UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

h-QUASE SÓLITON DE RICCI

SORAYA BIANCA SOUZA PIMENTEL

MANAUS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SORAYA BIANCA SOUZA PIMENTEL

h-QUASE SÓLITON DE RICCI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

MANAUS
2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P644h Pimentel, Soraya Bianca Souza
h-Quase Sóliton de Ricci / Soraya Bianca Souza Pimentel. 2016
38 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Veira Gomes
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Soliton de Ricci. 2. h-Quase. 3. Esfera Euclidiana. 4. Variedade Riemanianna. I. Gomes, José Nazareno Veira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

SORAYA BIANCA SOUZA PIMENTEL

h-QUASE SOLITON DE RICCI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 01 de Dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Mikhail Neklyudov (Cientista visitante)
Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Membro externo)
Universidade Federal de Campina Grande

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Ao PPGM, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A minha família, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu orientador, José Nazareno, pelo tempo gasto, incentivo, apoio e todo suporte necessário o qual fez ser possível a realização deste trabalho.

Aos Professores Mikhail Neklyudov e Fábio Reis dos Santos por terem aceitado participar da banca. Em especial ao professor Fábio Reis pelas valiosas contribuições para a versão final desta dissertação.

E aos amigos que direta e indiretamente fizeram parte da minha formação.

RESUMO

Neste trabalho vamos estudar o conceito de h-quase sólitons de Ricci introduzido por Gomes-Wang-Xia o qual é uma extensão natural dos quase sólitons de Ricci estudados por Pigola et al. Com esta configuração, vamos mostrar que um h-quase sóliton de Ricci compacto de curvatura escalar constante não-trivial de dimensão maior ou igual a três e h possuindo sinal definido é isométrico a uma esfera euclidiana com função potencial explicitamente definida. Logo após, também vamos considerar h-sólitons de Ricci os quais são casos particulares dos h-quase sólitons de Ricci e uma generalização dos tradicionais sólitons de Ricci. Vamos provar que um caso particular de h-sóliton de Ricci gradiente compacto estacionário ou expansivo, é trivial. Além disso, exibiremos uma caracterização para uma classe especial de h-sólitons de Ricci gradiente.
Palavras-chave: Produto Warped; Curvatura Escalar; Quase Sólitons de Ricci; Esfera Euclidiana.

ABSTRACT

In this work we study the concept h-almost Ricci soliton introduced by Gomes-Wang-Xia which extends naturally the almost Ricci soliton studied by Pigola et al. In this setting, we show that a compact nontrivial h-almost Ricci soliton of dimension no less than three with h positive (or negative) and constant scalar curvature is isometric to a standard sphere with well defined potential function. Latter on, we also consider h-Ricci soliton which is a particular case of the h-almost Ricci soliton and a generalization of the traditional Ricci soliton. We prove that a particular case of compact gradient h-Ricci soliton steady or expanding, is trivial. Moreover, we give a characterization for a special class of gradient h-Ricci solitons.

Keywords: Warped Product; Scalar Curvature; Almost Ricci Solitons; Euclidean Sphere.

Conteúdo

Introdução

Nas últimas décadas têm-se notado um crescente interesse no estudo de certos fluxos definidos sobre uma variedade Riemanniana. Dentro desta temática podemos destacar o *fluxo de Ricci* introduzido por Hamilton em [12]. A motivação pela qual Hamilton introduziu este fluxo era exibir uma prova para um problema proposto por Poincaré em 1900. Problema este que, mais tarde, viria a ser considerado como um dos sete maiores problemas da matemática e conhecido como *"A Conjectura de Poincaré"*. Apesar de Hamilton não ter obtido total êxito na prova deste problema, o conjunto de técnicas empregadas por ele, abriu um novo horizonte no estudo da geometria intrínseca de variedades Riemannianas. Aplicando as ideias desenvolvidas por Hamilton, o matemático russo Perelmann, resolveu por completa esta conjectura (cf. [21, 22, 23]).

Por outro lado, as correspondentes soluções auto-similares do fluxo de Ricci, os solitons de Ricci, são estudados por muitos pesquisadores como generalizações de variedades Einstein (veja por exemplo [10, 16]).

Dada uma família a um parâmetro de métricas $g(t)$ em uma variedade M^n, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotando por $Ric_{g(t)}$ o tensor de Ricci da métrica $g(t)$, a equação do fluxo de Ricci é

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}. \tag{1}$$

Hamilton mostrou que para qualquer métrica suave g_0 em uma variedade Riemanianna compacta M^n, Existe uma única solução $g(t)$ para a equação (1) definida em um intervalo $[0, \varepsilon)$, com $g(0) = g_0$. Para o caso completo não-compacto, Wan-Xiong Shi provou em [25] a existência de uma solução completa de (1), sob a condição de que as curvaturas seccionais de (M^n, g_0) sejam limitadas. O sóliton de Ricci é um fluxo de Ricci $(M^n, g(t)), 0 < t < T \leq \infty$, com a propriedade que, para cada $t \in [0, T)$, existe uma família de difeomorfismo $\varphi_t : M^n \to M^n$ e uma constante $\sigma(t)$ satisfazendo $\sigma(t)\varphi_t^* g_0 = g(t)$.

Uma maneira de gerar sólitons de Ricci é a seguinte: Considere uma variedade Riemanniana (M^n, g_0) com um campo vetorial X e uma constante

λ, satisfazendo

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_0 = \lambda g_0, \tag{2}$$

onde $\mathscr{L}_X g_0$ denota a derivada de Lie de g_0 com respeito a X. Vamos definir $T := \infty$, se $\lambda \leq 0$, e $T := \frac{1}{2\lambda}$ se $\lambda > 0$. Em seguida, define-se $\sigma(t) = -2\lambda t + 1$, $t \in [0, T)$, e um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ por $Y = \frac{X}{\sigma(t)}$. A família a um parâmetro requerida será dada pelos difeomorfismos φ_t gerados por Y. Essa caracterização permite que alguns autores considerem a equação (2) como a definição de sóliton de Ricci. Para mais detalhes sobre o fluxo de Ricci indicamos ao leitor a referência [10].

Seguindo a mesma linha de definição de sóliton de Ricci, é natural analisar a seguinte situação: Seja (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana completa e $g(t)$ uma solução de (1) definida num intervalo $[0, \varepsilon)$, de tal modo que φ_t seja uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M^n, com $\varphi_0 = id_M$ e $g(t)(x) = \tau(x,t)\varphi_t^* g_0(x)$ para cada $x \in M^n$ onde $\tau(x,t)$ é uma função suave positiva sobre $M^n \times [0, \varepsilon)$. Neste caso, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\tau(x,t)\varphi_t^* g_0(x) + \tau(x,t)\varphi_t^* \mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)} g_0(x). \tag{3}$$

Como $\varphi_0 = id_M$ e $g(0) = g_0$, vamos ter $\tau(x, 0) = 1$. Então, segue de (3) que

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_0 = \lambda g_0,$$

em que $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\tau(x, 0)$ e $X = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x, 0)$, o que motiva a definição de quase sóliton de Ricci dada pelos autores em [3, 20]. No entanto, veremos que algumas propriedades geométricas importantes aparecem quando consideramos a seguinte

Definição 1. *Um h-quase sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) com um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, uma função sóliton $\lambda : M \to \mathbb{R}$ e uma função $h : M \to \mathbb{R}$ que são diferenciáveis e satisfazem a equação:*

$$Ric_g + \frac{h}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g,$$

onde Ric_g denota o tensor de Ricci da métrica g e $\mathscr{L}_X g$ a derivada de Lie de g na direção de X.

O objetivo desta dissertação é esclarecer os resultados de Gomes, Wang e Xia apresentados em [11], cujo o objetivo principal é responder o seguinte questionamento:

"h-quase sólitons de Ricci, com h tendo sinal definido, são rígidos na classe de variedades compactas com curvatura escalar constante?"

Mais precisamente, eles provaram os seguintes resultados:

1. *Um h-quase sóliton de Ricci compacto (M^n, g, X, λ), $n \geq 3$, não-trivial de curvatura escalar constante e $h > 0$ (ou $h < 0$), é isométrico a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$. Além disso, ele é gradiente e a função potencial é a autofunção correspondente ao primeiro autovalor do laplaciano em $\mathbb{S}^n(r)$.*

2. *Para um $(-\frac{m}{u})$-sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla u, \lambda)$, $m \neq 0$, é válido o seguinte*

$$\lambda u^2 + u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = \mu,$$

   para alguma constante μ.

3. *Um $(-\frac{m}{u})$-sóliton de Ricci gradiente compacto $(M^n, g, \nabla u, \lambda)$, $m \neq 0$, estacionário ou expansivo, é trivial.*

A prova destes fatos, bem como suas consequências estão no Capítulo 2 (cf. Teoremas 2.2 e 2.3). Por fim estudamos o caso que envolve variedades Riemannianas completas não compactas (cf. Teorema 2.4).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos a notação bem como resultados e exemplos da teoria básica de geometria Riemanniana e tensores, os quais serão utilizados no decorrer desta dissertação. Para maiores detalhes recomendamos ao leitor as referências [7, 15, 24].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. *Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável (Hausdorff e com base enumerável) n-dimensional se existir uma família de aplicações injetivas $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:*

(*i*) $M = \displaystyle\bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$;

(*ii*) *Para todo par α, β, com $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha$ e $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\beta$ são diferenciáveis.*

(*ii*) *A família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ é máxima em relação as condições (i) e (ii).*

Observação 1.1. *Dado $p \in \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$, a aplicação $\boldsymbol{x}_\alpha$ ou o par $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p e $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ uma vizinhança coordenada em p. Uma família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M. Denotaremos apenas por M^n uma variedade diferenciável M de dimensão n.*

Observação 1.2. *(a) M ser Hausdorff significa que quaisquer dois pontos de M têm vizinhanças disjuntas; (b) Dizemos que M possue base enumerável para sua topologia se M pode ser coberto por uma quantidade enumerável de vizinhaças coordenadas.*

Definição 1.2. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $\boldsymbol{y} : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ em p tal que $\varphi(\boldsymbol{x}(U)) \subset \boldsymbol{y}(V)$ e a aplicação $\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ\ \boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\boldsymbol{x}^{-1}(p)$. Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Decorre da condição (ii) da Definição 1.1 que a Definição 1.2 independe da escolha das parametrizações $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Definição 1.3. *Um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M e N é uma aplicação $\varphi : M \to N$ diferenciável com inversa diferenciável. Em particular, φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Definição 1.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

(i) para todo par $\alpha\beta$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (i) é chamada uma orientação de M. Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo a condição (i) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz (i).

Definição 1.5. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left.\tfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0}$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p com as operações usuais de funções é um espaço vetorial n-dimensional e será indicado por T_pM.

Escolhendo uma parametrização $\mathbf{x} : U \to M^n$ em $p = \mathbf{x}(0)$, as representantes locais da função f e da curva α nesta parametrização são respectivamente

$$\widetilde{f}(q) = f \circ \mathbf{x}(q),\ q = (x_1, \ldots, x_n) \in U$$

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Restringindo f a α, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\widetilde{f}(x_1(t), \ldots, x_n(t))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)(\widetilde{f}). \end{aligned}$$

Logo, a expressão local de $\alpha'(0)$ em termos da parametrização $\mathbf{x}$ é:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

Note que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \in T_pM$, pois é o vetor tangente em p à curva coordenada $x_i \mapsto \mathbf{x}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$. O fato de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ ser linearmente independente juntamente com a expressão local, prova que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ forma uma base de T_pM chamada base coordenada. O espaço vetorial T_pM é chamado espaço tangente de M em p.

Proposição 1.1. *Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Esta aplicação é chamada diferencial de φ em p.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{x} : U \to M$ e $\mathbf{y} : V \to N$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. A expressão local de φ é dada por:

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}(q) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)) \\ q = (x_1, \ldots, x_m) \in U \text{ e } (y_1, \ldots, y_n) \in V \end{gathered}$$

Por outro lado, a expressão local de α é dada por:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)).$$

Portanto,

$$\mathbf{y}^{-1} \beta\ (t) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\alpha}(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \ldots, y_n(x_1(t), \ldots, x_m(t))).$$

e assim a expressão d$\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ de $T_{\varphi(p)}N$ é dada por:

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\bigg|_q x_i'(0), \ldots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\bigg|_q x_i'(0)\right), \; q = \mathbf{x}^{-1}(p).$$

Isto mostra que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. Além disso, podemos escrever

$$d\varphi_p(v) = \beta'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}\Big|_q \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m}\Big|_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m}\Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \\ \vdots \\ x_m'(0) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM em $T_{\varphi(p)}N$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

Definição 1.6 (Fibrado tangente). *Seja M^n uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de M é a união disjunta de todos os seus espaços tangentes. Formalmente,*

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

O conjunto TM definido acima tem uma estrutura diferenciável, ver por exemplo [7]. Agora faz sentido considerarmos a seguinte aplicação entre variedades diferenciáveis como segue. Seja $X : M \to TM$ uma aplicação diferenciável que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Para esclarecermos a diferenciabilidade de X no sentido da Definição 1.2, convém considerarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ para então escrevermos para cada $p \in \mathbf{x}(U)$,

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a $\mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, n$. Isso permite afirmarmos que X é diferenciável se, e só se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e portanto para qualquer) parametrização. Assim podemos considerar X como um operador atuando nas funções $f \in C^\infty(M)$ do seguinte modo

$$(Xf)(p) = X(p)(f) \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)$$

onde $\tilde{f} = f \circ \mathbf{x}^{-1}$ é a expressão local de f na parametrização $\mathbf{x}$. Sendo assim, X é diferenciável se $Xf \in C^\infty(M)$ para todo $f \in C^\infty(M)$. Vamos nos referir a aplicação X como um campo de vetores em M e denotaremos $\mathfrak{X}(M)$ o $C^\infty(M)$-módulo dos campos de vetores diferenciáveis tangentes a M. Note que, cada campo de vetores é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $C^\infty(M)$ em $C^\infty(M)$ tal que $X(fg) = fXg + gXf$.

Um exemplo interessante e bastante útil de campo de vetores tangentes a M, é o que passamos a considerar agora. Sejam X e Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos o colchete de Lie dos campos X e Y, denotado por $[X, Y]$ como

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf), \; f \in C^\infty(M).$$

Em um sistema com coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$, o colchete de Lie dos campos de vetores coordenados é:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Em geral, podemos escrever $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ Então

$$[X, Y] = \sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

É imediato da definição acima as propriedade seguintes do colchete de Lie. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, vale:

(a) Bilinearidade:
$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$

(b) Anticomutatividade:
$[X, Y] = -[Y, X]$

(c) Identidade de Jacobi:
$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

1.2 Métrica Riemanniana

Definição 1.7. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ (uma forma bilinear, simétrica, positiva definida)* *no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Considere um sistema de coordenadas locais $(U, \boldsymbol{x})$ e sejam $X, Y \in T_pM$. Temos que,*

$$X = \sum_i a_i \partial_i \quad e \quad Y = \sum_j b_j \partial_j ,$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Assim,

$$g(X, Y) \; = \; \langle X, Y \rangle = \langle \sum_i a_i \partial_i, \sum_j b_j \partial_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

Portanto, dizer que a métrica varia diferenciavelmente é dizer que as funções coordenadas $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, dadas por $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$, são funções diferenciáveis em U. Uma variedade diferenciável M com uma dada métrica Riemanniana g chama-se variedade Riemanniana (M, g).

Utilizando a partição da unidade podemos ver que toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana. De fato, seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade de M subordinada a cobertura $\{X_\alpha\}$ de M por vizinhanças coordenadas. Logo, podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle_\alpha$ em cada X_α: a induzida pelo sistema de coordenadas. Façamos então

$$\langle u, v \rangle_\alpha := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(p) \langle u, v \rangle_p^\alpha \tag{1.2}$$

para todo $p \in M, u, v \in T_pM$. A verificação da simetria, bilinearidade e diferenciabilidade são imediatas. Agora, se $u \in T_pM$ é um vetor não nulo, então $\langle u, u \rangle_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(p) \langle u, u \rangle_p^\alpha$ é uma soma não-negativa, pois cada termo é não-negativo e, além disso, como uma das funções f_α é estritamente positiva (pois a soma delas é 1), temos que $\langle u, u \rangle_p^\alpha > 0$ e, portanto, $\langle u, v \rangle_\alpha > 0$, o que mostra a positividade. Assim (1.2) define uma métrica Riemanniana.

Definição 1.8 (Isometria). *Um difeomorfismo $F : M \to N$ entre duas variedades diferenciáveis é uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle = \langle dF_p(u), dF_p(v) \rangle, \forall p \in M, u, v \in T_pM.$$

Definição 1.9 (Isometria Local). *Dizemos que a aplicação diferenciável $F : M \to N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $F : U \to F(U)$ é um difeomorfismo de acordo com a definição anterior.*

1.3 Conexão Riemanniana

Definição 1.10. *Uma conexão de Levi- Civita (ou Riemanniana) ∇ em uma variedade Riemanniana é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

definida por $\nabla(X,Y) := \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ($C^\infty(M)$-linear na primeira variável)

(2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ($\mathbb{R}$-linear na segunda variável)

(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (regra de Leibniz)

(4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (simetria)

(5) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (compatibilidade com a métrica)

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. $\nabla_X Y$ também é chamada de derivada covariante do campo Y em relação ao campo X.

Uma correspondência em uma variedade diferenciável que satisfaça as três primeiras propriedades é chamada *conexão afim.*

Vejamos que, dados dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e um sistema de coordenadas locais $(U, \mathbf{x})$ em torno de um ponto $p \in M$, podemos escrever $X = \sum_i a_i \partial_i$ e $Y = \sum_j b_j \partial_j$. Agora, utilizando as propriedades da conexão afim obtemos uma expressão para $\nabla_X Y$ da seguinte forma:

$$\nabla_X Y = \sum_i a_i \nabla_{\partial_i}\Big(\sum_j b_j \partial_j\Big) = \sum_{i,j} a_i(\partial_i(b_j)\partial_j + b_j \nabla_{\partial_i}\partial_j).$$

Fazendo $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$, onde Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis em U, teremos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{i,j} a_i\big(\partial_i(b_j)\partial_j + b_j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k\big) = \sum_k \Big(\sum_i a_i \partial_i(b_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k\Big)\partial_k \\
&= \sum_k (X(b_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k)\partial_k.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla_X Y$ depende de $a_i(p), b_k(p)$ e das derivadas $X(b_k)(p)$ de b_k segundo X. As funções Γ_{ij}^k são chamadas símbolos de Christoffel da conexão.

Teorema 1.1 (Levi-Civita). *Em uma variedade Riemanniana (M, g) existe uma única conexão Riemanniana ∇.*

Demonstração. Provaremos inicialmente a unicidade. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Suponha que exista uma conexão Riemanniana ∇, utilizando a equação de compatibilidade três vezes com X, Y, Z permutando ciclicamente, obtemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Usando a simetria de ∇ no último termo de cada uma das igualdades acima, podemos reescrevê-las como

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle,$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle,$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

Somando as duas primeiras e subtraindo a terceira, obtemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle \\ &\quad + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Esta fórmula é chamada fórmula de Koszul. Logo, se existem duas conexões ∇^1 e ∇^2, uma vez que na expressão acima o lado direito da igualdade depende só da métrica, não dependendo da conexão, segue que $\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\rangle = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Como a métrica é uma forma bilinear não-degenerada, $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$, para todo X e Y e, portanto, $\nabla^1 = \nabla^2$. Para mostrar a existência, defina ∇ pela expressão acima. É imediato verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

Observação 1.3. *Em um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$, a conexão dos campos coordenados sempre comuta. De fato, temos para todo $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] \overset{(1.1)}{=} 0. \tag{1.3}$$

E de acordo com a definição dos símbolos de Christoffel, isto equivale a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, o que justifica o nome simetria no item (4) da Definição 1.10. Além *disso, aplicando a fórmula de koszul aos campos de vetores coordenados, os quais o colchete de Lie é zero, obtemos:*

$$2\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \partial_i\langle \partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle \partial_l, \partial_i\rangle - \partial_l\langle \partial_i, \partial_j\rangle.$$

Reescrevendo, temos

$$\sum_m \Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

onde $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle$ *e* $\sum_m \Gamma_{ij}^m \partial_m = \nabla_{\partial_i}\partial_j$. *Como a matriz* (g_{lk}) *admite uma inversa* (g^{lk}), *multiplicando ambos os lados da igualdade acima, e observando que* $\sum_l g_{ml}g^{lk} = \delta_m^k$, *teremos que*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})g^{lk} \tag{1.4}$$

que é a expressão para os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em um sistema de coordenadas qualquer.

1.4 Tensores em Variedades Riemannianas

Relembremos que um $(1, r)$-tensor em uma variedade diferenciável M é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r-fatores)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Enquanto que, num $(0, r)$-tensor, o contradomínio é o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Além disso, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(U)$, pede-se que $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ seja uma função diferenciável em um aberto $U \subset M$ e T é $C^\infty(U)$-linear em cada variável, isto é,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $f, h \in C^\infty(U)$.

Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{\partial_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, formam uma base de T_qM. Se o conjunto de campos $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ forma uma base ortonormal de T_qM para cada $q \in U$, então dizemos que $\{\partial_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, é um referencial ortonormal.

Por exemplo, destacamos o tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o produto interno de X e Y na métrica Riemanniana de M, isto é, $g_p(X,Y) = \langle X, Y\rangle_p$. g é um $(0,2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.

Observe que toda k-forma diferencial ω em M é automaticamente um $(0,k)$-tensor em M.

Observação 1.4. *Em uma variedade Riemanniana a métrica Riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma forma diferencial $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por*

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Neste sentido, um campo de vetores diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um tensor $X : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado por

$$X(Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como veremos na seguinte definição:

Definição 1.11. *A derivada covariante de um $(1,r)$-tensor T é um $(1,r+1)$-tensor ∇T dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r) = & \nabla_X(T(Y_1,\dots,Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_r) \\ & - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_r) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \dots Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de un $(0,r)$-tensor T é un $(0,r+1)$-tensor ∇T dado por (1.5). Em particular, dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T \equiv 0$.

Exemplo 1.1. *Em uma variedade Riemanniana (M,g) com a conexão de Levi-Civita ∇, temos que $\nabla g \equiv 0$. (A derivada covariante do tensor métrico é o tensor nulo). Com efeito, dados $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$, teremos*

$$\begin{aligned} \nabla g(X, Y_1, Y_2) &= (\nabla_X g)(Y_1, Y_2) \\ &= \nabla_X(g(Y_1,Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) \\ &= g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1.2. *Seja $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$. Utilizando a Observação 1.4 a derivada covariante de ω_X em relação ao campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned}(\nabla_Z \omega_X)(Y) &= Z(\omega_X(Y)) - \omega_X(\nabla_Z Y) = Z\langle X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle = \langle \nabla X(Z), Y\rangle.\end{aligned}$$

Decorre daí que $\nabla_Z \omega_X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$, ou equivalentemente, $\nabla \omega_X$ pode ser identificado ao operador ∇X. Isto mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivação covariante de campos (derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual).

Seja $Z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o $(1,1)$-tensor $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Assim, de (1.5) para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, segue que

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y} Z &:= \nabla\nabla Z(X, Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z \end{aligned} \tag{1.6}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^2_{Y,X} Z &:= \nabla\nabla Z(Y, X) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto

$$\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Fazendo Z variar nesta última equação obteremos um $(1,3)$-tensor, bastando provar a linearidade em Z. O que motiva a seguinte

Definição 1.12. *Seja M uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Exemplo 1.3. *Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De fato, seja $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n)$ e $\nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n)$. Logo,*

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \quad \nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]}Z = ([X,Y]z_1, \ldots, [X,Y]z_n).$$

Portanto,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = 0.$$

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle.$$

O próximo resultado é uma importante ferramenta no contexto de variedades Riemaninnas, cuja demostração pode ser encontrada em [7, 24].

Proposição 1.2. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$

(2) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi)*

(4) $(\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0$ *(segunda identidade de Bianchi)*

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

Definição 1.13. *A curvatura seccional $K(x,y)$ segundo um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, é definida por*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)y, x\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

onde $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes e $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2$.

Segue da álgebra linear que esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. Além disso, note que se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, temos

$$K(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle = R(e_i, e_j, e_j, e_i).$$

Definição 1.14. *Definimos o tensor curvatura de Ricci, denotado por Ric, como o traço do tensor curvatura de Riemann.*

Se $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal, então

$$Ric(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, v)w, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, w)v, e_i \rangle,$$

onde a última igualdade segue da Proposição 1.2. Em particular, definimos a curvatura escalar de $(M^n, \langle , \rangle)$ por $R := tr(Ric)$.

Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é *Einstein* se, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y),$$

onde λ é uma função real diferenciável em M. Por exemplo, toda variedade de dimensão dois é Einstein. Por outro lado, se M^n é uma variedade de Einstein conexa com $n \geq 3$, é possível verificar, pela segunda identidade de Bianchi que λ é constante (cf. Teorema de Schur).

Encerraremos esta seção apresentando a definição e algumas propriedades da derivada de Lie de tensores. Para tanto, vamos considerar um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e o seu fluxo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, o qual para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ é um difeomorfismo dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$.

A derivada de Lie de um $(0, r)$-tensor T com respeito a X é o $(0, r)$-tensor que a cada $p \in M$ associa ao operador dado por

$$(\mathscr{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^* T)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big[\varphi_t^* T_{\varphi(t,p)} - T_p\big].$$

No caso de funções $f \in C^\infty(M)$, devemos interpretá-las como 0-tensores, de modo que $\varphi_t^* f = f \circ \varphi$ implica

$$(\mathscr{L}_X f)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^* f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \varphi_t(p)).$$

Ademais, é válida a seguinte propriedade da derivada de Lie para um $(0, r)$-tensor T em M

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) &= X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T([X, Y_1], Y_2, \ldots, Y_r) - \ldots \\ &\quad - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, [X, Y_r]).\end{aligned}$$

Em particular, para o $(0, 2)$-tensor métrico g em M vale

$$\mathscr{L}_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y), \tag{1.8}$$

Também precisaremos do lema abaixo, que é uma propriedade geral para $(0, 2)$-tensores simétricos em uma variedade Riemanniana.

Lema 1.1. *Para todo $(0,2)$-tensor simétrico T em uma variedade Riemanniana (M^n, g), vale*
$$\langle \mathscr{L}_X g, T\rangle = 2\langle \nabla X, T\rangle,$$
para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Basta tomar um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em (M^n, g), usar a equação (1.8) e a simetria de T para ver que

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{L}_X g, T\rangle &= \sum_{i,j} (\mathscr{L}_X g)_{ij} T_{ij} = \sum_{i,j} (g(\nabla_{e_i} X, e_j) + g(\nabla_{e_j} X, e_i)) T_{ij} \\ &= 2\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i} X, e_j) T_{ij} = 2\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i} X, e_j) g(Te_i, e_j) = 2\langle \nabla X, T\rangle.\end{aligned}$$

□

1.5 Operadores Diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais (gradiente, laplaciano, etc.) de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Passaremos a uma exposição de alguns destes operadores. Em tudo que segue, $(M, \langle , \rangle)$ denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica $\langle , \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

Definição 1.15. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M por*
$$\langle \nabla f, X\rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X) \tag{1.9}$$
para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Então, pela definição de gradiente, teremos em U
$$\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, e_i\rangle e_i = \sum_i e_i(f) e_i.$$
Isto é,
$$\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i e_i. \tag{1.10}$$
Mais geralmente, se $\partial_1, \ldots, \partial_n$ são campos coordenados em U, teremos
$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_j(f) \partial_i, \tag{1.11}$$

onde $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}). Além disso, é imediato das propriedades de derivação o resultado seguinte:

Proposição 1.3. *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então:*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

Definição 1.16. *Seja X um campo de vetores suave em M. A divergência de X é a função diferenciável $divX : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$(divX)(p) = tr\{v \in T_pM \mapsto \nabla_v X\}, \tag{1.12}$$

onde tr denota o traço do operador linear $v \in T_pM \mapsto \nabla_v X$.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Proposição 1.4. *Seja X um campo diferenciável em M e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$(divX)(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle). \tag{1.13}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, temos que

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i) \tag{1.14}$$

Demonstração. Pela definição de divergência de um campo vetorial, obtemos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (e_i \langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.5. *Se X, Y são campos vetoriais suaves em M e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

(i) $div(X+Y) = divX + divY$

(ii) $div(fg) = f divX + \langle \nabla f, X\rangle$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
div(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}(X+Y), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}X + \nabla_{e_i}Y, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle + \langle \nabla_{e_i}Y, e_i\rangle) \\
&= divX + divY
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
div(fX) &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}(fX), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle f\nabla_{e_i}X + e_i(f)X, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\langle f\nabla_{e_i}X, e_i\rangle + \langle e_i(f)e_i, X\rangle) \\
&= f\sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle e_i(f)e_i, X\rangle \\
&= f divX + \langle \nabla f, X\rangle.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.17. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f) \tag{1.15}$$

Proposição 1.6. *Dadas $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções suaves, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle \tag{1.16}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= div(\nabla(fg)) = div(g\nabla f) + div(f\nabla g) \\
&= g\ div(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle + f\ div(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle \\
&= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.18. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$(Hess\, f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.17}$$

Ou como o $(0,2)$-tensor, dado por

$$Hess\, f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \tag{1.18}$$

Proposição 1.7. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave então $(Hess\, f) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é um tensor simétrico.*

Demonstração. Segue da definição do operador hessiano que

$$\begin{aligned} \langle (Hess\, f)(X), Y \rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Analogamente,

$$\langle (Hess\, f)(Y), X \rangle = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f). \tag{1.20}$$

Subtraindo (1.20) de (1.19) obtemos

$$\langle (Hess\, f)(X), Y \rangle = \langle (Hess\, f)(Y), X \rangle.$$

□

Proposição 1.8. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(Hess\, f) \tag{1.21}$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e considere $U \subset M$ uma vizinhança coordenada de p onde esteja definido um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$tr(Hess\, f) = \sum_{i=1}^{n} \langle (Hess f)(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = div(\nabla f) = \Delta f.$$

□

Relembremos que o produto interno de Hilbert-Schmidt entre os $(0,2)$-tensores T e S é dado por

$$\langle T, S \rangle = tr(TS^*) \tag{1.22}$$

onde estamos identificando os $(0,2)$-tensores T e S com seus respectivos $(1,1)$-tensores, dados por

$$T(X,Y) = \langle T(X), Y\rangle \ \text{ e } \ S(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle. \tag{1.23}$$

Desta forma, temos $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Além disso, $S^* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é definido por $\langle S(X), Y\rangle = \langle X, S^*(Y)\rangle$.

Em particular, para uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, temos $T(e_i, e_j) = \langle Te_i, e_j\rangle$. Logo

$$\begin{aligned}
\langle T, S\rangle &= \sum_i \langle TS^*(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle S^*(e_i), T^* e_i\rangle \\
&= \sum_i \Big\langle \sum_j \langle S^* e_i, e_j\rangle e_j, \sum_k \langle T^*(e_i), e_k\rangle e_k \Big\rangle \\
&= \sum_i \Big\langle \sum_j \langle e_i, Se_j\rangle e_j, \sum_k \langle e_i, T(e_k)\rangle e_k \Big\rangle = \sum_{i,j} \langle e_i, Se_j\rangle \langle e_i, Te_j\rangle \\
&= \sum_j \big\langle \sum_i \langle e_i, Te_j\rangle e_i, Se_j \big\rangle = \sum_j \langle Te_j, Se_j\rangle.
\end{aligned}$$

Por exemplo, sendo S o tensor métrico g, teremos $\langle T, g\rangle = tr(T)$ e sendo $S = T$, teremos $|T|^2 = \sum_j |Te_j|^2$.

Exemplo 1.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional. Definimos*

$$\mathring{T} := T - \frac{tr(T)}{n} g.$$

Então

$$0 \le |\mathring{T}|^2 = \left| T - \frac{tr(T)}{n} g \right|^2 = |T|^2 - \frac{tr(T)^2}{n}.$$

Assim,

$$|T|^2 \ge \frac{tr(T)^2}{n},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se,

$$T = \frac{tr(T)}{n} g.$$

Em particular, se $T = Hess\, f$, temos

$$|Hess\, f|^2 \ge \frac{(\Delta f)^2}{n}. \tag{1.24}$$

Proposição 1.9. *A seguinte fórmula é válida em qualquer variedade Riemanniana (M^n, g):*

$$divRic = \frac{1}{2}dR$$

Demonstração. Pelo caráter pontual dos tensores, é suficiente trabalharmos com um referencial geodésico $e_1, ..., e_n$ em $p \in$ M. Usaremos as seguintes notações: $R(e_i, e_j, e_k) = R_{ijk}$, $\nabla_{e_i} = \nabla_i$ e a segunda identidade de Bianchi, cf. item (4) da Proposição 1.2, a saber

$$\nabla_i R_{jkl} + \nabla_j R_{kil} + \nabla_k R_{ijl} = 0.$$

Sendo assim, vamos calcular

$$dR(e_k) = e_k(R) = e_k(\sum_i Ric(e_i, e_i)) = \sum_{i,j} e_k \langle R_{jii}, e_j \rangle = \sum_{i,j} \langle \nabla_k R_{jii}, e_j \rangle.$$

Pela antissimetria dos dois primeiros índices do tensor curvatura e pela segunda identidade de Bianchi

$$\begin{aligned} dR(e_k) = -\sum_{i,j} \langle \nabla_k R_{iji}, e_j \rangle &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{i,j} \langle \nabla_j R_{kii}, e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{j,i} \langle \nabla_j R_{ikj}, e_i \rangle \\ &= 2\sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle, \end{aligned}$$

em que na última parcela da primeira linha para a última parcela da segunda, usamos que, em p,

$$e_j \langle R_{kii}, e_j \rangle = e_j(R_{kiij}) = e_j(R_{ikji}) = e_j \langle R_{ikj}, e_i \rangle.$$

Por outro lado, ainda no ponto p, temos

$$\begin{aligned} (divRic)(e_k) &= \sum_i \langle (\nabla_i Ric) e_k, e_i \rangle = \sum_i \langle \nabla_i Ric(e_k), e_i \rangle \\ &= \sum_i e_i(Ric(e_k, e_i)) = \sum_{i,j} e_i \langle R_{jki}, e_j \rangle = \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle \end{aligned}$$

que é suficiente para concluírmos a demonstração. □

Capítulo 2

h-Quase Sóliton de Ricci

2.1 Fundamentação Teórica

Definição 2.1. *Um h-quase sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana completa* (M^n, g) *com um campo vetorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, uma função sóliton* $\lambda : M \to \mathbb{R}$ *e uma função* $h : M \to \mathbb{R}$ *que são diferenciáveis e satisfazem a equação:*

$$Ric_g + \frac{h}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g, \tag{2.1}$$

onde Ric_g *denota o tensor de Ricci da métrica* g *e* $\mathscr{L}_X g$ *a derivada de Lie de* g *na direção de* X.

Por conveniência denotaremos por (M^n, g, X, λ) um h-quase sóliton de Ricci. No caso de λ ser constante diremos simplesmente que é um h-Ricci sóliton. Quando $\mathscr{L}_X g = \mathscr{L}_{\nabla u} g$ para alguma função real suave u em M^n, vamos nos referir a $(M^n, g, \nabla u, \lambda)$ como um h-quase sóliton de Ricci gradiente com *função potencial* u. Neste caso, a equação fundamental (2.1) torna-se:

$$Ric + h\nabla^2 u = \lambda g, \tag{2.2}$$

onde $\nabla^2 u$ denota o $Hess\, u$. Ressaltamos que este caso surge naturalmente de um produto warped. Para ver isso, usaremos a mesma notação e terminologica de Barret O'Neill em [19]. Considere o produto warped $(B \times_f \mathbb{F}, g)$, com $g = g_B + f^2\langle , \rangle$, em que g_B e $\langle , \rangle$ são as métricas Riemannianas de B e $\mathbb{F}$, respectivamente. Então, o tensor de Ricci satisfaz as sequintes equações:

(i) $Ric(X, Y) = Ric_B(X, Y) - \frac{m}{f}\nabla^2 f(X, Y)$,

(ii) $Ric(X, V) = 0$,

(iii) $Ric(V, W) = Ric_{\mathbb{F}}(V, W) - \Big(\frac{\Delta f}{f} + \frac{|\nabla f|^2}{f^2}(m-1)\Big)g(V, W)$, para todos os campos de vetores horizontais X, Y e campos de vetores verticais V, W, em que $\nabla^2 f$ denota o Hessiano da função diferenciável f na variedade Riemanniana (B, g_B), $m > 1$ é a dimensão da variedade Riemanniana $(\mathbb{F}, \langle , \rangle)$.

Admitindo que o tensor de Ricci de M^n satisfaz $Ric(X, Y) = \lambda g_B(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e para alguma função suave λ em B, teremos um $(-\frac{m}{f})$-quase sóliton de Ricci gradiente $(B, g_B, \nabla f, \lambda)$. Além disso, se $B \times_f \mathbb{F}$ é Einstein, então a fibra $(\mathbb{F}, \langle , \rangle)$ é automaticamente Einstein. Por outro lado, se $(\mathbb{F}, \langle , \rangle)$ é Einstein com $Ric_{\mathbb{F}} = \mu \langle , \rangle$, segue-se a partir de (i), (ii) e (iii) que $B \times_f \mathbb{F}$ é Einstein com $Ric = \lambda g$ se, e somente se, (B, g_B) é um $(-\frac{m}{f})$-quase sóliton de Ricci gradiente com função potencial f e a função sóliton λ satisfaz

$$\mu = f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2. \tag{2.3}$$

Essa caracterização é especialmente importante, como veremos no Teorema 2.3. Para uma estreita relação com este fato, recomendamos que o leitor veja as referências [8, 14].

Um h-quase sóliton de Ricci (M^n, g, X, λ) é expansivo, estacionário ou contrátil conforme $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Se λ não tem sinal definido, dizemos que ele é indefinido. Quando X representa um campo de vetores conforme homotético, isto é, $\mathscr{L}_X g = cg$, para alguma constante c, vamos nos referir a (M^n, g, X, λ) como *trivial*. Caso contrário, *é não-trivial*. Observamos que o tradicional sóliton de Ricci é um 1-Ricci sóliton com λ constante. Além disso, um 1-quase sóliton de Ricci é simplesmente um quase sóliton de Ricci, cuja geometria foi estudada pela primeira vez em [20] onde os autores provaram alguns resultados de existência para quase sóliton de Ricci gradiente. Mais tarde, algumas equações de estruturas para os quase sólitons de Ricci foram apresentadas em [3], que resultou em vários estudos sobre a geometria dos quase sólitons de Ricci (cf. [1, 3]).

Em [16] Maschler estudou a equação (2.2) diferentemente da nossa motivação e ele se referiu a ela como equação Ricci-Hessiana. Além disso, notamos que uma equação Ricci-Hessiana está relacionado com uma classe de métricas Riemannianas introduzidas por Catino [9] que são generalizações naturais de métricas Einstein. Mais precisamente, Catino definiu uma variedade Riemanniana completa (M^n, g), $n \geq 2$, como uma variedade quase Einstein generalizada, se existirem funções diferenciáveis f, λ e μ em M satisfazendo

$$Ric + \nabla^2 f - \mu df \otimes df = \lambda g, \tag{2.4}$$

em que $\otimes$ denota o produto tensorial.

Quando $\mu = \frac{1}{m}$ em (2.4), para um número inteiro positivo m, uma variedade quase Einstein generalizada é definida como m-quase-Einstein generalizada (cf. [4]) que vai ser indicada por $\{M^n, g, \nabla f, \lambda, m\}$, e simplesmente variedade m-quase-Einstein quando λ é constante. Foi provado em [14, 8] que qualquer variedade m-quase-Einstein está diretamente relacionada com algum produto warped Einstein, e em [8] qualquer variedade m-quase-Einstein compacta com curvatura escalar constante é trivial (i.e., f é uma constante). No entanto, Barros e Ribeiro [4] apresentaram uma família não-trivial de métricas m-quase-Einstein generalizadas sobre uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(1)$, que são rígidas na classe de variedades Riemannianas de curvatura escalar constante (ver [2]). Ou seja, eles mostraram que uma variedade m-quase-Einstein generalizada compacta $\{M^n, g, \nabla f, \lambda, m\}$ não-trivial com curvatura escalar constante, é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, e a menos de constantes e homotetias, $f = -m\ln(\tau - \frac{h_v}{n})$, em que $\tau \in (\frac{1}{n}, +\infty)$ é um número real e h_v é a função altura com respeito a um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, que é parte da família apresentada em [4].

Retornando a equação (2.4), com $\mu = -\frac{1}{m}$, considerando uma função não constante $u = e^{\frac{f}{m}}$, obtemos:

$$\nabla u = \frac{u}{m}\nabla f, \tag{2.5}$$

que implica

$$\nabla^2 u = \frac{u}{m}(\nabla^2 f + \frac{1}{m}df \otimes df) = \frac{u}{m}(-Ric + \lambda g). \tag{2.6}$$

Consequentemente, como um caso particular da a equação (2.4), teremos

$$Ric + \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g. \tag{2.7}$$

Portanto, cada variedade quase-Einstein generalizada, com $\mu = -\frac{1}{m}$, é um $\frac{m}{u}$-quase sóliton de Ricci gradiente. Em particular, trocando m por $-m$ nos cálculos em (2.5)-(2.7) concluímos que qualquer m-quase-Einstein generalizada é um $(-\frac{m}{u})$-quase sóliton de Ricci gradiente.

2.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados auxiliares e exemplos que serão cruciais para o bom entendimento dos teoremas principais.

Definição 2.1. *Definimos a divergência de um $(1,r)$-tensor T em M^n, como sendo o $(0,r)$-tensor dado por*

$$(divT) = (v_1, ..., v_r)(p) = tr(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, ..., v_r)(p)), \tag{2.8}$$

onde $p \in M^n$ e $(v_1, ..., v_r) \in T_pM \times ... \times T_pM$.

Seja T um $(0,2)-$tensor em uma variedade Riemanniana (M^n, g) e seja $e_1, ..., e_n$ um referencial ortonormal local em (M^n, g). Consideremos o seu $(1,1)-$tensor correspondente T. Então, *div* T é um $(0,1)-$tensor que satisfaz, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$
\begin{aligned}
(divT)(Z) &= \sum_i g((\nabla_{e_i} T)Z, e_i) && (2.9)\\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} T(Z) - T(\nabla_{e_i} Z), e_i) && (2.10)\\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} T(Z), e_i) - g(T(\nabla_{e_i} Z), e_i) && (2.11)\\
&= div(T(Z)) - \sum_i T(\nabla_{e_i} Z, e_i). && (2.12)
\end{aligned}
$$

Portanto, de acordo com a definição em (1.23), temos

$$div(T(Z)) = (divT)(Z) + \langle \nabla Z, T^* \rangle. \tag{2.13}$$

O próximo lema nos permite utilizar as técnicas de Barros e Gomes em [2].

Lema 2.1. *Seja T um $(0,2)$-tensor simétrico sobre a variedade Riemanniana (M, g). Logo,*

$$div(T(\varphi Z)) = \varphi\langle divT, Z\rangle + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T\langle \nabla\varphi, Z\rangle \tag{2.14}$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função φ em M.

Demonstração. Pelas propriedades do operador divergente e pela simetria de T, obtemos

$$
\begin{aligned}
div(T(\varphi Z)) &= div(\varphi T(Z))\\
&= \varphi div(T(Z)) + g(\nabla\varphi, T(Z))\\
&= \varphi(divT)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z)
\end{aligned}
$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável φ em M^n. $\square$

Lema 2.2. *Dadas uma variedade Riemanniana (M^n, g) e $\varphi \in C^\infty(M)$, as seguintes fórmulas são válidas:*

$$
\begin{aligned}
div(\varphi T) &= \varphi divT + T(\nabla\varphi, \cdot)\\
\nabla(\varphi T) &= \varphi\nabla T + d\varphi \otimes T\\
\frac{1}{2}d|\nabla\varphi|^2 &= \nabla^2\varphi(\nabla\varphi, \cdot).
\end{aligned}
$$

Em particular, é válida a seguinte expressão:

$$div(\varphi g) = d\varphi.$$

Demonstração. A prova destes fatos, segue por uma conta direta bastando usar as respectivas definições de cada um dos entes considerados. □

Lema 2.3. *Para todo campo de vetores diferenciável X e Y em uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$, é válida a seguinte fórmula:*

$$Ric(X,Y) = div(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(divY)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla Y\rangle \tag{2.15}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_X Y - \nabla_X \nabla_{e_i} Y - \nabla_{[e_i,X]}Y, e_i\rangle \\
&= div(\nabla_X Y) - \sum_i \langle \nabla_X \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla_{\nabla_{e_i}X} Y, e_i\rangle \\
&= div(\nabla_X Y) - X\big(\sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle\big) - \sum_i \langle \nabla Y(\nabla_{e_i}X), e_i\rangle \\
&= div(\nabla_X Y) - X(divY) - \sum_i \langle \nabla_{e_i}X, {}^*\nabla Y(e_i)\rangle \\
&= div(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(divY)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla Y\rangle.
\end{aligned}$$

□

A equação a seguir, mostra a não-comutatividade do laplaciano com a diferencial. Alguns autores se referem a ela por fórmula contraída de Bochner ou fórmula de Bochner na forma $(0,1)$-tensorial.

Lema 2.4.

$$\Delta df = d\Delta f + Ric(\nabla f, \cdot), \tag{2.16}$$

em que $\Delta df := div\nabla df$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3

$$\begin{aligned}
Ric(X, \nabla f) &= div(\nabla_X \nabla f) - \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle - \langle \nabla X, \nabla^2 f\rangle \\
&= div(\nabla^2 f(X)) - (d\Delta f)(X) - \langle \nabla X, \nabla^2 f\rangle.
\end{aligned}$$

Reagrupando, utilizando o Lema 2.1 e observando que $\nabla df = \nabla^2 f$, obtemos

$$\begin{aligned} Ric(X,\nabla f) + (d\Delta f)(X) &= div(\nabla^2 f(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 f\rangle \\ &= (div\nabla^2 f)(X) \\ &= (\Delta df)(X) \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Uma vez que o tensor de Ricci é simétrico obtemos imediatamente a equação (2.16). □

Agora vamos considerar $(\mathbb{M}^n(c), g_0)$, uma variedade Riemannian de curvatura seccional constante $c \in \{-1, 1\}$. Denotaremos por $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$, $\nu \in \{0,1\}$, o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$ dotado com o produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ dado por:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i + (-1)^\nu v_{n+1} w_{n+1},$$

em que $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ e $w = (w_1, \ldots, w_{n+1})$ são elementos de $\mathbb{R}^{n+1}$. Com esta definição o espaço hiberbólico unitário $(\mathbb{H}^n(-1), g_0)$ é dado por

$$\mathbb{H}^n(-1) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}_1; \langle p, p\rangle = -1, p_{n+1} \geq 1\},$$

que é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{R}^{n+1}_1$, isto é, o produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ restrito a $\mathbb{H}^n(-1)$ é uma métrica Riemanniana g_0. Por outro lado, a esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(1)$ é definida por

$$\mathbb{S}^n(1) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}_0; \langle p, p\rangle = 1\}. \tag{2.17}$$

Seguindo a mesma idéia de [4] temos:

Exemplo 2.1. *Seja h_v a função altura em relação a um vetor unitário fixo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. O quádruplo $(\mathbb{M}^n(c), g_0, \nabla u, \lambda)$, onde $u = e^{\frac{f}{m}}$, $f = m\ln(\tau - c\frac{h_v}{n})$, τ é um número real tal que f é uma função real não constante e $\lambda = c(n-1) + \frac{mc^2}{n\tau - ch_v} h_v$, é uma estrutura não-trivial de gradiente $\frac{m}{u}$-quase soliton de Ricci em $\mathbb{M}^n(c)$.*

De fato, uma vez que $df = -\frac{mc}{n\tau - ch_v} dh_v$ e $\nabla^2 h_v = -ch_v g_0$ temos que

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = \nabla df &= -\frac{mc}{n\tau - ch_v}\nabla dh_v - d\big(\frac{mc}{n\tau - ch_v}\big) \otimes dh_v \\ &= -\frac{mc}{n\tau - ch_v}\nabla^2 h_v - \frac{mc^2}{(n\tau - ch_v)^2} dh_v \otimes dh_v \\ &= \frac{mc^2}{n\tau - ch_v} h_v g_0 - \frac{mc^2}{(n\tau - ch_v)^2} dh_v \otimes dh_v. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{m}{u}\nabla^2 u = \nabla^2 f + \frac{1}{m}df \otimes df = \frac{mc^2}{n\tau - ch_v}h_v g_0. \tag{2.18}$$

Como $Ric = c(n-1)g_0$, temos

$$Ric + \frac{m}{u}\nabla^2 u = \big(c(n-1) + \frac{mc^2}{n\tau - ch_v}h_v\big)g_0.$$

Analogamente, considerando $u = e^{\frac{f}{m}}$, em que $f(x) = m\ln(\tau + |x|^2)$ e τ é um número real tal que f é uma função real não constante, e seja g_0 a métrica canônica em $\mathbb{R}^n$. Assim, para $\lambda(x) = \frac{2m}{\tau+|x|^2}$, $(\mathbb{R}^n, g_0, \nabla u, \lambda)$ é um não-trivial h-quase sóliton de Ricci gradiente. Por outro lado, o campo de vetores

$$X(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_n x_1, x_n x_2, \ldots, x_n x_{n-1}, \frac{x_n^2}{2}\right) \tag{2.19}$$

é um campo de vetores conforme não-homotético, assim define uma estrutura não-trivial de h-quase sóliton de Ricci em $(\mathbb{R}^n, g_0)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2. *Suponha que $(\mathbb{F}, \langle,\rangle)$ é uma $(n-1)$-dimensional variedade Riemanniana completa Einstein com $Ric_{\langle,\rangle} = -(n-2)l\langle,\rangle$, $l \geq 0$ e $n \geq 3$. Sejam k uma constante negativa e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função definida por:*

$$f(t) = \frac{A}{\sqrt{-k}}\sinh(\sqrt{-k}t) + \sqrt{\frac{A^2 + l}{-k}}\cosh(\sqrt{-k}t), \tag{2.20}$$

em que $A \neq 0$ é uma constante. Considere $M^n = \mathbb{R} \times_f \mathbb{F}$ o produto warped de $\mathbb{R}$ com $(\mathbb{F}, \langle,\rangle)$, isto é, a variedade produto $M^n = \mathbb{R} \times \mathbb{F}$ munida com a métrica:

$$g = dt \otimes dt + f(t)^2\langle,\rangle,$$

onde t é um parâmetro global de $\mathbb{R}$. Segue do Lema 1.1 em [20] que (M^n, g) é Einstein com $Ric_g = (n-1)kg$. Uma vez que (M^n, g) é completa e $k < 0$, existe u em (M^n, g) sem pontos críticos satisfazendo $\nabla^2 u + kug = 0$ (veja Teorema D em [17]). Assim, para cada função suave $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $\lambda = (n-1)k - hku$, então $(M^n, g, \nabla u, \lambda)$ é um não-trivial h-quase sóliton de Ricci gradiente.

Encerramos esta seção citando o teorema a seguir devido a Obata [18].

Teorema 2.1. *Uma variedade Riemanniana completa (M^n, g), $n \geq 2$, admite uma função não constante ϕ satisfazendo $\nabla^2\phi = -c^2\phi g$ se, e somente se, (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $S^n(c)$ de raio de $1/c$.*

Uma vez que a prova deste fato foge ao escopo do nosso trabalho, omitiremos sua demonstração. Para maiores detalhes recomendamos o trabalho original de Obata [18]. Por outro lado, no que tange ao nosso escopo, justificaremos que a esfera satisfaz as hipóteses do presente teorema. Com efeito, a aplicação normal de Gauss de $\mathbb{S}^n(c)$ é $\eta(x) = c\vec{x}, \forall x \in \mathbb{S}^n(c)$ e o operador de Weingarten da inclusão $\iota : \mathbb{S}^n(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é

$$A_\eta = -d\eta = -cI.$$

Logo, denotando por $\bar{\nabla}$ e ∇ as respectivas conexões de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^n$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \langle A_\eta X, Y\rangle \eta \\ &= \nabla_X Y - c^2\langle X, Y\rangle \vec{x}. \end{aligned}$$

Consequentemente, pela definição de hessiano e pelo fato que $\bar{\nabla}_X Y = XY$, vamos deduzir que

$$\begin{aligned} \nabla^2 x_i(X,Y) &= XY(x_i) - \nabla_X Y(x_i) \\ &= XY(x_i) - XY(x_i) - c^2\langle X, Y\rangle \vec{x}(x_i) \\ &= -c^2\langle X, Y\rangle\langle \bar{\nabla} x_i, \vec{x}\rangle \\ &= -c^2 x_i \langle X, Y\rangle, \end{aligned}$$

como queríamos.

2.3 Resultados Principais

Agora estamos em condições de mostrar os principais resultados deste trabalho.

Teorema 2.2. *Um h-quase sóliton de Ricci (M^n, g, X, λ), $n \geq 3$, compacto não-trivial de curvatura escalar constante e $h > 0$ (ou $h < 0$) é isométrico a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$. Além disso, ele é gradiente e a função potencial é a autofunção correspondente ao primeiro autovalor do laplaciano em $\mathbb{S}^n(r)$.*

Demonstração. A prova será feita sob a condição mais fraca

$$\langle X, \nabla R\rangle \leq 0 \quad (\text{se } h > 0) \quad \text{ou} \quad \langle X, \nabla R\rangle \geq 0 \quad (\text{se } h < 0). \tag{2.21}$$

Denotando $L = \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g$, segue da equação (2.1) que:

$$Ric = \lambda g - hL \quad \text{e} \quad h\,divX = R - \lambda n, \tag{2.22}$$

uma vez que $tr(L) = divX$. Logo,

$$Ric - \frac{R}{n}g = \lambda g - \frac{R}{n}g - hL = \frac{\lambda n - R}{n}g - hL = \frac{hdivX}{n}g - hL,$$

isto é,

$$\overset{\circ}{Ric} = -h\overset{\circ}{L}. \tag{2.23}$$

Por outro lado, tomando $T = \overset{\circ}{Ric}$, $\varphi = 1$ e $Z = X$ no Lema 2.1, obtemos

$$\operatorname{div}(\overset{\circ}{Ric}(X)) = \langle \operatorname{div}\overset{\circ}{Ric}, X\rangle + \langle \nabla X, \overset{\circ}{Ric}\rangle \tag{2.24}$$

Da Proposição 1.9 conseguimos que

$$\langle \operatorname{div}\overset{\circ}{Ric}, X\rangle = \left\langle \frac{dR}{2} - \frac{dR}{n}, X\right\rangle = \frac{n-2}{2n}\langle \nabla R, X\rangle \tag{2.25}$$

e, consequentemente, do Lema 1.1 e da equação (2.23) chegamos a

$$\langle \nabla X, \overset{\circ}{Ric}\rangle = \langle \nabla X - \frac{tr(L)}{n}g, \overset{\circ}{Ric}\rangle = \langle \overset{\circ}{Ric}, \overset{\circ}{L}\rangle = -h|\overset{\circ}{L}|^2. \tag{2.26}$$

Portanto, combinando as equações (2.24)-(2.26), temos

$$\operatorname{div}(\overset{\circ}{Ric}(X)) = \frac{n-2}{2n}\langle \nabla R, X\rangle - h|\overset{\circ}{L}|^2. \tag{2.27}$$

Agora, integrando em M^n e usando a hipótese (2.21), segue do Teorema da Divergência que $\overset{\circ}{L} = 0$. Logo, o campo X representa um campo de vetores em M^n conforme e não-homotético. Portanto, da equação (2.23) segue que M^n, $n \geq 3$ é Einstein, donde R é constante.

Para o que segue defina

$$\rho = \frac{\operatorname{div}X}{n} = \frac{1}{h}\left(\lambda - \frac{R}{n}\right), \tag{2.28}$$

em que na última igualdade usamos a equação (2.22). Consequentemente, de $\overset{\circ}{L} = 0$ temos

$$\mathscr{L}_X g = 2\rho g. \tag{2.29}$$

Além disso, da teoria de campos conformes, o fator conforme ρ (veja por exemplo [27]) satisfaz a seguinte equação

$$\nabla^2\rho = -\frac{R}{n(n-1)}\rho g. \tag{2.30}$$

Uma vez que o h-quase sóliton é não-trivial, segue que ρ não é constante. Assim, concluímos que $\frac{R}{n-1}$ é um autovalor não-trivial do laplaciano e portanto $R > 0$. Consequentemente, podemos aplicar o Teorema 2.1 para afirmar que M^n é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r = \sqrt{n(n-1)/R}$. Segue-se então que ρ é uma correspondente autofunção para o primeiro autovalor $\lambda_1 = R/(n-1)$ da esfera $\mathbb{S}^n(r)$. Sendo assim, definindo

$$u := -\frac{n(n-1)}{R}\rho, \tag{2.31}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\nabla u}g = \nabla^2 u = -\frac{n(n-1)}{R}\nabla^2\rho = \rho g = \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g. \tag{2.32}$$

□

Para o que segue, o lema abaixo será bastante útil.

Lema 2.5. *Para um* $(-\frac{m}{u})$*-quase sóliton de Ricci gradiente* $(M^n, g, \nabla u, \lambda)$, $m \neq 0$, *é válido:*

$$d\Big(\frac{n-2}{m}u^2\lambda - u\Delta u - (m-1)|\nabla u|^2\Big) - \frac{m+n-2}{m}\lambda du^2 = 0 \tag{2.33}$$

Demonstração. Neste caso, temos

$$Ric - \frac{m}{u}\nabla^2 u - \lambda g = 0 \quad \text{e} \quad R = n\lambda + \frac{m}{u}\Delta u.$$

Por outro lado, usando as fórmulas indicadas no Lema 2.2 juntamente com a Proposição 1.9 e equação (2.16), temos

$$\begin{aligned}
0 &= divRic - \frac{m}{u}div\nabla^2 u + \nabla^2 u\Big(\nabla\big(-\frac{m}{u}\big), \cdot\Big) - d\lambda \\
&= \frac{1}{2}d\big(n\lambda + \frac{m}{u}\Delta u\big) - \frac{m}{u}\big(Ric(\nabla u, \cdot) + d\Delta u\big) + \frac{m}{u^2}\nabla^2 u(\nabla u, \cdot) - d\lambda \\
&= \frac{n-2}{2}d\lambda + \frac{1}{2}d(\frac{m}{u}\Delta u) - \frac{m}{u}d\Delta u - \frac{m}{u}\big(\lambda du + \frac{m}{u}\nabla^2 u(\nabla u, \cdot)\big) \\
&\quad + \frac{m}{2u^2}d|\nabla u|^2 \\
&= \frac{n-2}{2}d\lambda - \frac{m}{2u^2}(ud\Delta u + \Delta u du) - \frac{m}{u^2}\lambda u du - \frac{m^2}{2u^2}d|\nabla u|^2 + \frac{m}{2u^2}d|\nabla u|^2 \\
&= \frac{n-2}{2}d\lambda - \frac{m}{2u^2}\lambda du^2 - \frac{m}{2u^2}d(u\Delta u) - \frac{m^2}{2u^2}d|\nabla u|^2 + \frac{m}{2u^2}d|\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Logo, multiplicando a equação acima por $\frac{2u^2}{m}$ obtemos

$$\frac{n-2}{m}u^2 d\lambda - \lambda du^2 - d(u\Delta u) - (m-1)d|\nabla u|^2 = 0,$$

que é suficiente pra provar (2.33). □

Teorema 2.3. *Seja u uma função positiva em M^n e $m \neq 0$.*

(i) Para um $(-\frac{m}{u})$-sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla u, \lambda)$, é válida a equação

$$\lambda u^2 + u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = \mu, \tag{2.34}$$

para alguma constante μ.

(ii) Um $(-\frac{m}{u})$-sóliton de Ricci gradiente compacto estacionário ou expansivo, é trivial.

Demonstração. Fazendo λ constante em (2.33) obtemos (2.34). Como M é compacta, podemos tomar $p, q \in M$ tal que

$$u(p) = \max_{x \in M} u(x) \quad \text{e} \quad u(q) = \min_{x \in M} u(x). \tag{2.35}$$

Então teremos:

$$u(p) > 0,\ u(q) > 0,\ \nabla u(p) = \nabla u(q) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta u(p) \leq 0 \leq \Delta u(q). \tag{2.36}$$

No caso em que $\lambda = 0$, teremos a partir de (2.34) que

$$u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = \mu, \tag{2.37}$$

A partir de (2.36) e (2.37) deduzimos as desigualdades

$$0 \geq u(p)\Delta u(p) = \mu = u(q)\Delta u(q) \geq 0,$$

donde $\mu = 0$. Consequentemente,

$$u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = 0. \tag{2.38}$$

Integrando em M, obtém-se

$$(m-2)\int_M |\nabla u|^2 = 0. \tag{2.39}$$

Quando $m \neq 2$, a equação acima nos diz que u é uma constante. Por outro lado, quando $m = 2$, temos a partir de (2.38) que

$$\frac{1}{2}\Delta u^2 = u\Delta u + |\nabla u|^2 = 0$$

e novamente u é uma constante.

No caso em que $\lambda < 0$, deduzimos a partir de (2.34) e (2.36) as desigualdades

$$\lambda u^2(p) \geq \mu \geq \lambda u^2(q).$$

Assim, $u^2(p) \leq u^2(q)$ e novamente u é constante. □

Para o último resultado precisaremos do seguinte resultado obtido por Caminha et al. [6], o qual extende um resultado de Yau [28] sobre uma versão do teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não compactas de dimensão n. Para o que segue, seja $\mathcal{L}^1(M)$ o espaço das funções definidas sobre M^n que são integráveis à Lebesgue.

Lema 2.6. *Seja X um campo suave sobre uma n-dimensional variedade Riemanniana, orientada completa (M^n, g), tal que $divX$ não muda de sinal sobre M^n. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $divX = 0$ sobre M^n.*

Note que o Lema 2.6 pode ser também visto como uma consequência da versão do Teorema de Stokes obtida por Karp em [13]. De fato, usando o Teorema em [13], a condição $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$ pode ser enfraquecida à seguinte condição técnica:

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r)\setminus B(r)} |X| dM = 0,$$

onde $B(r)$ denota a bola geodésica de raio r centrada em algum ponto fixo $o \in M^n$. Indicamos o Corolário 1 e a Observação em [13] para alguma outra condição geométrica, aumentando assim a segurança deste fato.

Retornando ao contexto anterior e analisando a prova do Teorema 2.2, observamos que, qualquer condição que torne $\mathring{L} = 0$ na equação (2.27) implica que a variedade é Einstein e o campo vetorial X é conforme, com fator conforme satisfazendo (2.30). Com isso, temos a seguinte versão do teorema supracitado no caso completo não compacto, mais precisamente

Teorema 2.4. *Seja (M^n, g, X, λ) um h-quase sóliton de Ricci não-trivial completo não compacto com $h > 0$ (ou $h<0$) e curvatura escalar constante. Se $|\mathring{Ric}(X)| \in \mathcal{L}^1(M)$, então (M^n, g) é Einstein com curvatura escalar não positiva. Além disso:*

1. *Se $R = 0$, então (M^n, g) é isométrica a um espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, g_0)$.*
2. *Se $R < 0$, então $\mathscr{L}_X g = \mathscr{L}_{\nabla u} g$ com função potencial u dada pela identidade (2.31) e M^n é isométrica a um espaço hiperbólico desde que u possua apenas um ponto crítico, ou a um espaço pseudo-hiperbólico desde que u não possua nenhum ponto crítico.*

Demonstração. Assim como na demonstração do Teorema 2.2 vamos supor que (2.21) ocorre. Sendo assim, da equação (2.27) obtemos que

$$\operatorname{div}\left(\mathring{Ric}(X)\right) \leq 0\,(\geq 0). \tag{2.40}$$

Por outro lado, uma vez que estamos supondo $|\mathring{Ric}(X)| \in \mathcal{L}^1(M)$, da desigualdade (2.40), podemos aplicar o Lema 2.6 a fim de concluir que $\operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(X)\big) = 0$. Logo, seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 2.2 obtemos que M^n é uma variedade de Einstein com curvatura escalar constante, X é um campo vetorial conforme não-homotético e as equações (2.29)-(2.30) ainda são válidas. Além disso, sendo M^n completa não compacta, segue do Teorema de Bonnet-Myers R é não positiva.

Portanto:

1. Se $R = 0$, podemos aplicar o item (ii) do Teorema G em [17] a fim de garantir que (M^n, g) é isométrica ao espaço Euclidiano n-dimensional $(\mathbb{R}^n, g_0)$.

2. Se $R < 0$, podemos substituir X por ∇u, onde u é dada por (2.31). Em particular, obtemos uma classificação completa usando o Teorema 2 de [26] ou Teorema G de [17] através da análise dos pontos críticos da função potencial u. Isto é, para $R = n(n-1)k$, (M^n, g) é isométrica ao espaço hiperbólico

$$(\mathbb{H}^n, -(1/k)g_0) = \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^{n-1},$$

em que $f(t) = e^{\pm\sqrt{-k}t}$, desde que o função potencial u tenha apenas um ponto crítico, ou a um espaço pseudo-hiperbólica, ou seja, um produto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbb{F}$, onde f é uma solução $f'' + kf = 0$, e $\mathbb{F}$ é uma variedade Einstein completa, desde que u não tenha ponto crítico. Finalmente, mencionamos que qualquer um destes dois casos podem ocorrer. O primeiro está contido no Exemplo 2.1, enquanto que o segundo no Exemplo 2.2. $\square$

Encerramos esta dissertação com a seguinte observação acerca do teorema anterior.

Observação 2.1. *No Teorema 2.4, a hipótese $|\mathring{Ric}(X)| \in \mathcal{L}^1(M)$ pode ser substituída por curvatura de Ricci limitada superiormente e $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$. De fato, sendo a curvatura de Ricci limitada superiormente, exite uma constante $C > 0$ tal que $Ric \leq C$. Logo do Exemplo 1.4 e da hipótese $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, obtemos*

$$|\mathring{Ric}(X)|^2 \leq |\mathring{Ric}|^2|X|^2 = \left(|Ric|^2 - \frac{R^2}{n}\right)|X|^2 \leq C|X|^2 \in \mathcal{L}^1(M),$$

mostrando o afirmado.

Bibliografia

[1] Barros, A.; Gomes, J.N.; Ribeiro Jr, E. *A note on rigidity of the almost Ricci soliton.* Arch. der Math. 100 (2013) 481-490.

[2] Barros, A.; Gomes, J.N. *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature.* J. Math. Anal. Appl. (Print) 401 (2013) 702-705.

[3] Barros, A.; Ribeiro Jr., E. *Some characterizations for compact almost Ricci solitons.* Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012) 1033-1040.

[4] Barros, A.; Ribeiro Jr., E. *Characterizations and integral formulae for generalized quasi-Einstein metrics.* Bull. of the Brazilian Math. Soc. 45 (2014) 325-341.

[5] Bourguignon, J.P. *Ricci curvature and Einstein metrics.* Lecture Notes in Math., vol. 838, Springer, Berlin, p. 298

[6] Caminha, A.; Camargo, F; Souza, P. *Complete foliations of space forms by hypersurfaces.* Bull. of the Brazilian Math. Soc. 41 (2010) 339-353.

[7] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[8] Case, J.; Shu, Y.; Wei, G. *Rigity of quasi-Einstein metrics.* Diff. Geom. Appl. 29 (2011) 93-100.

[9] Catino, G. *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic weyl tensor.* Math. Z. 271 (2012) 751-756.

[10] Chow, B.; Lu, P.; Ni, L. *Hamilton's Ricci flow.* Graduate Studies in Mathematics, 77 (2006).

[11] Gomes, J.N.; Wang, Q.; Xia, C. *On the h−almost ricci soliton.* J. Geom. Phys. 114 (2017) 216-222.

[12] Hamilton, R.S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature.* J. Diff. Geom. 17 (2) (1982) 255-306.

[13] Karp, L. *On Stokes's theorem for noncompact manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981) 487-490.

[14] Kim, D.-S.; Kim, Y.H. *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (8) (2003) 2573-2576.

[15] Lee, J. M. *Introduction to smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[16] Maschler, G. *Special Kähler-Ricci potentials and Ricci solitons.* Ann. Global Anal. Geom. 34 (2008) 367-380.

[17] Masahiko, K. *On a Differential Equation Characterizing a Riemannian Structure of a Manifold.* Tokyo J. Math. 6 (1) (1983) 143-151.

[18] Obata, M. *Certain conditions for a Riemannian manifold isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan, 14 (1962) 333-340.

[19] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry.* Academic Press, 1983.

[20] Pigola, S.; Rigoli, M.; Rimold, M.; Setti, A. *Ricci almost solitons.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10 (2011) 757-799.

[21] Perelmann, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159v1 [math.DG].

[22] Perelmann, G. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109v1 [math.DG].

[23] Perelmann, G. *Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245v1 [math.DG].

[24] Petersen, P. *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[25] Shi, W.-X. *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds.* J. Diff. Geom. 30 (1) (1989) 223-301.

[26] Tashiro, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields.* Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 251-275.

[27] Yano, K. *Integral formulas in Riemannian geometry.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[28] Yau, S.T. *Some Function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds their apllications to geometry.* Indiana Univ. Math. J. 25 (1976) 659-670.