

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Monotonicidade Maximal de Operadores e Bifunções para Problemas de Equilíbrio

Edfram Rodrigues Pereira

Manaus – AM
Março de 2018

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Monotonicidade Maximal de Operadores e Bifunções para Problemas de Equilíbrio

por

Edfram Rodrigues Pereira

sob a orientação da

Prof^a. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

Orientadora

Manaus – AM
Maio de 2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P436m Pereira, Edfram Rodrigues
Monotonicidade Maximal de Operadores e Bifunções para
Problemas de Equilíbrio / Edfram Rodrigues Pereira. 2018
81 f.: il.; 31 cm.

Orientadora: Prof^a. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Operadores Monótonos Maximais. 2. Bifunções Monótonas
Maximais. 3. Problema de Equilíbrio. 4. Resolventes. I. Jacinto,
Prof^a. Dra. Flávia Morgana de Oliveira II. Universidade Federal do
Amazonas III. Título

Monotonicidade Maximal de Operadores e Bifunções para Problemas de Equilíbrio

por

Edfram Rodrigues Pereira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

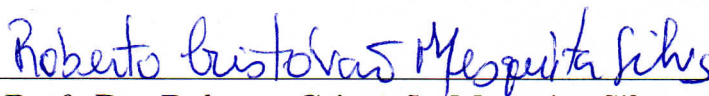
Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em 14 de Maio de 2018.

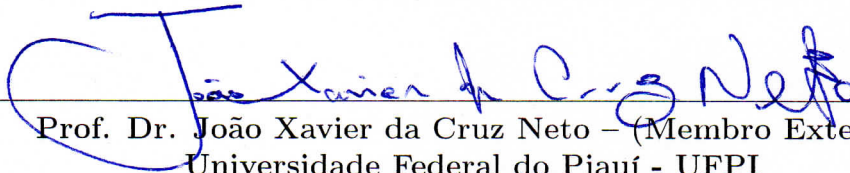
Banca Examinadora:



Prof^ª. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto – (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM



Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva – (Membro Interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM



Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto – (Membro Externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Dedico este trabalho a minha mãe Augusta Jane Rodrigues Pereira, ao meu pai Antônio Augusto Rocha Pereira, que sempre me incentivaram a dar continuidade aos meus estudos. Também, a minha esposa Luziane Hipólito de Souza e ao meu filho Ítalo de Souza Pereira, que aceitam dividir meu tempo com a Matemática.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus em primeiro lugar, pelo dom da vida, pela saúde e pela maravilhosa família.

À minha mãe Augusta Jane Rodrigues Pereira e ao meu pai Antônio Augusto Rocha Pereira, que sempre me incentivaram a estudar e mostraram a importância disto. A meus irmãos, que sempre me apoiaram a vencer mais essa etapa profissional.

À minha esposa Luziane Hipólito de Souza que sempre compreendeu minha ausência e sempre esteve ao meu lado em todos os momentos me apoiando para que pudesse chegar ao fim desta etapa. Ao meu filho Ítalo de Souza Pereira que sempre cobrou de mim ótimas notas, assim como eu o cobrava.

À minha orientadora Prof^a. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho e que, além disso, me ensinou a ser um profissional melhor.

Aos professores do Departamento de Matemática, em especial, ao professor Roberto Cristóvão Mesquita Silva, que sempre esteve nos incentivando, aconselhando e trocando ideias além da matemática.

Aos amigos do mestrado e doutorado, pelos incentivos, contribuições e principalmente pelos momentos de diversões que tivemos juntos. Obrigado a todos por fazerem essa caminhada muito mais prazerosa.

Aos amigos secretários do PPGM, Aristocles Rannyeri Nascimento de Lima e ao Elclimar Alves Saraiva, muito obrigado pela paciência e pelos incentivos.

À Universidade do Estado do Amazonas, que me liberou de minhas atividades profissionais para poder me qualificar.

Resumo

Nesta dissertação, definimos espaço normado, métrico e topológico e estudamos algumas propriedades destes. Utilizando a definição de conjunto compacto, demonstramos o Lema Ky Fan que garante que a interseção de uma família de conjuntos fechados é não vazia. Usamos este Lema para obter um resultado de existência para um problema de equilíbrio. Em seguida, apresentamos as principais características de espaço reflexivo, suave e estritamente convexo e os relacionamos com seus respectivos duais via um operador, denominado aplicação de dualidade. As topologias fraca e fraca-estrela foram definidas e utilizadas com o intuito de obter compacidade de bolas fechadas e outros resultados convenientes. Além disso, partindo de uma bifunção monótona maximal obtemos para um problema de equilíbrio um resultado de existência, em espaços topológicos, e resultados de existência e unicidade, em espaço de Banach real reflexivo. O resultado de unicidade foi utilizado para definir resolvente de bifunção monótona maximal. Dada uma bifunção monótona maximal, definimos um operador monótono maximal o qual tem o mesmo resolvente da bifunção e vice-versa. Além disso, vimos que resolver um problema de equilíbrio associado à bifunção é equivalente a encontrar zero do operador definido a partir da bifunção e reciprocamente. Por fim, estudamos a relação entre a classe dessas bifunções monótonas maximais e a classe de seus respectivos operadores monótonos maximais associados.

Palavras-chave: Operadores Monótonos Maximais; Bifunções Monótonas Maximais; Problema de Equilíbrio; Resolventes.

Abstract

In this dissertation, we define normed, metric and topological space and we study some properties of these. Using the compact set definition, we demonstrate the Ky Fan Lemma that ensures that the intersection of a family of closed sets is not empty. We use this Lemma to obtain a result of existence for an equilibrium problem. Next, we present the main characteristics of reflective, smooth and strictly convex space, and relate them to their respective duals via an operator, called the duality application. Weak and star-weak topologies were defined and used in order to obtain closed ball compactness and other convenient results. Moreover, starting from a monotonous maximal bifunction we obtain for a problem of equilibrium a result of existence, in topological spaces, and results of existence and uniqueness, in reflexive real Banach space. The uniqueness result was used to define resolvent of the maximal monotonic bifunction. Given a maximal monotonic bifunction, we define a maximal monotonic operator which has the same resolvent of the bifunction and reciprocally. In addition, we have seen that solving an equilibrium problem associated with bifunction is equivalent to finding zero of the defined operator from the bifunction and reciprocally. Finally, we study the relationship between the class of these monotonic maximal bifunctions and the class of their respective monotonous maximal operators.]

Keywords: Maximal Monotone Operators; Maximal Monotone Bifunctions; Equilibrium Problems; Resolvent.

Sumário

Introdução	10
1 Definições e Resultados Preliminares	11
1.1 Norma, Espaço Métrico e Espaço Topológico	11
1.2 Lema Ky Fan	20
1.3 Semicontinuidade de funções	22
1.4 Espaço Normado	24
1.5 Espaço Reflexivo	30
1.6 Espaço Suave	33
1.7 Espaço Estritamente Convexo	34
1.8 Aplicação de Dualidade	35
1.9 Topologia Fraca e Fraca-Estrela	42
2 Problema de Equilíbrio e Monotonicidade Maximal	48
2.1 Monotonicidade Maximal de Operadores	49
2.2 Monotonicidade Maximal de Bifunções	58
2.3 Existência e Unicidade de Solução para um Problema de Equilíbrio	61
2.4 Resolvente e Monotonicidade Maximal	67
2.5 Operadores Monótonos Maximais e Bifunções Monótonas Maximais	73
Considerações Finais	80
Referências Bibliográficas	81

Introdução

Nesta dissertação estabelecemos resultados de existência e unicidade para o Problema de Equilíbrio que consiste em:

$$\text{(PE)} \quad \text{encontrar } \bar{x} \in C \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in C \quad (1)$$

onde, E é um espaço de Banach real, $C \subset E$ é não vazio, convexo e fechado e

$$f : E \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

é uma bifunção estendida. Este problema é de grande relevância, pois através dele podemos estudar solução de otimização, ponto fixo, de aplicações ponto-conjunto com desigualdade variacional e outros.

Organizamos este trabalho do seguinte modo. No capítulo 1, começamos trabalhando as definições e alguns resultados de espaço normado, espaço métrico e espaço topológico. Estudamos o Lema Ky Fan que, utilizando a definição de conjunto compacto, estabelece um resultado de interseção para uma família de conjuntos fechados. Definimos semicontinuidade de função estendida e estabelecemos alguns resultados que a caracteriza. Revemos as definições de espaço reflexivo, espaço suave e espaço estritamente convexo e estudamos a relação destes com seus respectivos espaços duais através da aplicação de dualidade. Finalizamos o capítulo, definindo e fazendo alguns resultados de topologia fraca e topologia fraca-estrela.

Trabalhamos no capítulo 2 os principais resultados desta dissertação baseados nos trabalhos de Blum e Oettli [7] e Aoyama, Kimura e Takahashi [2]. Começamos apresentando uma caracterização de um operador monótono maximal envolvendo a aplicação de dualidade. A partir desta caracterização é definido o resolvente do operador. Em seguida, apresentamos um resultado de existência do problema (PE) em espaço topológico e resultados de existência e unicidade em espaço de Banach real reflexivo, para uma bifunção específica. A unicidade é usada para definir o operador resolvente da bifunção. Logo após, estabelecemos como definir um operador monótono maximal a partir de uma bifunção monótona maximal e mostramos que, além de ambos ter o mesmo resolvente, resolver um problema (PE) associado a esta bifunção é equivalente a encontrar zero deste operador. No final do capítulo, estudamos a relação entre essas bifunções e esses operadores monótonos maximais.

Finalmente, destacamos as considerações finais e pesquisas futuras.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados a cerca de Espaços Normados, Métricos e Topológicos que servem de base para os resultados principais desta dissertação. Tratamos alguns resultados sobre espaço reflexivo, suave e estritamente convexo e da aplicação de dualidade J , que a cada ponto do espaço associa um operador adequado no espaço dual. Também apresentamos resultados sobre topologia fraca, frac-estrela e de semicontinuidade de funções.

1.1 Norma, Espaço Métrico e Espaço Topológico

Começamos esta seção com resultados bem conhecidos, mas que incluímos a fim de que o texto seja o mais auto contido quanto possível.

Norma

Definição 1.1.1. ([14], p. 23) Seja E um espaço vetorial. Uma função

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada vetor $x \in E$ um número real $\|x\|$, é uma **norma** em E se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

- (N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo escalar a e todo $x \in E$;
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer que sejam $x, y \in E$.

Da propriedade (N2), segue $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$

Exemplo 1.1.1. ([14], p. 23) A função $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$ é uma norma no espaço vetorial \mathbb{R}^n . As propriedades (N1), (N2) não são difíceis de demonstrar. Já a propriedade (N3) requer uma dedicação maior e sua demonstração pode ser encontrada em ([14], p. 22).

Exemplo 1.1.2. ([8], p. 3) Seja X um conjunto não vazio. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **limitada** se sua imagem for um subconjunto limitado de \mathbb{R} , ou seja, se existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. A expressão

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

é uma norma no conjunto $B(X)$ de todas as funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. De fato,

(N1) Dado $f \in B(X)$, tem-se $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq 0$, pois trata-se de um supremo de números não negativos e $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ para todo $x \in X \Leftrightarrow f \equiv 0$.

(N2) $\|af\|_\infty = \sup_{x \in X} |af(x)| = |a| \sup_{x \in X} |f(x)| = |a| \|f\|_\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in X$.

(N3) Dados $f, g \in B(X)$, temos

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Espaço Métrico

Definição 1.1.2. ([14], p. 21) Uma **métrica** num conjunto M , não vazio, é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** do ponto x ao ponto y , de tal modo que:

(M1) $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ quaisquer que sejam $x, y, z \in M$

([14], p. 21) Um **espaço métrico** é um par (M, d) formado por um conjunto M e uma métrica d em M .

Exemplo 1.1.3. ([14], p. 23) Uma importante métrica, em um espaço vetorial normado E , é a definida a partir da norma, por

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in E$$

De fato, $d(x, x) = \|x - x\| = 0$ e dados $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0$, $d(x, y) = \|x - y\| > 0$, vale (M1). Temos ainda que $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$, o que mostra (M2). Por fim, mostremos (M3),

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

Neste caso, diz-se que a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Definição 1.1.3. ([14], p. 26) Sejam M um espaço métrico, $r > 0$ um número real e a um ponto de M . A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ de todos os pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior a r :

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$$

([14], p. 26) A **bola fechada (ou disco)** de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior ou igual a r :

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}$$

Definição 1.1.4. ([14], p. 56) Um subconjunto A de um espaço métrico M chama-se **aberto** quando todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A . Em outras palavras, para cada $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in M$ e $d(x, a) < \epsilon$, então $x \in A$.

Proposição 1.1.1. ([14], p. 27) *Dados dois pontos distintos a, b num espaço métrico M , existem em M duas bolas abertas disjuntas com centros em a e b , respectivamente.*

Demonstração. Seja r um número real tal que $0 < r \leq \frac{d(a, b)}{2}$. Se existisse um ponto $x \in M$ tal que $x \in B(a; r) \cap B(b; r)$, teríamos $d(x, a) < r$, $d(x, b) < r$ e, assim, $d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) < 2r$, ou seja, $r > \frac{d(a, b)}{2}$, uma contradição. ■

Definição 1.1.5. ([14], p. 109) Uma **sequência** num conjunto X é uma aplicação definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dos números inteiros positivos e tomando valores em X . A cada inteiro $n \in \mathbb{N}$ a sequência faz corresponder um elemento de X , que indicaremos com x_n e chamaremos o n -ésimo termo da sequência. A própria sequência é indicada com a notação $\{x_n\}$ ou $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 1.1.6. ([14], p. 110) Uma **subsequência** da sequência $\{x_n\}$ em X é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Uma subsequência é representada pelas notações $\{x_{n_k}\}$ ou $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}'}$.

Exemplo 1.1.4. ([14], p. 110) Dado $a \in X$, temos que $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência em X , chamada *sequência constante*. Fazendo $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos uma sequência na reta \mathbb{R} .

Definição 1.1.7. ([14], p. 110) Uma sequência $\{x_n\}$, num espaço métrico M , diz-se **limitada** quando o conjunto dos seus valores x_n for um subconjunto limitado de M , ou seja, quando existe um número real $r \geq 0$ tal que $d(x_n, x_m) \leq r$ quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.8. ([14], p. 110) Num espaço métrico M , diz-se que o ponto x é **limite da sequência** $\{x_n\}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implique $d(x_n, x) < \epsilon$, indicamos isto por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \rightarrow x$.

Exemplo 1.1.5. ([14], p. 110) Toda sequência constante $\{x_n\} = a$ é limitada, pois dado $r = 0$, $d(x_n, x_m) = d(a, a) = r = 0$ quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.6. ([14], p. 110) 0 é o limite da sequência $x_n = \frac{1}{n}$ em \mathbb{R} , pois dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, é possível obter um inteiro $n_0 > 0$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Então, $n > n_0$ implica

$$d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

Proposição 1.1.2. ([14], p. 111) *Num espaço métrico M , tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ se, e somente se, para todo subconjunto aberto A contendo o ponto x , existe um índice n_0 tal que $n > n_0$ implica $x_n \in A$.*

Demonstração. Da definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ significa que qualquer bola aberta $B(x; \epsilon)$, de centro x , contém todos os termos x_n cujos índices n são maiores do que um certo n_0 , que depende de ϵ . Se A é aberto e contém x , contém uma bola $B(x; \epsilon)$. Logo, se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, os x_n pertencem a A a partir de uma certa ordem n_0 . Reciprocamente, se esta condição é satisfeita para todo aberto contendo x , ela vale em particular para as bolas abertas $B(x; \epsilon)$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. ■

Corolário 1.1.1. ([14], p. 111) Num espaço métrico, $\lim x_n = x$ se, e somente se, para cada bola aberta contendo x , existe um índice n_0 tal que $n > n_0$ implica $x_n \in V$.

Proposição 1.1.3. ([14], p. 112) Para que uma sequência $\{x_n\}$, num espaço métrico M , possua uma subsequência convergente para um ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que cada bola aberta contendo a contenha termos $\{x_n\}$ com índices n arbitrariamente grandes.

Demonstração. Seja $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ uma subsequência de $\{x_n\}$ convergindo para a . Toda bola aberta contendo a contém os $\{x_{n_k}\}$ com exceção, no máximo, de $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k_0}}$. Logo toda bola aberta contém termos x_n com índices arbitrariamente grandes. Reciprocamente, supondo válida esta propriedade, a bola $B(a; 1)$, de centro a e raio 1, conterá algum termos x_{n_1} ; a bola $B(a; 1/2)$ conterá algum termos x_{n_2} com $n_2 > n_1$ e assim por diante; para cada $k \in \mathbb{N}$ é possível escolher um $x_{n_k} \in B(a; 1/k)$, com $n_k > n_{k-1}$. Isto define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\} \subset \mathbb{N}$ e, portanto, uma subsequência $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ a qual tem a propriedade $d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$, donde $x_{n_k} \rightarrow a$. ■

Definição 1.1.9. ([14], p. 148) Diz-se que uma sequência $\{x_n\}$, num espaço métrico M , é uma **sequência de Cauchy** quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Definição 1.1.10. ([14], p. 151) Diz-se que um espaço métrico M é **completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 1.1.7. ([14], p. 151) Seja $P = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, induzida da reta, ou seja, a distância $x, y \in P$ e a mesma dada em \mathbb{R} . P não é completo, pois $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ é uma sequência de Cauchy que não converge em P .

Exemplo 1.1.8. ([14], p. 151) O conjunto $B(X)$, das funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, é um espaço métrico completo. De fato, seja $\{f_n\}$ em $B(X)$ uma sequência de Cauchy. Então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. Mas, $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)|$, então

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \text{ para todo } n, m \geq n_0 \text{ e todo } x \in X \quad (1.1)$$

Segue que para cada $x \in X$ em \mathbb{R} , $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy, logo a sequência $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ é convergente em \mathbb{R} . Defina a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Fazendo m tender ao infinito em (1.1), obtemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e todo } x \in X$$

Então, $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, ou seja, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $(f_n - f) \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \rightarrow f$. Temos que $(f_n - f) \in B(X)$ e $f_n \in B(X)$, então $f = f_n - (f_n - f) \in B(X)$ e daí segue o resultado.

Proposição 1.1.4. ([14], p. 150) Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy num espaço métrico M . Se alguma subsequência $\{x_{n_k}\}$ converge para um ponto $x \in M$, então $\{x_n\}$ também converge para o ponto x .

Demonstração. Seja a subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ que converge para x . Dado $\epsilon > 0$, existe n' tal que $n_k > n'$ implica $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Existe também n'' tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $m, n > n''$. Seja $n_0 = \max\{n', n''\}$. Se $n > n_0$, podemos escolher $n_k > n_0$ e teremos $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Logo, $x_n \rightarrow x$. ■

Definição 1.1.11. Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de um espaço métrico M num espaço métrico N e a um ponto de M . Diz-se que f é **contínua no ponto** a quando, dado arbitrariamente um número $\epsilon > 0$, for sempre possível determinar $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implique $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Diremos que $f : M \rightarrow N$ é **contínua** se f for contínua em todos os pontos de M .

Espaço Topológico

A seguir definimos espaço topológico e apresentamos outras definições correlatas necessárias para resultados futuros.

Definição 1.1.12. ([14], p. 63) Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados os **subconjuntos abertos** (segundo a topologia τ), satisfazendo as seguintes condições:

- 1) X e o subconjunto vazio \emptyset são abertos;
- 2) A reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um conjunto aberto;
- 3) A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Um **espaço topológico** é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X .

Observação 1.1.1. ([14], p. 77) Um conjunto F de um espaço topológico X diz-se **fechado** quando seu complementar é aberto.

Observação 1.1.2. ([14], p. 66) Uma forma de conseguir novos espaços topológicos é a seguinte. Seja $f : S \rightarrow X$ uma aplicação de um conjunto arbitrário S num espaço topológico X . A coleção τ das imagens inversas $f^{-1}(A)$ dos abertos $A \subset X$ pela aplicação f é uma topologia em S . De fato:

- 1) $S = f^{-1}(X)$ e $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ estão em τ .
- 2) $\bigcup_{\lambda} f^{-1}(A_{\lambda}) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\right)$, ou seja, a reunião de uma família qualquer de subconjuntos de τ é um conjunto de τ .
- 3) $\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$, ou seja, a interseção de uma família finita de subconjuntos de τ é um subconjunto de τ .

A topologia τ , dada pela $f : S \rightarrow X$, chama-se a **topologia induzida** em S pela aplicação f .

Exemplo 1.1.9. ([14], p. 64) Todo espaço métrico M é considerado um espaço topológico, quando se toma em M a coleção de abertos definidos a partir da métrica de M . De fato,

- 1) Como todo ponto $a \in M$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em M , logo M é aberto. O conjunto \emptyset só deixaria de ser aberto, se existisse um elemento em \emptyset tal que nenhuma bola de centro neste elemento está contida em \emptyset . Como não existe $x \in \emptyset$, então este é aberto.
- 2) Seja $(A_{\lambda})_{\lambda \in L}$ uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de M , mostremos que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_{\lambda}$ é aberto. Dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in A_{\lambda}$. Como A_{λ} é aberto, existe uma bola $B(x; \epsilon) \subset A_{\lambda} \subset A$. Logo A é aberto.

3) Seja $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, com A_i aberto para qualquer $i = 1, \dots, n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, existe uma bola aberta $B(x; \epsilon_i) \subset A_i$. Tomemos $\epsilon = \min.\{\epsilon_i; i = 1, \dots, n\}$. Então, $B(x; \epsilon) \subset B(x; \epsilon_i) \subset A_i$ para cada i . Assim, $B(x; \epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, isto é, a interseção finita de abertos é um conjunto aberto.

Exemplo 1.1.10. ([14], p. 64) Seja X um conjunto qualquer. Podemos definir uma topologia τ em X tomando todos os subconjuntos de X como abertos, essa topologia chama-se *topologia discreta*. No outro extremo, podemos considerar uma topologia τ em X , na qual os únicos abertos são X e o conjunto vazio \emptyset , esta chama-se *topologia caótica*.

Definição 1.1.13. ([14], p. 65) Um espaço topológico X chama-se um **espaço de Hausdorff** (ou **espaço separado**) quando, dados dois pontos arbitrários $x \neq y$ em X , existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$

Exemplo 1.1.11. ([14], p. 65) Em virtude da Proposição 1.1.1, todo espaço metrizável é um espaço de Hausdorff.

Definição 1.1.14. ([14], p. 74) Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in S$ chama-se um **ponto interior** de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$. O **interior** de S é o conjunto $\text{int}(S)$ formados pelos pontos interiores de S .

Exemplo 1.1.12. ([14], p. 75) Todo subespaço vetorial L de um espaço vetorial normado E , com $L \neq E$, tem interior vazio.

Exemplo 1.1.13. ([14], p. 75) No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o interior de uma bola fechada $B[a; r]$ é a bola aberta $B(a; r)$ de mesmo centro e mesmo raio.

Definição 1.1.15. ([14], p. 75) Num espaço topológico X , diz-se que um conjunto V é uma **vizinhança** de um ponto $x \in X$ quando $x \in \text{int}(V)$, isto é, V contém um aberto que contém x .

Definição 1.1.16. ([8], p. 352) A coleção \mathcal{V}_x de todas as vizinhanças de x é chamada de **sistema de vizinhanças** de x . Uma **base de vizinhança** de um elemento x de X é uma subcoleção \mathcal{B}_x de \mathcal{V}_x tal que cada $V \in \mathcal{V}_x$ contém algum $U \in \mathcal{B}_x$. Neste caso \mathcal{V}_x está determinado por \mathcal{B}_x da seguinte forma

$$\mathcal{V}_x = \{V \subseteq X; U \subseteq V \text{ para algum } U \in \mathcal{B}_x\}$$

Os elementos de \mathcal{B}_x são chamados de **vizinhanças básicas** de x .

Exemplo 1.1.14. ([14], p. 75) Num espaço métrico. As bolas abertas $B(0; r)$, $r > 0$, formam uma base de vizinhança para a origem 0.

Definição 1.1.17. ([14], p. 81) Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ diz-se **aderente** a S quando toda vizinhança V de x em X contém pelo menos um ponto $s \in S$. O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se o **fecho** de S e indica-se com a notação \bar{S} . Um subconjunto $F \subset X$ diz-se **fechado** se, e somente se, $F = \bar{F}$.

Definição 1.1.18. ([14], p. 85) Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ chama-se **ponto de acumulação** de S quando toda vizinhança V de x em X contém algum ponto $s \in S$, distinto do ponto x . O conjunto dos pontos de acumulação de S chama-se o **derivado** de S e indica-se coma anotação S' .

Exemplo 1.1.15. ([14], p. 85) Se S é o intervalo aberto $(0, 1)$ da reta, então $S' = \bar{S}$ é o intervalo fechado $[0, 1]$. Se $P = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \subset \mathbb{R}$, então P' contém apenas o ponto zero 0 e $\bar{P} = P \cup \{0\}$.

Proposição 1.1.5. ([14], p. 85) Seja X um espaço topológico. Para todo subconjunto $S \subset X$, tem-se $\bar{S} = S \cup S'$.

Demonstração. Os pontos de \bar{S} são os pontos de S mais os pontos $x \notin S$ tais que toda vizinhança de x contém algum $s \in S$. Estes pontos pertencem a S' . Logo, $\bar{S} \subset S \cup S'$. Por outro lado, $S \subset \bar{S}$ e $S' \subset \bar{S}$, donde $S \cup S' \subset \bar{S}$, o que termina a demonstração. ■

Corolário 1.1.2. ([14], p. 85) Um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Demonstração. Um subconjunto F de X é fechado se, somente se, $F = \bar{F} = F \cup F'$. Logo, F é fechado se, e somente se, $F' \subset F$. ■

Corolário 1.1.3. ([14], p. 85) Se $S \subset X$ não possui pontos de acumulação, então todo subconjunto de S é fechado em X .

Demonstração. Seja $T \subset S$, então $T' \subset S'$. $T' = \emptyset$ e, portanto, $T' \subset T$, isto é, T é fechado, qualquer que seja $T \subset S$. ■

Definição 1.1.19. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y , diz-se **contínua** quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X .

Espaço Compacto

Estudamos a seguir definições de espaço e subconjunto compacto, e alguns resultados relacionados a eles. Em especial, uma importante caracterização destes em espaços métricos. Começamos definindo cobertura de um conjunto.

Definição 1.1.20. ([14], p. 175) Seja X um espaço topológico e S um subconjunto de X . Uma **cobertura** de S é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X com $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$,

isto é, para cada $s \in S$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $s \in C_\lambda$. Uma **subcobertura** de S é uma subfamília $\mathcal{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de S , isto é, continua válida a propriedade $S \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$

Exemplo 1.1.16. ([14], p. 175) Para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = (-n, n)$ o intervalo aberto da reta de extremos $-n$ e n . A família $\mathcal{C} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta enumerável da reta \mathbb{R} . Seja $L \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito qualquer. A família $\mathcal{C}' = (I_n)_{n \in L}$ é uma subcobertura de \mathcal{C} . Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto finito $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k\}$ de inteiros positivos, temos $I_{n_1} \cup I_{n_2} \cup \dots \cup I_{n_k} = I_{n_k}$, logo $\mathcal{C}'' = (I_{n_1}, \dots, I_{n_k})$ não é uma cobertura de \mathcal{C} . Em outras palavras, \mathcal{C} não possui subcobertura finita.

Definição 1.1.21. ([14], p. 176) Um espaço topológico X chama-se **compacto** quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita. Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é um **subconjunto compacto** quando S , com a topologia induzida de X , é um espaço compacto.

Exemplo 1.1.17. ([14], p. 177) Um espaço vetorial normado E de dimensão > 0 não é compacto, pois a cobertura formada pelas bolas abertas com centro na origem não possui subcobertura finita.

Definição 1.1.22. ([14], p. 177) Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ tem a **propriedade da interseção finita** quando qualquer subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_n})$ tem interseção não vazia, isto é, $F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset$.

Exemplo 1.1.18. ([14], p. 178) Seja E um espaço vetorial normado de dimensão > 0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n = E \setminus B(0; n)$ o complementar da bola aberta de centro 0 e raio n . Tem-se $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$. Assim, se $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, tem-se $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$ e, portanto a família $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem a propriedade da interseção finita. Porém, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Teorema 1.1.1. ([14], p. 177) *Seja E um espaço topológico compacto e \mathcal{F} uma família de subconjuntos fechados em E . Se \mathcal{F} tem a propriedade da interseção finita então*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{F_i; i \in I\}$ uma família de subconjuntos fechados de E com a propriedade da interseção finita. Se I é finito, então por hipótese $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Se I é infinito, suponhamos por absurdo que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Temos $E = E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$, ou seja, os conjuntos abertos $E \setminus F_i, i \in I$, forma uma cobertura de E . Como E é compacto, então um conjunto finito $J \subset I$ tal que $E = \bigcup_{j \in J} (E \setminus F_j) = E \setminus \bigcap_{j \in J} F_j$, o que implica $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$, uma contradição à hipótese. Portanto, $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. ■

Proposição 1.1.6. ([14], p. 178) *Num espaço compacto, todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja X um espaço compacto e suponhamos, por absurdo, que um subconjunto infinito $S \subset X$ não tenha ponto de acumulação. Sendo infinito, S contém um subconjunto enumerável $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ o qual também não possui ponto de acumulação. Segue-se, do Corolário 1.1.3, que todo subconjunto de F é fechado em X . Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, obtemos assim uma família $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados de X , a qual tem propriedade da interseção finita, pois se $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, vale $F_{n_1} \cap \dots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$. Mas, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ o que contradiz o

Teorema 1.1.1. Logo, X não é compacto. ■

Proposição 1.1.7. ([14], p. 178) *Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração. Seja $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de F por abertos $U_\lambda \subset X$. A família $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ e mais o conjunto $U = X \setminus F$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe uma cobertura finita $X = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como nenhum ponto de F pode pertencer a U , tem-se necessariamente $F \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$, o que prova a compacidade de F . ■

Definição 1.1.23. ([14], p. 190) Um espaço métrico M diz-se **totalmente limitado** quando, para todo $\epsilon > 0$, pode-se exprimir $M = S_1 \cup \dots \cup S_n$ como reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro $< \epsilon$.

Proposição 1.1.8. ([14], p. 190) As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:

- 1) M é compacto;
- 2) Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;
- 3) Toda sequência em M possui uma subsequência convergente;
- 4) M é completo e totalmente limitado.

Demonstração. Estabelecemos as implicações 1) \Rightarrow 2), 2) \Rightarrow 3), 3) \Rightarrow 4) e 4) \Rightarrow 1)

1) \Rightarrow 2) Segue da Proposição 1.1.6 mesmo quando M não é metrizável.

2) \Rightarrow 3) Dada uma sequência $\{x_n\} \in M$, ou o conjunto dos valores x_n é finito ou é infinito. Se for finito, algum valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$, deve se repetir infinitas vezes e, portanto, a subsequência $\{x_{n_k}\}$ converge para o ponto a . Se for infinito, por hipótese o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ possui um ponto de acumulação $x \in M$. Assim, toda vizinhança de x conterá termos x_n com índices arbitrariamente grandes, daí pela Proposição 1.1.3, x será limite de uma subsequência de $\{x_n\}$.

3) \Rightarrow 4) Provemos primeiramente que M é completo. Ora, toda sequência de Cauchy em M que possui uma subsequência convergente é ela própria convergente, pela Proposição 1.1.4.

Para provar que M é totalmente limitado. Dado $\epsilon > 0$ e mostremos que M pode ser expresso como reunião de um número finito de bolas $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Tomemos $x_1 \in M$ qualquer. Se $M = B\left(x_1, \frac{\epsilon}{2}\right)$, a afirmação esta provada. Caso contrário, existiria um ponto $x_2 \in M$, com $d(x_2, x_1) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Se for $M = B\left(x_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup B\left(x_2, \frac{\epsilon}{2}\right)$, está concluída a demonstração. Caso contrário, existiria um ponto $x_3 \in M$, com $d(x_3, x_2) \geq \frac{\epsilon}{2}$, $d(x_3, x_1) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Prossequindo com este raciocínio, veremos que, ou existe um número finito de pontos x_1, x_2, \dots, x_n em M tais que $M = B\left(x_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \dots \cup B\left(x_n, \frac{\epsilon}{2}\right)$, ou então é possível obter uma sequência de pontos $x_n \in M$, com $d(x_m, x_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$ para $m \neq n$ quaisquer. Tal sequência, não possuiria uma subsequência de Cauchy, portanto, nem uma subsequência convergente e contrariaria a hipótese. Logo, a primeira alternativa é a que ocorre, e M é totalmente limitado.

4) \Rightarrow 1) Suponhamos por absurdo que existe uma cobertura aberta de M , tal que $M = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ que não possui subcobertura finita. Definimos uma sequência decrescente de subconjuntos $S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$, onde o diâmetro de S_n é $< \frac{1}{n}$ e nenhum dos S_n pode ser coberto por um número finito de conjuntos V_λ . Sendo M totalmente limitado,

ele pode ser expresso como reunião de um número finito de conjuntos de diâmetro < 1 . Pelo menos um desses conjuntos, supondo S_1 , não pode ser coberto por um número finito dos V_λ . Mas S_1 também é totalmente limitado, logo, é reunião de um número finito de subconjuntos de diâmetro $< \frac{1}{2}$. Pelo menos um desses conjuntos, supondo S_2 , não pode ser coberto por um número finito dos V_λ , pois se todos estivessem, sua reunião S_1 também estaria. Prosseguindo analogamente, obtemos uma sequência $S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ com as propriedades desejadas. Nenhum dos S_n é vazio. Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in S_n$. Como o diâmetro S_n é $< \frac{1}{n}$, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em M . Sendo M completo, existe $\lim x_n = x \in M$. O ponto x está contido em algum aberto V_λ da cobertura. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset V_\lambda$. Podemos tomar n tão grande que $\frac{1}{n} + d(x_n, x) < \epsilon$. Então, $S_n \subset B(x; \epsilon)$ pois $y \in S_n$ implica $d(y, x_n) < \frac{1}{2}$ e, portanto, $d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + d(x_n, x) < \epsilon$. Mas então $S_n \subset V_\lambda$, contrariando o fato de que S_n não está contido numa reunião finita dos conjuntos V_λ . Isto encerra a demonstração. ■

1.2 Lema Ky Fan

A seguir estudamos um resultado publicado em 1929 por B. Knaster, C. Kuratowski e S. Mazurkiewicz, conhecido como Lema KKM, ele estabelece condições para que a interseção de $m + 1$ conjuntos fechados em \mathbb{R}^m seja não vazia. Logo após, vemos uma extensão deste resultado para uma família de subconjuntos fechados em um espaço topológico de Hausdorff, conhecido como Lema Ky Fan. Os resultados aqui enunciados podem ser encontrados em ([4], p. 207 e 208).

Os $m + 1$ pontos $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, são denominados **afim independentes** se os m pontos $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ são linearmente independentes. Se os $m + 1$ pontos $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ são afim independentes o conjunto $S = \text{simp}\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, de todas as combinações convexas, é chamado de **m-simplex**.

Se x é um ponto de um m-simplex $S = \text{simp}\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ de \mathbb{R}^n podemos determinar $m + 1$ números reais $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ tal que $\lambda_i \geq 0$, ($i = 0, \dots, m$), $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ e $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i$.

A demonstração do Lema a seguir será omitida, pois usa ferramentas matemáticas que destoam das que são utilizadas nesta dissertação. Mas, podem ser encontradas na bibliografia indicada.

Lema KKM. ([4], p. 208) *Seja $S = \text{simp}\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ um m-simplex de \mathbb{R}^m e seja F_i , $i = 0, \dots, m$, $m+1$ subconjuntos fechados de \mathbb{R}^m tal que, para todo subconjunto $I \subset \{0, \dots, m\}$, $\text{simp}\{x_i\}_{i \in I} \subset \bigcup_{i \in I} F_i$. Então $\bigcap_{i=0}^m F_i \neq \emptyset$.*

Demonstração. Ver Teorema 9.12 em ([4], p. 208). ■

Utilizamos o Lema Ky Fan, demonstrado abaixo, para demonstrar um resultado de existência de solução de um problema de equilíbrio que estudamos mais à frente.

Definição 1.2.1. ([5], p. 30) Seja X um espaço Topológico real e $D \subset X$. O **fecho convexo**, denotado por $\text{conv}D$, é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de D , isto é,

$$\text{conv}D = \left\{ x \in X; \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, x_i \in D, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

Lema Ky Fan. ([4], p. 208) Seja Y um espaço vetorial topológico de Hausdorff, X um subconjunto não vazio de Y e $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, com $F(x) \subset Y$ não vazio e fechado para todo $x \in X$, tal que

- (i) Para todo $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n F(x_i)$;
(ii) Existe $\bar{x} \in X$ tal que $F(\bar{x})$ é compacto.

Então $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.

Demonstração. Consideremos a família $\mathcal{A} = \{A(x); x \in X\}$, onde $A(x) = F(\bar{x}) \cap F(x)$. Cada $A(x)$ é fechado, pois é interseção de dois conjuntos fechados. Notemos que se

$$\bigcap_{x \in X} A(x) \neq \emptyset, \text{ então } \bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$$

assim basta mostrar que $\bigcap_{x \in X} A(x) \neq \emptyset$, mas como $A(x) \subset F(\bar{x})$ e $F(\bar{x})$ é compacto, então, pelo Teorema 1.1.1 é suficiente mostrar que \mathcal{A} tem a propriedade da interseção finita, ou seja, precisamos mostrar que para cada $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$,

$$\bigcap_{i=1}^n A(x_i) = \bigcap_{i=1}^n (F(\bar{x}) \cap F(x_i)) = F(\bar{x}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n F(x_i) \right) \neq \emptyset$$

Temos que os x_i não são em geral afim independentes, logo não podemos aplicar o Lema KKM. Sendo assim, fazemos $\bar{x} = x_0$ e consideramos os conjuntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $T = \text{simp}\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, onde e_0 é a origem e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , e a aplicação $\phi : T \rightarrow Y$ definida por

$$\phi(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i, \text{ onde } a = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i, \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$$

A aplicação ϕ em geral não é injetiva uma vez que os x_i não são necessariamente afim independentes, logo a dimensão do conjunto convexo $\text{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pode ser inferior a n , mas ϕ é contínua.

Defina $G_i = \phi^{-1}(F(x_i))$, $i = 0, \dots, n$. Mostremos que os conjuntos G_i cumprem as condições do Lema KKM. Da condição (i), temos $x_i \in F(x_i)$ logo $G_i \neq \emptyset$, para todo $i = 0, \dots, n$. Além do mais, cada G_i é fechado, pois é imagem inversa de conjunto fechado por uma aplicação contínua, aí temos $m + 1$ conjuntos fechados. Para cada conjunto $I \subset \{0, 1, \dots, n\}$, dado arbitrariamente $a = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in \text{simp}\{e_i; i \in I\}$, então usando a definição de ϕ e condição (i),

$$a \in \phi^{-1}(\phi(a)) = \phi^{-1}\left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i\right) \subset \phi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} F(x_i)\right) = \bigcup_{i \in I} \phi^{-1}(F(x_i)) = \bigcup_{i \in I} G_i$$

ou seja, $\text{simp}\{e_i; i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$. Pelo Lema KKM, $\bigcap_{i=0}^n G_i \neq \emptyset$.

Daí, segue

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^n G_i = \phi^{-1}(F(x_0)) \cap \dots \cap \phi^{-1}(F(x_n)) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^n F(x_i)\right)$$

logo,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^n F(x_i) = F(\bar{x}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n F(x_i)\right) = \bigcap_{i=1}^n (F(\bar{x}) \cap F(x_i)) = \bigcap_{i=1}^n A(x_i)$$

Portanto, a família \mathcal{A} tem a propriedade da interseção finita, do Teorema 1.1.1 temos $\bigcap_{x \in X} A(x) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$, como queríamos. ■

1.3 Semicontinuidade de funções

Nesta seção, definimos função semicontínua inferior e superior em um espaço topológico X e mostramos alguns resultados que as caracterizam.

Usamos a notação $\overline{\mathbb{R}}$ para representar o conjunto dos números reais estendido, ou seja, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$. No qual além das operações já conhecidas que envolvem números reais definimos: $a + \infty = \infty + a = \infty$ e $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$, se $a \in \mathbb{R}$, e $-\infty = -\infty$ e $-(-\infty) = \infty$.

Definição 1.3.1. ([14], p. 107) Uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ é dita ser **semicontínua inferiormente-s.c.i.** no ponto $x \in X$ se, para cada $\lambda < f(x)$, existe uma vizinhança de x , denotada por V_x , tal que $\lambda < f(y)$ para todo $y \in V_x$. Quando esta condição é satisfeita para todo $x \in X$, dizemos que a função f é semicontínua inferiormente em X .

De forma análoga

Definição 1.3.2. ([14], p. 107) Uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ é dita ser **semicontínua superiormente-s.c.s.** no ponto $x \in X$ se, para cada $\lambda > f(x)$, existe uma vizinhança de x , denotada por V_x , tal que $\lambda > f(y)$ para todo $y \in V_x$. Quando esta condição é satisfeita para todo $x \in X$, dizemos que a função f é semicontínua superiormente em X .

Exemplo 1.3.1. Seja f_n a função de \mathbb{R} em $\overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x^n}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Para n par, a função f_n é s.c.i. em 0. De fato, seja $\lambda < f(0) = 0$. Considerando $V_0 = (\lambda, -\lambda)$ uma vizinhança de 0, temos $f_n(x) \geq 0 > \lambda$, para todo $x \in V_0$.

Exemplo 1.3.2. Seja f a função de \mathbb{R} em $\overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f é s.c.i. em todo ponto racional, pois dado $x \in \mathbb{Q}$ e tomando $\lambda < f(x) = 0 < \lambda$, temos $f(y) \geq 0$ para todo $y \in V_x$, onde V_x é uma vizinhança qualquer de x . Por outro lado, f é s.c.s. para todo ponto irracional, pois dados $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\lambda > f(x) = 1 < \lambda$, temos $f(y) = 0$ ou $f(y) \leq 1$ para todo $y \in V_x$, onde V_x é uma vizinhança qualquer de x .

Proposição 1.3.1. ([6], p. 70) *Seja a função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) f é s.c.i.
- (b) O conjunto $\{x \in X; f(x) \leq \lambda\}$ é fechado, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (c) O conjunto $\text{Epi} f = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}; f(x) \leq t\}$, denominado **epígrafo** de f , é fechado.

Demonstração. Mostremos que (a) \Leftrightarrow (b)

(a) \Rightarrow (b) Seja $A = \{x \in X; f(x) \leq \lambda\}$. Se A é vazio, logo é fechado. Se A é não vazio, tomemos a sequência $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x_0 \in X$. Mostremos que $x_0 \in A$ e, portanto, A é fechado. Temos $f(x_n) \leq \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $f(x_0) \leq \lambda$, isto é, $x_0 \in A$. Caso contrário $\lambda < f(x_0)$, mas por hipótese f é s.c.i., assim existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0 tal que $\lambda < f(y)$ para todo $y \in V_{x_0}$. Como $x_n \rightarrow x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in V_{x_0}$, daí para $n \geq n_0$ temos $\lambda < f(x_n)$, absurdo!

(b) \Rightarrow (a) Supomos, agora, que dado $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $A = \{x \in X; f(x) \leq \lambda\}$ seja fechado em X . Suponhamos, por absurdo, que f não seja s.c.i. em X , ou seja, f não é s.c.i. em algum $x \in X$. Seja x_0 o elemento para o qual f não é s.c.i., assim existe um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, com $\lambda_0 < f(x_0)$, tal que para toda vizinhança de x_0 é possível encontrar x com $f(x) \leq \lambda_0$. Consideremos a seguinte família de vizinhança $V_n = B(x_0; \frac{1}{n})$ de x_0 , de onde para cada n tomemos $x_n \in B(x_0; \frac{1}{n})$ tal que $f(x_n) \leq \lambda_0$. Seja o conjunto $A_{\lambda_0} = \{x \in X; f(x) \leq \lambda_0\}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_{\lambda_0}$ e, além disso, $x_n \rightarrow x_0$, mas $x_0 \notin A_{\lambda_0}$, ou seja, A_{λ_0} não é fechado. Absurdo!

Para mostrar (a) \Leftrightarrow (c) ver Proposição 2.5 em ([6], p. 70). ■

Corolário 1.3.1. ([1], p. 43) *A função f é s.c.i. se, e somente se, o conjunto $\{x \in X; \lambda < f(x)\}$ é aberto, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Basta notar que $\{x \in X; \lambda < f(x)\} = X \setminus \{x \in X; f(x) \leq \lambda\}$. ■

Proposição 1.3.2. ([1], p. 43) *A função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é s.c.i. em $x_0 \in X$ se, e somente se, para cada sequência $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x_0 \in X$ tivermos $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam a função f s.c.i. em $x_0 \in X$ e a sequência $\{x_n\} \subset X$, com $x_n \rightarrow x_0$. Para cada real $\lambda < f(x_0)$ existe uma vizinhança V_{x_0} tal que $\lambda < f(x)$ para todo $x \in V_{x_0}$. Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_{x_0}$ para todo $n > n_0$, isto é, $\lambda < f(x_0)$ para todo $n > n_0$. Assim, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \lambda$. Como isso é válido para cada $\lambda < f(x_0)$ concluímos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$.

(\Leftarrow) Suponhamos que para cada sequência $\{x_n\} \subset X$ com $x_n \rightarrow x_0$ temos $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$. Assumimos, por absurdo, que f não é s.c.i. em x_0 , ou seja, existe $\lambda < f(x_0)$ para o

qual toda vizinhança V de x_0 contém um ponto x que cumpre $f(x) \leq \lambda$. Considerando a família de vizinhança $B_n(x_0, \frac{1}{n})$ de x_0 onde para cada n escolhemos x_n tal que $f(x_n) \leq \lambda$. Assim, $x_n \rightarrow x_0$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lambda < f(x_0)$, absurdo, pois isso contradiz a hipótese. Portanto, f é s.c.i. em $x_0 \in X$. ■

Proposição 1.3.3. *Seja X um espaço topológico e $K \subset X$ um conjunto compacto. Se $f : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é s.c.i., então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M < f(x)$ para todo $x \in K$.*

Demonstração. Sejam $f : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. e $f(K) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda, \infty]$ uma cobertura de $f(K)$.

Sendo f s.c.i., os conjuntos $f^{-1}((\lambda, \infty]) = \{x \in X; \lambda < f(x)\}$, que pelo Corolário 1.3.1 é aberto, constituem uma cobertura aberta do conjunto compacto K , da qual se pode extrair uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}((\lambda_1, \infty]) \cup \dots \cup f^{-1}((\lambda_n, \infty])$. Assim, $f(K) \subset (\lambda_1, \infty] \cup \dots \cup (\lambda_n, \infty]$. Definindo $M = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, temos $f(K) \subset (M, \infty]$, ou seja, $M < f(x)$ para todo $x \in K$. ■

Para uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ s.c.s. valem resultados análogos, cujas demonstrações são análogas as dadas para função s.c.i., a saber:

Proposição 1.3.4. *A função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é s.c.s. se, e somente se, o conjunto $\{x \in X; f(x) \geq \lambda\}$ é fechado, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Corolário 1.3.2. *A função f é s.c.s. se, e somente se, o conjunto $\{x \in X; \lambda > f(x)\}$ é aberto, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Proposição 1.3.5. *Seja a função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. f é s.c.s. em $x_0 \in X$ se, e somente se, para cada sequência $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x_0 \in X$ tivermos $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x_0)$.*

Proposição 1.3.6. *Seja X um espaço topológico e $K \subset X$ um conjunto compacto. Se $f : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é s.c.s., então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M > f(x)$ para todo $x \in K$.*

1.4 Espaço Normado

Nesta seção definiremos espaço normado e espaço de Banach. Estudamos alguns resultados para estes espaços, em especial o teorema de Hahn-Banach e resultados que seguem dele, os quais podem ser encontrados em [8].

Definição 1.4.1. ([8], p. 02) Um **espaço normado** é um par $(E, \|\cdot\|)$ formado por um conjunto E e uma norma $\|\cdot\|$ em E .

Definição 1.4.2. ([8], p. 02) Um espaço normado E é chamado **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.4.1. *Segue do Exemplo 1.1.8 que o conjunto $B(X)$ das funções limitadas definidas em X é um espaço de Banach real.*

Definição 1.4.3. ([8], p. 31) Um **operador linear contínuo** do espaço normado E no espaço normado F , ambos sobre o mesmo corpo \mathbb{R} , é uma função $T : E \rightarrow F$, que é linear, isto é,

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para quaisquer $x, y \in E$ e;

- $T(ax) = aT(x)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e qualquer $x \in E$;

e contínua, ou seja, para todos $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

Definição 1.4.4. ([8], p. 31) O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$, que é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com as operações usuais de funções. Quando F é o corpo \mathbb{R} , escrevemos E^* no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, chamamos esse espaço de **dual de E** , e dizemos que seus elementos são **funcionais lineares contínuos**. O valor de um funcional $f \in E^*$ em $x \in E$ será denotado por $\langle f, x \rangle$.

Definição 1.4.5. ([8], p. 32) Uma função $f : M \rightarrow N$ entre espaços métricos é **lipschitziana** se existe uma constante $L > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

Definição 1.4.6. ([8], p. 32) Uma função $f : M \rightarrow N$ entre espaços métricos é **uniformemente contínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$.

O teorema seguinte é de grande importância, pois estabelece condições equivalentes para que um operador linear entre espaços normados seja contínuo.

Teorema 1.4.1. ([8], p. 32 e 33) Sejam E e F espaços normados sobre \mathbb{R} e $T : E \rightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:

- T é lipschitziano.
- T é uniformemente contínuo
- T é contínuo.
- T é contínuo em algum ponto de E .
- T é contínuo na origem.
- $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$
- Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Seja T lipschitziano. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Quaisquer que sejam $x, y \in M$ com $\|x - y\| < \delta$ tem-se $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| < L \cdot \left(\frac{\epsilon}{L}\right) = \epsilon$, ou seja, T é uniformemente contínuo.

(b) \Rightarrow (c) Dado $x_0 \in E$ arbitrário, mas fixo. Supondo T é uniformemente contínuo, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $x \in M$ e $\|x - x_0\| < \delta$, logo T é contínuo em x_0 . Da arbitrariedade de x_0 , concluímos que T é contínuo.

(c) \Rightarrow (d) Como T é contínuo, então é contínuo em todos os pontos de E , logo é contínuo em algum ponto de E .

(d) \Rightarrow (e) Suponha T contínuo no ponto $x_0 \in E$, ou seja, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$. Tome $x \in E$ tal que $\|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$. Portanto, da linearidade T e continuidade de T em x_0

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| \\ &= \|T(x)\| \\ &= \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \epsilon \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de T na origem. (e) \Rightarrow (f) Da lineariedade de T e da continuidade de T na origem, dado $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(0)\| = \|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Tomando $\|x\| \leq 1$, temos $\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| \leq \left|\frac{\delta}{2}\right|\|x\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, e então $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| < 1 \implies \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}$. Ou seja, $0 \leq \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

(f) \Rightarrow (g) Para $x \in E$, $x \neq 0$, temos por hipótese

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\{\|T(y)\|; \|y\| \leq 1\}$$

daí

$$\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\|; \|y\| \leq 1\})\|x\| = C\|x\|$$

para todo $x \neq 0$, onde $C = \sup\{\|T(y)\|; \|y\| \leq 1\}$. Se $x = 0$, temos

$$\|T(x)\| = \|T(0)\| = 0 = C\|0\| = C\|x\|$$

Portanto, vale (g).

(g) \Rightarrow (a) Dados $x_1, x_2 \in E$, da linearidade de T e da hipótese

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

e, portanto, T é lipschitziano com constante C . ■

A condição (f) do Teorema 1.4.1 nos mostra que operadores lineares contínuos são exatamente aqueles que transformam conjuntos limitados do domínio em conjuntos limitados do contradomínio.

Além disso, a mesma condição nos dá um método para definir uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F , dada na seguinte proposição.

Proposição 1.4.1. ([8], p. 34) *Sejam E e F espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

(b) *$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.*

(c) *Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.*

Demonstração.

(a) Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \|T\| = 0$, então $\|T(x)\| = 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| \leq 1$. Como todo $0 \neq y \in E$ pode ser escrito $y = \frac{\|y\|}{\|y\|}y = \|y\|\frac{y}{\|y\|}$, temos $T(y) = T\left(\|y\|\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 0$, pois $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$. Concluimos que T é o operador nulo. Se $T \equiv 0$, logo $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 0$. Por outro lado, se existe $y \in E$ tal que $T(y) \neq 0$, então $T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{\|y\|}T(y) \neq 0$ e, daí $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} > 0$

Dados $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = |\lambda| \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \lambda\|T\|$$

Dados $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup\{\|(T_1 + T_2)(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T_1(x) + T_2(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T_1(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|T_2(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

Logo temos uma norma.

(b) Dado $0 \neq x \in E$, temos

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\|; y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} = \|T\|$$

e, daí usando a linearidade de T

$$\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\|; y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\}) \|x\| = \|T\| \|x\|$$

Se $x = 0$

$$\|T(x)\| = \|T(0)\| = 0 = \|T\| \|0\| = \|T\| \|x\|$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.

(c) Seja $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$, devemos mostrar que esta converge em $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$. Logo

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \epsilon \|x\| \quad (1.2)$$

para todo $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$ fixado, a sequência $\{T_n(x)\}_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F , logo convergente pois F é Banach. Em vista disso, definimos o operador

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (1.3)$$

segue que, dado $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, das propriedades de limite e da linearidade de T_n temos,

$$T(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) = T(x) + \alpha T(y)$$

ou seja, T é linear.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ na desigualdade (1.2) e usando a igualdade (1.3) obtemos

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad (1.4)$$

para todo $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|T_{n_0}(x) - T(x)\| = \|(T_{n_0} - T)(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

para todo $x \in E$, como T_{n_0} e T são lineares, a condição (g) do Teorema 1.4.1 nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto, $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (1.4) temos ainda $\left\| (T_n - T)\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \epsilon$ para todo $x \in E$, isto é,

$$\sup\{\|(T_n - T)(y)\|; y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} \leq \epsilon \Rightarrow \|T_n - T\| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$, e assim resulta que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. ■

Corolário 1.4.1. ([8], p. 35) *O dual E^* de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

Demonstração. É só notar que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ e aplicar o item (c) da Proposição 1.4.1, já que \mathbb{R} é um espaço de Banach. ■

Agora apresentamos um dos mais importante teorema da Análise Funcional, o Teorema Hahn-Banach, em particular em espaço de Banach real, e alguns resultados derivados diretamente. Como trata-se de um resultado renomado omitiremos a sua demonstração, que pode ser encontrada com facilidade em diversos livros de análise funcional.

Teorema de Hahn-Banach. ([8], p. 56) *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E$$

Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que $\langle \varphi, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ , isto é, $\langle \tilde{\varphi}, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $\langle \tilde{\varphi}, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Ver Teorema 3.1.1 em ([8], p. 56) ■

Corolário 1.4.2. ([8], p. 60) *Sejam G um subespaço de um espaço normado E sobre \mathbb{R} e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Tomemos a função $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|\varphi\|\|x\|$, para todo $x \in E$. Temos que

$$p(ax) = \|\varphi\|\|ax\| = a\|\varphi\|\|x\| = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$

$p(x + y) = \|\varphi\|\|x + y\| \leq \|\varphi\|(\|x\| + \|y\|) = \|\varphi\|\|x\| + \|\varphi\|\|y\| = p(x) + p(y) \forall x, y \in E$
e $\langle \varphi, x \rangle \leq \|\varphi\|\|x\| = p(x)$ para todo $x \in G$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear

$$\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \langle \tilde{\varphi}, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle, \forall x \in G \text{ e } \langle \tilde{\varphi}, x \rangle \leq p(x) = \|\varphi\|\|x\|, \forall x \in E \quad (1.5)$$

temos também,

$$-\langle \tilde{\varphi}, x \rangle = \langle \tilde{\varphi}, -x \rangle \leq p(-x) = \|\varphi\|\|-x\| = \|\varphi\|\|x\| \quad (1.6)$$

para todo $x \in E$. Assim, dos resultados (1.5) e (1.6) obtemos $\|\langle \tilde{\varphi}, x \rangle\| \leq \|\varphi\|\|x\|$ para todo $x \in E$. Pelo Teorema 1.4.1 e pelo item (a) da Proposição 1.4.1, respectivamente, temos

$$\tilde{\varphi} \text{ é contínuo e } \|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\| \quad (1.7)$$

Além disso,

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_G} \|\langle \varphi, x \rangle\| = \sup_{x \in B_G} \|\langle \tilde{\varphi}, x \rangle\| \leq \sup_{x \in B_E} \|\langle \tilde{\varphi}, x \rangle\| = \|\tilde{\varphi}\| \quad (1.8)$$

Portanto, de (1.7) e (1.8) obtemos $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Disto e de (1.5) temos o que queríamos. ■

Corolário 1.4.3. *Seja E um espaço normado. Para cada $x_0 \in E$ existe $\tilde{\varphi} \in E^*$ tal que*

$$\|\tilde{\varphi}\| = \|x_0\| \text{ e } \langle \tilde{\varphi}, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$$

Demonstração. Se $x_0 = 0$, basta considerar o funcional nulo. Se $x_0 \neq 0$, considere o subespaço vetorial gerado por x_0 , $G = [x_0]$, e defina $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$, pondo

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle \varphi, tx_0 \rangle = t\|x_0\|^2, t \in \mathbb{R}, \text{ para todo } x = tx_0 \in G$$

. Dados $x, y \in G$, ou seja, $x = t_1x_0$ e $y = t_2x_0$, com $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, x + \alpha y \rangle &= \langle \varphi, t_1x_0 + \alpha t_2x_0 \rangle \\ &= \langle \varphi, (t_1 + \alpha t_2)x_0 \rangle \\ &= (t_1 + \alpha t_2)\|x_0\|^2 \\ &= t_1\|x_0\|^2 + \alpha t_2\|x_0\|^2 \\ &= \langle \varphi, x \rangle + \alpha \langle \varphi, y \rangle \end{aligned}$$

isto é, φ é linear. dado $x \in E$, temos

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(t_1x_0)\| = |t_1|\|x_0\|^2 = \|x_0\|\|t_1x_0\| = \|x_0\|\|x\| \quad (1.9)$$

φ é contínua.

Segue do Corolário 1.4.2, existe $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle \tilde{\varphi}, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle$, para todo $x \in G$, e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Em particular,

$$\langle \tilde{\varphi}, x_0 \rangle = \langle \varphi, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$$

e de (1.9)

$$\|\tilde{\varphi}\| = \|x_0\|$$

■

Observação 1.4.1. Notemos que, dado $0 \neq x_0 \in E$, a existência de $\tilde{\varphi} \in E^*$ com $\|\tilde{\varphi}\| = \|x_0\|$ e $\langle \tilde{\varphi}, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ implica na existência de $\bar{\varphi} \in E^*$ tal que $\|\bar{\varphi}\| = 1$ e $\langle \bar{\varphi}, x_0 \rangle = \|x_0\|$, é só definir $\bar{\varphi} = \frac{1}{\|x_0\|}\tilde{\varphi}$. Este resultado é dado em ([8], p. 60) como um Corolário, a saber Corolário 3.1.4.

Usamos a notação B_E para a bola unitária fechada de um espaço normado E , ou seja, $B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$.

Corolário 1.4.4. ([8], p. 60) *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\langle \varphi, x \rangle| = \max_{\varphi \in E^*, \|\varphi\|=1} |\langle \varphi, x \rangle|$$

Demonstração. Se $x = 0$ o resultado é imediato. Considere, então, $x \neq 0$. Para cada funcional $\varphi \in E^*$, $\|\varphi\| \leq 1$, temos $|\langle \varphi, x \rangle| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq \|x\|$, isso mostra que $\sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\langle \varphi, x \rangle| \leq \|x\|$.

Por outro lado, do Corolário 1.4.3 existe $\tilde{\varphi} \in E^*$ tal que $\|\tilde{\varphi}\| = \|x\|$ e $\tilde{\varphi}(x) = \|x\|^2$.

Seja a função $\varphi = \frac{1}{\|x\|}\tilde{\varphi}$, temos que $\varphi \in E^*$. Temos $\|\varphi\| = \left\| \frac{1}{\|x\|}\tilde{\varphi} \right\| = \frac{\|\tilde{\varphi}\|}{\|x\|} = 1$ e

$\langle \varphi, x \rangle = \frac{1}{\|x\|}\langle \tilde{\varphi}, x \rangle = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$, o que completa demonstração. ■

As demonstrações das duas proposições seguintes vão ser omitidas, pois utilizam ferramentas que vão além das apresentadas nesta dissertação.

Proposição 1.4.2. ([8], p. 64-65) *Sejam E um espaço normado, M um subespaço fechado de E , $y_0 \in E \setminus M$ e $d = \text{dist}(y_0, M)$. Então existe um funcional linear $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$, $\langle \varphi, y_0 \rangle = d$ e $\langle \varphi, x \rangle = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Ver Proposição 3.3.1 em ([8], p. 64-65) ■

Proposição 1.4.3. ([8], p. 73) *Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço normado E . Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E^*$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B$$

Demonstração. Ver Teorema 3.4.9 em ([8], p. 73) ■

1.5 Espaço Reflexivo

Os espaços normados reflexivos nos fornecem resultados importantes para esta dissertação, como por exemplo: quando o espaço normado é reflexivo a bola fechada unitária é compacta, entre outros.

Iniciamos definindo isomorfismo e isometria. Apresentamos uma isometria entre um espaço normado e o seu bidual que nos leva à definição de espaço reflexivo.

Definição 1.5.1.

([8], p. 31) Dizemos que dois espaços normados E e F são **isomorfos**, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \rightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \rightarrow E$ é também contínuo. Tal operador T é chamado de **isomorfismo**.

([8], p. 32) Um operador $T : E \rightarrow F$ tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamado **isometria**. Um operador linear $T : E \rightarrow F$ que é uma **isometria** é chamada de **isometria linear**.

Observação 1.5.1. (i) Seja $T : E \rightarrow F$ um isomorfismo. Dados $y_1, y_2 \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, como T é bijetor existem $x_1, x_2 \in E$, únicos, tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Assim,

$$\begin{aligned} T^{-1}(y_1 + \alpha y_2) &= T^{-1}(T(x_1) + \alpha T(x_2)) = T^{-1}(T(x_1 + \alpha x_2)) \\ &= x_1 + \alpha x_2 = T^{-1}(T(x_1)) + \alpha T^{-1}(T(x_2)) = T^{-1}(y_1) + \alpha T^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

ou seja, T^{-1} é linear se T é linear.

(ii) Dados $x_1, x_2 \in E$, se $T : E \rightarrow F$ é uma isometria linear, então se

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow T(x_1) - T(x_2) = 0 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0$$

daí

$$0 = \|T(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

logo T é injetor. E, da definição, toda isometria linear é um operador contínuo.

Para todo espaço normado E , podemos considerar, além do dual E^* , o dual de E^* , chamado de **bidual** de E e denotado por E^{**} . O resultado a seguir mostrar que podemos encontrar todo espaço normado E dentro de seu bidual E^{**} .

Proposição 1.5.1. ([8], p. 89) Para todo espaço normado E , o operador linear

$$J_E : E \rightarrow E^{**}, \langle J_E(x), \varphi \rangle = \langle \varphi, x \rangle \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E^* \quad (1.10)$$

é uma isometria linear, chamada **mergulho canônico** de E em E^{**} .

Demonstração. Dado $x, y \in E$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

a) Mostremos primeiro que J_E está bem definida, que $J_E(x) \in E^{**}$ é linear e contínuo para todo $x \in E$. De fato,

$$\langle J_E(x), \varphi_1 + \alpha\varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1 + \alpha\varphi_2, x \rangle = \langle \varphi_1, x \rangle + \alpha\langle \varphi_2, x \rangle = \langle J_E(x), \varphi_1 \rangle + \alpha\langle J_E(x), \varphi_2 \rangle$$

e

$$\|\langle J_E(x), \varphi \rangle\| = \|\langle \varphi, x \rangle\| \leq \|x\| \|\varphi\|$$

Portanto, para cada $x \in E$ temos $J_E(x) \in E^{**}$ e, assim, J_E está bem definido.

b) Provemos que J_E é linear.

$$\langle J_E(x + \alpha y), \varphi \rangle = \langle \varphi, x + \alpha y \rangle = \langle \varphi, x \rangle + \alpha\langle \varphi, y \rangle = \langle J_E(x), \varphi \rangle + \alpha\langle J_E(y), \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in E^*$, logo $J_E(x + \alpha y) = J_E(x) + \alpha J_E(y)$.

c) Da definição de norma em E^{**} e do Corolário 1.4.4, segue

$$\|J_E(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |J_E(x)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(x)| = \|x\|$$

Logo, J_E é uma isometria linear ■

Observação 1.5.2. Do item c) resulta que J_E é contínuo e dado $x \neq 0$, $\|J_E(x)\| = \|x\| \neq 0$, ou seja, $J_E(x) \neq 0^*$, logo J_E é injetor.

Definição 1.5.2. ([8], p. 90) Um espaço normado E é dito **reflexivo** se o mergulho canônico $J_E : E \rightarrow E^{**}$ for sobrejetor, isto é, $J_E(E) = E^{**}$.

Observação 1.5.3. Quando o mergulho canônico $J_E : E \rightarrow E^{**}$ for sobrejetor, este passa a ser um isomorfismo isométrico.

Definição 1.5.3. ([8], p. 92) Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E; F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $T' : F^* \rightarrow E^*$ por

$$\langle T'(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, T(x) \rangle \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F^*$$

O operador T' é chamado **adjunto** de T .

Observação 1.5.4. Vejamos que T' está bem definida, isto é, que $T'(\varphi) \in E^*$ para cada $\varphi \in F^*$. De fato, dados $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle T'(\varphi), x + \alpha y \rangle &= \langle \varphi, T(x + \alpha y) \rangle = \langle \varphi, T(x) + \alpha T(y) \rangle \\ &= \langle \varphi, T(x) \rangle + \alpha \langle \varphi, T(y) \rangle = \langle T'(\varphi), x \rangle + \alpha \langle T'(\varphi), y \rangle \end{aligned}$$

assim, $T'(\varphi)$ é linear, e

$$\|\langle T'(\varphi), x \rangle\| = \|\langle \varphi, T(x) \rangle\| \leq \|\varphi\| \|T(x)\| \leq \|\varphi\| \|T\| \|x\|$$

logo $T'(\varphi)$ é contínua.

Proposição 1.5.2. ([8], p. 92) *Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Então $T' \in \mathcal{L}(F^*; E^*)$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' também é um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração. Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in F^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle T'(\varphi_1 + \alpha\varphi_2), x \rangle = \langle \varphi_1 + \alpha\varphi_2, T(x) \rangle = \langle \varphi_1, T(x) \rangle + \alpha \langle \varphi_2, T(x) \rangle = \langle T'(\varphi_1), x \rangle + \alpha \langle T'(\varphi_2), x \rangle$$

para todo $x \in E$, assim T' é linear.

Da Observação 1.5.4 temos $T'(\varphi) \in E^*$.

Mostremos que T' é contínuo e $\|T'\| = \|T\|$, para cada $\varphi \in F^*$ temos

$$\begin{aligned} \|T'(\varphi)\| &= \sup_{x \in B_E} |\langle T'(\varphi), x \rangle| = \sup_{x \in B_E} |\langle \varphi, T(x) \rangle| \\ &\leq \sup_{x \in B_E} \|\varphi\| \|T(x)\| = \|\varphi\| \cdot \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|\varphi\| \cdot \|T\| \end{aligned}$$

o que mostra que $\|T'\| \leq \|T\|$ e que T' é contínua.

Por outro lado, para cada $x \in E$, pelo Corolário 1.4.4 aplicado a F temos

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{\varphi \in B_{F^*}} |\langle \varphi, T(x) \rangle| = \sup_{\varphi \in B_{F^*}} |\langle T'(\varphi), x \rangle| \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{F^*}} \|x\| \|T'(\varphi)\| = \|x\| \cdot \sup_{\varphi \in B_{F^*}} \|T'(\varphi)\| = \|x\| \cdot \|T'\| \end{aligned}$$

mostrando que $\|T\| \leq \|T'\|$. Portanto, $\|T\| = \|T'\|$

Suponhamos que T seja um isomorfismo e mostremos que T' é bijetor.

T' é sobrejetor. Seja $\phi \in E^*$, considere $\varphi \in F^*$ dado por $\langle \varphi, z \rangle = \langle \phi, T^{-1}(z) \rangle$ para todo $z \in F$. Assim,

$$\langle T'(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, T(x) \rangle = \langle \phi, T^{-1}(T(x)) \rangle = \langle \phi, x \rangle$$

para todo $x \in E$, obtemos $T'(\varphi) = \phi$.

T' é injetor. Seja $\varphi \in \ker(T')$, $T'(\varphi) = 0^*$ em E^* , então

$$0 = \langle 0^*, x \rangle = \langle T'(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, T(x) \rangle \text{ para todo } x \in E$$

Como T é sobrejetor, isto é, a imagem de T é todo F , resulta que $\varphi = 0^*$ em F^* . Assim, $\ker(T')$ contém apenas o vetor nulo e como T é linear, então concluímos que T' é injetor.

Supondo que T é um isomorfismo isométrico, mostremos que T' é um isomorfismo isométrico. Como T é um isomorfismo isométrico, $x \in B_E$ se, e somente se, $T(x) \in B_F$, logo

$$\|T'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_E} |\langle T'(\varphi), x \rangle| = \sup_{x \in B_E} |\langle \varphi, T(x) \rangle| = \sup_{T(x) \in B_F} |\langle \varphi, T(x) \rangle| = \|\varphi\|$$

Além disso, $(T')^{-1} : E^* \rightarrow F^*$ é contínuo. Dado $\delta \in E^*$, temos

$$\begin{aligned} \|(T')^{-1}(\delta)\| &= \sup_{y \in B_F} |\langle (T')^{-1}(\delta), y \rangle| \\ &= \sup_{y \in B_F} |\langle (T^{-1})'(\delta), y \rangle| \\ &= \sup_{y \in B_F} |\langle \delta, T^{-1}(y) \rangle| \\ &= \sup_{x \in B_E} |\langle \delta, x \rangle| \\ &= \|\delta\| \end{aligned}$$

Portanto, T' é um isomorfismo isométrico. ■

Lema 1.5.1. *Seja o mergulho canônico $J_E : E \rightarrow E^{**}$. Se E é um espaço de Banach, então $J_E(E)$ é um subespaço fechado de E^{**} .*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach. J_E é um operador linear contínuo e injetivo. Mostremos que $J_E(E) = \{J_E(x); x \in E\}$ é um subespaço fechado de E^{**} . Se J_E é sobrejetor o resultado é imediato. Se J_E não é sobrejetor, temos:

$J_E(E)$ é subespaço. De fato, dados $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x \in E$ e $(x + y) \in E$. Assim, $J_E(x) + J_E(y) = J_E(x + y) \in E^{**}$ e $\alpha J_E(x) = J_E(\alpha x) \in E^{**}$.

$J_E(E)$ é fechado. De fato, dado uma sequência de Cauchy $\{J_E(x_n)\} \subset J_E(E)$ com $J_E(x_n) \rightarrow \psi$ em E^{**} . Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$ implica

$$\|J_E(x_n - x_m)\| = \|J_E(x_n) - J_E(x_m)\| < \epsilon$$

como J_E é uma isometria segue $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, ou seja, a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy em E que é Banach, logo $x_n \rightarrow x$ em E . Da continuidade da norma e de J_E , temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_E(x_n) - J_E(x_m)\| = \|\psi - J_E(x)\| \leq \epsilon$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, $\|\psi - J_E(x)\| = 0$, donde $\psi = J_E(x)$. Portanto, $J_E(x_n) \rightarrow \psi$ em $J_E(E)$. ■

Proposição 1.5.3. *([8], p. 94) Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, seu dual E^* também é reflexivo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que E seja reflexivo. Então o mergulho canônico $J_E : E \rightarrow E^{**}$ é sobrejetor. Mostremos que o mergulho canônico $J_{E^*} : E^* \rightarrow E^{***}$ também é sobrejetor. Seja $x^{***} \in E^{***}$, pela Proposição 1.5.2 sabemos que $(J_E)' : E^* \rightarrow E^*$ é um isomorfismo isométrico, já que da Observação 1.5.3 resulta que $J_E : E \rightarrow E^{**}$ é isomorfismo isométrico. Defina $x^* = (J_E)'(x^{***}) \in E^*$. Provemos que $J_{E^*}(x^*) = x^{***}$. Para cada $x \in E$, temos

$$\langle J_{E^*}(x^*), J_E(x) \rangle = \langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle = \langle (J_E)'(x^{***}), x \rangle = \langle x^{***}, J_E(x) \rangle$$

Disto, como $J_E(E) = E^{**}$, concluímos que $J_{E^*}(x^*) = x^{***}$.

(\Leftarrow) Suponha agora que E^* seja reflexivo. Por absurdo, suponhamos que E não seja reflexivo. Então, $J_E : E \rightarrow E^{**}$ não é sobrejetor. Como J_E é uma isometria linear, resulta do Lema 1.5.1 que $J_E(E)$ é um subespaço fechado em E^{**} e não coincide com E^{**} . Pela Proposição 1.4.2, existe $0^* \neq \psi \in E^{***} = J_{E^*}(E^*)$ tal que $\langle \psi, z \rangle = 0$ para todo $z \in J_E(E)$. Como E^* é reflexivo, $\psi = J_{E^*}(\phi)$ para algum $\phi \in E^*$. Assim, para todo $x \in E$,

$$0 = \langle \psi, J_E(x) \rangle = \langle J_{E^*}(\phi), J_E(x) \rangle = \langle J_E(x), \phi \rangle = \langle \phi, x \rangle$$

ou seja, $\phi = 0^*$ donde $\psi = J_{E^*}(\phi) = J_{E^*}(0^*) = 0$, resultando numa contradição. Portanto, E é reflexivo. ■

1.6 Espaço Suave

Definimos abaixo derivada direcional e derivada Gâteaux em espaços de Banach real, que nos darão suporte para a definição de espaço suave.

Definição 1.6.1. *([10], p. 6) Seja $T : D \rightarrow F$, onde E e F são espaços de Banach real, $D \subseteq E$ aberto. Chamamos de **derivada direcional** de T em x na direção $y \in E$ ao seguinte limite quando este existe*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(x + ty) - T(x)}{t} = T'_+(x, y)$$

Se existe um operador em $\mathcal{L}(E; F)$, denotado por $T'(x)$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x + ty) - T(x)}{t} = T'(x)y$$

para cada $y \in E$, então dizemos que F é **Gâteaux-diferenciável** ou, de forma curta, **G-diferenciável**.

Exemplo 1.6.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_1 x_2 \leq 0 \\ x, & \text{se } x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, temos

$$f'_+(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f((0, 0) + t(x_1, x_2)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(tx_1, tx_2)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{se } x_1 x_2 \leq 0 \\ x, & \text{se } x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Assim, f possui derivada direcional em $0 = (0, 0)$ na direção de qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, a qual é igual a própria f . Por outro lado, tomando $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com $x_1 x_2 > 0$, temos $-x_1 \cdot x_2 = x_1(-x_2) < 0$. Assim,

$$f((x_1, x_2) + (x_1, -x_2)) = f(2x_1, 0) = 0$$

e

$$f(x_1, x_2) + f(x_1, -x_2) = x + 0 = x$$

ou seja, $f((x_1, x_2) + (x_1, -x_2)) \neq f(x_1, x_2) + f(x_1, -x_2)$.

Portanto, f não é G-diferenciável, pois não é linear.

Definição 1.6.2. ([2], p. 396) Um espaço de Banach real E é dito **suave**, quando a norma $\|\cdot\|$ de E é Gâteaux diferenciável para todo $x, y \in E$ com $\|x\| = \|y\| = 1$.

1.7 Espaço Estritamente Convexo

Agora definimos espaço estritamente convexo, que nos dá informações importantes a cerca da geometria do espaço. Mostramos algumas equivalências a esta definição.

Definição 1.7.1. ([6], p. 35) Um espaço de Banach real é dito ser **estritamente convexo** quando qualquer funcional linear contínuo $x^* \in E^*$ não nulo atinge seu valor máximo na bola unitária fechada em apenas um único ponto.

Proposição 1.7.1. ([6], p. 35) As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) E é estritamente convexo.
- (ii) Se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, existe $t > 0$ tal que $y = tx$.
- (iii) Se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$, então $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$ para todo $\lambda \in (0, 1)$
- (iv) Se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$, então $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii) Sejam E estritamente convexo e $x, y \in E$ não nulos tal que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Da Observação 1.4.1, existe $x^* \in E^*$ tal que $\langle x^*, x+y \rangle = \|x+y\|$ e $\|x^*\| = 1$. Como $\langle x^*, x \rangle \leq \|x\|$ e $\langle x^*, y \rangle \leq \|y\|$, devemos ter $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$ e $\langle x^*, y \rangle = \|y\|$, pois caso contrário teríamos $\|x+y\| = \langle x^*, x+y \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle x^*, y \rangle < \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$ não nulos. Assim, $\left\langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \left\langle x^*, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 1$. Uma vez que E é estritamente convexo, segue que $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, daí concluímos que $y = tx$, com $t = \frac{\|y\|}{\|x\|} > 0$.

(ii) \Rightarrow (iii) Dados $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, suponhamos por absurdo que existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que $\|\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y\| = 1$, isto é, $\|\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y\| = \|\lambda_0 x\| + \|(1 - \lambda_0)y\|$. Da hipótese (ii), segue que existe $t > 0$ tal que $\lambda_0 x = t(1 - \lambda_0)y$. Como $\|x\| = \|y\|$, obtemos $\lambda_0 = t(1 - \lambda_0)$ e então $x = y$, uma contradição.

(iii) \Rightarrow (iv) Como vale (iii) para todo $\lambda \in (0, 1)$ tomemos $\lambda = \frac{1}{2}$ daí segue que

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| < 1 \Rightarrow \|x+y\| < 2$$

(iv) \Rightarrow (i) Suponhamos que E não é estritamente convexo. Assim, existe um funcional não nulo $x^* \in E^*$ e $x_1, x_2 \in E$ distintos, com $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, tal que $\langle x^*, x_1 \rangle = \|x^*\|$ e $\langle x^*, x_2 \rangle = \|x^*\|$, ou seja, existe $\frac{x^*}{\|x^*\|} = x_0^* \in E$, $\|x_0^*\| = 1$ e $\langle x_0^*, x_1 \rangle = \langle x_0^*, x_2 \rangle = 1$, de onde $\left\langle x_0^*, \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\rangle = 1$. Portanto, do Corolário 1.4.4

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left\langle x^*, \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\rangle \geq \left\langle x_0^*, \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\rangle = 1$$

que contradiz (iv). ■

1.8 Aplicação de Dualidade

Esta seção é dedicada à definição da aplicação de dualidade e algumas de suas propriedades. A aplicação de dualidade desempenha um papel muito importante na teoria dos operadores monótonos maximais e na teoria de seus resolventes desenvolvidos por Aoyama, Kimura e Takahashi em [2], que serão apresentados aqui nesta dissertação.

Definição 1.8.1. ([4], p. 402) Uma **aplicação ponto-conjunto** A é uma aplicação que tem como domínio um conjunto não vazio X , como contradomínio o conjunto das partes de um conjunto não vazio Y , que representamos por $\mathcal{P}(Y)$, e que associa a cada elemento $x \in X$ o subconjunto $A(x)$ em $\mathcal{P}(Y)$

$$A : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

Uma aplicação ponto-conjunto $A : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ é caracterizada por seu **gráfico**, denotado por $Graf(A)$, o subconjunto de $X \times Y$ definido por

$$Graf(A) = \{(x, y) \in X \times Y; y \in A(x)\}$$

O **domínio efetivo** $\{x \in X; A(x) \neq \emptyset\}$ de A é denotado por $D(A)$.

O **range** de A é o conjunto $R(A) = \cup\{Ax; x \in E\}$.

Observação 1.8.1. Quando $A(x)$ é composto de apenas um único elemento, dizemos que a aplicação é **ponto-ponto**

Exemplo 1.8.1. Sejam \mathbb{Z}^2 e \mathbb{R}^2 . Consideramos o seguinte operador $A : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(z) = B\left(z; \frac{1}{2}\right)$. O operador A leva cada ponto $z \in \mathbb{Z}^2$ na bola aberta centrada em z e raio $\frac{1}{2}$, portanto é um operador ponto-conjunto.

Definição 1.8.2. ([2], p. 396) ou ([10], p. 25) Sejam E um espaço de Banach real e E^* seu dual. O operador ponto-conjunto $J : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ tal que

$$Jx = \{x^* \in E^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 \text{ e } \|x\| = \|x^*\|\}$$

para todo $x \in E$, é denominada **aplicação de dualidade**.

Notemos que o Corolário 1.4.3 mostra que a aplicação de dualidade J está bem definida e seu domínio efetivo é todo E .

A seguir mostramos algumas propriedades da aplicação de dualidade em um espaço normado E .

Definição 1.8.3. ([6], p. 53) Seja $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador ponto-conjunto. O operador A é **monótono** se

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0, \forall (x, u), (y, v) \in \text{Graf}(A)$$

Se a desigualdade é estrita, dizemos que A é **estritamente monótono**.

Proposição 1.8.1. ([9], p. 51) *A aplicação de dualidade J é monótona*

Demonstração. Dados $x, y \in E$ e $x^* \in Jx$ e $y^* \in Jy$, temos

$$\begin{aligned} \langle x^* - y^*, x - y \rangle &= \langle x^*, x \rangle - \langle x^*, y \rangle - \langle y^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle \\ &= \|x^*\| \|x\| - \langle x^*, y \rangle - \langle y^*, x \rangle + \|y^*\| \|y\| \\ &= (\|x^*\| - \|y^*\|)(\|x\| - \|y\|) + (\|y^*\| \|x\| - \langle y^*, x \rangle) + (\|x^*\| \|y\| - \langle x^*, y \rangle) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

pois

$$(\|x^*\| - \|y^*\|)(\|x\| - \|y\|) = (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0, \|y^*\| \|x\| - \langle y^*, x \rangle \geq 0 \text{ e } \|x^*\| \|y\| - \langle x^*, y \rangle \geq 0$$

Daí temos que a aplicação J é monótona. ■

Proposição 1.8.2. ([2], p. 396) *Para todo $x, y \in E$ e $x^* \in Jx$, temos*

$$\frac{1}{2} \|x\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2 \leq \langle x^*, x - y \rangle \tag{1.12}$$

Demonstração. De fato, $\langle x^*, y \rangle \leq \|x^*\| \|y\|$ e $0 \leq (\|x\| - \|y\|)^2 = \|x\|^2 - 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \Rightarrow 2\|x\| \|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2\langle x^*, x - y \rangle &= 2(\langle x^*, x \rangle - \langle x^*, y \rangle) \\ &= 2\langle x^*, x \rangle - 2\langle x^*, y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 - 2\langle x^*, y \rangle \\ &\geq 2\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 \end{aligned}$$

Daí segue o resultado. ■

Mostramos a seguir que a aplicação de dualidade J é sobrejetiva, quando E é reflexivo.

Proposição 1.8.3. ([9], p. 52-53) *Sejam E um espaço normado real, J e J' as aplicações de dualidade definidas em E e E^* , respectivamente, e J_E é o mergulho canônico de E em E^{**} . Então temos o seguinte:*

- (a) *Um elemento $x^* \in E^*$ está em Jx para algum $x \in E$ se, e somente se, $J_E(x) \in J'(x^*)$.*
- (b) *$R(J_E) \subseteq R(J') \subseteq E^{**}$.*
- (c) *$R(J) = E^*$ se, e somente se, $J'(x^*) \cap R(J_E) \neq \emptyset$ para cada $x^* \in E^*$.*
- (d) *Se $R(J') \subset R(J_E)$, então $R(J) = E^*$*

Demonstração.

(a) (\Rightarrow) Seja $x^* \in Jx$ para algum $x \in E$, isto é, $\|x^*\| = \|x\|$ e $\langle x^*, x \rangle = \|x\|^2$. Da Proposição 1.5.1 temos

$$\|J_E(x)\| = \|x\| = \|x^*\|$$

e

$$\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$$

então $J_E(x) \in J'(x^*)$.

(\Leftarrow) Seja $J_E(x) \in J'(x^*)$. Da definição de $J'(x^*)$, temos $\langle J_E(x), x^* \rangle = \|x^*\|^2$ e $\|J_E(x)\| = \|x^*\|$. Da Proposição 1.5.1, $\|J_E(x)\| = \|x\|$ e $\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$. Portanto, $\|x^*\| = \|x\|$ e $\langle x^*, x \rangle = \|x\|^2$, ou seja, $x^* \in Jx$.

(b) A última inclusão é clara. Mostremos que $R(J_E) \subseteq R(J')$. Seja $J_E(x) \in R(J_E)$ para algum $x \in E$. Da definição de J , para esse x , existe $x^* \in E^*$ tal que $x^* \in J(x)$. Pelo item (a), concluímos que $J_E(x) \in J'(x^*)$, ou seja, $J_E(x) \in R(J')$.

(c) (\Rightarrow) Seja $R(J) = E^*$. Tomando $x^* \in E^*$, existe $x \in E$ tal que $x^* \in J(x)$. Do item (a), segue $J_E(x) \in J'(x^*)$. Assim, obtemos $J'(x^*) \cap R(J_E) \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) É claro que $R(J) \subset E^*$. Mostremos a outra inclusão. Seja $x^* \in E^*$. Como $J'(x^*) \cap R(J_E) \neq \emptyset$, então existe $x \in E$ tal que $J_E(x) \in J'(x^*)$, pelo item (a) segue que $x^* \in J(x)$, logo $E^* \subset R(J)$. Portanto, $E^* = R(J)$.

(d) Seja $R(J') \subset R(J_E)$. Para cada $x^* \in E^*$, $J'(x^*) \in R(J') \subset R(J_E)$, ou seja, $J'(x^*) \cap R(J_E) \neq \emptyset$. Segue do item (c) que $R(J) = E^*$. ■

Corolário 1.8.1. ([9], p. 53) *Seja J a aplicação de dualidade de E em E^* . Se E é um espaço de Banach real reflexivo, então $R(J) = E^*$.*

Demonstração. Seja E reflexivo, isto é, $R(J_E) = E^{**}$. Considerando a aplicação de dualidade J' de E^* em E^{**} , temos $R(J') \subset R(J_E) = E^{**}$. Segue do item (d) do Teorema 1.8.3 que $R(J) = E^*$. ■

Quando E é um espaço suave, mostramos abaixo que a aplicação de dualidade é um aplicação ponto-ponto, isto é, para cada $x \in E$, Jx contém apenas um elemento.

Definimos função convexa e subgradiente de uma função que nos auxiliarão na demonstração deste resultado.

Definição 1.8.4. ([2], p. 397) *Seja a função $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. O domínio efetivo de ϕ é o conjunto $D(\phi) = \{x \in E; \phi(x) < \infty\}$. Quando $D(\phi) \neq \emptyset$, isto é, quando existe $x \in E$ tal que $\phi(x) < \infty$, ϕ é denominada **própria**.*

Definição 1.8.5. ([2], p. 397) *Uma função $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita **convexa** se dados $x, y \in E$ e o número real $\lambda \in [0, 1]$,*

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y)$$

O conjunto $Epi \phi = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R}; \phi(x) \leq t\}$ é chamado **epígrafo** de ϕ .

Exemplo 1.8.2. *A função $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\phi(x) = \|x\|^2$ tem o domínio efetivo $D(\phi) = E$, já que $\|x\|^2 \in \mathbb{R}$ para todo $x \in E$, logo é própria, e é convexa. De fato, dados $y, z \in E$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos*

$$\begin{aligned} \phi(\lambda y + (1 - \lambda)z) &= \|\lambda y + (1 - \lambda)z\|^2 \\ &\leq (\lambda\|y\| + (1 - \lambda)\|z\|)^2 \\ &= \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|y\|\|z\| + (1 - \lambda)^2\|z\|^2 \\ &\leq \lambda^2\|y\|^2 + \lambda(1 - \lambda)(\|y\|^2 + \|z\|^2) + (1 - \lambda)^2\|z\|^2 \\ &= \lambda\|y\|^2 + \|z\|^2 - \lambda\|z\|^2 \\ &= \lambda\|y\|^2 + (1 - \lambda)\|z\|^2 \\ &= \lambda\phi(y) + (1 - \lambda)\phi(z) \end{aligned}$$

Proposição 1.8.4. ([10], p. 2) *Uma função $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é convexa se, e somente se, seu epígrafo é um conjunto convexo em $E \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam ϕ uma função convexa e $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in Epi\phi$. Então tomando $\lambda \in [0, 1]$, temos

$$\phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\phi(x_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2) \leq \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2$$

daí

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) = \lambda(x_1, t_1) + (1 - \lambda)(x_2, t_2) \in Epi\phi$$

logo $Epi\phi$ é convexo.

(\Leftarrow) Seja $Epi\phi$ um conjunto convexo. Como para qualquer $x_1, x_2 \in D(\phi)$ temos $(x_1, \phi(x_1))$ e $(x_2, \phi(x_2))$ pertencem a $Epi\phi$, então dado $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda(x_1, \phi(x_1)) + (1 - \lambda)(x_2, \phi(x_2)) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda\phi(x_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2)) \in Epi\phi$$

assim

$$\phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\phi(x_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2)$$

portanto, ϕ é convexa. ■

Definição 1.8.6. ([10], p. 11) Dizemos que $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é **subdiferenciável** em um ponto $x \in E$, se existe um funcional $x^* \in E^*$, chamado **subgradiente de ϕ em x** , tal que

$$\phi(y) - \phi(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in E$$

O conjunto de todos subgradientes de ϕ em x é denotado por $\partial\phi(x)$ e a aplicação

$$\partial\phi : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$$

é chamada **subdiferencial de ϕ** .

Proposição 1.8.5. ([10], p. 14) *Uma função contínua convexa própria ϕ é G -diferenciável em $x \in \text{int}D(\phi)$ se, e somente se, esta tem um único subgradiente em x .*

Demonstração. Ver Corolário 2.7. em ([10], p. 14). ■

Proposição 1.8.6. ([10], p. 21) *Para cada $x \neq 0$ temos $\partial\|x\| = \{x^* \in E^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\| \text{ e } \|x^*\| = 1\}$*

Demonstração. Defina $C = \{x^* \in E^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\| \text{ e } \|x^*\| = 1\}$.

Mostremos, primeiro que $C \subset \partial\|x\|$. Seja $x^* \in C$, ou seja, $x^* \in E^*$ com $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$ e $\|x^*\| = 1$. Então,

$$\langle x^*, y - x \rangle = \langle x^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, y \rangle - \|x\| \leq \|x^*\|\|y\| - \|x\| = \|y\| - \|x\|$$

ou seja,

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq \|y\| - \|x\| \text{ para todo } y \in E$$

portanto, $x^* \in \partial\|x\|$.

Agora mostremos que $\partial\|x\| \subset C$. Seja $x^* \in \partial\|x\|$ e $x \neq 0$, então $x^* \in E^*$ e

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \text{ para todo } y \in E \tag{1.13}$$

daí $\|x^*\| \leq 1$. Fazendo $y = 0$ na primeira desigualdade de 1.13, resulta

$$\langle x^*, -x \rangle \leq -\|x\| \Rightarrow \langle x^*, x \rangle \geq \|x\|$$

assim,

$$\|x^*\|\|x\| \geq \langle x^*, x \rangle \geq \|x\|$$

de onde temos

$$\|x\| \geq \|x^*\|\|x\| \geq \langle x^*, x \rangle \geq \|x\|$$

e

$$1 \geq \|x^*\| \geq \langle x^*, x \rangle \geq 1$$

e, portanto, $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$, isto é, $x^* \in C$. ■

Proposição 1.8.7. ([10], p. 22) *Seja E um espaço de Banach real. O espaço E é suave se, e somente se, para cada $x \neq 0$ existe um único $x^* \in E^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$, ou seja, um único $x^* \in \partial\|x\|$.*

Demonstração. Seja E suave, isto é, sua norma $\|\cdot\|$ é G-diferenciável. Como a função norma é contínua, convexa e própria, então, pela Proposição 1.8.5, dado $0 \neq x \in \text{int}D(\|\cdot\|) = E$, existe um único $x^* \in \partial\|x\|$, ou seja, existe um único $x^* \in E^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$.

Reciprocamente, dado $x \neq 0$, supondo existir um único $x^* \in E$ tal que $x^* \in \partial\|x\|$, segue da Proposição 1.8.5 que a norma é G-diferenciável e, portanto, E é suave. ■

Teorema 1.8.1. *Seja E um espaço de Banach real. E é suave se, e somente se, a aplicação de dualidade J é ponto-ponto.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja E um espaço de Banach real suave, então para cada $x \neq 0$ existe um único $x^* \in E^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$. Tomando o funcional em E^* dado por $\tilde{x}^* = kx^*$, $k = \|x\|$, temos

$$\|\tilde{x}^*\| = \|kx^*\| = k\|x^*\| = k = \|x\|$$

e

$$\langle \tilde{x}^*, x \rangle = \langle kx^*, x \rangle = k\langle x^*, x \rangle = k\|x\| = \|x\|^2$$

portanto, $\tilde{x}^* \in J(x)$ e é único, pois x^* é único. Se $x = 0$, da definição de J , sempre temos um único funcional em E^* em $J(0)$, a saber, o funcional nulo.

(\Leftarrow) Seja J uma aplicação ponto-ponto. Dado $0 \neq x \in E$, então existe um único $\tilde{x}^* \in E^*$ tal que $\langle \tilde{x}^*, x \rangle = \|x\|^2$ e $\|\tilde{x}^*\| = \|x\|$. Tome o funcional de E , $x^* = k'\tilde{x}^*$, $k' = \frac{1}{\|x\|}$.

Temos,

$$\|x^*\| = \left\| \frac{\tilde{x}^*}{\|x\|} \right\| = \frac{\|\tilde{x}^*\|}{\|x\|} = 1$$

e

$$\langle x^*, x \rangle = \langle k'\tilde{x}^*, x \rangle = k'\langle \tilde{x}^*, x \rangle = k'\|x\|^2 = \|x\|$$

$x^* \in \partial\|x\|$ e como \tilde{x}^* é único, logo x^* é único. Portanto, da Proposição 1.8.7, E é suave. ■

A seguir, mostramos que a aplicação de dualidade J é estritamente monótona quando o espaço de Banach real E é estritamente convexo e, além disso, é uma aplicação injetiva.

Proposição 1.8.8. (*[9], p. 51*) *Sejam E um espaço de Banach real e J a aplicação de dualidade de E em E^* . E é estritamente convexo se, e somente se, J é estritamente monótona.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja E estritamente convexo. Suponhamos que J não é estritamente monótona, então existem $x, y \in E$, $x \neq y$, não nulos, $x^* \in J(x)$ e $y^* \in J(y)$ tal que $\langle x^* - y^*, x - y \rangle = 0$. Disto e do fato de as parcelas da equação (1.11) serem não negativas, resulta

$$(\|x^*\| - \|y^*\|)(\|x\| - \|y\|) = 0, \quad (\|y^*\|\|x\| - \langle y^*, x \rangle) = 0, \quad (\|x^*\|\|y\| - \langle x^*, y \rangle) = 0$$

de onde concluímos

$$\|x^*\| = \|y^*\|, \quad \|x\| = \|y\|, \quad \|y^*\|\|x\| = \langle y^*, x \rangle = \|x^*\|\|y\| = \langle x^*, y \rangle$$

consequentemente,

$$\langle x^*, x + y \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle x^*, y \rangle = \|x^*\|\|x\| + \|x^*\|\|y\| = \|x^*\|(\|x\| + \|y\|)$$

Por outro lado,

$$\langle x^*, x + y \rangle \leq \|x^*\| \|x + y\|$$

e, portanto,

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$$

Como $\|x\| = \|y\| \neq 0$, segue

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x + y\| \geq \frac{1}{\|x\|} (\|x\| + \|y\|) = \frac{\|x\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|y\|} = 2$$

Isso contradiz o fato de E ser estritamente convexo.

(\Leftarrow) Seja J estritamente monótona, suponhamos que E não é estritamente convexo, então existem $x, y \in E$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$ ta que $\|x + y\| = 2$. Seja $x^* \in J\left(\frac{x + y}{2}\right)$. Da definição de J , temos

$$\|x^*\| = \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x + y\| = 1 \quad \text{e} \quad \left\langle x^*, \frac{x + y}{2} \right\rangle = \|x^*\| \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = 1$$

consequentemente

$$\langle x^*, x + y \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle x^*, y \rangle = 2$$

Uma vez que $\langle x^*, x \rangle \leq \|x^*\| \|x\| = 1$ e $\langle x^*, y \rangle \leq \|x^*\| \|y\| = 1$, concluímos

$$\langle x^*, x \rangle = 1 = \|x^*\| \|x\| \quad \text{e} \quad \langle x^*, y \rangle = 1 = \|x^*\| \|y\|$$

Assim, temos que $x^* \in J(x) \cap J(y)$. Portanto, $\langle x^* - x^*, x - y \rangle = 0$ e isso contradiz o fato de J ser estritamente monótona. \blacksquare

Proposição 1.8.9. ([15], p. 263) *Sejam E um espaço normado estritamente convexo e J a aplicação de dualidade de E em E^* . Se $J(x) \cap J(y) \neq \emptyset$, então existe um número real $c > 0$ tal que $y = cx$.*

Demonstração. Para $x = 0$, da hipótese $J(x) \cap J(y) \neq \emptyset$, implica $y = 0$, logo o resultado segue. O mesmo acontece se $y = 0$.

Consideremos $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Seja $J(x) \cap J(y) \neq \emptyset$ e, por absurdo, suponhamos que $y \neq cx$ para todo $c > 0$. Seja $z^* \in J(x) \cap J(y)$, temos $z^* \neq 0^*$, caso contrário, da definição de J , teríamos $0 = \|z^*\| = \|x\| = \|y\|$, de onde concluímos $x = y = 0$, o que contraria a hipótese de absurdo. Além disso, da hipótese de absurdo, $y \neq \frac{\|y\|}{\|x\|}x \Rightarrow \frac{y}{\|y\|} \neq \frac{x}{\|x\|}$ e, da definição de J , $\langle z^*, y \rangle = \|z^*\| \|y\|$ e $\langle z^*, x \rangle = \|z^*\| \|x\|$. Portanto, $\left\langle z^*, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \|z^*\|$ e $\left\langle z^*, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \|z^*\|$, o que contraria o fato de E ser estritamente convexo. \blacksquare

Corolário 1.8.2. ([15], p. 263) *Sejam E um espaço normado estritamente convexo e J a aplicação de dualidade de E em E^* . Se $x \neq y$, então $J(x) \cap J(y) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $J(x) \cap J(y) \neq \emptyset$. Pela Proposição 1.8.9 temos existe $c > 0$ tal que $y = cx$. Tomando $z^* \in J(x) \cap J(y)$, então $\|z^*\| = \|x\| = \|y\|$. Daí, e $x = 0$, então $y = 0$, logo $x = y$. Se $x \neq 0$ então $\|x\| = \|y\| = \|cx\| = c\|x\|$, logo $c = 1$ e $x = y$. Ambas as situações contradizem a hipótese de $x \neq y$. \blacksquare

1.9 Topologia Fraca e Fraca-Estrela

Esta seção é dedicada à definição de topologia fraca e fraca-estrela, duas topologias de grande importância para Análise Funcional. Neste trabalho abordamos alguns resultados relacionados a essas duas topologias, em especial, o fato de que com a topologia fraca-estrela ganhamos a compacidade da bola B_{E^*} e supondo E reflexivo ganhamos a compacidade da bola B_E na topologia fraca. Começamos definindo topologia gerada por uma família de funções.

Seja X um conjunto qualquer, seja $\{Y_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_i\}_{i \in I}$ uma família de funções $f_i : X \rightarrow Y_i$ para cada $i \in I$.

Queremos definir em X a menor topologia que torna todas as funções f_i contínuas.

Para cada $i \in I$ e cada aberto A_i em Y_i considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X; f_i(x) \in A_i\}$$

Chame de ϕ a coleção dos subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$, ou seja,

$$\phi = \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(A_j); J \subset I \text{ finito e } A_j \text{ aberto em } Y_j \right\}$$

Proposição 1.9.1. ([8], p. 142) *A família ϕ é base para uma topologia τ em X , isto é, qualquer elemento de τ pode ser escrito como união de elementos de ϕ .*

Definição 1.9.1. ([8], p. 143) A topologia τ da Proposição 1.9.1 é chamada de **topologia gerada pela família de funções** $\{f_i\}_{i \in I}$.

Em muitos espaços topológicos podemos verificar muitas propriedades de conjuntos usando sequência, como por exemplo, se um conjunto é fechado ou não. Em topologias mais gerais nem sempre isso é possível, pois esse critério falha. Portanto, faz-se necessário utilizar outra ferramenta para recuperar a ideia de sequência. Essa nova ferramenta, que generaliza a ideia de sequência, é chamada de rede.

Definição 1.9.2. ([8], p. 355) Um **conjunto dirigido** é um par (Λ, \leq) em que \leq é uma **direção** no conjunto Λ , isto é, é uma relação em Λ tal que:

- (a) $\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
- (b) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, então $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
- (c) Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Exemplo 1.9.1. O conjunto dos números naturais \mathbb{N} é um conjunto dirigido, assim como o conjunto dos números reais com sua ordem natural.

Definição 1.9.3. ([8], p. 355) Uma **rede** em um conjunto X é uma função $f : \Lambda \rightarrow X$, onde Λ é um conjunto dirigido. Denotamos $f(\lambda)$ por $\{x_\lambda\}$ para todo $\lambda \in \Lambda$, e neste caso nos referimos à rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Exemplo 1.9.2. Uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma rede.

Definição 1.9.4. ([8], p. 356) Dizemos que a rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ no espaço topológico X converge para $x \in X$, e neste caso escrevemos $x_\lambda \rightarrow x$, se para cada vizinhança U de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Exemplo 1.9.3. ([8], p. 356) Sejam X um espaço topológico, x um elemento de X e \mathcal{B}_x uma base de vizinhanças de x : A relação de continência invertida $V_1 \leq V_2 \iff V_2 \subseteq V_1$ torna \mathcal{B}_x um conjunto dirigido. De fato: (a) $V \leq V$ para todo $V \in \mathcal{B}_x$, pois $V \subseteq V$ para $V \in \mathcal{B}_x$; (b) Se $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{B}_x$, $V_1 \leq V_2$ e $V_2 \leq V_3$, temos $V_2 \subseteq V_1$ e $V_3 \subseteq V_2$. Daí, $V_3 \subseteq V_1$, então $V_1 \leq V_3$; (c) Dados quaisquer $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, existem abertos A_1, A_2 tais que $x \in A_1 \subseteq V_1$ e $x \in A_2 \subseteq V_2$. Além disso, $x \in A_1 \cap A_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ e $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}_x$, pois $V_1 \cap V_2 \subseteq V_i, i = 1, 2$. Tome $V_3 = V_1 \cap V_2$, logo $V_3 \subseteq V_1 \Rightarrow V_1 \leq V_3$ e $V_3 \subseteq V_2 \Rightarrow V_2 \leq V_3$.

Escolhendo $x_V \in V$ para cada $V \in \mathcal{B}_x$, temos uma rede $\{x_V\}_{V \in \mathcal{B}_x}$ em X que converge para x . De fato, seja U uma vizinhança de x , isto é, $U \in \mathcal{V}_x$. Logo existe $V_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_0 \subseteq U$. Para cada $V \in \mathcal{B}_x$, tal que $V_0 \leq V$, temos $V \subseteq V_0$, portanto $x_V \in V \subseteq V_0 \subseteq U$, ou seja, $x_V \rightarrow x$.

Proposição 1.9.2. ([8], p. 356) Sejam X, Y espaços topológicos, $A \subseteq X$ e $x \in X$.

- (a) $x \in \bar{A}$ se, e somente se, existe uma rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ em A tal que $x_\lambda \rightarrow x$.
- (b) A é fechado se, e somente se, para toda rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ em A com $x_\lambda \rightarrow x$, tem-se $x \in A$.
- (c) Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ para toda rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ em X tal que $x_\lambda \rightarrow x, x \in X$.
- (d) X é um espaço de Hausdorff se, e somente se, toda rede em X converge para no máximo um elemento de X .

Demonstração. Ver Teorema B.31 em ([8], p.356-357) ■

Proposição 1.9.3. ([8], p. 143) Seja τ a topologia em X gerada pela família de funções $\{f_i\}_{i \in I}$. Então:

- (a) Para cada $i \in I$ a função $f_i : X \rightarrow Y_i$ é contínua.
- (b) Seja $\{x_\lambda\}_\lambda$ uma rede em X . Então $x_\lambda \rightarrow x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_i(x_\lambda) \rightarrow f_i(x)$ em Y_i para todo $i \in I$.

Demonstração. Ver itens (a) e (e) da Proposição 6.1.3 em ([8], p.143) ■

Definição 1.9.5. ([8], p. 143) A **topologia fraca** no espaço normado E , denotada por $\sigma(E, E^*)$ é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E^*$.

Observação 1.9.1. ([8], p. 143) Quando uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ em E converge para $x \in E$ na topologia fraca escrevemos

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

Proposição 1.9.4. ([8], p. 144) Seja E um espaço normado. Então:

- (a) Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo $\varphi \in E^*$, $\varphi : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo.
- (b) Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma

$$V_{J, \epsilon} = \{x \in E; |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \epsilon \text{ para todo } i \in J\}$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_i \in E^*$ para todo $i \in J$ e $\epsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.

- (c) Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E . Então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E^*$.
- (d) A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é de Hausdorff.

Demonstração. (a) Segue diretamente da definição de topologia fraca.

- (b) Seja $U \in \sigma(E, E^*)$ tal que $x_0 \in U$. Sabemos da Proposição 1.9.1 que a família $\phi = \{\bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(A_j); \varphi_j \in E^*, J \text{ é finito, } A_j \subset \mathbb{R} \text{ é aberto}\}$ é uma base para $\sigma(E, E^*)$.

Daí existem funcionais $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in E^*$ e abertos $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(A_j) \subset U \quad (1.14)$$

Então, $\varphi_j(x_0) \in A_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(\varphi_j(x_0); \epsilon) \subset A_j, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, k \quad (1.15)$$

Segue das expressões 1.14 e 1.15 que

$$\begin{aligned} V_{\varphi_1, \dots, \varphi_k; \epsilon} &= \{x \in E; |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \epsilon, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, k\} \\ &= \bigcap_{j=1}^k \{x \in E; |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \epsilon\} \\ &= \bigcap_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(B(\varphi_j(x_0); \epsilon)) \subset \bigcap_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(A_j). \end{aligned}$$

como queríamos.

- (c) Sejam $\varphi \in E^*$, $\epsilon > 0$ e $V_{\varphi, \epsilon} = \{y \in E; |\varphi(y) - \varphi(x)| < \epsilon\}$. Como $x_n \xrightarrow{w} x$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in V_{\varphi, \epsilon} \Rightarrow |\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \epsilon$. Portanto, $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ em \mathbb{R} . Reciprocamente, sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E^*$ e seja $\epsilon > 0$. Devemos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$x_n \in \{y \in E; |\varphi_j(y) - \varphi_j(x)| < \epsilon \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, k\} \quad (1.16)$$

De fato, por hipótese $\varphi_j(x_n) \rightarrow \varphi_j(x)$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi_j(x_n) - \varphi_j(x)| < \epsilon$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$, logo vale (1.16)

- (d) Sejam $x, y \in E$, $x \neq y$. Pela Observação 1.4.1 existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Seja $\epsilon = \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{2}$. Então, as vizinhanças

$$V_x(\varphi; \epsilon) = \{z \in E; |\varphi(z) - \varphi(x)| < \epsilon\} \text{ e } V_y(\varphi; \epsilon) = \{z \in E; |\varphi(z) - \varphi(y)| < \epsilon\}$$

são tais que $V_x(\varphi; \epsilon), V_y(\varphi; \epsilon) \in \sigma(E, E^*)$ e $x \in V_x(\varphi; \epsilon)$ e $y \in V_y(\varphi; \epsilon)$. Vejamos que $V_x(\varphi; \epsilon) \cap V_y(\varphi; \epsilon) = \emptyset$. De fato, se $w \in V_x(\varphi; \epsilon)$, então

$$|\varphi(w) - \varphi(y)| \geq |\varphi(x) - \varphi(y)| - |\varphi(w) - \varphi(x)| > |\varphi(x) - \varphi(y)| - \epsilon = \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{2} = \epsilon$$

portanto, $w \notin V_y(\varphi; \epsilon)$. ■

Corolário 1.9.1. ([8], p. 144) Em um espaço normado E , se $x_n \rightarrow x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$.

Demonstração. Seja $x_n \rightarrow x$. Então para todo $\varphi \in E^*$ temos $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$. O resultado segue aplicando o item (c) da Proposição 1.9.4. ■

Teorema de Mazur. ([8], p. 149) Sejam E um espaço normado real e K um subconjunto convexo de E . Então o fecho de K na topologia da norma, $\overline{K}^{\|\cdot\|}$, coincide com o fecho de K na topologia fraca, $\overline{K}^{\sigma(E, E^*)}$. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.

Demonstração. Seja $x_0 \in \overline{K}^{\|\cdot\|}$, logo existe uma sequência $\{x_n\} \subset K$ tal que $x_n \rightarrow x_0$, pelo Corolário 1.9.1 temos $x_n \xrightarrow{w} x_0$ e daí $x_0 \in \overline{K}^{\sigma(E, E^*)}$, assim $\overline{K}^{\|\cdot\|} \subset \overline{K}^{\sigma(E, E^*)}$. Por outro lado, supondo por absurdo que existe $x_0 \in \overline{K}^{\sigma(E, E^*)} \setminus \overline{K}^{\|\cdot\|}$, do Teorema de Hahn-Banach (Proposição 1.4.3), existe $\varphi \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x_0) > \alpha > \varphi(x) \text{ para todo } x \in \overline{K}^{\|\cdot\|} \quad (1.17)$$

Como $x_0 \in \overline{K}^{\sigma(E, E^*)}$, existe uma sequência $\{x_n\} \subset K$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x_0$. Então,

$$\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$$

o que contradiz a desigualdade (1.17), logo $\overline{K}^{\sigma(E, E^*)} \subset \overline{K}^{\|\cdot\|}$. Portanto, $\overline{K}^{\sigma(E, E^*)} = \overline{K}^{\|\cdot\|}$. ■

Proposição 1.9.5. ([6], p. 72) Seja E um espaço normado. Uma função $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ própria convexa é s.c.i. em E se, e somente se, é s.c.i. com respeito a topologia fraca em E .

Demonstração. Como f é convexa pela Proposição 1.8.4, $Epi f$ é convexo e como f é s.c.i. pela Proposição 1.3.1, $Epi f$ é fechado. Pelo Teorema de Mazur um conjunto convexo é fechado na topologia da norma se, e somente se, é fechado na topologia fraca. Portanto, $Epi f$ é fechado na topologia fraca e pela Proposição 1.3.1 f é s.c.i. com respeito a topologia fraca. ■

Podemos considerar, no dual E^* de um espaço normado, a topologia da norma e a topologia fraca $\sigma(E^*, E^{**})$. Considerando o mergulho canônico $J_E : E \rightarrow E^{**}$, o conjunto $J_E(E)$ também forma um conjunto importante de funções definidas em E^* , que gera a topologia definida a seguir.

Definição 1.9.6. ([8], p. 152) A topologia fraca-estrela no dual E^* do espaço normado E denotada por $\sigma(E^*, E)$ é a topologia em E^* gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x); x \in E\}$, isto é, pelas funções

$$J_E(x) : E^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } J_E(x)(\varphi) = \varphi(x), x \in E$$

Observação 1.9.2. ([8], p. 152) Quando uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ em E^* converge para $\varphi \in E^*$ na topologia fraca-estrela escrevemos

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$$

Proposição 1.9.6. ([8], p. 152) Seja E um espaço normado. Então:

- (a) Para todo $x \in E$, $J_E(x) : (E^*, \sigma(E^*, E)) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo.
 (b) Para cada $\varphi_0 \in E^*$, os conjuntos da forma

$$W_{J,\epsilon} = \{\varphi \in E^*; |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon \text{ para todo } i \in J\}$$

onde J é um conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in J$ e $\epsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 para a topologia fraca-estrela.

- (c) Seja $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E^* . Então

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \text{ se, e somente se, } \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ para todo } x \in E$$

- (d) A topologia fraca-estrela $\sigma(E^*, E)$ é de Hausdorff.

Demonstração. Ver Proposição 6.3.2 ([8], p.152) ■

Proposição 1.9.7. ([8], p. 155) *Seja E um espaço normado. As topologias fraca $\sigma(E^*, E^{**})$ e fraca-estrela $\sigma(E^*, E)$ coincidem em E^* se, e somente se, E é reflexivo.*

Demonstração. Ver item (b) da Proposição 6.3.8 ([8], p.155) ■

Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. ([8], p. 156) *Para todo espaço normado E , a bola B_{E^*} é compacta na topologia fraca-estrela $\sigma(E^*, E)$ de E^* .*

Demonstração. Ver Teorema 6.3.9 ([8], p.156-157) ■

Definição 1.9.7. Um **homeomorfismo** entre espaços topológicos X e Y é uma função $f : X \rightarrow Y$ que é contínua, bijetora e tem inversa contínua.

Lema 1.9.1. ([8], p. 157) *Seja E um espaço de Banach. O mergulho canônico J_E é um homeomorfismo de $(E, \sigma(E, E^*))$ sobre sua imagem $J_E(E)$ com a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de E^{**} . Isto é, a função*

$$J_E : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow J_E(E) \subseteq (E^{**}, \sigma(E^{**}, E))$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Como J_E é isometria linear sobre sua imagem, J_E é bijetor. Mostremos que J_E é contínua. Para toda $\{x_\lambda\}$ em E ,

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{w} x \text{ em } E &\iff \varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x) \text{ para todo funcional } \varphi \in E^* \\ &\iff J_E(x_\lambda)(\varphi) \rightarrow J_E(x)(\varphi) \text{ para todo funcional } \varphi \in E^* \\ &\iff J_E(x_\lambda) \xrightarrow{w^*} J_E(x) \text{ em } E^{**} \\ &\iff J_E(x_\lambda) \xrightarrow{w^*} J_E(x) \text{ em } J_E(E) \end{aligned}$$

Como $J_E^{-1}(J_E(x_\lambda)) = x_\lambda$ temos que J_E^{-1} também é.

A primeira equivalência resulta do item (b) da Proposição 1.9.3 para a topologia fraca, a segunda é da definição de J_E , a terceira resulta novamente do item (b) da Proposição 1.9.3, agora aplicada para a topologia fraca-estrela e a última do fato de que em $J_E(E)$ estamos considerando a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de E^{**} . ■

Proposição 1.9.8. ([8], p. 158) Para todo espaço reflexivo E , a bola B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.

Demonstração. Como E é reflexivo, $J_E(E) = E^{**}$, logo pelo Lema 1.9.1

$$J_E : (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow J_E(E) = (E^{**}, \sigma(E^{**}, E))$$

é um homeomorfismo. Do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki temos que $B_{E^{**}}$ é compacta na topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$, portanto da continuidade de J_E^{-1} segue que

$$B_E = J_E^{-1}(B_{E^{**}})$$

é compacta na topologia $\sigma(E, E^*)$. ■

Capítulo 2

Problema de Equilíbrio e Monotonicidade Maximal

Neste capítulo vemos um resultado de existência e unicidade para um problema de equilíbrio, que será definido a seguir, e a partir do qual definimos o resolvente de bifunções. Adiante, definimos um operador monótono maximal ligado a uma bifunção monótona maximal, os quais compartilham o mesmo resolvente e vice-versa. Encerrando, vemos uma relação entre operador monótono maximal e bifunção monótona maximal.

Iniciamos com a definição de problema de equilíbrio, segundo Blum e Oettli em [7]. O **Problema de Equilíbrio**, com respeito a C , consiste em:

$$(PE) \quad \text{encontrar } \bar{x} \in C \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in C \quad (2.1)$$

onde, C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de E , que é um espaço de Banach real, e $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma bifunção estendida. Neste caso, o ponto $\bar{x} \in C$ é chamado uma solução do problema.

O conjunto solução de um problema de equilíbrio em relação a uma bifunção f , com respeito a C , é denotado por

$$PE(f) = \{z \in C; f(z, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in C\}$$

Uma justificativa para estudar a formulação de um problema **PE**, reside no fato de que alguns problemas podem ser resolvidos como um problema de equilíbrio, por exemplo:

- (1) ([7], p.124)(**Otimização**)– Seja $\zeta : C \rightarrow \mathbb{R}$. O problema de encontrar

$$\bar{x} \in C \text{ tal que } \zeta(\bar{x}) \leq \zeta(y) \text{ para todo } y \in C \quad (2.2)$$

pode ser escrito como

$$\min \zeta(x) \text{ sujeito a } x \in C$$

Definindo a bifunção $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \zeta(y) - \zeta(x)$, então o PE definido em (2.1) coincide com o problema de otimização definido em (2.2).

- (2) ([7], p.125)(**Ponto Fixo**)– Seja $H = H^*$ um espaço de Hilbert. Dado o operador $T : C \rightarrow C$, $C \subset H$ convexo e compacto. Consideremos o problema de encontrar

$$\bar{x} \in C \text{ tal que } \bar{x} = T(\bar{x}) \quad (2.3)$$

definindo a bifunção $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \langle x - T(x), y - x \rangle$, então \bar{x} resolve o PE definido em (2.1) se, e somente se, \bar{x} é uma solução do problema de encontrar

ponto fixo definido em (2.3). De fato:

(\Rightarrow) Seja \bar{x} uma solução para o problema de equilíbrio, isto é,

$$f(\bar{x}, y) = \langle \bar{x} - T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0$$

para todo $y \in C$. Então, fazendo $y = T(\bar{x})$, temos

$$0 \leq \langle \bar{x} - T(\bar{x}), T(\bar{x}) - \bar{x} \rangle = -\|T(\bar{x}) - \bar{x}\|^2$$

de onde concluímos que $T(\bar{x}) = \bar{x}$

(\Leftarrow) Seja \bar{x} um ponto fixo para T , ou seja, $\bar{x} = T(\bar{x})$. Então,

$$f(\bar{x}, y) = \langle \bar{x} - T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle = 0$$

para todo $y \in C$, logo $\bar{x} \in PE(f)$.

Nesta dissertação, estudamos o problema de equilíbrio no caso em que

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$$

onde g e h são bifunções definidas de $E \times E$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1 Monotonicidade Maximal de Operadores

Esta seção é dedicada à uma caracterização de operador monótono maximal que envolve a aplicação de dualidade J . Isto nos levará à uma definição de resolvente para operadores monótonos maximais. O resultado estabelece que um operador monótono A é monótono maximal se, e somente se, para qualquer $r \in \mathbb{R}, r > 0$, o operador $J + rA$ é sobrejetivo.

Começamos definindo duas noções de continuidade para operadores, a primeira estabelece que o limite na topologia da norma implica no limite na topologia fraca-estrela, já a segunda restringe esta ideia para limite em segmentos de reta.

Definição 2.1.1. ([10], p. 149) Sejam E um espaço de Banach real, E^* seu espaço dual e o operador ponto - ponto $T : E \rightarrow E^*$. O operador T é dito ser **demicontínuo** em $x \in D(T)$, se dada a sequência $\{x_n\} \subset D(T)$, com $x_n \rightarrow x$ tem-se $Tx_n \xrightarrow{w^*} Tx$. O operador T é chamado **hemicontínuo** em $x \in D(T)$, se $x + t_n y \in D(T)$, $t_n > 0$, para $y \in E$ e $t_n \rightarrow 0$ implicar que $T(x + t_n y) \xrightarrow{w^*} Tx$.

Diante destas definições, temos mais uma propriedade da aplicação de dualidade J .

Proposição 2.1.1. ([5], p. 2) *Seja E um espaço de Banach real. Se o espaço dual E^* é estritamente convexo, então a aplicação de dualidade J é ponto-ponto e demicontínua, isto é, contínua de $(E, \|\cdot\|)$ para $(E^*, \sigma(E^*, E))$.*

Demonstração. Ver Teorema 1.2. em ([5], p. 2) ■

Definimos a seguir, suporte de uma função e partição da unidade. Mostramos um resultado quando a partição da unidade é estritamente subordinada à uma cobertura aberta. Este resultado será necessário para a demonstração do Teorema seguinte.

Definição 2.1.2. ([13], p. 320) Dados um espaço métrico M , um espaço vetorial normado E e uma aplicação $f : M \rightarrow E$, o **suporte** de f é, por definição, o fecho do conjunto

$$\{x \in M; f(x) \neq 0\}$$

ou seja,

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in M; f(x) \neq 0\}}$$

Exemplo 2.1.1. ([13], p. 320) Dados $a \in M$ e $r > 0$, a função real contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = d(x, M \setminus B(a; r))$ tem suporte igual a $\overline{B(a; r)}$.

Definição 2.1.3. ([13], p. 317) Uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se **localmente finita** se, e somente se, para cada $x \in M$ existem índices $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ e uma vizinhança $V_x \ni x$ tais que $V_x \cap C_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Exemplo 2.1.2. ([13], p. 317) A família \mathcal{C} que consiste de todos os intervalos de reta (n, ∞) , $n \in \mathbb{N}$, é localmente finita em \mathbb{R} .

Definição 2.1.4. ([13], p. 320) Seja M um espaço métrico. Uma **partição da unidade** em M é uma família $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in L}$ de funções reais contínuas $\varphi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

- 1) Para todo $x \in M$ e todo $\lambda \in L$, tem-se $\varphi_\lambda(x) \geq 0$;
- 2) A família $\mathcal{C} = (\text{supp}(\varphi_\lambda))_{\lambda \in L}$ é localmente finita em M ;
- 3) Para todo $x \in M$ tem-se $\sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda(x) = 1$

Definição 2.1.5. ([13], p. 321) Seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de M . Diremos que uma partição da unidade $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha = 1$ está **subordinada à cobertura** \mathcal{C} quando, para todo $\alpha \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset C_\lambda$. Diremos que a partição da unidade $\sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda = 1$ é **estritamente subordinada** à cobertura \mathcal{C} quando $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ tiver índices no mesmo conjunto L que as funções φ_λ e, além disso, $\text{supp}(\varphi_\lambda) \subset C_\lambda$ para todo $\lambda \in L$.

Proposição 2.1.2. ([13], p. 321) Para toda cobertura aberta $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de um espaço métrico separável, existe uma partição da unidade $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = 1$ subordinada a \mathcal{C} .

Demonstração. Ver Proposição 10 em ([13], p. 321). ■

Proposição 2.1.3. ([13], p. 322) Dada uma cobertura aberta $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ num espaço métrico separável M , existe uma partição da unidade $\sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda = 1$ estritamente subordinada à cobertura \mathcal{A} .

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = 1$ uma partição da unidade subordinada a \mathcal{A} , obtida na Proposição 2.1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda \in L$ tal que $\text{supp}(\psi_n) \subset A_\lambda$. Definamos uma "função escolha" $f : \mathbb{N} \rightarrow L$, pondo $f(n) = \lambda$ tal que $\text{supp}(\psi_n) \subset A_\lambda$, isto é,

$\text{supp}(\psi_n) \subset A_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\lambda \in L$ ponhamos $\xi_\lambda = \sum_{f(n)=\lambda} \psi_n$. Como os suportes das ψ_n formam uma cobertura localmente finita, temos

$$\text{supp}(\xi_\lambda) = \overline{\bigcup_{f(n)=\lambda} \text{supp}(\psi_n)} = \bigcup_{f(n)=\lambda} \overline{\text{supp}(\psi_n)}$$

Afirmamos que $(\text{supp}(\xi_\lambda))_{\lambda \in L}$ é uma família localmente finita. De fato, para cada $x \in M$ existem $J = \{n_1, \dots, n_r\} \subset \mathbb{N}$ e uma vizinhança $V_x \ni x$ tais que $\text{supp}(\psi_n) \cap V_x \neq \emptyset \Rightarrow n \in J$. Seja $L_0 = f(J)$. Se $\text{supp}(\xi_\lambda) \cap V_x \neq \emptyset$ então existe n tal que $f(n) = \lambda$ e $\text{supp}(\psi_n) \cap V_x \neq \emptyset$. Logo $n \in J$ e, portanto, $\lambda \in L_0$. Resumindo: $\text{supp}(\xi_\lambda) \cap V_x \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in L_0$. Para concluir a demonstração façamos $\xi = \sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda$ e $\varphi_\lambda = \frac{\xi_\lambda}{\xi}$. ■

O Teorema de Ponto Fixo dado abaixo e os dois Lemas dados a seguir serão importantes para demonstrar que sob certas condições sobre um operador A ponto-conjunto e sobre um operador B ponto-ponto, a expressão $0 \in (A + B)x$ possui solução.

Teorema de Ponto Fixo de Brouwer. ([12] p. 10-11) *Sejam E um espaço de Banach real de dimensão finita, $K \subset E$ um subconjunto compacto e convexo e, $f : K \rightarrow K$ uma função contínua. Então, f admite um ponto fixo.*

Demonstração. Ver Teorema 2.5 em ([12] p. 10-11). ■

Lema 2.1.1. ([5], p. 30) *Sejam E um espaço de Banach real de dimensão finita e B um operador ponto-ponto, monótono e hemicontínuo de E em E^* . Então o operador B é contínuo.*

Demonstração. Primeiro provamos que o operador B é limitado em subconjuntos limitados. De fato, caso contrário existiria uma sequência $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ e $\|B(x_n)\| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Como B é monótono, temos

$$\langle B(x_n) - B(x), x_n - x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in E$$

daí

$$\left\langle \frac{B(x_n)}{\|B(x_n)\|} - \frac{B(x)}{\|B(x)\|}, x_n - x \right\rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in E \quad (2.4)$$

Como E é de dimensão finita, E^* também é, logo B_{E^*} é compacto. A sequência

$$\left\{ \frac{B(x_n)}{\|B(x_n)\|} \right\} \subset B_{E^*}$$

Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir $\frac{B(x_n)}{\|B(x_n)\|} \rightarrow y_0$, com $\|y_0\| = 1$. Fixando $x \in E$ e fazendo $n \rightarrow \infty$, na desigualdade (2.4), temos

$$\langle y_0, x_0 - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in E$$

pois $\frac{B(x)}{\|B(x_n)\|} \rightarrow 0$, já que cada coordenada de $B(x)$ vai convergir pra zero. Se tivermos $\langle y_0, x_0 - x \rangle > 0$ para todo $x \in E$, em particular, teríamos $\langle y_0, x_0 - x_0 \rangle = \langle y_0, 0 \rangle > 0$, absurdo! Se $\langle y_0, x_0 - x \rangle = 0$ para todo $x \in E$, logo $y_0 = 0$, absurdo, pois $\|y_0\| = 1$.

Portanto, o operador B é limitado em subconjuntos limitados.

Agora, seja $\{x_n\} \subset E$, com $x_n \rightarrow x_0$. Pelo que foi mostrado acima a sequência $\{B(x_n)\}$ em E^* é limitada. Consideremos y_0 um valor de aderência da sequência $\{B(x_n)\}$ e mostremos que este é igual a $B(x_0)$. Como B é monótono, temos

$$\langle y_0 - B(x), x_0 - x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in E$$

tomando nesta desigualdade $x = tu + (1 - t)x_0$, com $t \in (0, 1]$ e $u \in E$ arbitrário, temos

$$\langle y_0 - B(tu + (1 - t)x_0), x_0 - tu - (1 - t)x_0 \rangle = \langle y_0 - B(tu + (1 - t)x_0), t(x_0 - u) \rangle \geq 0$$

de onde

$$\langle y_0 - B(tu + (1 - t)x_0), x_0 - u \rangle \geq 0, \text{ para todo } t \in (0, 1] \text{ e } u \in E$$

fazendo $t \rightarrow 0$ e usando a hemicontinuidade de B obtemos

$$\langle y_0 - B(x_0), x_0 - u \rangle \geq 0, \text{ para todo } u \in E$$

Se $\langle y_0 - B(x_0), x_0 - u \rangle > 0$, para todo $u \in E$, em particular temos

$$\langle y_0 - B(x_0), x_0 - x_0 = 0 \rangle > 0,$$

absurdo. Logo $\langle y_0 - B(x_0), x_0 - u \rangle = 0$, para todo $u \in E$, portanto,

$$y_0 - B(x_0) = 0 \Rightarrow y_0 = B(x_0).$$

■

Definição 2.1.6. ([6], p. 53) Seja $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ operador monótono. A é **monótono maximal** se não existe operador monótono $B : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ tal que $\text{Graf}(B)$ contém propriamente $\text{Graf}(A)$, isto é, $\forall (x, u) \in E \times E^*$

$$(x, u) \in \text{Graf}(A) \Leftrightarrow \forall (y, v) \in \text{Graf}(A), \langle u - v, x - y \rangle \geq 0$$

Teorema 2.1.1. ([5], p. 30) *Sejam E um espaço de Banach real reflexivo, $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ operador monótono maximal, $0 \in D(A)$, $B : E \rightarrow E^*$ operador monótono, ponto-ponto, hemicontínuo e coercivo, isto é,*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle B(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty$$

e $D(B) = E$. Então existe $x \in K = \overline{\text{conv}D(A)}$ tal que

$$\langle Bx + v, u - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A \quad (2.5)$$

Em particular, como A é monótono maximal, segue de (2.5) que $-Bx \in Ax$.

Demonstração. A demonstração será feita em duas partes.

(Primeira parte – Quando o espaço E tem dimensão finita)

É suficiente provar o resultado para $D(A)$ limitado.

De fato, se o resultado é válido para domínio limitado, consideramos os operadores $A_n : K_n \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$, onde $A_n x = Ax$ e $K_n = K \cap \{x \in E; \|x\| \leq n\}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K_n$ tal que

$$\langle Bx_n + v, u - x_n \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf} A_n \quad (2.6)$$

Como $0 \in D(A_n)$, em particular temos $\langle Bx_n + \xi, -x_n \rangle \geq 0$, com $\xi \in A_n 0$ fixo. Daí,

$$\langle Bx_n, -x_n \rangle + \langle \xi, -x_n \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \xi, -x_n \rangle \geq \langle Bx_n, x_n \rangle \Rightarrow \|\xi\| \|x_n\| \geq \langle \xi, -x_n \rangle \geq \langle Bx_n, x_n \rangle$$

ou seja,

$$\frac{\langle Bx_n, x_n \rangle}{\|x_n\|} \leq \|\xi\|$$

Da coercividade de B , concluímos que existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a subsequência, se necessário, podemos assumir que $x_n \rightarrow x$. Do Lema 2.1.1, B é contínuo, então fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.6) obtemos,

$$\langle Bx + v, u - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf} A$$

como queríamos.

Assumindo $D(A)$ limitado mostramos que o resultado é válido. Seja $K = \overline{\text{conv}D(A)}$ tal que $D(A) \subseteq K$. Suponhamos, por absurdo, que

$$\text{para todo } x \in K \text{ existe } (u, v) \in \text{Graf} A, \text{ com } \langle Bx + v, u - x \rangle < 0$$

Podemos então escrever

$$K = \bigcup_{(u,v) \in \text{Graf} A} \{x \in K; \langle Bx + v, u - x \rangle < 0\}$$

isto é, K é coberto por conjuntos abertos. Como K é compacto, implica que existe $(u_i, v_i) \in \text{Graf} A, 1 \leq i \leq m$, assim

$$K = \bigcup_{i=1}^m K_i, \text{ onde } K_i = \{x \in K; \langle Bx + v_i, u_i - x \rangle < 0\}$$

Seja $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ a partição da unidade estritamente subordinada a esta cobertura. Definamos a aplicação $f : K \rightarrow K$, pondo $f(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) u_i$ para cada $x \in K$. Como cada φ_i é contínua, então f é contínua, do Teorema de Ponto Fixo de Brouwer existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = x_0$. Por outro lado, para cada $x \in K$, podemos definir a função $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, pondo

$$\begin{aligned} g(x) &= \left\langle \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) v_i + Bx, f(x) - x \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) (v_i + Bx), \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) (u_j - x) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \langle v_i + Bx, u_j - x \rangle \end{aligned}$$

Analisando esta última igualdade temos: se $i = j$ e $\varphi_i^2(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi_i(x) \neq 0$ o que implica $x \in K_i$ e, assim $\langle v_i + Bx, u_i - x \rangle < 0$; se $i \neq j$ e $\varphi_i(x)\varphi_j(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi_i(x) \neq 0$ e $\varphi_j(x) \neq 0$ o que implica $x \in K_i \cap K_j$, e assim $\langle v_i + Bx, u_i - x \rangle < 0$ e $\langle v_j + Bx, u_j - x \rangle < 0$. Usando a monotonicidade de A , temos

$$\begin{aligned} \langle v_i + Bx, u_j - x \rangle + \langle v_j + Bx, u_i - x \rangle &= \langle v_i - v_j + v_j + Bx, u_j - x \rangle \\ &\quad + \langle v_j - v_i + v_i + Bx, u_i - x \rangle \\ &= \langle v_i - v_j, u_j - x \rangle + \langle v_j + Bx, u_j - x \rangle \\ &\quad + \langle v_j - v_i, u_i - x \rangle + \langle v_i + Bx, u_i - x \rangle \\ &= \langle v_i - v_j, u_j - v_i \rangle + \langle v_j + Bx, u_j - x \rangle \\ &\quad + \langle v_i + Bx, u_i - x \rangle < 0 \end{aligned}$$

Ou seja, $g(x) < 0$ para todo $x \in K$, o que contradiz o fato de

$$g(x_0) = \left\langle \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_0)v_i + Bx_0, f(x_0) - x_0 \right\rangle = 0$$

Portanto, existe $x \in K = \overline{\text{conv}D(A)}$ tal que $\langle Bx + v, u - x \rangle \geq 0$ para todo $(u, v) \in \text{Graf}A$.

(Segunda parte – Quando o espaço E tem dimensão infinita)

Para demonstrar o resultado em dimensão infinita, consideramos Λ a família de todos os subespaços de dimensão finita $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de E ordenada pela relação de inclusão. Supomos também I um conjunto dirigido, a saber $\alpha < \beta \Rightarrow E_\alpha \subset E_\beta$. Para cada $E_\alpha \in \Lambda$, denotemos por P_α a projeção de E_α em E , P'_α seu operador adjunto, $A_\alpha = P'_\alpha A P_\alpha$, $B_\alpha = P'_\alpha B P_\alpha$ e $K_\alpha = K \cap E_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Temos do Lema 2.1.2, que será demonstrado a seguir, que A_α e B_α tem as mesmas características de A e B , respectivamente. Da primeira parte da demonstração, para cada $\alpha \in I$ existe $x_\alpha \in K_\alpha$ tal que

$$\langle B_\alpha x_\alpha + \bar{v}, u - x_\alpha \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, \bar{v}) \in \text{Graf}A_\alpha$$

isto é,

$$\langle Bx_\alpha + v, u - x_\alpha \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A \quad (2.7)$$

Em particular, como $0 \in D(A)$, tomando $\xi \in A(0)$ fixo, temos

$$\langle Bx_\alpha, -x_\alpha \rangle + \langle \xi, -x_\alpha \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \xi, -x_\alpha \rangle \geq \langle Bx_\alpha, x_\alpha \rangle \Rightarrow \|\xi\| \|x_\alpha\| \geq \langle \xi, -x_\alpha \rangle \geq \langle Bx_\alpha, x_\alpha \rangle$$

ou seja,

$$\frac{\langle Bx_\alpha, x_\alpha \rangle}{\|x_\alpha\|} \leq \|\xi\|$$

Usando a coercividade de B nesta última desigualdade, concluímos que $\{x_\alpha\}$ é um subconjunto limitado de E , ou seja, existe $M \geq 0$ tal que $\|x_\alpha\| \leq M$. O espaço E é reflexivo, então $B[0; M]$ é fracamente compacta, logo existe uma sequência $\{x_{\alpha_n}\} \subset \{x_\alpha\}$ tal que

$$x_{\alpha_n} \xrightarrow{w} x \text{ em } E \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Além disso, como o operador B leva conjuntos limitados em conjuntos limitados e E^* é reflexivo, podemos supor

$$Bx_{\alpha_n} \xrightarrow{w} y \text{ em } E^* \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Como os subconjuntos convexos fechados são fracamente fechados, inferimos que $x \in K$. De (2.7), obtemos

$$\langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} \rangle \leq \langle B_{\alpha_n}, u \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, x_{\alpha_n} \rangle \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A$$

usando (2.8) e (2.9), vemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} \rangle &\leq \langle y, u \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, x \rangle \\ &= \langle y, u \rangle + \langle v, u - x \rangle \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mostramos, agora que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x \rangle \leq 0 \quad (2.11)$$

Se isto não é verdade, temos $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x \rangle > 0$, equivalente a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} \rangle > \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bx_{\alpha_n}, x \rangle = \langle y, x \rangle$$

daí e de (2.10)

$$\langle y, u \rangle + \langle v, u - x \rangle > \langle y, x \rangle \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A$$

isto é,

$$\langle y + v, u - x \rangle > 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A$$

Como A é monótono maximal com domínio em K , $x \in K$, então $(x, -y) \in \text{Graf}A$. Pondo $u = x$ em (2.10) obtemos (2.11), o que contradiz a hipótese trabalhada.

Agora, para u arbitrário mas fixo em $D(A)$ considere $u_t = tx + (1 - t)u$, $0 \leq t \leq 1$, em virtude da monotonicidade de B , temos

$$\langle Bx_{\alpha_n} - Bu_t, x_{\alpha_n} - u_t \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - u_t \rangle \geq \langle Bu_t, x_{\alpha_n} - u_t \rangle$$

substituindo u_t

$$\begin{aligned} \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - tx - (1 - t)u \rangle &\geq \langle Bu_t, x_{\alpha_n} - tx - (1 - t)u \rangle \\ &\Downarrow \\ \langle Bx_{\alpha_n}, t(x_{\alpha_n} - x) + (1 - t)(x_{\alpha_n} - u) \rangle &\geq \langle Bu_t, t(x_{\alpha_n} - x) + (1 - t)(x_{\alpha_n} - u) \rangle \\ &\Downarrow \\ t\langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x \rangle + (1 - t)\langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - u \rangle &\geq t\langle Bu_t, x_{\alpha_n} - x \rangle + (1 - t)\langle Bu_t, x_{\alpha_n} - u \rangle \end{aligned}$$

aplicando $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ e usando (2.10) e (2.11) obtemos

$$\langle v, u - x \rangle \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bx_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - u \rangle \geq \langle Bu_t, x - u \rangle \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A$$

Na medida em que B é hemicontínuo, fazendo $t \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \langle v, u - x \rangle &\geq \langle Bx, x - u \rangle \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A \\ &\Downarrow \\ \langle v + Bx, u - x \rangle &\geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Em particular, sendo A monótono maximal, como

$$\langle -Bx - v, x - u \rangle = \langle v + Bx, u - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A$$

concluimos que $-B(x) \in A(x)$. ■

Lema 2.1.2. *Sejam E um espaço de Banach real reflexivo. Considerando dois operadores A e B com as mesmas propriedades dadas no Teorema 2.1.1. Os operadores $A_\alpha : E_\alpha \rightarrow \mathcal{P}(E_\alpha^*)$ e $B_\alpha : E_\alpha \rightarrow E_\alpha^*$ dados por $A_\alpha = P'_\alpha A P_\alpha$, $B_\alpha = P'_\alpha B P_\alpha$ e $K_\alpha = K \cap E_\alpha$, onde $P_\alpha : E_\alpha \rightarrow E$ é a projeção de E_α em E e $P'_\alpha : E^* \rightarrow E_\alpha^*$ é seu operador adjunto, têm as mesmas propriedades dos operadores A e B , respectivamente.*

Demonstração. Notemos que dado $x \in E_\alpha$, o operador A_α restringe os funcionais $x^* \in Ax \subset E^*$ ao subespaço E_α de E , ou seja, a imagem de $x \in E_\alpha$ pelo operador A_α é o funcional $\bar{x}^* \in E_\alpha^*$ tal que $\langle \bar{x}^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle$ para todo $x \in E_\alpha$. Da mesma forma, o operador B_α restringe os funcionais $B(x) \in E^*$ ao subespaço E_α de E , ou seja, a imagem de $x \in E_\alpha$ pelo operador B_α é o funcional $\overline{Bx} \in E_\alpha^*$ tal que $\langle \overline{Bx}, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ para todo $x \in E_\alpha$. Logo os operadores A_α e B_α têm as mesmas propriedades dos operadores A e B , respectivamente. ■

Observação 2.1.1.

(a) Para o caso de E ser um espaço de Banach real de dimensão finita, não foi necessária a hipótese de maximalidade de A .

(b) Com a demonstração do Teorema 2.1.1, também foi demonstrado que o domínio efetivo de um operador monótono maximal é convexo e fechado.

Notemos que a aplicação de dualidade J tem as mesma propriedades do operador B dado no Teorema (2.1.1). Assim temos o seguinte Teorema que caracteriza um operador monótono maximal. Utilizamos esta caracterização, logo em seguida, para definir resolvente destes operadores.

Teorema 2.1.2. *([5], p. 34) Sejam E um espaço de Banach real estritamente convexo, suave e reflexivo e $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono. Então A é monótono maximal se, e somente se, $R(J + rA) = E^*$ para todo $r > 0$, onde $R(J + rA) = E^*$ é a imagem de $J + rA$.*

Demonstração. A aplicação de dualidade J é estritamente convexa, injetiva, ponto-ponto e sobrejetiva, já que E um espaço de Banach real estritamente convexo, suave e reflexivo.

(\Leftarrow) Seja $R(J + rA) = E^*$ para qualquer $r > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A não é monótono maximal, logo existe $(y_0, z_0^*) \in E \times E^*$ tal que $(y_0, z_0^*) \notin \text{Graf} A$ e

$$\langle x^* - z_0^*, x - y_0 \rangle \geq 0 \text{ para todo } (x, x^*) \in \text{Graf} A \quad (2.12)$$

Por hipótese, existe $(x_1, x_1^*) \in \text{Graf} A$ tal que

$$Jx_1 + rx_1^* = Jy_0 + rz_0^* \Rightarrow x_1^* = \frac{1}{r}(Jy_0 - Jx_1) + z_0^* \quad (2.13)$$

Substituindo (x_1, x_1^*) na desigualdade (2.12) no lugar de (x, x^*) , obtemos

$$\begin{aligned} \langle x_1^* - z_0^*, x_1 - y_0 \rangle &\geq 0 \\ \langle \frac{1}{r}(Jy_0 - Jx_1) + z_0^* - z_0^*, x_1 - y_0 \rangle &\geq 0 \\ \langle \frac{1}{r}(Jy_0 - Jx_1), x_1 - y_0 \rangle &\geq 0 \\ \langle Jx_1 - Jy_0, x_1 - y_0 \rangle &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como J é monótona, da desigualdade (2.14), concluímos que $\langle Jx_1 - Jy_0, x_1 - y_0 \rangle = 0$, mas J é estritamente monótona e ponto-ponto, portanto, $x_1 = y_0$ e assim $Jx_1 = Jy_0$. Usando isto na igualdade (2.13) resulta $x_1^* = z_0^*$, ou seja, $(y_0, z_0^*) \in \text{Graf} A$, contradição.

(\Rightarrow) Seja A um operador monótono maximal em E . Podemos admitir que $0 \in D(A)$, pois caso contrário podemos aplicar este teorema para os operadores definidos por

$$B'x = \frac{J(x + x_0) - y_0^*}{r} \text{ e } A'x = A(x + x_0) \text{ com } x_0 \in D(A)$$

Como E é estritamente convexo, da Proposição 2.1.1, J é ponto-ponto e demicontínua em E . Sejam $y_0^* \in E^*$ e $r > 0$ arbitrários. Defina o operador $B : E \rightarrow E^*$, pondo $Bx = \frac{Jx - y_0^*}{r}$. O operador B é ponto-ponto, hemicontínuo e $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle Bx, x \rangle}{\|x\|} = \infty$. Aplicando o Teorema 2.1.1, existe $x \in \text{conv}D(A)$ tal que

$$\left\langle \frac{Jx - y_0^*}{r} + v, u - x \right\rangle = \langle Bx + v, u - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } (u, v) \in \text{Graf}A$$

Desta última desigualdade e da monotonicidade maximal de A , obtemos

$$\left(x, -\frac{Jx - y_0^*}{r}\right) \in \text{Graf}A$$

isto é,

$$-\frac{Jx - y_0^*}{r} \in Ax \Rightarrow y_0^* \in Jx + rAx = (J + rA)x$$

Portanto, $R(J + rA) = E^*$ ■

Corolário 2.1.1. ([2], p.398) *Sejam E um espaço de Banach real estritamente convexo, suave e reflexivo e $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono maximal. Dados $r > 0$ e $x \in E$, existe um único $x_r \in D(A)$ tal que $Jx \in Jx_r + rAx_r = (J + rA)x_r$.*

Demonstração. A existência de x_r é consequência do Teorema 2.1.2, pois

$$R(J + rA) = E^*$$

Suponhamos por absurdo que, além de x_r , exista $y_r \in D(A)$, $y_r \neq x_r$, tal que $Jx \in Jy_r + rAy_r$. Disto e do fato de J ser ponto-ponto, existem $x_r^* \in Ax_r$ e $y_r^* \in Ay_r$ tais que $Jx = Jx_r + rx_r^*$ e $Jx = Jy_r + ry_r^*$. Assim, como J é estritamente monótono e A é monótono

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Jx - Jx, x_r - y_r \rangle \\ &= \langle Jx_r + rx_r^* - (Jy_r + ry_r^*), x_r - y_r \rangle \\ &= \langle Jx_r - Jy_r, x_r - y_r \rangle + r \langle x_r^* - y_r^*, x_r - y_r \rangle \\ &> 0 \end{aligned}$$

absurdo. ■

Assim podemos definir uma aplicação ponto-ponto $J_r : E \rightarrow D(A)$ pondo $J_r x = x_r$, isto é, $J_r = (J + rA)^{-1}J$.

Definição 2.1.7. A aplicação J_r é chamada o **resolvente** de A para r .

Mais ainda, dados $r > 0$ e $x \in E$, temos que $Jx \in Jx_r + rAx_r$, usando a definição de resolvente acima temos $Jx \in JJ_r x + rAJ_r x \Rightarrow Jx - JJ_r x \in rAJ_r x$ e, daí

$$\frac{1}{r}(J - JJ_r)x \in AJ_r x \quad (2.15)$$

O conjunto de todos os zeros de A é denotado por $A^{-1}0$, isto é,

$$A^{-1}0 = \{x \in E; 0 \in Ax\}$$

Denotamos por $F(J_r) = \{x \in E; J_r x = x\}$ o conjunto de pontos fixos de J_r , temos $F(J_r) = A^{-1}0$. De fato, dado $x \in E$ e $r > 0$,

$$x \in A^{-1}0 \Leftrightarrow 0 \in Ax \Leftrightarrow 0 \in rAx \Leftrightarrow Jx \in Jx + rAx \Leftrightarrow J_r x = x \Leftrightarrow x \in F(J_r)$$

Esses resultados são encontrados em ([2], p.398).

2.2 Monotonicidade Maximal de Bifunções

Nesta seção, seguimos as mesmas ideias desenvolvidas por Blum e Oettli em [7] para definir bifunção monótona e bifunção monótona maximal.

Definição 2.2.1. ([7], p.128) Sejam E um espaço de Banach real e C um subconjunto não vazio de E . Uma bifunção $f : E \times E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é chamada **monótona** com respeito a C se

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0$$

para todo $x, y \in C$.

Dado $x \in E$, seja $f(x, \cdot) : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é s.c.i. e convexa. Se existe $x \in E$ tal que $f(x, x) \in \mathbb{R}$, então $f(x, y) > -\infty$ para todo $y \in E$. De fato, seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência no intervalo $(0, 1)$ tal que $\lambda_n \rightarrow 0$. Suponhamos, por absurdo, que existe $z \in E$ tal que $f(x, z) = -\infty$, então

$$f(x, \lambda_n z + (1 - \lambda_n)x) \leq \lambda_n f(x, z) + (1 - \lambda_n)f(x, x) = -\infty$$

Como $f(x, \cdot)$ é s.c.i., temos que

$$f(x, x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x, \lambda_n z + (1 - \lambda_n)x) = -\infty$$

o que contradiz o fato de $f(x, x) \in \mathbb{R}$. Adicionando a hipótese de que $f : E \times E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é monótona com respeito a C , temos $f(x, y) \in \mathbb{R}$ para todo $x, y \in C$. De fato, suponha que $f(y, x) = \infty$ para algum $x, y \in C$. Então, da monotonicidade de f , temos

$$0 < f(x, y) \leq -f(y, x) = -(\infty) = -\infty$$

que é uma contradição.

Exemplo 2.2.1. Dado $x^* \in E^*$ fixo. A bifunção $\tilde{h} : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ definida por

$$\tilde{h}(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, y - x \rangle.$$

é monótona com respeito a qualquer subconjunto $C \subset E$ não vazio. De fato, dados $x, y \in C$ temos

$$\tilde{h}(x, y) + \tilde{h}(y, x) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, y - x \rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \langle x^*, x - y \rangle = 0.$$

Exemplo 2.2.2. A bifunção $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = (y - x)^3$ é monótona. De fato,

$$\begin{aligned} g(x, y) + g(y, x) &= (y - x)^3 + (x - y)^3 \\ &= (y - x)(y - x)^2 + (x - y)(x - y)^2 \\ &= ((y - x) + (x - y))(x - y)^2 = 0 \end{aligned}$$

Vejamos a seguinte característica de uma bifunção definida a partir de um operador monótono maximal que motiva a definição de monotonicidade maximal para bifunções conforme Blum e Oettli em ([7], p.132).

Lembramos que um operador monótono $A : X \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ é **monótono maximal** se para todo $(x, u) \in X \times X^*$

$$(x, u) \in \text{Graf}(A) \Leftrightarrow \forall (y, v) \in \text{Graf}(A), \langle x - y, u - v \rangle \geq 0$$

Definamos a bifunção $g_A : D(A) \times D(A) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por $g_A(x, y) = \sup\{\langle x^*, y - x \rangle; x^* \in Ax\}$. Seja $(x, \xi) \in D(A) \times E^*$ fixo. Assumimos que

$$\sup\{\langle y^*, x - y \rangle; y^* \in Ay\} = g_A(y, x) \leq \langle \xi, y - x \rangle \text{ para todo } y \in D(A)$$

Então $\langle y^*, x - y \rangle \leq \langle \xi, y - x \rangle$ para todo $y^* \in Ay$ e daí

$$\langle y^* + \xi, y - x \rangle = \langle y^* - (-\xi), y - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } y^* \in Ay$$

como A é monótono maximal, concluimos $-\xi \in Ax$. Além disso,

$$g_A(x, y) = \sup\{\langle x^*, y - x \rangle; x^* \in Ax\} \geq \langle -\xi, y - x \rangle$$

isto é,

$$0 \leq g_A(x, y) + \langle \xi, y - x \rangle \text{ para todo } y \in D(A)$$

Definição 2.2.2. Seja C um subconjunto não vazio de E . Uma bifunção $f : E \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita ser **monótona maximal** com respeito a C se, para cada $x \in C$ e $x^* \in E^*$,

$$f(x, y) + \langle x^*, y - x \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in C$$

sempre que $\langle x^*, y - x \rangle \geq f(y, x)$ para todo $y \in C$.

Seguindo generalizamos esse fato pondo a seguinte definição para função monótona maximal.

Definição 2.2.3. Seja C um subconjunto não vazio de E . Uma bifunção $f : E \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita ser **monótona maximal** com respeito a C se, para cada $x \in C$ e para cada função convexa $\phi : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com $\phi(x) = 0$,

$$f(x, y) + \phi(y) \geq 0 \text{ para todo } y \in C$$

sempre que $\phi(y) \geq f(y, x)$ para todo $y \in C$.

Exemplo 2.2.3. Vejamos que a função \tilde{h} definida no exemplo 2.2.1 é monótona maximal. Dados $x \in C$ e $\xi \in E^*$, supondo $\tilde{h}(y, x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \langle x^*, x - y \rangle \leq \langle \xi, y - x \rangle$ para todo $y \in C$, temos $0 \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, y - x \rangle + \langle \xi, y - x \rangle \Rightarrow 0 \leq \tilde{h}(x, y) + \langle \xi, y - x \rangle$ para todo $y \in C$.

Exemplo 2.2.4. A função g definida, no exemplo 2.2.2, é monótona maximal. Dados $x, \xi \in \mathbb{R}$, supondo $g(y, x) = (x - y)^3 \leq \xi(y - x)$ para todo $y \in \mathbb{R}$, segue que

$$0 \leq -(x - y)^3 + \xi(y - x) = (-1)^3(x - y)^3 + \xi(y - x) = (y - x)^3 + \xi(y - x).$$

ou seja, $0 \leq g(x, y) + \xi(y - x)$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Todo operador monótono maximal é, por definição, monótono. Esse fato não é verdadeiro quando trata-se de bifunção monótona maximal, isto é, nem toda bifunção monótona maximal é monótona.

Exemplo 2.2.5. Seja E um espaço de Banach. Seja a bifunção $g : E \times E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $g(x, y) = \|x - y\|^2$. A bifunção g é monótona maximal, mas não é monótona. De fato, dado $x \in E$ fixo, para $y \in E$ tal que $y \neq x$ temos $g(x, y) + g(y, x) = \|x - y\|^2 + \|y - x\|^2 > 0$. Por outro lado, dado $\xi \in E^*$ tal que

$$g(y, x) = \|y - x\|^2 \leq \langle \xi, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in E,$$

resulta

$$0 \leq -\|y - x\|^2 + \langle \xi, y - x \rangle \leq \|x - y\|^2 + \langle \xi, y - x \rangle,$$

ou seja,

$$0 \leq g(x, y) + \langle \xi, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in E$$

A definição de bifunção monótona maximal, foi usada por Blum e Oettli ([7], p.127-130), para modificar as hipóteses do seguinte resultado de existência para um problema de equilíbrio.

Definição 2.2.4. *Sejam K e C conjuntos convexos com $K \subset C$. Então $core_C K$, o **core** de K relativo a C , é definido através*

$$a \in core_C K \Leftrightarrow a \in K, \text{ e } K \cap (a, y) \neq \emptyset \text{ para todo } y \in C \setminus K$$

Teorema 2.2.1. ([7], p.127-128). *Considere as seguintes afirmações:*

i) X é um espaço vetorial topológico real e $C \subset X$ é um subconjunto fechado, convexo e não vazio;

ii) A bifunção $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

(g1) $g(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;

(g2) g é monótona com respeito a C ;

(g3) $g(x, \cdot)$ é convexa e s.c.i. para todo $x \in C$.

(g4) Para todo $x, y \in C$ a função $t \in [0, 1] \mapsto g(ty + (1 - t)x, y)$ é s.c.s em $t = 0$;

iii) A bifunção $h : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

- (h1) $h(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;
 (h2) $h(x, \cdot)$ é convexa para todo $x \in C$;
 (h3) $h(\cdot, y)$ é s.c.s. para todo $y \in C$.

iv) Existe $K \subset C$ compacto, convexo e não vazio tal que para cada $x \in K \setminus \text{core}_C K$ existe $a \in \text{core}_C K$ tal que $g(x, a) + h(x, a) < 0$.

Então existe $\bar{x} \in K$ tal que $0 \leq g(\bar{x}, y) + h(\bar{x}, y)$, para todo $y \in C$.

Demonstração. Ver Teorema 1 em ([7], p.127-128) ■

Para demonstrar este Teorema foi necessário demonstrar, o seguinte Lema.

Lema 2.2.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\bar{x} \in K$, $g(y, \bar{x}) \leq h(\bar{x}, y)$ para todo $y \in K$;
 (b) $\bar{x} \in K$, $0 \leq g(\bar{x}, y) + h(\bar{x}, y)$ para todo $y \in K$;

Demonstração. Ver Lema 3 em ([7], p.129-130) ■

Este Lema mostra que a bifunção g que tem as propriedades (g1), (g2), (g3) e (g4) do Teorema 2.2.1 é monótona maximal. Assim, podemos substituir a hipótese (g4) da bifunção g , pela hipótese de monotonicidade maximal no Teorema 2.2.1, desde que troquemos a condição iv) pela condição:

- existe $B \subset C$ compacto, convexo não vazio, tal que

$$\text{para cada } x \in C \setminus B \text{ existe } a \in B \text{ com } g(x, a) + h(x, a) < 0$$

É o que fizemos na seção seguinte.

2.3 Existência e Unicidade de Solução para um Problema de Equilíbrio

O resultado a seguir mostra um resultado de existência para problema de equilíbrio definido em um espaço vetorial topológico real.

Teorema 2.3.1. ([7], p.134). *Considere as seguintes afirmações:*

i) X é um espaço vetorial topológico real e $C \subset X$ é um subconjunto fechado, convexo e não vazio;

ii) A bifunção $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

- (G1) $g(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;
 (G2) g é monótona com respeito a C ;
 (G3) $g(x, \cdot)$ é convexa e s.c.i. para todo $x \in C$.
 (G4) g é monótona maximal com respeito a C ;

iii) A bifunção $h : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

- (H1) $h(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;
 (H2) $h(x, \cdot)$ é convexa para todo $x \in C$;

(H3) $h(\cdot, y)$ é s.c.s. para todo $y \in C$.

iv) Existe $B \subset C$ compacto, convexo e não vazio tal que para cada $x \in C \setminus B$ existe $a \in B$ com $-g(a, x) + h(x, a) < 0$.

Então existe $\bar{x} \in B$ tal que $0 \leq g(\bar{x}, y) + h(\bar{x}, y)$, para todo $y \in C$.

Mostramos primeiro, sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.1, o seguinte Lema.

Lema 2.3.1. ([7], p.128). Dado $K \subset C$ compacto, convexo e não vazio. Existe $\tilde{x} \in K$ tal que $g(y, \tilde{x}) \leq h(\tilde{x}, y), \forall y \in K$.

Demonstração. (do lema) Dado $y \in K$, consideramos o conjunto

$$S(y) = \{x \in K; g(y, x) \leq h(x, y)\}$$

Cada conjunto $S(y) \in K$ é fechado e não vazio. De fato, $y \in S(y)$ para todo $y \in K$ e dado $\{x_n\} \subset S(y)$, com $x_n \rightarrow x \in K$, temos $g(y, x_n) \leq h(x_n, y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g(x, \cdot)$ é s.c.i., $h(\cdot, x)$ é s.c.s e K é compacto, então $g(x, \cdot)$ é limitada inferiormente e $h(\cdot, x)$ é limitada superiormente, assim

$$g(y, x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(y, x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} h(y, x_n) \leq h(x, y)$$

ou seja, $x \in S(y)$.

Temos que provar que $\bigcap_{y \in K} S(y) \neq \emptyset$

Mostramos que a família \mathcal{S} dos conjuntos $S(y)$ cumpre as condições do Lema Ky Fan. Sejam $y_i, i \in N = \{1, \dots, n\}$, um subconjunto finito de K . Seja $z \in \text{conv}\{y_i; i \in N\}$ arbitrário. Então,

$$z = \sum_{i \in N} t_i y_i \text{ com } t_i \geq 0, \text{ para todo } i \in N, \text{ e } \sum_{i \in N} t_i = 1$$

Supomos por absurdo que

$$g(y_i, z) > h(z, y_i), \text{ para todo } i \in N \quad (2.16)$$

Disto segue

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} t_i g(y_i, z) &> \sum_{i \in N} t_i h(z, y_i) \\ \sum_{i \in N} t_i g(y_i, z) - \sum_{i \in N} t_i h(z, y_i) &> 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

já que nem todos t_i se anulam simultaneamente.

Por outro lado, das propriedades (G3), (G1) e (G2) de g , respectivamente, segue

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} t_i g(y_i, z) &= \sum_{i \in N} t_i g\left(y_i, \sum_{i \in N} t_i y_i\right) \\ &\leq \sum_{i \in N} t_i \sum_{j \in I} t_j g(y_i, y_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i, j \in N} t_i t_j (g(y_i, y_j) + g(y_j, y_i)) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

e das propriedades (H1) e (H2) de h segue

$$0 = h(z, z) = h(z, \sum_{i \in N} t_i y_i) \leq \sum_{i \in N} t_i h(z, y_i) \quad (2.19)$$

Das desigualdades (2.18) e (2.19) obtemos

$$\sum_{i \in N} t_i g(y_i, z) \leq 0 \leq \sum_{i \in N} t_i h(z, y_i)$$

isto é,

$$\sum_{i \in N} t_i g(y_i, z) - \sum_{i \in N} t_i h(z, y_i) \leq 0$$

o que contradiz a desigualdade (2.17). Assim, a desigualdade (2.16) não é verdadeira, logo

$$g(y_i, z) \leq h(z, y_i) \text{ para todo } i \in N$$

e daí $z \in S(y_i)$ para cada $i \in N$. Como z foi tomado arbitrário, concluímos

$$\text{conv}\{y_i; i \in N\} \subset \bigcup_{i \in N} S(y_i)$$

Como isto é verdadeiro para cada subconjunto finito não vazio N e os conjuntos $S(y_i)$ são fechados em um compacto, logo compactos. Segue do Lema Ky Fan

$$\bigcap_{y \in K} S(y) \neq \emptyset \quad (2.20)$$

Portanto, existe $\tilde{x} \in K$ tal que $g(y, \tilde{x}) \leq h(\tilde{x}, y), \forall y \in K$ ■

Agora vejamos a demonstração do Teorema.

Demonstração. (do Teorema) Seja $y_i, i \in N$, um subconjunto finito de C . Seja

$$K = \text{conv}\left\{B, \bigcup_{i \in N} y_i\right\},$$

K é convexo, compacto e não vazio. Do Lema 2.3.1 existe $\tilde{x} \in K$ tal que

$$g(y, \tilde{x}) \leq h(\tilde{x}, y), \forall y \in K \quad (2.21)$$

Afirmamos que $\tilde{x} \in B$, pois caso contrário da hipótese (iv) existiria $a \in B$ tal que $h(\tilde{x}, a) < g(a, \tilde{x})$ o que contraria (2.21). Da desigualdade (2.21) temos

$$g(y_i, \tilde{x}) \leq h(\tilde{x}, y_i), \forall i \in N \quad (2.22)$$

Considerando a família de subconjuntos fechados de B ,

$$S(y) = \{x \in B; g(y, x) \leq h(x, y), y \in C\}$$

Da desigualdade (2.22) temos que $\tilde{x} \in \bigcap_{i \in N} S(y_i)$, como y_i foram escolhidos de forma arbitrária e N é finito, logo a família de conjuntos fechados $S(y)$ de B , com $y \in C$, tem a propriedade de interseção finita. Como B é compacto, então do Teorema 1.1.1

$$\bigcap_{y \in C} S(y) \neq \emptyset$$

Portanto, existe $\bar{x} \in B$ tal que $g(y, \bar{x}) \leq h(\bar{x}, y), \forall y \in C$. Da monotonicidade maximal de g segue o resultado,

$$0 \leq g(\bar{x}, y) + h(\bar{x}, y), \forall y \in C$$

■

Agora a fim de substituir a bifunção h do Teorema 2.3.1 pela bifunção \tilde{h} , definida abaixo, trocamos no item *i*) o espaço vetorial topológico real X pelo espaço de Banach real reflexivo E , dotado com a topologia fraca. Uma justificativa para troca dos espaços é que em espaços reflexivos temos compacidade das bolas fechadas.

Dado $x^* \in E^*$ fixo. Seja a bifunção $\tilde{h} : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ definida por

$$\tilde{h}(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, y - x \rangle.$$

Estudamos, nas três proposições seguintes, que a bifunção \tilde{h} tem as mesmas propriedades da bifunção h e cumpre a condição *iv*) do Teorema 2.3.1.

Proposição 2.3.1. *Seja $C \subset E$ não vazio, ilimitado, fechado e convexo. A função \tilde{h} satisfaz as propriedades (H1), (H2) e (H3).*

Demonstração. De fato,

(H1) $\tilde{h}(x, x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, x - x \rangle = 0$ para todo $x \in E$, em particular, para todo $x \in C$.

(H2) Dados $y, z \in E$ e $t \in [0, 1]$, temos para todo $x \in C$ e $x^* \in E^*$.

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, ty + (1-t)z) &= \frac{1}{2}\|ty + (1-t)z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, ty + (1-t)z - x \rangle \\ &\leq \frac{1}{2}(t\|y\| + (1-t)\|z\|)^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \\ &\quad - \langle x^*, ty + (1-t)z - x \rangle \\ &= \frac{1}{2}(t^2\|y\|^2 + 2t(1-t)\|y\|\|z\| + (1-t)^2\|z\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, ty + (1-t)z - x \rangle \\ &\leq \frac{1}{2}(t^2\|y\|^2 + t(1-t)(\|y\|^2 + \|z\|^2) + (1-t)^2\|z\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, ty + (1-t)z - x \rangle \\ &= \frac{1}{2}(t\|y\|^2 + (1-t)\|z\|^2) - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, ty + (1-t)z - x \rangle \\ &= t\left(\frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, y - x \rangle\right) \\ &\quad + (1-t)\left(\frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x^*, z - x \rangle\right) \\ &= t\tilde{h}(x, y) + (1-t)\tilde{h}(x, z) \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{h}(x, \cdot)$ é convexa para todo $x \in C$.

(H3) Como a função norma é contínua e $x^* \in E^*$, logo $\tilde{h}(\cdot, y)$ é contínua para todo $y \in E$, em particular, $\tilde{h}(\cdot, y)$ é s.c.s para todo $y \in E$, logo para todo $x \in C$. ■

Proposição 2.3.2. *Seja $C \subset E$ não vazio, fechado e convexo. Fixando $a \in C$. Temos que*

$$\frac{\tilde{h}(x, a)}{\|x - a\|} \longrightarrow -\infty, \text{ se } \|x - a\| \longrightarrow +\infty, x \in C \quad (2.23)$$

Demonstração. Das propriedades de norma segue para cada $x \in C$, com $\|x - a\| > \|a\|$

$$\begin{aligned} \|x - a\| &\leq \|x\| + \|a\| \Rightarrow \|x - a\| - \|a\| \leq \|x\| \\ &\Rightarrow \|x - a\|^2 - 2\|a\|\|x - a\| + \|a\|^2 \leq \|x\|^2 \\ &\Rightarrow \|x - a\|^2 - 2\|a\|\|x - a\| \leq \|x\|^2 - \|a\|^2 \\ &\Rightarrow 2\|x - a\|\left(\frac{\|x - a\|}{2} - \|a\|\right) \leq \|x\|^2 - \|a\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{\|x - a\|}{2} - \|a\| \leq \frac{\|x\|^2 - \|a\|^2}{2\|x - a\|} \\ &\Rightarrow \frac{\|a\|^2 - \|x\|^2}{2\|x - a\|} \leq \|a\| - \frac{\|x - a\|}{2} \end{aligned}$$

Dado $x^* \in E^*$, $\left\langle x^*, \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\rangle \leq \|x^*\|$, segue

$$\frac{\|a\|^2 - \|x\|^2}{2\|x - a\|} + \left\langle x^*, \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\rangle \leq \|a\| + \left\langle x^*, \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\rangle - \frac{\|x - a\|}{2}$$

de onde

$$\frac{\tilde{h}(x, a)}{\|x - a\|} = \frac{\|a\|^2 - \|x\|^2}{2\|x - a\|} + \left\langle x^*, \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\rangle \leq \|a\| + \|x^*\| - \frac{\|x - a\|}{2}$$

Como $\|a\| + \|x^*\|$ é um valor fixo e $-\frac{\|x - a\|}{2} \longrightarrow -\infty$, quando $\|x - a\| \longrightarrow \infty$, segue que $\frac{\tilde{h}(x, a)}{\|x - a\|} \longrightarrow -\infty$, quando $\|x - a\| \longrightarrow \infty$. ■

Proposição 2.3.3. *([7], p.130 e 131). Sejam E um espaço de Banach real reflexivo, dotado com a topologia fraca, $a \in C$ fixo, com $C \subset E$ fechado e convexo, $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ satisfazendo as condições (G1), (G2), (G3) e (G4) e supondo válida a condição (2.23), para uma função $\tilde{h} : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ satisfazendo as condições (H1), (H2) e (H3), então existe $B \subset C$ compacto, convexo e não vazio tal que para cada $x \in C \setminus B$ existe $a \in B$ com $-g(a, x) + \tilde{h}(x, a) < 0$*

Demonstração. Seja

$$\overline{B} = \{x \in C; \|x - a\| \leq 1\}$$

Como $B[a; 1]$ é fracamente compacta e $\overline{B} \subseteq B[a; 1]$ é fechado e convexo, logo \overline{B} é fracamente compacto. Uma vez que $g(a, \cdot)$ é s.c.i., existe um número real M tal que $M \leq g(a, x)$ para todo $x \in \overline{B}$. Dado $x \in C$ tal que $\|x - a\| \geq 1$ tomemos

$$y = \left(1 - \frac{1}{\|x - a\|}\right)a + \frac{1}{\|x - a\|}x$$

segue

$$\|y - a\| = \left\| \left(1 - \frac{1}{\|x - a\|}\right)a + \frac{1}{\|x - a\|}x - a \right\| = \left\| \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\| = 1 \Rightarrow y \in \bar{B}$$

Daí, de $g(a, a) = 0$ e da convexidade de $g(a, \cdot)$, obtemos

$$M \leq g(a, y) = g\left(a, \left(1 - \frac{1}{\|x - a\|}\right)a + \frac{1}{\|x - a\|}x\right) = \frac{g(a, x)}{\|x - a\|}$$

para todo $x \in C$ com $\|x - a\| \geq 1$ e, portanto, $-\frac{g(a, x)}{\|x - a\|} \leq -M$. Assim,

$$\frac{-g(a, x) + \tilde{h}(x, a)}{\|x - a\|} \rightarrow -\infty, \text{ se } \|x - a\| \rightarrow +\infty, x \in C$$

e ainda

$$-g(a, x) + \tilde{h}(x, a) \rightarrow -\infty, \text{ se } \|x - a\| \rightarrow +\infty, x \in C \quad (2.24)$$

Do resultado (2.24), podemos escolher $R > 0$, conveniente, tal que $\|x - a\| > R$ implique $-g(a, x) + \tilde{h}(x, a) < 0$. Defina, agora, $B = \{x \in C; \|x - a\| \leq R\}$, B é compacto, convexo e não vazio e dado $x \in C \setminus B$, temos $\|x - a\| > R \Rightarrow -g(a, x) + \tilde{h}(x, a) < 0$, com $a \in B$. ■

Assim, concluímos que $\tilde{h}(x, y) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \langle x^*, y - x \rangle$ além de cumprir as propriedades (H1), (H2), (H3), também cumpre a condição *iv*) do Teorema 2.3.1. Portanto, obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 2.3.2. ([7], p. 135) *Sejam E um espaço de Banach real suave e reflexivo e C um subconjunto de E não vazio, fechado e convexo. Seja $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ que satisfaz o seguinte condições:*

- (G1) $g(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;
- (G2) g é monótona com respeito a C ;
- (G3) $g(x, \cdot)$ é convexa e s.c.i. para todo $x \in C$.
- (G4) g é monótona maximal com respeito a C ;

Então para cada $x^* \in E^*$, existe $\bar{x} \in C$ tal que

$$0 \leq g(\bar{x}, y) + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 - \langle x^*, y - \bar{x} \rangle \text{ para todo } y \in C. \quad (2.25)$$

Corolário 2.3.1. ([2], p. 399) *Se, além das hipóteses do Teorema 2.3.2, E é estritamente convexo, então para cada $x^* \in E^*$, \bar{x} é único.*

Demonstração. De fato, suponhamos que, além de \bar{x} , exista $\tilde{x} \in C$ tal que

$$0 \leq g(\tilde{x}, y) + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|\tilde{x}\|^2 - \langle x^*, y - \tilde{x} \rangle \text{ para todo } y \in C. \quad (2.26)$$

como $\bar{x}, \tilde{x} \in C$, substituindo \tilde{x} em (2.25) e \bar{x} em (2.26) no lugar de y e somando o resultado, obtemos $0 \leq g(\bar{x}, \tilde{x}) + g(\tilde{x}, \bar{x})$, donde,

$$0 = g(\bar{x}, \tilde{x}) + g(\tilde{x}, \bar{x}) \quad (2.27)$$

já que g é monótona.

Seguindo, defina $x_t = t\bar{x} + (1-t)\tilde{x}$ com $t \in (0, 1)$. Substituindo x_t no lugar de y em (2.25) e em (2.26) e somando as desigualdades resultantes, obtemos

$$0 \leq g(\tilde{x}, x_t) + g(\bar{x}, x_t) + \|x_t\|^2 - \frac{1}{2}(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2) - \langle x^*, 2x_t - \tilde{x} - \bar{x} \rangle$$

substituindo x_t e usando (G3) e (G1), segue

$$0 \leq tg(\tilde{x}, \bar{x}) + (1-t)g(\bar{x}, \tilde{x}) + \|t\bar{x} + (1-t)\tilde{x}\|^2 - \frac{1}{2}(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2) - \langle x^*, 2(t\bar{x} + (1-t)\tilde{x}) - \tilde{x} - \bar{x} \rangle$$

fazendo $t = \frac{1}{2}$

$$0 \leq \frac{1}{2}g(\tilde{x}, \bar{x}) + \frac{1}{2}g(\bar{x}, \tilde{x}) + \|\frac{1}{2}(\bar{x} + \tilde{x})\|^2 - \frac{1}{2}(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2) - \langle x^*, \bar{x} + \tilde{x} - \tilde{x} - \bar{x} \rangle$$

e usando a equação (2.27), $0 \leq \|\frac{1}{2}(\bar{x} + \tilde{x})\|^2 - \frac{1}{2}(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2)$

$$2(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2) \leq \|(\bar{x} + \tilde{x})\|^2 \quad (2.28)$$

daí

$$2(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2) \leq \|(\bar{x} + \tilde{x})\|^2 \leq (\|\bar{x}\| + \|\tilde{x}\|)^2 = \|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 + 2\|\tilde{x}\|\|\bar{x}\|$$

ou seja,

$$2(\|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2) \leq \|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 + 2\|\tilde{x}\|\|\bar{x}\| \Rightarrow \|\tilde{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 - 2\|\tilde{x}\|\|\bar{x}\| \leq 0$$

consequentemente,

$$(\|\tilde{x}\| - \|\bar{x}\|)^2 \leq 0 \Rightarrow \|\tilde{x}\| = \|\bar{x}\| = k$$

substituindo o valor das normas na desigualdade (2.28), obtemos

$$2k \leq \|\bar{x} + \tilde{x}\|$$

o que contradiz a hipótese de E ser estritamente convexo. Portanto, \bar{x} é único. ■

2.4 Resolvente e Monotonicidade Maximal

Nesta seção, utilizamos o resultado de existência e unicidade de um problema de equilíbrio obtidos na seção anterior e as características da aplicação de dualidade J quando esta é definida em um espaço de Banach real reflexivo, suave e estritamente convexo, para obter um resultado de existência e unicidade que nos leva à definição de resolvente de bifunção. Em seguida, a partir de uma dada bifunção monótona maximal definimos um operador monótono maximal que tem o mesmo resolvente da bifunção e, reciprocamente.

Teorema 2.4.1. ([2], p. 399) *Sejam E um espaço de Banach real suave, estritamente convexo e reflexivo e C um subconjunto de E não vazio, fechado e convexo. Seja a bifunção $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ satisfazendo as condições (G1), (G2), (G3) e (G4). Então para cada $x^* \in E^*$, existe um único ponto $\bar{x} \in C$ tal que*

$$0 \leq g(\bar{x}, y) + \langle J\bar{x} - x^*, y - \bar{x} \rangle$$

para todo $y \in C$.

Demonstração. Seja $x^* \in E$ fixo. Do Teorema 2.3.2, existe $\bar{x} \in C$ tal que

$$0 \leq g(\bar{x}, y) + \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2 - \langle x^*, y - \bar{x} \rangle$$

para todo $y \in C$. Como g é monótona, temos que $g(\bar{x}, y) \in \mathbb{R}$ para todo $y \in C$. Assim, a monotonicidade de g implica que

$$g(y, \bar{x}) \leq \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2 - \langle x^*, y - \bar{x} \rangle \quad (2.29)$$

para todo $y \in C$. Seja $x_t = (1-t)\bar{x} + ty$ para todo $y \in C$ e $t \in (0, 1)$. Como C é convexo $x_t \in C$ para todo $t \in (0, 1)$. Das desigualdades (2.29) e (1.12), temos

$$\begin{aligned} g(x_t, \bar{x}) &\leq \frac{1}{2} \|x_t\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2 - \langle x^*, x_t - \bar{x} \rangle \\ &\leq \langle Jx_t, x_t - \bar{x} \rangle - \langle x^*, x_t - \bar{x} \rangle \\ &= \langle Jx_t - x^*, x_t - \bar{x} \rangle \\ &= t \langle Jx_t - x^*, y - \bar{x} \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como $g(x_t, \bar{x}), g(x_t, y), g(y, x_t) \in \mathbb{R}$, pois $y, \bar{x}, x_t \in C$ e g cumpre as condições de (G1) à (G3). Aplicando (G1), (G3), (2.30) e (G2), nessa ordem, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= g(x_t, x_t) \\ &= g(x_t, (1-t)\bar{x} + ty) \\ &\leq (1-t)g(x_t, \bar{x}) + tg(x_t, y) \\ &\leq (1-t)t \langle Jx_t - x^*, y - \bar{x} \rangle + tg(x_t, y) \\ &\leq (1-t)t \langle Jx_t - x^*, y - \bar{x} \rangle + t(-g(y, x_t)) \end{aligned}$$

Daí segue,

$$tg(y, x_t) \leq (1-t)t \langle Jx_t - x^*, y - \bar{x} \rangle$$

dividindo por t

$$g(y, x_t) \leq (1-t) \langle Jx_t - x^*, y - \bar{x} \rangle$$

para todo $y \in C$ e $t \in (0, 1)$. Como J é demicontínua, $x_t \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0$ e $g(y, \cdot)$ é s.c.i., concluímos que

$$g(y, \bar{x}) \leq \liminf_{t \rightarrow 0} g(y, x_t) \leq \liminf_{t \rightarrow 0} (1-t) \langle Jx_t - x^*, y - \bar{x} \rangle = \langle Jx - x^*, y - \bar{x} \rangle$$

para todo $y \in C$. Da monotonicidade de g com respeito a C , segue

$$0 \leq g(\bar{x}, y) + \langle J\bar{x} - x^*, y - \bar{x} \rangle$$

para todo $y \in C$. Do fato de E ser estritamente convexo, \bar{x} é único. ■

Do Teorema 2.4.1 e notando que neste caso a aplicação de dualidade é um operador ponto-ponto, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.4.1. ([2], p. 400) *Sejam E um espaço de Banach real suave, estritamente convexo e reflexivo e C um subconjunto de E não vazio, fechado e convexo. Seja uma bifunção $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ que satisfaz (G1), (G2), (G3) e (G4). Então para cada $x \in E$ e $r > 0$, existe um único ponto $\bar{x}_r \in C$ tal que*

$$0 \leq g(\bar{x}_r, y) + \frac{1}{r} \langle J\bar{x}_r - Jx, y - \bar{x}_r \rangle$$

para todo $y \in C$.

Demonstração. Sejam $x \in E$ e $r > 0$. Como a função g satisfaz (G1), (G2), (G3) e (G4), então a função rg também satisfaz. De fato:

(G1) Dado $x \in C$, temos $rg(x, x) = 0$ para todo $x \in C$.

(G2) Dados $x, y \in C$, temos $rg(x, y) + rg(y, x) = r(g(x, y) + g(y, x)) \leq 0$, isto é, rg é monótona com respeito a C .

(G3) Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer e fixando $x \in C$, como $g(x, \cdot)$ é s.c.i, o conjunto $B = \{y \in E; g(x, y) \leq \lambda\}$ é fechado. Assim, dado $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\bar{B} = \{y \in E; rg(x, y) \leq \bar{\lambda}\} = \{y \in E; g(x, y) \leq \frac{\bar{\lambda}}{r}\}$$

é fechado. Portanto $rg(x, \cdot)$ é s.c.i.

(G4) Dados $x \in C$ e $x^* \in E^*$, supondo

$rg(y, x) \leq \langle x^*, y - x \rangle$, para todo $y \in C$, temos

$g(y, x) \leq \langle \frac{1}{r}x^*, y - x \rangle$, para todo $y \in C$, como g é monótona maximal com respeito a C ,

$$0 \leq g(x, y) + \langle \frac{1}{r}x^*, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in C, \text{ ou seja,}$$

$$0 \leq rg(x, y) + \langle x^*, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in C$$

daí concluímos que rg é monótona maximal com respeito a C .

Portanto, do Teorema 2.4.1 aplicado à $Jx \in E^*$ e à bifunção rg , existe um único ponto $\bar{x}_r \in C$ tal que

$$0 \leq rg(\bar{x}_r, y) + \langle J\bar{x}_r - Jx, y - \bar{x}_r \rangle$$

para todo $y \in C$, isto é, existe um único ponto $\bar{x}_r \in C$ tal que

$$0 \leq g(\bar{x}_r, y) + \frac{1}{r} \langle J\bar{x}_r - Jx, y - \bar{x}_r \rangle$$

para todo $y \in C$. ■

Considerando as mesmas hipóteses do Corolário 2.4.1, temos a seguinte definição.

Definição 2.4.1. ([2], p. 400) Dado $r > 0$ definimos a seguinte aplicação ponto-ponto $G_r : E \rightarrow C$ por

$$G_r x = \left\{ \bar{x} \in C; 0 \leq g(\bar{x}, y) + \frac{1}{r} \langle J\bar{x} - Jx, y - \bar{x} \rangle \text{ para todo } y \in C \right\} \quad (2.31)$$

para cada $x \in E$, a qual é chamada o **resolvente** de g para r .

Estudamos, agora, a relação entre um operador monótono maximal e uma bifunção monótona maximal, a saber: dada uma bifunção monótona maximal g , introduzimos um método de construção do operador monótono maximal A_g cujo resolvente coincide com o de g . Além disso, o conjunto solução de um problema de equilíbrio $PE(g)$ é igual ao conjunto dos zeros do operador A_g .

Teorema 2.4.2. ([2], p. 401) *Sejam E um espaço de Banach real e C um subconjunto de E não vazio. Seja $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ uma função que satisfaz (G1), (G2) e (G3). Seja A_g um operador ponto-conjunto de E em E^* definido por*

$$A_g x = \begin{cases} \{x^* \in E^*; g(x, y) \geq \langle x^*, y - x \rangle \forall y \in C\}, & \text{se } x \in C \\ \emptyset, & \text{se } x \notin C \end{cases} \quad (2.32)$$

Então $PE(g) = A_g^{-1}0^*$ e A_g é monótono. Além disso, se E é suave, estritamente convexo e reflexivo, C é fechado e convexo e g é monótona maximal com respeito a C , então A_g é um operador monótono maximal e o resolvente G_r de g coincide com o resolvente $(J + rA_g)^{-1}J$ de A_g para cada $r > 0$.

Demonstração. Como $A_g^{-1}0^* = \{x \in C; 0^* \in A_g x\}$, então, da definição de A_g , se $0^* \in A_g x$, temos $g(x, y) \geq 0$ para todo $y \in C$, isto é, $x \in PE(g)$. Por outro lado, se $x \in C$ é tal que $x \in PE(g)$, $g(x, y) \geq 0 = \langle 0^*, y - x \rangle$ para todo $y \in C$, ou seja, $x \in A_g^{-1}0^*$. Portanto, $PE(g) = A_g^{-1}0^*$.

Mostramos agora que A_g é monótono. Sejam $(x, x^*), (z, z^*) \in Graf A_g$. Da definição de A_g , temos

$$g(x, y) \geq \langle x^*, y - x \rangle \text{ e } g(z, y) \geq \langle z^*, y - z \rangle \text{ para todo } y \in C$$

Em particular,

$$g(x, z) \geq \langle x^*, z - x \rangle \quad \text{e} \quad g(z, x) \geq \langle z^*, x - z \rangle \quad (2.33)$$

Como $x, y, z \in C$, de (G1) à (G3) temos que $g(x, z), g(z, x) \in \mathbb{R}$. Da monotonicidade de g e de (2.33), segue

$$0 \geq g(x, z) + g(z, x) \geq \langle x^*, z - x \rangle + \langle z^*, x - z \rangle = \langle x^* - z^*, z - x \rangle = -\langle x^* - z^*, x - z \rangle$$

daí $\langle x^* - z^*, x - z \rangle \geq 0$ e, portanto, A_g é monótono.

Supondo C um subconjunto não vazio convexo fechado de um espaço de Banach real E suave, estritamente convexo e reflexivo e g monótona maximal com respeito a C , mostramos a monotonicidade maximal de A_g .

Dado $r > 0$, como sempre temos $R(J + rA_g) \subset E^*$, pelo Teorema 2.1.2, devemos mostrar que $E^* \subset R(J + rA_g)$. Seja $x^* \in E^*$ fixo. Como E suave e reflexivo, J é sobrejetiva e ponto-ponto, isto é, existe $x \in E$ tal que $Jx = x^*$. Aplicando o Corolário 2.4.1 para este x , segue que existe um único \bar{x} tal que

$$g(\bar{x}, y) + \frac{1}{r} \langle J\bar{x} - Jx, y - \bar{x} \rangle \geq 0$$

para todo $y \in C$ e $r > 0$ dado arbitrariamente. Seja G_r o resolvente de g para r , dado como em (2.31), então

$$g(G_r x, y) + \frac{1}{r} \langle JG_r x - x^*, y - G_r x \rangle \geq 0$$

para todo $y \in C$, ou seja,

$$g(G_r x, y) \geq \left\langle \frac{1}{r}(x^* - JG_r x), y - G_r x \right\rangle$$

para todo $y \in C$. Da definição de A_g concluímos que $\frac{1}{r}(x^* - JG_r x) \in A_g G_r x$ e consequentemente

$$x^* = Jx \in (JG_r x + rA_g G_r x) = (J + rA_g)G_r x \quad (2.34)$$

ou seja, $x^* \in R(J + rA_g)$. Portanto, $E^* \subset R(J + rA_g)$ e A_g é um operador monótono maximal.

Além disso, de (2.34) temos

$$G_r x \in (J + rA_g)^{-1} Jx$$

para todo $x \in E$ e $r > 0$. Mas, é sabido que o resolvente $(J + rA_g)^{-1} J$ de A_g para r é ponto-ponto. Assim,

$$G_r x = (J + rA_g)^{-1} Jx$$

para todo $x \in E$ e $r > 0$. Portanto, o resolvente G_r de g coincide com o resolvente $(J + rA_g)^{-1} J$ de A_g para cada $r > 0$. ■

Observação 2.4.1.

- (a) No Teorema 2.4.2 não é garantido que $D(A_g) = C$, este caso será visto mais à frente.
- (b) Mostramos que, se g é monótona maximal e cumpre as condições (G1) à (G3), então A_g é monótono maximal. Alguns autores, como Hadjisavvas [11], definem bifunção monótona maximal a partir da monotonicidade maximal de operadores, isto é, uma bifunção é monótona maximal, se o operador A_g é monótono maximal.

Em Asplund [3] é estabelecido que cada espaço de Banach real reflexivo tem uma norma equivalente estritamente convexa e suave. Desta forma, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.4.2. ([2], p. 402) *Sejam E um espaço de Banach real reflexivo e C um subconjunto de E não vazio, fechado e convexo. Seja $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ uma função que satisfaz (G1), (G2) e (G3). Se g é monótona maximal com respeito a C , então o operador A_g definido em (2.32) é um operador monótono maximal.*

Na sequência, fazendo o processo inverso, construímos uma função monótona maximal g_A , a partir de um dado operador monótono maximal A de E em E^* .

Teorema 2.4.3. ([2], p. 402) *Sejam E um espaço de Banach real e $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono tal que o domínio efetivo $D(A) = \{x \in E; Ax \neq \emptyset\}$ é não vazio. Seja $g_A : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ definida por*

$$g_A(x, y) = \begin{cases} \sup\{\langle x^*, y - x \rangle; x^* \in Ax\}, & \text{se } x \in D(A) \\ -\infty, & \text{se } x \notin D(A) \end{cases} \quad (2.35)$$

para $x, y \in E$. Seja $PE(g_A)$ o conjunto solução do problema de equilíbrio de g_A com respeito a $D(A)$. Então $A^{-1}0^* \subset PE(g_A)$ e as seguintes propriedades são satisfeitas

(G1) $g_A(x, x) = 0$ para todo $x \in D(A)$;

- (G2) g_A é monótona com respeito a $D(A)$;
 (G3) $g_A(x, \cdot)$ é convexa e s.c.i. para todo $x \in CD(A)$.

Além disso, se A é monótono maximal, então g_A é monótona maximal com respeito a $D(A)$. Ademais, supondo que E é suave, estritamente convexo e reflexivo e que $D(A)$ é fechado e convexo, então o resolvente de A coincide com o resolvente de g_A .

Demonstração. Sejam $PE(g_A) = \{x \in D(A); g_A(x, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in D(A)\}$ e $A^{-1}0^* = \{x \in E; 0^* \in Ax\}$. Então, se $x \in A^{-1}0^*$, implica $0^* \in Ax$, logo $g_A(x, y) = \sup\{\langle x^*, y - x \rangle; x^* \in Ax\} \geq \langle 0^*, y - x \rangle = 0$, ou seja, $x \in PE(g_A)$ e $A^{-1}0^* \subset PE(g_A)$.

Mostramos agora que g_A satisfaz as propriedades (G1), (G2) e (G3).

(G1) Dado $x \in D(A)$, temos $g_A(x, x) = \sup\{\langle x^*, x - x \rangle; x^* \in Ax\} = 0$.

(G2) Dados $x, y \in D(A)$. Devemos mostrar que $g_A(x, y) + g_A(y, x) \leq 0$. Como A é monótono, para todo $x^* \in Ax$ e para todo $y^* \in Ay$ temos

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x^*, x - y \rangle - \langle y^*, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow -\langle y^*, x - y \rangle \geq \langle x^*, y - x \rangle$$

Isto implica que

$$\inf\{-\langle y^*, x - y \rangle; y^* \in Ay\} \geq \sup\{\langle x^*, y - x \rangle; x^* \in Ax\} = g_A(x, y)$$

para todo $x, y \in D(A)$. Por isso, $g_A(x, y) \in \mathbb{R}$ para todo $x, y \in D(A)$. Temos ainda que

$$\inf\{-\langle y^*, x - y \rangle; y^* \in Ay\} = -\sup\{\langle y^*, x - y \rangle; y^* \in Ay\} = -g_A(y, x)$$

para todo $x, y \in D(A)$. Desses fatos, obtemos $-g_A(y, x) \geq g_A(x, y)$ e, portanto

$$g_A(x, y) + g_A(y, x) \leq 0$$

para todo $x, y \in D(A)$.

(G3) Seja $x \in D(A)$ qualquer fixo, então $Ax \neq \emptyset$. Como o funcional $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi(y) = \langle x^*, y - x \rangle$ é afim e contínuo para cada $x^* \in Ax$, segue que $g_A(x, \cdot)$ é convexo e s.c.i.

Assumindo que A é monótono maximal, provemos que g_A é monótona maximal. Seja $(x, \xi) \in D(A) \times E^*$ fixo. Assumimos que

$$\sup\{\langle y^*, x - y \rangle; y^* \in Ay\} = g_A(y, x) \leq \langle \xi, y - x \rangle \text{ para todo } y \in D(A).$$

Então $\langle y^*, x - y \rangle \leq \langle \xi, y - x \rangle$ para todo $y^* \in Ay$ e daí

$$\langle y^* + \xi, y - x \rangle = \langle y^* - (-\xi), y - x \rangle \geq 0$$

como A é monótono maximal, concluímos $-\xi \in Ax$. Assim,

$$g_A(x, y) = \sup\{\langle x^*, y - x \rangle; x^* \in Ax\} \geq \langle -\xi, y - x \rangle$$

isto é,

$$0 \leq g_A(x, y) + \langle \xi, y - x \rangle \text{ para todo } y \in D(A)$$

Portanto, g_A é monótona maximal.

Supondo E é suave, estritamente convexo e reflexivo e $D(A)$ fechado e convexo, mostramos que o resolvente de A coincide com o resolvente de g_A . Diante do que foi provado acima, utilizando o Corolário 2.4.1 definimos o **resolvente de g_A para cada $r > 0$** , isto é, a aplicação ponto-ponto $G_r : E \rightarrow D(A)$,

$$G_r x = \left\{ \bar{x} \in D(A); 0 \leq g_A(\bar{x}, y) + \frac{1}{r} \langle J\bar{x} - Jx, y - \bar{x} \rangle \text{ para todo } y \in D(A) \right\} \quad (2.36)$$

para cada $x \in E$. Por outro lado, seja J_r o resolvente de A para $r > 0$. Sabendo que $\frac{1}{r}(J - JJ_r)x \in AJ_r x$ e da definição de g_A , obtemos

$$g_A(J_r x, y) = \sup\{\langle z^*, y - J_r x \rangle; z^* \in AJ_r x\} \geq \left\langle \frac{1}{r}(J - JJ_r)x, y - J_r x \right\rangle$$

consequentemente,

$$g_A(J_r x, y) + \frac{1}{r} \langle JJ_r x - Jx, y - J_r x \rangle \geq 0$$

para todo $x, y \in E$, isto implica que $J_r x \in G_r x$. Como $G_r x$ é composto de um único valor, concluímos que $J_r x = G_r x$. Portanto, o resolvente J_r de A para $r > 0$ é igual o resolvente G_r de g_A para $r > 0$. ■

2.5 Operadores Monótonos Maximais e Bifunções Monótonas Maximais

Nesta seção, analisamos a ligação entre uma classe de operadores monótonos maximais e uma classe de bifunções monótonas maximais.

Num espaço de Banach real reflexivo, mostramos que o fecho forte do domínio efetivo $D(A)$ de um operador $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ monótono maximal é convexo.

Mostramos que temos também, sob as mesmas configurações do Teorema 2.4.3, que $PE(g_A) = A^{-1}0^*$.

Teorema 2.5.1. ([2], p. 404) *Sejam E um espaço de Banach real reflexivo e $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono que tem o domínio efetivo $C = D(A) = \{x \in E; Ax \neq \emptyset\}$ não vazio, fechado e convexo, $g_A : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ induzida por A como em (2.35) e $A_{g_A} : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono induzido por g_A por*

$$A_{g_A} x = \begin{cases} \{x^* \in E; g_A(x, y) \geq \langle x^*, y - x \rangle; \forall y \in C\} & \text{se } x \in C \\ \emptyset, & \text{se } x \notin C \end{cases} \quad (2.37)$$

Se A é monótono maximal, então $A_{g_A} = A$.

Demonstração. Seja A um operador monótono maximal. Dado $x \in E$.

- Se $A_{g_A} x = \emptyset$, então $\emptyset = A_{g_A} x \subset Ax$.

- Se existe $u^* \in A_{g_A} x$. Uma vez que, pelo Teorema 2.4.3, g_A é monótona, temos que para todo $(y, y^*) \in \text{Graf}(A)$

$$\langle u^*, y - x \rangle \leq g_A(x, y) \leq -g_A(y, x) \leq -\langle y^*, x - y \rangle = \langle y^*, y - x \rangle$$

ou seja, $\langle y^* - u^*, y - x \rangle \geq 0$, para todo $(y, y^*) \in \text{Graf}(A)$. Como A é monótono maximal, concluímos que $u^* \in Ax$ e, assim,

$$A_{g_A}x \subset Ax \text{ para cada } x \in E. \quad (2.38)$$

Supondo que A é monótono maximal, do Teorema 2.4.3, g_A é monótona maximal e do Corolário 2.4.2, A_{g_A} é maximal. Portanto, de (2.38) concluímos que $A_{g_A} = A$. ■

Deste resultado obtemos o seguinte Corolário.

Corolário 2.5.1. ([2], p. 404) *Sejam E um espaço de Banach real reflexivo e $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono que tem o domínio efetivo $C = D(A) = \{x \in E; Ax \neq \emptyset\}$ não vazio, fechado e convexo, $g_A : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ induzida por A como em (2.35). Então $A^{-1}0^* = PE(g_A)$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.5.1 que $A_{g_A}^{-1}0^* = A^{-1}0^*$, então do Teorema 2.4.2 $PE(g_A) = A_{g_A}^{-1}0^* = A^{-1}0^*$. ■

Em seguida, consideramos as condições que implicam a igualdade $g_{A_g} = g$ para uma bifunção g satisfazendo as condições (G1), (G2) e (G3).

Lema 2.5.1. ([2], p. 404) *Para um operador monótono $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ com um domínio efetivo $C = D(A)$ não vazio, seja g_A uma função induzida por A como (2.35). Então,*

$$(G5) \quad \begin{aligned} g_A(x, ty + (1-t)x) &= tg_A(x, y) \text{ para } x \in C, y \in E, t > 0 \text{ e} \\ g_A(x, y) &= -\infty \text{ para } x \notin C \text{ e } y \in E. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $x \in C, y \in E$ e $t > 0$. Então, temos

$$\begin{aligned} g_A(x, ty + (1-t)x) &= \sup_{x^* \in Ax} \langle x^*, ty + (1-t)x - x \rangle \\ &= \sup_{x^* \in Ax} \langle x^*, t(y-x) \rangle \\ &= t \sup_{x^* \in Ax} \langle x^*, y-x \rangle \\ &= tg_A(x, y) \end{aligned}$$

Se, porém, $x \notin C$ e $y \in E$, da definição de g_A , temos $g_A(x, y) = -\infty$ ■

Lema 2.5.2. ([2], p. 405) *Sejam C um subconjunto não vazio de E e $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ satisfazendo (G1), (G2) e (G3). Seja $A_g : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono induzido por g como em (2.32). Supondo o seguinte*

$$(G6) \quad \begin{aligned} g(y, v) &\geq \langle w^*, v - y \rangle \text{ para cada } v \in E \text{ sempre que } y \in C, w^* \in E^* \text{ e } g(y, v) \geq \\ &\langle w^*, v - y \rangle \text{ para cada } v \in C. \end{aligned}$$

Então, para $x \in C$ e $z^* \in E^*$, $z^* \in A_g x$ se, e somente se, $\langle z^*, x \rangle = \sup_{v \in E} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \}$.

Demonstração.

(\Rightarrow) Dados $x \in C$ e $z^* \in E^*$ tal que $z^* \in A_g x$. Da definição de A_g , temos

$$g(x, v) \geq \langle z^*, v - x \rangle \text{ para todo } v \in C$$

de (G6) segue que

$$g(x, v) \geq \langle z^*, v - x \rangle \text{ para cada } v \in E$$

ou equivalentemente,

$$g(x, v) \geq \langle z^*, v \rangle - \langle z^*, x \rangle \text{ para cada } v \in E$$

e daí

$$\langle z^*, x \rangle \geq \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \text{ para cada } v \in E$$

isto é,

$$\langle z^*, x \rangle \geq \sup_{v \in E} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \}$$

Por outro lado, uma vez que $g(x, x) = 0$, sempre temos que

$$\sup_{v \in E} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \} \geq \langle z^*, x \rangle - g(x, x) = \langle z^*, x \rangle$$

Consequentemente, concluímos que $\langle z^*, x \rangle = \sup_{v \in E} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \}$.

(\Leftarrow) Seja $\langle z^*, x \rangle = \sup_{v \in E} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \}$, com $x \in C$ e $z^* \in E^*$. Segue que

$$\langle z^*, x \rangle = \sup_{v \in E} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \} \geq \sup_{v \in C} \{ \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \}$$

ou seja,

$$\langle z^*, x \rangle \geq \langle z^*, v \rangle - g(x, v) \text{ para todo } v \in C$$

Portanto,

$$g(x, v) \geq \langle z^*, v \rangle - \langle z^*, x \rangle = \langle z^*, v - x \rangle \text{ para todo } v \in C$$

o que implica $z^* \in A_g x$. ■

Definimos agora a função indicadora e a função conjugada que serão necessárias para o resultado seguinte. Será mostrado que, sob certas condições, temos a igualdade entre uma função e sua biconjugada.

Definição 2.5.1. ([10], p.2) Para um subconjunto na vazio C de um espaço de Banach real E , a **função indicadora** $i_C : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ para C é definida por

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ \infty & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

Definição 2.5.2. ([6], p.75) Seja uma função $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. A função $\phi' : E^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\phi'(x^*) = \sup_{x \in E} \{ \langle x^*, x \rangle - \phi(x) \}$$

para $x^* \in E^*$ é chamada a **função conjugada** de ϕ .

A **função biconjugada** $\phi'' : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de ϕ é definida por

$$\phi''(x) = \sup_{x^* \in E^*} \{ \langle x^*, x \rangle - \phi'(x^*) \}$$

para $x \in E$.

Das definições de função conjugada e biconjugada, segue

$$\phi(x) + \phi'(x^*) = \phi(x) + \sup_{y \in E} \{\langle x^*, y \rangle - \phi(y)\} \geq \langle x^*, x \rangle \quad (2.39)$$

e

$$\begin{aligned} \phi'(x^*) + \phi''(x) &= \phi'(x^*) + \sup_{w^* \in E^*} \{\langle w^*, x \rangle - \phi'(w^*)\} \\ &\geq \phi'(x^*) + \langle x^*, x \rangle - \phi'(x^*) \\ &\geq \langle x^*, x \rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

para todo $x \in E$ e para todo $x^* \in E^*$.

Notemos que, se ϕ for própria, então podemos calcular $\phi'(x^*)$ apenas em $x \in \text{Dom} \phi$.

Proposição 2.5.1. ([6], p.79) *Se $\phi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função própria, s.c.i. e convexa, então $\phi'' = \phi$*

Demonstração. Seja ϕ uma função própria, s.c.i. e convexa. Temos de 2.39,

$$\langle x^*, x \rangle \leq \phi(x) + \phi'(x^*) \Rightarrow \langle x^*, x \rangle - \phi'(x^*) \leq \phi(x)$$

para todo $x \in E$ e $x^* \in E^*$, logo

$$\phi''(x) = \sup_{x^* \in E^*} \{\langle x^*, x \rangle - \phi'(x^*)\} \leq \phi(x) \Rightarrow \phi''(x) \leq \phi(x) \text{ para todo } x \in E$$

Suponhamos que existe $x_0 \in \text{Dom} \phi$ tal que $\phi''(x_0) < \phi(x_0)$, isto é, $(x_0, \phi''(x_0)) \notin \text{Epi} \phi$. Como $\text{Epi} \phi$, pela Teorema de Hahn-Banach (Proposição 1.3.1), é fechado e convexo em $E \times \mathbb{R}$, pelo Proposição 1.4.3 existe $(x_0^*, \alpha) \in E^* \times \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{(x,t) \in \text{Epi} \phi} \{\langle x_0^*, x \rangle + \alpha t\} < \langle x_0^*, x_0 \rangle + \alpha \phi''(x_0) \quad (2.41)$$

Como $(x, t+n) \in \text{Epi} \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sempre que $(x, t) \in \text{Epi} \phi$, da desigualdade (2.41) implica $\alpha \leq 0$, pois se $\alpha > 0$ o lado esquerdo seria igual a ∞ e disto $\infty = \phi''(x_0) < \phi(x_0)$ o que contradiz o fato de $x_0 \in \text{Dom} \phi$. Afirmamos que $\alpha < 0$. De fato, se $\alpha = 0$ substituindo em (2.41) obtemos

$$\sup_{x \in \text{Dom} \phi} \{\langle x_0^*, x \rangle\} < \langle x_0^*, x_0 \rangle \quad (2.42)$$

Seja $h > 0$ e $y_0^* \in \text{Dom} \phi'$ arbitrariamente escolhido. Obtem-se

$$\begin{aligned} \phi'(y_0^* + hx_0^*) &= \sup_{x \in \text{Dom} \phi} \{\langle y_0^*, x \rangle + h \langle x_0^*, x \rangle - \phi(x)\} \\ &\leq \sup_{x \in \text{Dom} \phi} \{\langle y_0^*, x \rangle - \phi(x)\} + h \sup_{x \in \text{Dom} \phi} \langle x_0^*, x \rangle \\ &= \phi'(y_0^*) + h \sup_{x \in \text{Dom} \phi} \langle x_0^*, x \rangle \end{aligned}$$

Além disso, daí e de (2.40) temos

$$\begin{aligned} \phi''(x_0) &\geq \langle y_0^* + hx_0^*, x_0 \rangle - \phi'(y_0^* + hx_0^*) \\ &\geq \langle y_0^*, x_0 \rangle + h \langle x_0^*, x_0 \rangle - \phi'(y_0^*) - h \sup_{x \in \text{Dom} \phi} \langle x_0^*, x \rangle \\ &= \langle y_0^*, x_0 \rangle - \phi'(y_0^*) + h(\langle x_0^*, x_0 \rangle - \sup_{x \in \text{Dom} \phi} \langle x_0^*, x \rangle) \end{aligned}$$

Tendo em vista a desigualdade (2.42) e fazendo $h \rightarrow \infty$, obtemos $\phi''(x_0) = +\infty$, o que contradiz o fato de $x_0 \in \text{Dom } \phi$, pois estamos supondo $\phi''(x_0) < \phi(x_0)$. Assim, $\alpha < 0$ logo podemos dividir a desigualdade (2.41) por $-\alpha$, obtendo

$$\sup_{(x,t) \in \text{Epi } \phi} \left\{ \left\langle -\frac{1}{\alpha}x_0^*, x \right\rangle - t \right\} < \left\langle -\frac{1}{\alpha}x_0^*, x_0 \right\rangle - \phi''(x_0)$$

Como

$$\phi' \left(-\frac{1}{\alpha}x_0^* \right) = \sup_{x \in \text{Dom } \phi} \left\{ \left\langle -\frac{1}{\alpha}x_0^*, x \right\rangle - t \right\} = \sup_{(x,t) \in \text{Epi } \phi} \left\{ \left\langle -\frac{1}{\alpha}x_0^*, x \right\rangle - t \right\}$$

Consequentemente,

$$\phi' \left(-\frac{1}{\alpha}x_0^* \right) + \phi''(x_0) < \left\langle -\frac{1}{\alpha}x_0^*, x_0 \right\rangle$$

o que contradiz a desigualdade (2.40). Portanto, $\phi''(x) = \phi(x)$ para todo $x \in \text{Dom } \phi$ e, também, sempre temos $\phi''(x) = \phi(x)$ para todo $x \notin \text{Dom } \phi$. Concluimos $\phi''(x) = \phi(x)$ para todo $x \in E$, como queríamos. ■

Feito essas considerações sobre as funções conjugada e biconjugada de uma função, passamos a mostrar que sob certas condições $g_{A_g} = g$.

Teorema 2.5.2. ([2], p. 405) *Sejam uma função $g : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$, C um subconjunto não vazio e convexo de E e $A_g : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ um operador monótono induzido por g como em (2.32), tais que as condições (G1), (G2) e (G3) são satisfeitas e $C = D(A_g)$. Então $g_{A_g} = g$ se, e somente se, as condições*

(G5) $g(x, ty + (1-t)x) = tg(x, y)$ para $x \in C$, $y \in E$, $t > 0$ e $g(x, y) = -\infty$ para $x \notin C$ e $y \in E$.

(G6) $g(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in E$ sempre que $y \in C$, $w^* \in E^*$ e $g(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in C$.

são satisfeitas, onde $g_{A_g} : E \times E \rightarrow [-\infty, \infty]$ é uma função induzida por A_g definida por

$$g_{A_g}(x, y) = \begin{cases} \sup \{ \langle x^*, y - x \rangle; x^* \in A_g x \}, & \text{se } x \in C \\ -\infty & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $g_{A_g} = g$. O Lema 2.5.1 mostra que a condição (G5) é satisfeita. Para (G6), sejam $x \in C$ e $z^* \in E^*$ satisfazendo $g(x, y) \geq \langle z^*, y - x \rangle$ para cada $y \in C$. Da definição de A_g , segue que $z^* \in A_g x$. Assim,

$$g(x, y) = g_{A_g}(x, y) = \sup_{w^* \in A_g x} \langle w^*, y - x \rangle \geq \langle z^*, y - x \rangle \text{ para todo } y \in E$$

como queríamos.

(\Leftarrow) Suponha as condições (G5) e (G6) satisfeitas. Seja $x \in C$ e $\psi_x : E \rightarrow [-\infty, \infty]$ uma função definida por $\psi_x(y) = g(x, y)$ para todo $y \in E$. Usando (G5), obtemos

$$\inf_{t>0} \frac{\psi_x(x + t(y - x))}{t} = \inf_{t>0} \frac{g(x, x + t(y - x))}{t} = \inf_{t>0} \frac{tg(x, y)}{t} = g(x, y) \text{ para todo } y \in E$$

Defina, agora, $\phi_x : E \rightarrow [-\infty, \infty]$, pondo $\phi_x(v) = \inf_{t>0} \frac{\psi_x(x+tv)}{t}$ para todo $v \in E$. Então, como $\phi_x(v) = g(x, v+x)$ e g satisfaz as condições (G1) e (G3), uma vez que ϕ_x é própria, s.c.i. e convexa. Para $z^* \in E^*$, segue que

$$\begin{aligned}
\phi'_x(z^*) &= \sup_{v \in E} (\langle z^*, v \rangle - \phi_x(v)) \\
&= \sup_{v \in E} \left(\langle z^*, v \rangle - \inf_{t>0} \frac{\psi_x(x+tv)}{t} \right) \\
&= \sup_{v \in E} \left(\langle z^*, v \rangle + \sup_{t>0} \left(-\frac{\psi_x(x+tv)}{t} \right) \right) \\
&= \sup_{v \in E} \sup_{t>0} \left(\langle z^*, v \rangle - \frac{\psi_x(x+tv)}{t} \right) \\
&= \sup_{v \in E} \sup_{t>0} \frac{1}{t} \left(t\langle z^*, v \rangle - \psi_x(x+tv) \right) \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{t} \sup_{v \in E} \left(\langle z^*, x+tv \rangle - \psi_x(x+tv) - \langle z^*, x \rangle \right) \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{t} \left(\sup_{u \in E} (\langle z^*, u \rangle - \psi_x(u)) - \langle z^*, x \rangle \right).
\end{aligned}$$

Como $\sup_{u \in E} (\langle z^*, u \rangle - \psi_x(u)) - \langle z^*, x \rangle \geq \langle z^*, x \rangle - \psi_x(x) - \langle z^*, x \rangle = 0$, então $\phi'_x(z^*) \geq 0$. Do Lema 2.5.2 com a condição (G6), temos $\sup_{u \in E} (\langle z^*, u \rangle - \psi_x(u)) = \langle z^*, x \rangle$. Portanto,

$$\psi'_x(z^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } z^* \in A_g x \\ \infty & \text{se } z^* \notin A_g x \end{cases}$$

Conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= \psi_x(y-x) \\
&= \psi''_x(y-x) \\
&= \sup_{z^* \in E^*} (\langle z^*, y-x \rangle - \psi'_x(z^*)) \\
&= \sup_{z^* \in E^*} (\langle z^*, y-x \rangle - i_{A_g x}(z^*)) \\
&= \sup_{z^* \in A_g x} \langle z^*, y-x \rangle \\
&= g_{A_g}(x, y)
\end{aligned}$$

para cada $y \in E$.

Por outro lado, supondo que $x \notin C$, segue da definição de g_{A_g} e (G5) que

$$g_{A_g}(x, y) = -\infty = g(x, y)$$

para cada $y \in E$. Assim, concluímos que $g_{A_g} = g$. ■

Lema 2.5.3. ([2], p. 407) *Seja E um espaço de Banach real reflexivo. Para um operador monótono maximal $A : E \rightarrow \mathcal{P}(E^*)$ com domínio efetivo C convexo fechado, seja g_A uma função induzida por A . Então, g_A satisfaz a seguinte propriedade*

(G6) $g_A(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in E$ sempre que $y \in C$, $w^* \in E^*$ e $g_A(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in C$.

Demonstração. Sejam $y \in C$ e $w^* \in E^*$ e suponha que $g_A(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in C$. Daí temos $w^* \in A_{g_A}y$ pela definição de A_{g_A} . Do Teorema 2.5.1 $A = A_{g_A}$ e, portanto, $w^* \in Ay$, assim obtemos

$$g_A(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle \text{ para cada } v \in E$$

como queríamos. ■

Por fim, condensamos todos os resultados no seguinte Teorema.

Teorema 2.5.3. ([2], p. 407) *Seja C um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach real reflexivo E . Seja \mathcal{M} a família de todos os operadores monótonos maximais definidos em E com um domínio efetivo C e seja \mathcal{G} a família de funções g de $E \times E$ em $[-\infty, \infty]$ satisfazendo as seguintes condições:*

(G1) $g(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;

(G2) g é monótona com respeito a C ;

(G3) $g(x, \cdot)$ é convexa e s.c.i. para todo $x \in C$.

(G4) g é monótona maximal com respeito a C ;

(G5) $g(x, ty + (1-t)x) = tg(x, y)$ para $x \in C$, $y \in E$, $t > 0$ e $g(x, y) = -\infty$ para $x \notin C$ e $y \in E$.

(G6) $g(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in E$ sempre que $y \in C$, $w^* \in E^*$ e $g(y, v) \geq \langle w^*, v - y \rangle$ para cada $v \in C$.

Defina a aplicação $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ por

$$\zeta(A) = g_A$$

para cada $A \in \mathcal{M}$, onde g_A é a função induzida por como em (2.35). Então ζ é uma injeção.

Além disso, seja

$$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G}; D(A_g) = C\}$$

Então ζ é uma bijeção de \mathcal{M} em \mathcal{G}_0 .

Demonstração. Os Teorema 2.4.3, Lema 2.5.1 e Lema 2.5.3 garantem que $g_A \in \mathcal{G}$ e disso ζ está bem definida.

Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, suponha que $\zeta(A_1) = \zeta(A_2)$, ou seja, que $g_{A_1} = g_{A_2}$. Então do Teorema 2.5.1 e da definição de ζ segue

$$A_1 = A_{1g_{A_1}} = A_{\zeta(A_1)} = A_{\zeta(A_2)} = A_{2g_{A_2}} = A_2$$

Então, ζ é injetiva. Temos também que $\zeta(A) \in \mathcal{G}_0$ para cada $A \in \mathcal{M}$ uma vez que $D(A_{\zeta(A)}) = D(A) = C$.

Por outro lado, se $g \in \mathcal{G}_0$. Segue do Teorema 2.4.2 que A_g é monótono. Além disso, como g é monótona maximal, do Corolário 2.4.2, temos A_g é monótono maximal. Por hipótese, $D(A_g) = C$. Portanto, temos que $A_g \in \mathcal{M}$. Pelo Teorema 2.5.2 segue que

$$g = g_{A_g} = \zeta(A_g)$$

assim, ζ aplica \mathcal{M} sobre \mathcal{G}_0 . ■

Adicionando no Teorema 2.5.3 as hipóteses de que E é suave e é estritamente convexo, do Teorema 2.4.3 concluímos que a aplicação ζ preserva o resolvente, ou seja, o resolvente de A coincide com o resolvente de $\zeta(A)$ para cada $A \in \mathcal{M}$.

Considerações Finais

O estudo do Problema de Equilíbrio-PE tem despertado a atenção e dedicação de vários pesquisadores haja vista que por meio dele podemos estudar Problemas de Otimização, Problemas de Ponto Fixo, Desigualdade Variacional, Economia, etc.

Aoyama et al., em [2], utilizam a propriedade de monotonicidade maximal de bifunções para obter um resultado de existência e unicidade de solução para um problema de Equilíbrio. Usando a unicidade, definem resolvente de uma bifunção monótona maximal. Em seguida, partindo de uma bifunção, constroem-se um operador monótono maximal que tem o mesmo resolvente da bifunção e vice-versa.

Esta abordagem mostra-se um campo fértil para novos estudos e generalizações de resultados que envolvem bifunção e operador monótono maximal, assim como o estudo dos resolventes a eles associados, tais como: em vez de fazer uso constante da aplicação de dualidade, neste caso um operador ponto-ponto, para definir resolvente, será possível substituir esse operador por um operador ponto-ponto com características mais gerais? É possível substituí-lo por um operador ponto-conjunto e generalizar esses resultados?

Essas questões nos motiva para continuar o estudo desses problemas, em especial, do problema de equilíbrio.

Referências Bibliográficas

- [1] ALIPRANTIS, C. D.; BORDER, K.C.. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. 3ª ed Springer Berlin Heidelberg New York: Springer, 2006.
- [2] AOYAMA, K.; KIMURA, Y.; TAKAHASHI, W. *Maximal Monotone Operators and Maximal Monotone Functions for Equilibrium Problems*. Journal of Convex Analysis 15, No. 2, 395-409, 2008.
- [3] ASPLUND, E.. *Averaged norms*. Israel J. Math. 5, 227–233, 1967.
- [4] BAIOCCHI, C.; CAPELO, A.. *Variational and Quasivariational Inequalities: applications to free boundary problems*. John Wiley and Sons: New York, 1984.
- [5] BARBU, V.. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics: Springer, 2010.
- [6] BARBU, V.. *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. 4ª. ed. Springer Monographs in Mathematics: Springer, 2012.
- [7] BLUM, E.; OETTLI, W., *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*. Math. Stud. 62, 123–145, 1994.
- [8] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [9] DEPRIMA, C.R.; PETRYSHYN, W.V.. *Remarks on strict monotonicity and surjectivity properties of duality mappings defined on real normed linear spaces*, Math. Z. 123, 49-55, 1971.
- [10] CIORĂNESCU, I, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [11] HADJISAVVAS, N.; JACINTO, FLÁVIA M. O.; MARTÍNEZ-LEGAZ, JUAN E.. *Some Conditions for Maximal Monotonicity of Bifunctions*, Set-Valued Var. Anal 24, 323–332, 2016.
- [12] KINDERLEHRER, D., STAMPACCHIA, G., *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [13] LIMA, E. L., *Espaço Métricos*. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [14] LIMA, E. L., *Elementos de Topologia Geral*. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [15] GUDDER, S.; STRAWTHER, D.. *Strictly convex normed linear spaces*, Proc. Am. Math. Soc. 59: 263–267, 1976.