\upsilon_{m,\ell}(\theta_\ell) &= x_\ell z_m^{1/\alpha_m}\times\tfrac{\partial}{\partial\theta_\ell}\log\upsilon_{m,\ell}(\theta_\ell)
\end{aligned}
$$

podemos calcular a Informação de Fisher através do valor esperado das derivadas parciais de segunda ordem com respeito a distribuição conjunta de $(X_1,\ldots,X_{L_{m-1}})$ e Z_m que são independentes. Obviamente que esses valores esperados devem ser computados usando alguma rotina padrão de integração numérica ou através da integração de Monte Carlo. Agora, para computarmos o EMV, seja $\boldsymbol{\phi}_m = (\boldsymbol{\theta}_m, \alpha_m)'$, $\mathscr{U}(\boldsymbol{\phi}_m)$ a função escore, $\mathscr{I}(\boldsymbol{\phi}_m)$ a Informação de Fisher e

$$G^{-1}(x_\ell, z_m, \boldsymbol{\phi}_m) \triangleq G^{-1}\left(exp\left\{-\frac{x_\ell z_m^{1/\alpha_m}}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)}\right\}; \boldsymbol{\theta}_m\right).$$

Então, podemos calcular a Informação de Fisher através da expressão

$$\mathscr{I}(\boldsymbol{\phi}_m) = \mathbb{E}_{(X,Z_m)}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\phi}_m\partial\boldsymbol{\phi}'_m}\mathscr{L}(\boldsymbol{\phi}_m; G^{-1}(\mathbf{x}, z_m, \boldsymbol{\phi}_m), z_m)\right),$$

em que $X = (X_1,\ldots,X_{L_{m-1}})$ e $G^{-1}(\mathbf{x}, z_m, \boldsymbol{\phi}_m) = (G^{-1}(x_1, z_m, \boldsymbol{\phi}_m),\ldots,G^{-1}(x_{L_{m-1}}, z_m, \boldsymbol{\phi}_m))$.

Logo, usando o algoritmo Newton-Raphson Escore de Fisher (**NRSF**), o EMV de $\boldsymbol{\phi}_m$ é solução do processo iterativo,

$$\boldsymbol{\phi}_m^{(i+1)} = \boldsymbol{\phi}_m^{(i)} + \mathscr{I}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}) \times \mathscr{U}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}).$$

Nota-se que o computo de $\mathscr{I}(\boldsymbol{\phi}_m)$ depende da obtenção do valor esperado de quantidades, como por exemplo $A(z_m, \alpha_m)$ e $B_1(z_m, \alpha_m)$, as quais são difíceis de serem obtidas analiticamente. Para superar essa dificuldade, é possível substituir estes valores esperados por uma média via simulação de Monte Carlo. Seja $(\mathbf{x}^{(i,1)}, z_m^{(i,1)}), (\mathbf{x}^{(i,2)}, z_m^{(i,2)}),\ldots,(\mathbf{x}^{(i,N)}, z_m^{(i,N)})$ uma amostra da distribuição conjunta de X e Z_m na i-ésima iteração. Então a aproximação de Monte Carlo para $\mathscr{I}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)})$ é dada por,

$$\widetilde{\mathscr{I}}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\phi}_m\partial\boldsymbol{\phi}'_m}\mathscr{L}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}; G^{-1}(\mathbf{x}^{(i,n)}, z_m^{(i,n)}, \boldsymbol{\phi}_m^{(i)}), z_m^{(i,n)})\right),$$

de modo que o algoritmo Newton-Raphson Escore de Fisher-Monte Carlo (**NRSF-MC**) utiliza $\widetilde{\mathscr{I}}$ no lugar de $\mathscr{I}$,

$$\boldsymbol{\phi}_m^{(i+1)} = \boldsymbol{\phi}_m^{(i)} + \widetilde{\mathscr{I}}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}) \times \mathscr{U}(\boldsymbol{\phi}_m^{(i)}). \tag{A.8}$$

As amostras da conjunta de X e Z_m não são facilmente obtidas. Por exemplo, pela Propriedade A.6, se $L_m = 2$ tem-se

$$z_m^{(i,N)} \sim (1-\alpha_m^{(i)})\text{Gamma(1,1)} + \alpha_m^{(i)}\text{Gamma(2,1)} \quad \text{e} \quad x_1^{(i,N)} \sim Beta(1,2).$$

Referências Bibliográficas

Alzaghal, A., Famoye, F. & Lee, C. (2013). Exponentiated T-X family of distributions with some applications. *International Journal of Statistics and Probability*, **2**(3), 31.

Bakouch, H. S., Ristic, M. M., Asgharzadeh, A., Esmaily, L. & Al-Zahrani, B. M. (2012). An Exponentiated Exponential Binomial distribution with application. *Statistics & Probability Letters*, **82**(6), 1067–1081.

Banerjee, S., Gelfand, A., Knight, J. R. & Sirmans, C. (2004). Spatial modeling of house prices using normalized distance-weighted sums of stationary processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, **22**(2), 206–213.

Barbiero, M. (2004). Avaliação das percepções quanto ao ambiente térmico em uma indústria metalúrgica: um estudo de caso.

Bayer, d. M. & Bayer, F. M. (2015). Previsão da umidade relativa do ar de Brasília por meio do modelo Beta autorregressivo de médias móveis. *Revista Brasileira de Meteorologia*, **30**(3), 319–326.

Berger, J. O. & Sun, D. (1993). Bayesian analysis for the poly-Weibull distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **88**(424), 1412–1418.

Bourguignon, M., Silva, R. B., Zea, L. M. & Cordeiro, G. M. (2013). The Kumaraswamy Pareto distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **12**(2), 129–144.

Bowman, A. W. & Azzalini, A. (1997). *Applied smoothing techniques for data analysis: the kernel approach with S-Plus illustrations*, volume 18. OUP Oxford.

Boyles, R. A. (1983). On the convergence of the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 47–50.

Casella, G. & Berger, R. L. (2011). Inferência estatística-tradução da 2ª edição norteamericana. *Centage Learning*.

Cooley, D. & Sain, S. R. (2010). Spatial hierarchical modeling of precipitation extremes from a regional climate model. *Journal of agricultural, biological, and environmental statistics*, **15**(3), 381–402.

Correa, M. A., Nogueira, D. A. & Ferreira, E. B. (2012). Kumaraswamy normal and Azzalini's skew normal modeling asymmetry. *Sigmae*, **1**(1), 65–83.

Courard-Hauri, D. (2007). Using Monte Carlo analysis to investigate the relationship between overconsumption and uncertain access to one's personal utility function. *Ecological Economics*, **64**(1), 152–162.

Cunha, M., Gamerman, D., Fuentes, M. & Paez, M. (2017). A non-stationary spatial model for temperature interpolation applied to the state of Rio de Janeiro. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, **66**(5), 919–939.

Da Silva, K. O., Moraes, S. O., Miranda, J. H. & Palmieri, A. M. (2007). Sistema automatizado para aquisição de dados de umidade relativa do ar. *Engenharia Agrícola*, **27**(3), 630–638.

De Camargo, M. (2007). *Análise da percepção térmica dos carteiros do CDD-Londrina em relação ao uniforme utilizado em ambiente quente*. Ph.D. thesis, Dissertação em Desenho Industrial, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru (SP).

De Pascoa, M. A., Ortega, E. M. & Cordeiro, G. M. (2011). The kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis. *Statistical methodology*, **8**(5), 411–433.

De Santana, T. V. F., Ortega, E. M., Cordeiro, G. M. & Silva, G. O. (2012). The Kumaraswamy-log-logistic distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **11**(3), 265–291.

Delgado, R. C., Sediyama, G. C., Andrade, R. G., Menezes, S. J. M. d. C. et al. (2007). Modelos para prognósticos da umidade relativa do ar em escala horária no município de Muriaé, MG.

Dempster, A. P., Laird, N. M. & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the Em algorithm. *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, pages 1–38.

Eudes, A. M. et al. (2015). Família Kumaraswamy-G para analisar dados de sobrevivência de longa duração.

Fletcher, S. & Ponnambalam, K. (1996). Estimation of reservoir yield and storage distribution using moments analysis. *Journal of hydrology*, **182**(1-4), 259–275.

Fougeres, A.-L., Nolan, J. P. & Rootzén, H. (2009). Models for dependent extremes using stable mixtures. *Scandinavian Journal of Statistics*, **36**(1), 42–59.

Fougeres, A.-L., Mercadier, C. & Nolan, J. P. (2013). Dense classes of multivariate extreme value distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **116**, 109–129.

Frigyik, B. A., Kapila, A. & Gupta, M. R. (2010). Introduction to the dirichlet distribution and related processes. *Department of Electrical Engineering, University of Washignton, UWEETR-2010-0006*.

Ganji, A., Ponnambalam, K., Khalili, D. & Karamouz, M. (2006). Grain yield reliability analysis with crop water demand uncertainty. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **20**(4), 259–277.

Garg, M. (2008). On distribution of Order Statistics from Kumaraswamy Distribution. *Kyungpook mathematical journal*, **48**(3).

Garg, M. (2009). On Generalized Order Statistics From Kumaraswamy Distribution. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences (TOJMS)*, **25**(2).

Ghahfarokhi, M. & Ghahfarokhi, P. B. (2009). Applications of stable distributions in time series analysis, computer sciences and financial markets. *Proc World Acad Sci Eng Technol*, **49**, 1027–1031.

Gupta, R. C., Gupta, P. L. & Gupta, R. D. (1998). Modeling failure time data by Lehman alternatives. *Communications in Statistics-Theory and methods*, **27**(4), 887–904.

Gupta, R. D. & Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: an alternative to Gamma and Weibull distributions. *Biometrical journal*, **43**(1), 117–130.

Hussian, M. & Amin, E. A. (2014). Estimation and prediction for the Kumaraswamy-inverse Rayleigh distribution based on records. *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, **2**(1), 21–27.

(Instituto Nacional de Meteorologia), I. (2017). BDMEP-Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa. `http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=bdmep/bdmep`. acessado em novembro de 2017.

Jones, M. (2009). Kumaraswamyś distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, **6**(1), 70–81.

Kanter, M. et al. (1975). Stable densities under change of scale and total variation inequalities. *The Annals of Probability*, **3**(4), 697–707.

Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, **46**(1-2), 79–88.

Kundu, D. & Gupta, R. D. (2010). A class of bivariate models with proportional reversed hazard marginals. *Sankhya B*, **72**(2), 236–253.

Kundu, D., Franco, M. & Vivo, J.-M. (2014). Multivariate distributions with proportional reversed hazard marginals. *Computational Statistics & Data Analysis*, **77**, 98–112.

Lehmann, E. L. (1953). The power of rank tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 23–43.

Levy, P. (1925). Calcul des Probabilités, Paris.

Li, C.-L. (1997). *A model for informative censoring*. Ph.D. thesis, University of Alabama at Birmingham, School of Joint Health Sciences.

Li, L., Ma, Z., Liu, L. & Fan, Y. (2013). Hadoop-based ARIMA algorithm and its application in weather forecast. *International Journal of Database Theory and Application*, **6**(5), 119–132.

Magalhães, G. B. & Zanella, M. E. (2011). Comportamento climático da região metropolitana de Fortaleza. *Mercator*, **10**(23), 129–a.

Marins, J. (1998). Mecanismos físicos de perda de calor e fatores associados relacionados ao exercício. *Revista Mineira de Ciências do Esporte Revista Mineira de Ciências do Esporte Revista Mineira de Ciências do Esporte*, **6**(2), 5–20.

Mitnik, P. A. (2013). New properties of the Kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**(5), 741–755.

Mitnik, P. A. & Baek, S. (2013). The Kumaraswamy distribution: median-dispersion re-parameterizations for regression modeling and simulation-based estimation. *Statistical Papers*, **54**(1), 177–192.

Monteiro, J. C. R., Aride, P. H. R., de Oliveira, A. T., Pantoja-Lima, J. & Heyer, L. F. (2014). Descrição da temperatura e umidade relativa do ar em diferentes localidades no bairro do Parque Dez-Manaus/AM. *Biota Amazônia (Biote Amazonie, Biota Amazonia, Amazonian Biota)*, **4**(2), 20–27.

Mota, A. L. (2017). *O modelo Log-Poly-Weibull multivariado aplicado à predição espaço-temporal de temperatura no Estado do Amazonas*. Master's thesis. Instituto de Ciências Exatas.

Nadarajah, S. (2008). On the distribution of Kumaraswamy. *Journal of Hydrology*, **348**(3), 568–569.

Nadarajah, S. & Eljabri, S. (2013). The Kumaraswamy gp distribution. *Journal of Data Science*, **11**(4), 739–766.

Nadarajah, S. & Kotz, S. (2006). The exponentiated type distributions. *Acta Applicandae Mathematicae*, **92**(2), 97–111.

Nascimento, F. J. L. & Tubelis, A. (1984). Meteorologia Descritiva: fundamentos e aplicações brasileiras. *São Paulo: Nobel*.

Nolan, J. P. (2012). Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in statistics. Stochastic models*, **13**(4), 759–774.

Nolan, J. P. (2015). *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, Boston. In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/∼jpnolan.

Oliveira, A. G. d. et al. (2010). A questão do valor do clima: reflexões em torno de um valor conceitual para a precipitação pluviométrica na produção agrícola.

Padoan, S. A. (2011). Multivariate extreme models based on underlying skew-t and skew-normal distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(5), 977–991.

Pinho, L., Cordeiro, G. & Nobre, J. (2012). The gamma–exponentiated Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **11**(4), 379–395.

Pinto, H. S., Jr, J. Z. & Ávila, A. M. H. d. (2008). Umidade relativa do ar: Saúde no inverno. `http://www.cpa.unicamp.br/artigos-especiais/umidade-do-ar-saude-no-inverno.html`. acessado em novembro de 2017.

Quadro, M. F. e. a. (2017). Climatologia de Precipitação e Temperatura. Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos - cptec/inpe. `http://climanalise.cptec.inpe.br/~rclimanl/boletim/cliesp10a/chuesp.html`. acessado em julho de 2017.

R, R. C. T. (2017). A Language and Enviroment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. `https://www.R-project.org/`.

Reich, B. J. & Shaby, B. A. (2012). A hierarchical max-stable spatial model for extreme precipitation. *The annals of applied statistics*, **6**(4), 1430.

Ribeiro, T. (2017). Aspectos naturais do Estado do Amazonas. `http://brasilescola.uol.com.br/brasil/aspectos-naturais-estado-amazonas.htm`. acessado em dezembro de 2017.

Ristić, M. M. & Balakrishnan, N. (2012). The gamma-exponentiated exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**(8), 1191–1206.

Sánchez, S., Ancheyta, J. & McCaffrey, W. C. (2007). Comparison of probability distribution functions for fitting distillation curves of petroleum. *Energy & Fuels*, **21**(5), 2955–2963.

Seifi, A., Ponnambalam, K. & Vlach, J. (2000). Maximization of manufacturing yield of systems with arbitrary distributions of component values. *Annals of Operations research*, **99**(1), 373–383.

SGE-SP (2017). Centro de Gerenciamento de Emergências Climáticas. `https://www.cgesp.org/v3/umidade-relativa-do-ar.jsp`.

Shahbaz, M. Q., Shahbaz, S. & Butt, N. S. (2012). The Kumaraswamy-Inverse Weibull Distribution.

Shaked, M. (1982). A general theory of some positive dependence notions. *Journal of Multivariate Analysis*, **12**(2), 199–218.

Shi, D. (1995). Multivariate extreme value distribution and its Fisher information matrix. *ACTA Mathematicae Applicatae Sinica*, **11**(4), 421–428.

Sindhu, T. N., Feroze, N. & Aslam, M. (2013). Bayesian analysis of the Kumaraswamy distribution under failure censoring sampling scheme. *International Journal of Advanced Science and Technology*, **51**, 39–58.

Soebiyanto, R. P., Adimi, F. & Kiang, R. K. (2010). Modeling and predicting seasonal influenza transmission in warm regions using climatological parameters. *PloS one*, **5**(3), e9450.

Stephenson, A. G. (2009). High-dimensional parametric modelling of multivariate extreme events. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **51**(1), 77–88.

Sundar, V. & Subbiah, K. (1989). Application of double bounded probability density function for analysis of ocean waves. *Ocean engineering*, **16**(2), 193–200.

Syeda, J. (2013). Variability analysis and forecasting of relative humidity in Bangladesh. *Journal of Environmental Science and Natural Resources*, **5**(2), 137–147.

Tibulo, C. et al. (2014). Modelos de séries temporais aplicados a dados de umidade relativa do ar.

Warrick, A. (1980). Spatial variability of soil physical properties. *Applications of soil physics*, pages 319–324.

Wei, G. C. & Tanner, M. A. (1990). A Monte Carlo implementation of the em algorithm and the poor man's data augmentation algorithms. *Journal of the American statistical Association*, **85**(411), 699–704.

Wu, C. J. (1983). On the convergence properties of the EM algorithm. *The Annals of statistics*, pages 95–103.

Zhu, H.-T. & Lee, S.-Y. (2001). Local influence for incomplete data models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **63**(1), 111–126.

Zolotarev, V. (1986). One-Dimensional Stable Distributions, volume 65 of amer. math. soc. transl. of math. *Monographs. Providence, RI: Amer. Math. Soc.*