UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ENSINO DE FRAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Mirna Denise Silva de Abreu

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Mirna Denise Silva de Abreu

ENSINO DE FRAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A162e

Abreu, Mirna Denise Silva de
Ensino de Fração com o software GeoGebra / Mirna Denise Silva de Abreu. 2018
74 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Disney Douglas de Lima Oliveira
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Fração. 2. GeoGebra. 3. Ensino/Aprendizagem. 4. Moodle. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

MIRNA DENISE SILVA DE ABREU

ENSINO DE FRAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPG-ECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Presidente da Banca

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro Interno

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, pela família, pela oportunidade de estudar e trabalhar na área que gosto, por ter me sustentado até aqui com sonhos e saúde, por tudo o que tenho e sou.

A minha mãe Maria Darlene dos Santos Silva, que cuidou de mim quando eu ainda não tinha capacidade de fazê-lo sozinha, que me deu as bases para ser quem eu sou hoje. A ela meu respeito, amor e consideração.

Ao meu esposo Carlos Soares de Abreu Junior, por sonhar comigo os meus sonhos, por cuidar de mim e estar sempre ao meu lado.

Aos meus filhos Talita Silva de Abreu e Vinicius Silva de Abreu (meus amores), pelo sorriso, carinho e afeto que afagam a minha alma, alegram os meus dias e me fazem descobrir e sentir cotidianamente o amor incondicional.

Ao meu orientador, por ter compartilhado comigo seu conhecimento e sabedoria, pelos ensinamentos, pela paciência, pelo compromisso e pela cordialidade e solicitude com as quais fui recebida todas as vezes que precisei.

RESUMO

Este trabalho trata dos resultados da pesquisa intitulada "Ensino de Fração com o Software GeoGebra". A mesma foi realizada em três turmas do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública na cidade de Manaus. Os números racionais se apresentam na forma fracionária e decimal, porém, em nosso trabalho de pesquisa focamos apenas os números racionais na forma fracionária, por ser apontado por professores, segundo pesquisas, como um dos temas mais complexos de ensinar e de aprender na matemática das séries iniciais. Decididos sobre o conteúdo matemático a ser abordado, resolvemos, em nossa pesquisa ação, utilizar ferramentas tecnológicas digitais, por reconhecermos o potencial das mesmas no processo de ensino e de aprendizagem, para tanto, traçamos como objetivo principal da pesquisa, descrever a influência do software GeoGebra na aprendizagem dos números racionais entre os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Apesar da pesquisa ter tido como foco verificar o potencial do GeoGebra na sala de aula, ele não foi o único recurso tecnológico utilizado. No decorrer do trabalho, explicitaremos o uso que fizemos da plataforma Moodle para a organização do curso Fração que realizamos na escola. No Capítulo 01, descrevemos os objetivos, a teoria de aprendizagem que respaldou nossa ação na escola, a metodologia, bem como os conteúdos matemáticos abordados nas sessões. No Capítulo 02 tratamos da análise dos resultados da pesquisa, mas antes disso discorremos sobre a pesquisa de campo, os testes 01 e 02, o uso da plataforma Moodle, o detalhamento das sequências didáticas desenvolvidas nas sessões, a intervenção mediante os resultados do diagnóstico e por fim a análise dos testes 01 e 02, bem como as considerações gerais a cerca dos resultados questão por questão. O Capítulo 03 destinamos às nossas conclusões e o Capítulo 04 reservamos para discorrermos sobre novas perguntas que surgiram no decorrer da pesquisa e que expressamos no tópico "Trabalhos futuros". A pesquisa trouxe respostas às nossas indagações, pois por meio da análise dos dados pudemos constatar que o software GeoGebra é uma ferramenta com muito potencial para contribuir com a melhoria do ensino e aprendizagem do conteúdo Fração. Esperamos que as discussões expostas nesse trabalho possam contribuir para a reflexão acerca do ensino e aprendizado dos números racionais na forma fracionária e que alcancem seu objetivo maior: contribuir para a melhoria no ensino da Matemática.

Palavras-chave: Fração 1, GeoGebra 2, Ensino/Aprendizagem 3, Moodle 4.

ABSTRACT

This paper deals with the results of the research entitled "Fraction Teaching with GeoGebra software". The same was done in three classes of the 6th year of elementary public school in the city of Manaus. The rational numbers are presented in fractional form and decimal, however, in our research we focus only on rational numbers in the fractional form, because it is pointed out by teachers, according to research, as one of the more complex to teach and learn in the math of the early grades. Decided on the mathematical content to be approached, we have resolved, in our action research, to use tools technologies, because we recognize their potential in the teaching and learning process, learning to do so, to outline the main objective of the research, to describe the influence of GeoGebra software in the learning of rational numbers among 6th grade students Elementary School. Although the research focused on the potential of GeoGebra in the classroom, it was not the only technological resource used. In the course of the work, we will explain the use we made of the Moodle platform for the organization of the Fraction course that we do at school. In Chapter 1, we describe the theory of learning which supported our action at school, the methodology, as well as the mathematical contents addressed in the sessions. In Chapter 2 we deal with the analysis of the results of the research, but before this we talk about field research, tests 01 and 02, the use of the Moodle platform, the details of the didactic sequences developed in the sessions, the intervention through the results of the diagnosis and, finally, the analysis of tests 01 and 02, as well as the general about the results question by question. Chapter 03 is dedicated to our conclusions and Chapter 04 we reserve the opportunity to discuss new questions that have arisen in the course of the research and that we express in the topic "Future works". Research has brought answers to our inquiries, because through the analysis of the data we can verify that the GeoGebra software is a tool with a lot of potential to contribute to the teaching and learning Fraction content. We hope that the discussions discussed in this paper can contribute to the reflection on the teaching and learning of rational numbers in the fractional form and that reach their greater objective: to contribute to the improvement in the Mathematics.

Keywords: Fraction 01, GeoGebra 02, Teaching/Learning 03, Moodle 04

LISTA DE SÍMBOLOS

$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
$\overline{CD}$	Segmento CD.
$\cdot$	Multiplicação.
$+$	Adição.
$+$	Adição.
$-$	Subtração.
$\frac{m}{n}$	Número Racional Fracionário.

Lista de Figuras

1.1 Curso Fração 4
1.2 GeoGebra- frações equivalentes 5
1.3 GeoGebra- Comparação de frações 5
1.4 GeoGebra- Fração imprópria 6

2.1 Tela sobre a criação do Banco de Questões. 11
2.2 Janela para a escolha do tipo de questão. 12
2.3 Janela para edição do questionário 12
2.4 Modelo de questão sobre fração equivalente 13
2.5 Tela indicativa- modo da questão. 13
2.6 Tela que mostra onde indicar a alternativa correta 15
2.7 Acertos e erros dos estudantes. 15
2.8 Tela de acesso aos testes e às atividades no GeoGebra 17
2.9 Grandeza contínua 19
2.10 Grandeza discreta 19
2.11 Questão 06 do teste 01- Atividade sobre frações equivalentes 21
2.12 Atividade sobre fração equivalente- valor desconhecido 21
2.13 Atividade sobre fração equivalente- valor desconhecido 21
2.14 Tela de acesso ao curso 25
2.15 Atividades da intervenção- Frações equivalentes 27
2.16 Atividades de intervenção- adição de frações 28
2.17 Atividades de intervenção- adição de frações- parte 2 29
2.18 Atividades de intervenção com o GeoGebra- adição de frações- passo 1 29
2.19 Atividades de intervenção com o GeoGebra- adição de frações- passo 2 30
2.20 Atividades da intervenção- Representação fracionária 31
2.21 Atividades da intervenção no GeoGebra- Representação fracionária 33
2.22 Atividade 2 da intervenção no GeoGebra- Representação fracionária 34
2.23 Atividade de intervenção no GeoGebra- Representação fracionária 3 34
2.24 Atividade de intervenção- Subtração de frações 36
2.25 Atividade de intervenção no GeoGebra- Subtração de frações 36
2.26 Atividade de intervenção no GeoGebra- Subtração de frações (resolução) . . . 37

2.27 Questão 01 do teste 01- representação fracionária 38
2.28 Questão 01 do teste 02- representação fracionária 39
2.29 Ensino e aprendizagem de frações- Modelo: Figuras geométricas 41
2.30 Um quinto de vinte 42
2.31 Exemplo de questão 04 43
2.32 Exemplo de questão 05 44
2.33 Atividade- Representação fracionária 45
2.34 Dois quintos de 20 46
2.35 Questão- representação fracionária 46
2.36 Questão- Frações equivalentes 47
2.37 Frações equivalentes 48
2.38 Frações equivalentes/multiplicação cruzada 48
2.39 Frações equivalentes- Intervenção no GeoGebra 49
2.40 Frações equivalentes- multiplicação em cruz 50
2.41 Questão 7- Adição de frações 51
2.42 Exemplo de questão- significado parte- todo 53
2.43 Soma de frações no GeoGebra 53
2.44 Soma de frações no GeoGebra- multiplicação dos denominadores 55
2.45 Subtração de frações- Questão 08 56
2.46 Subtração de frações- intervenção no GeoGebra 58
2.47 Subtração de frações- Resposta dada no GeoGebra 58
2.48 Questão 09- adição de fração com número inteiro 59
2.49 GeoGebra- adição de fração com número inteiro 60
2.50 Questão- subtração de fração com número inteiro 60
2.51 Subtração de fração com número inteiro no GeoGebra 61
2.52 Questões sobre representação fracionária- percentual de acerto 62
2.53 Gráfico- Teste 01 66
2.54 Gráfico- Teste 02 66
2.55 Quantidade de acertos nos testes 01 e 02 67
2.56 Índice de aproveitamento individual dos estudantes 67
2.57 Gráfico de desempenho 68

Sumário

Introdução **1**

1 Histórico **2**

1.1 Metodologia 7

2 Análise dos resultados **10**

2.1 A pesquisa de campo 10

2.2 Testes 1 e 2 11

2.2.1 Banco de questões 11

2.2.2 Formato das questões 11

2.2.3 Questões do tipo múltipla escolha 11

2.2.4 Questões do tipo múltipla escolha calculada 12

2.2.5 Outras características das questões 13

2.2.6 Vantagens de aplicar os testes por meio da plataforma do Moodle . . . 14

2.3 Sessões da pesquisa de campo 15

2.3.1 A intervenção 16

2.3.2 Conteúdos matemáticos abordados nas sessões 16

2.3.3 Detalhamento das sessões 23

2.4 Análise dos resultados- Testes 01 e 02: questões de 1 a 10 37

2.4.1 Questão 01- Representação fracionária 37

2.4.2 Questão 02- Representação fracionária 40

2.4.3 Questão 03- Representação fracionária 42

2.4.4 Questão 04- Representação fracionária 42

2.4.5 Questão 05- Representação fracionária 43

2.4.6 Questão 06- Frações equivalentes 47

2.4.7 Questão 07- Adição de frações 50

2.4.8 Questão 08- Subtração de frações 56

2.4.9 Questão 09- Adição de fração com números inteiros 58

2.4.10 Questão 10- Subtração de fração com números inteiros 59

2.5 Considerações gerais sobre a análise dos resultados 61

3 Conclusão **70**

4 Trabalhos futuros **72**

Introdução

Esse trabalho de pesquisa teve como objeto de estudo o ensino dos números racionais fracionários mediado pelo software Geogebra. A pesquisa cujo título é "Ensino de Fração com o software GeoGebra" constituiu-se a partir do problema de pesquisa: Até que ponto o uso do software GeoGebra como ferramenta matemática, contribui para a construção do conhecimento dos números racionais fracionários? Os números racionais têm sua origem na necessidade humana de representar quantidades não inteiras, mas apesar de serem bastante utilizados no dia a dia das pessoas, eles são considerados um dos assuntos mais complexos de ensinar e de aprender. Pesquisas revelam que os estudantes consideram o assunto complexo e que a maioria deles carregam muitas lacunas no que tange ao conhecimento desse conteúdo. Preocupados com essa realidade, propusemos um projeto de pesquisa para a investigação das potencialidades do software GeoGebra como ferramenta para o ensino de Fração. Fizemos também, bibliograficamente, levantamento dos modelos mais utilizados pelos professores para o ensino desse conteúdo, bem como os elementos que contribuem e os que dificultam a aprendizagem dos números racionais fracionários. A análise dos resultados nos mostrou que o GeoGebra é uma ferramenta com muito potencial para favorecer a aprendizagem de Fração entre os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. No decorrer do Capítulo 02 veremos algumas escolhas pedagógicas que atrapalham o aprendizado das frações entre os estudantes, gerando vários obstáculos a aprendizagem. Por meio da observação dos estudantes no desenvolvimento das atividades propostas nas sessões da pesquisa, levantamos algumas conjecturas sobre as formas que, possivelmente, eles foram ensinados. As atividades das sessões da pesquisa de campo foram elaboradas embasadas na Teoria da Epistemologia Genética de Jean Piaget que tem a ação como seu elemento nuclear no favorecimento da construção do conhecimento.

Capítulo 1

Histórico

Nosso trabalho foi realizado em três turmas do 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública na cidade de Manaus no estado do Amazonas. O objetivo da pesquisa foi o de "descrever a influência do software GeoGebra na aprendizagem dos números racionais entre os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental". O estudo justificou- se pela necessidade de buscarmos novas formas de conduzir o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, uma vez que pesquisas revelam, como podemos ver em Bertoni [2] que

> O tema frações tem sido apontado pelos professores como um dos mais problemáticos na aprendizagem da matemática das séries iniciais. As avaliações nacionais do rendimento do aluno têm demonstrado baixo índice de acertos nesse tema.

A necessidade de aprender os números racionais se justifica, conforme os PCN, pela constatação que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas.

> A abordagem dos números racionais no segundo ciclo tem como objetivo principal levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver determinados problemas. BRASIL [5].

Os números racionais fracionários são criados a partir da necessidade humana de registrar partes de coisas. BRASIL [5]. Caraça [3] cita vantagens da criação deste novo campo numérico:

> 1ª- É possível exprimir sempre a medida tomando outro como unidade; se, por exemplo dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz-se que a medida é o número $\frac{2}{5}$. 2ª- A divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$- o cociente de 2 por 5 é o número racional fraccionário $\frac{2}{5}$, o cociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5}$= 2.

Os PCN indicam que é necessário explorar, junto aos estudantes, os diferentes significados dos números racionais. No segundo ciclo recomenda-se a exploração dos significados quociente, parte- todo e razão. BRASIL [5]. Nos terceiro e quarto ciclos recomenda-se a exploração dos mesmos significados indicados para serem trabalhados no segundo ciclo com o acréscimo de mais um: operador. BRASIL [6] . Planejar aulas que contribuam para que os estudantes construam o conceito de número racional pela compreensão de seus diferentes significados não é uma tarefa simples, por isso, há escolas que acabam dando ênfase a um desses significados. Bertoni [2] afirma que o modelo mais utilizado para o ensino de números racionais é o das figuras geométricas, esse modelo relaciona-se ao significado parte- todo do número racional. Segundo os PCN,

> A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte- todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza em partes iguais. BRASIL [5].

Vizcarra e Sallán [16] definem o significado parte-todo como "la relación simbólica que se establece entre dos números naturales a partir de una representación gráfica". Para Brasil [5] "A relação parte- todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes". Tendo em vista a complexidade de ensinar e aprender os números racionais e os resultados insatisfatórios nas Avaliações Nacionais, elaboramos sequências didáticas, cuja ferramenta principal consiste na utilização do software GeoGebra, com a finalidade de criar novas estratégias para o ensino de frações que valorizem a construção do conceito de número racional pelos estudantes e não apenas que estes memorizem técnicas para encontrarem frações equivalentes ou resolverem uma soma de frações, por exemplo. A pesquisa de campo na escola se desenvolveu em seis sessões para cada turma do 6º ano do Ensino Fundamental, no Capítulo 2 poderemos ver o detalhamento dessas sessões. As sessões da pesquisa foram organizadas em forma de "curso" na plataforma Moodle. O Moodle é um "[...] software livre, com um espaço destinado ao desenvolvimento de atividades online, utilizando-se diferentes tipos de ferramentas tecnológicas."SOUSA; MOITA; CARVALHO [14] . A Figura 1.1 mostra o conteúdo de cada sessão.

A plataforma Moodle, muito utilizada em programas de ensino a distância, foi utilizada em nossa pesquisa para organizar um curso com dois testes e 4 aulas práticas em seis sessões presenciais. As sessões das aulas práticas foram planejadas tendo como recurso principal atividades no software GeoGebra. "O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação". INSTITUTO SÃO PAULO GEOGEBRA [8]. Utilizamos, nas sessões, quatro atividades desenvolvidas com o GeoGebra disponíveis online: Representação de frações; Soma de frações; Subtração de frações; e Frações equivalentes. Utilizamos as atividades no GeoGebra com objetivos de: 1ª- Promoção da autoaprendizagem- os

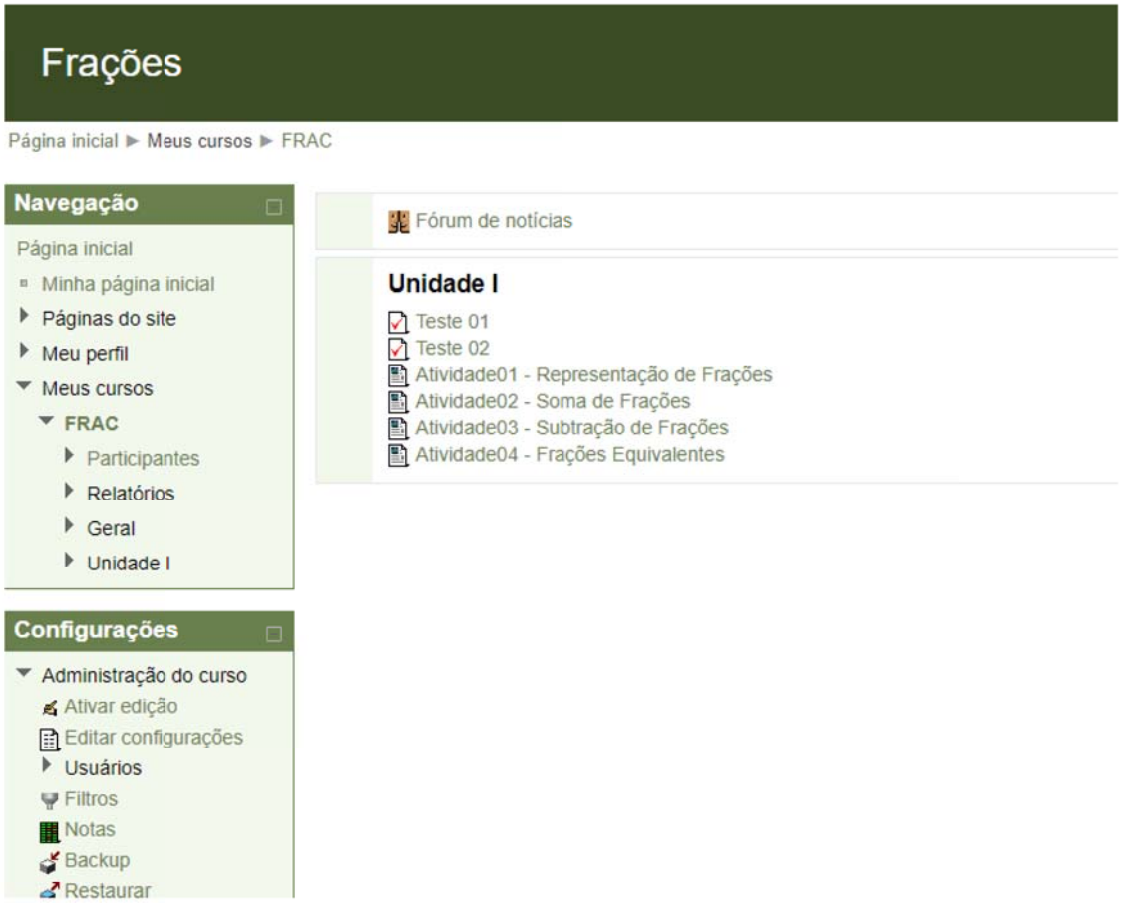


Figura 1.1: Curso Fração

estudantes foram estimulados a resolverem as situações- problema primeiramente sem o GeoGebra (com papel e lápis; por meio do cálculo mental; com atividades individuais e em duplas) para posteriormente, utilizá-lo para checar se o que foi feito está correto. Foi reforçado que eles poderiam utilizar esta ferramenta para estudar em casa, afinal, foi ensinado a todos como acessar a bons exercícios (prontos) desenvolvidos no GeoGebra. 2ª- Demonstrações- O GeoGebra foi utilizado para demonstrar graficamente que frações com representações simbólicas diferentes podem ser equivalentes, como mostra a Figura 1.2.

Foi trabalhada também a comparação de frações, tendo em vista que "[...] a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais [...]" BRASIL [5] e que "Ao raciocinar sobre os números racionais como se fossem naturais, os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos [...]". BRASIL [5]. O GeoGebra foi importante para mostrar aos estudantes, por meio de representações gráficas, que $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$, por exemplo, como mostra a Figura 1.3.

Esta visualização é importante porque os estudantes tendem a responder questões como essa utilizando o conhecimento que eles têm acerca dos números naturais e como 8>2 eles acreditam que $\frac{1}{8} > \frac{1}{2}$ também. Na atividade sobre representação fracionária, foi mostrada a relação entre

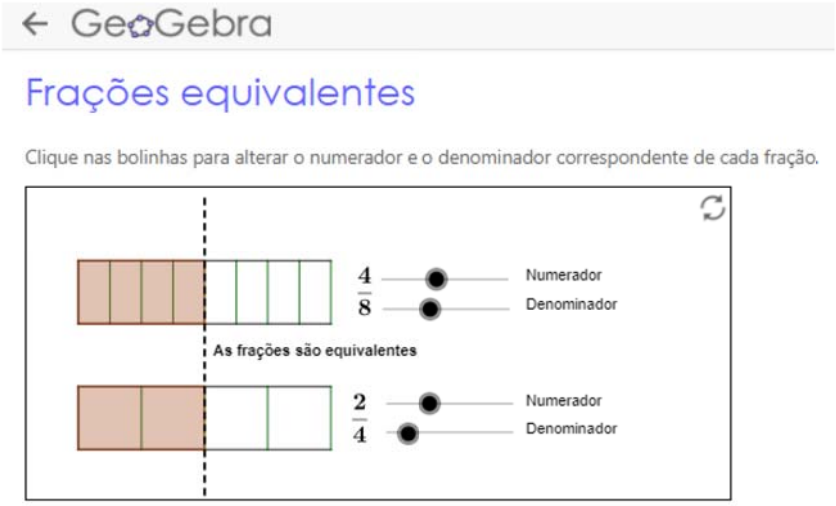


Figura 1.2: GeoGebra- frações equivalentes

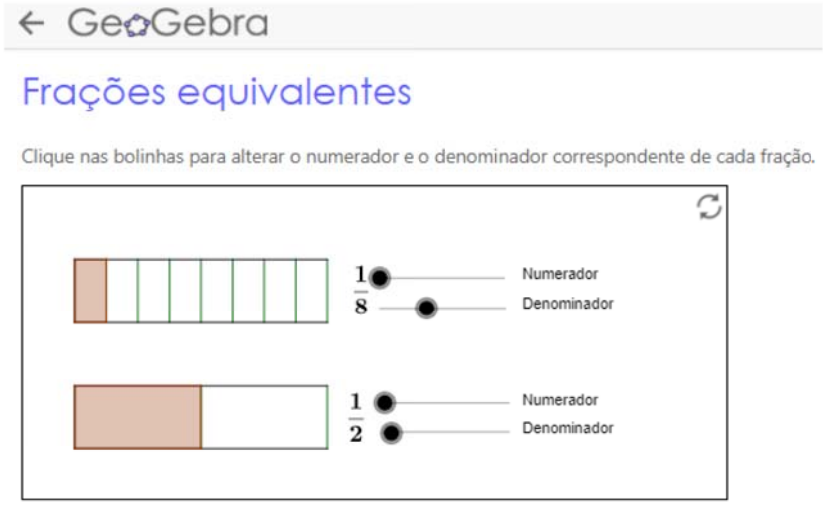


Figura 1.3: GeoGebra- Comparação de frações

representações gráficas e representações simbólicas de frações mostrando ainda a existência de frações impróprias e como representar graficamente essas frações que possuem o numerador maior que o denominador como mostra a Figura 1.4.

Conseguimos mostrar também a lógica por trás da técnica utilizada para a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes, mostrando aos estudantes que eles não precisariam calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos denominadores para resolver tarefas com esse assunto. Utilizamos na pesquisa duas ferramentas que envolvem tecnologias digitais: A plataforma Moodle e o software GeoGebra. Em todas as sessões fizemos uso de computadores e internet. A tecnologia digital

> [...] é um conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de

Figura 1.4: GeoGebra- Fração imprópria

> qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1). Uma imagem, um som, um texto, ou a convergência de todos eles, que aparecem para nós na forma final da tela de um dispositivo digital na linguagem que conhecemos (imagem fixa ou em movimento, som, texto verbal), são traduzidos em números, que são lidos por dispositivos variados, que podemos chamar, genericamente, de computadores. Assim, a estrutura que está dando suporte a esta linguagem está no interior dos aparelhos e é resultado de programações que não vemos. Nesse sentido, tablets e celulares são microcomputadores. CEALE [4].

O bom uso das novas tecnologias de comunicação (TICs) no ensino implica em maiores possibilidades de aprendizado

> As novas tecnologias de comunicação (TICs), sobretudo a televisão e o computador, movimentaram a educação e provocaram novas mediações entre a abordagem do professor, a compreensão do aluno e o conteúdo veiculado. A imagem, o som e o movimento oferecem informações mais realistas em relação ao que está sendo ensinado. Quando bem utilizadas, provocam a alteração dos comportamentos de professores e alunos, levando-os ao melhor conhecimento e maior aprofundamento do conteúdo estudado. KENSKI [10].

Nossa pesquisa de campo buscou descrever o impacto do software GeoGebra no ensino e aprendizado de Fração devida às maiores possibilidades de os estudantes explorarem imagem e movimento que esse recurso possibilita. Saber usar pedagogicamente as novas tecnologias de comunicação na sala de aula é fundamental para que se alcance bons resultados, segundo Kenski [10]

> Para que as TICs possam trazer alterações no processo educativo [...] elas precisam ser compreendidas e incorporadas pedagogicamente. Isso significa que é preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia para poder garantir que o seu uso, realmente faça diferença. Não basta usar a televisão ou o computador, é preciso saber usar de forma pedagogicamente correta a tecnologia escolhida.

Incorporar as novas tecnologias a sala de aula é mais complexo que se possa imaginar. Kenski [10] descreve várias barreiras percebidas em sua pesquisa que contribuem para que a tecnologia de aliada passe a ser algo cansativo e enfadonho, prejudicando o aprendizado dos estudantes. Uma das barreiras observadas é o fato da maioria dos softwares educativos serem produzidos por empresas internacionais. Eles são traduzidos e aculturados para a suposta realidade de um país, em muitos casos não são adequados aos objetivos pretendidos na proposta educacional da instituição. A desvinculação da tecnologia do planejamento do professor, é uma das principais causas do insucesso desse recurso no processo de ensino e aprendizagem. Nessa pesquisa, descrevemos os resultados do uso das tecnologias digitais vinculadas ao planejamento, não como recurso único, mas como complemento das tecnologias tradicionais como a lousa, o pincel, o papel, o lápis, a régua etc.

As seis sessões foram planejadas tomando como referência a Teoria Construtivista de Piaget "Epistemologia Genética", valorizando a ação, pois ela é responsável pela interação organismo-ambiente, imprescindíveis a capacidade de conhecer. RAMOZZI- CHIAROTINO [13]. Portanto, criamos oportunidades para que os estudantes resolvessem questões matemáticas individualmente e em dupla, modificassem frações, procurassem frações equivalentes e realizassem soma e subtração de frações.

1.1 Metodologia

A pesquisa de campo buscou como objetivo primário descrever a influência do software GeoGebra na aprendizagem dos números racionais entre os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Os critérios de inclusão utilizados para que os estudantes participassem da pesquisa foram: ser regularmente matriculado no 6º ano do Ensino Fundamental; e com faixa etária de 12 a 13 anos. Os riscos e os benefícios da pesquisa foram explicados aos responsáveis e aos estudantes, facultando a participação dos mesmos. Os riscos apresentados foram: mal estar, cansaço e constrangimento caso não soubessem responder às questões. Caso ocorresse uma dessas situações, a atividade seria interrompida para que o participante recebesse a intervenção necessária. Posteriormente, se fosse a vontade do estudante, ele retomaria as atividades. Quanto aos benefícios da pesquisa aos estudantes, destacamos que durante a mesma, eles poderiam tirar dúvidas em relação ao conteúdo e por meio das atividades que seriam desenvolvidas, aprofundarem seu conhecimento em frações, melhorando assim o rendimento escolar. Outro benefício apontado foi que eles conheceriam uma ferramenta disponível online e gratuita que os ajudaria a compreender com mais qualidade os números fracionários e que mesmo após o fim da pesquisa,

eles poderiam continuar utilizando-a. Participaram da pesquisa os estudantes que atendiam aos critérios de inclusão e que entregaram, assinados, Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e Termo de Assentimento dos menores de 18 anos. Ao todo, participaram 128 (cento e vinte e oito) estudantes.

A pesquisa foi desenvolvida de forma qualitativa.

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quatificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. MINAYO [11].

Apesar de termos optado pela pesquisa qualitativa, não deixamos de lado a análise dos dados quantitativos, muito importantes para mensurarmos o efeito da ferramenta GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem de Fração. Para Minayo [11] "O conjunto de dados quantitativos e qualitativos, porém, não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia."

Utilizamos o método da pesquisa- ação. Dentre tantas definições desse método, apoiamos nosso fazer na explicação encontrada em Tripp [15]:

> Em vez de aceitar uma definição mais aberta de pesquisa- ação, [...]passei a preferir uma definição mais estrita: "pesquisa- ação é uma forma de investigação- ação que utiliza técnicas de pesquisa consagradas para informar a ação que se decide tomar para melhorar a prática", e eu acrescentaria que as técnicas de pesquisa devem atender aos critérios comuns a outros tipos de pesquisa acadêmica (isto é, enfrentar a revisão pelos pares quanto a procedimentos, significância, originalidade, validade etc.

Tripp [15] destaca que muitas vezes, a pesquisa- ação por se preocupar com a melhoria da prática, é considerada ateórica. Para ele, "[...] embora seja verdade que a teoria disciplinar tradicional não é prioridade principal, é contudo importante recorrer a ela para compreender as situações, planejar melhoras eficazes e explicar resultados." TRIPP [15]. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram os testes 01 (com objetivo de diagnosticar), e 02 (com o objetivo de comparar) e a observação (com registro). A pesquisa de campo se desenvolveu em seis sessões para cada uma das três turmas. Todas as sessões ocorreram no laboratório de informática da escola. Na maioria das vezes foi possível que ficasse um computador por estudante, mas em outros dias isso não foi possível, por problemas técnicos. O laboratório de informática da escola é equipado com computadores novos e todos conectados a rede. A primeira e a última sessão foi destinada a aplicação dos testes 01 e 02. Nas outras sessões foram desenvolvidas sequências didáticas destinadas ao ensino de fração apoiado no software GeoGebra. Os testes e as sequências didáticas foram elaborados com base na revisão da literatura realizada antes da pesquisa de campo. A revisão da literatura teve como objetivo levantar dados sobre os modelos

que prevalecem no ensino dos números racionais fracionários, as principais dificuldades dos estudantes e as relações entre essas dificuldades e as formas de ensino. A análise dos resultados dessa pesquisa traz elementos importantes para a ampliação das discussões acerca do ensino de Fração na cidade de Manaus, o Capítulo 02 traz em detalhes o desenvolvimento das sessões, os resultados dos testes 01 e 02, bem como a análise dos dados coletados.

Capítulo 2

Análise dos resultados

2.1 A pesquisa de campo

A pesquisa foi realizada em uma escola pública da cidade de Manaus em 3 turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. Participaram da pesquisa 128 (cento e vinte e oito) estudantes.

A pesquisa de campo desenvolveu- se em seis sessões (para cada uma das três turmas), que ocorreram nas aulas de Matemática e foram distribuídas nos turnos matutino e vespertino, pois realizamos a pesquisa em uma escola de tempo integral. Cada sessão teve a duração de uma hora, correspondente a duração de um tempo de aula.

Todas as sessões ocorreram no laboratório de informática da escola. O laboratório possui capacidade para atender com um computador por estudante, portanto, na maioria das sessões, cada estudante trabalhou de forma individual, em algumas situações, por questões técnicas, não conseguimos ligar um ou dois computadores ocasionando o trabalho em dupla. No caso dos testes 01 e 02, não poderíamos admitir o trabalho em dupla, pois a apuração dos resultados deveria ocorrer individualmente, portanto, quando não foi possível que ficasse um computador por estudante, foi organizado uma fila de espera.

Utilizamos nas seis sessões computadores e internet, nas sessões 01 e 06 utilizamos o software Moodle, nele organizamos os testes de múltipla escolha. Nas sessões de 2 a 5, utilizamos o softaware Moodle e o Geogebra, pois organizamos as atividades do GeoGebra no ambiente do Moodle. O acesso aos testes se deu de forma personalizada, cada estudante recebeu login e senha referentes ao número de matrícula na escola em que a pesquisa foi realizada.

Foram realizados durante as sessões da pesquisa, dois testes, o primeiro, com objetivo de diagnosticar os conceitos dos estudantes em relação ao conteúdo Fração, com questões sobre representação fracionária, frações equivalentes, soma e subtração de frações. O segundo, com objetivo de verificar o efeito da intervenção com o GeoGebra entre os estudantes, estava composto por questões sobre os mesmos assuntos tratados no teste 1 e com o mesmo grau de dificuldade.

2.2 Testes 1 e 2

2.2.1 Banco de questões

Os testes 1 e 2 foram feitos na plataforma Moodle utilizando a ferramenta "Questionário". Os questionários dos testes 1 e 2 foram construídos a partir de um "banco de questões" composto por questões nos formatos: múltipla escolha e múltipla escolha calculada.

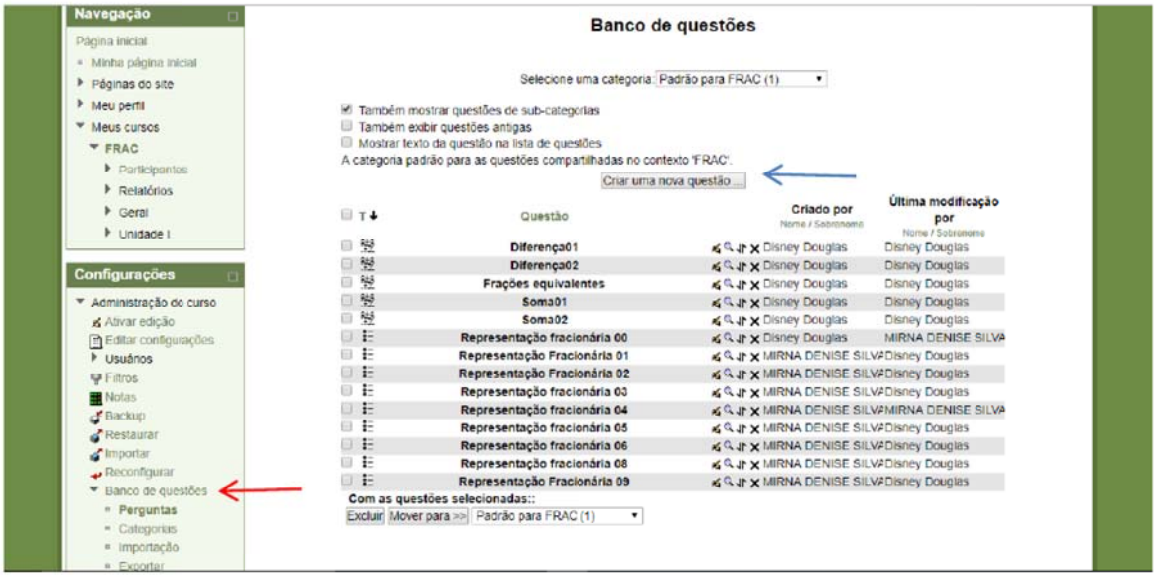


Figura 2.1: Tela sobre a criação do Banco de Questões.

A seta azul na Figura 2.1 indica o botão em que clicamos para a criação das questões.

2.2.2 Formato das questões

Para compor o banco de questões, optamos por dois formatos de questão: "múltipla escolha e múltipla escolha calculada". Os testes 01 e 02 estavam compostos por dez questões cada um. As questões dos testes foram agrupadas em categorias, por assunto: Representação fracionária, Frações equivalentes, Soma de frações e Subtração de frações.

2.2.3 Questões do tipo múltipla escolha

As questões sobre representação fracionária (questões de 1 a 5) foram elaboradas no formato "múltipla escolha".

Para a categoria "Representação fracionária", foram elaboradas 9 (nove) questões que compuseram o banco de questões. Optou-se pelo modo "pergunta aleatória", ou seja, cada vez que o estudante abrisse as questões de 1 a 5, era feito um sorteio entre as nove questões elaboradas. Com isso, pudemos reduzir a possibilidade de "cola" entre os estudantes, pois na maioria das

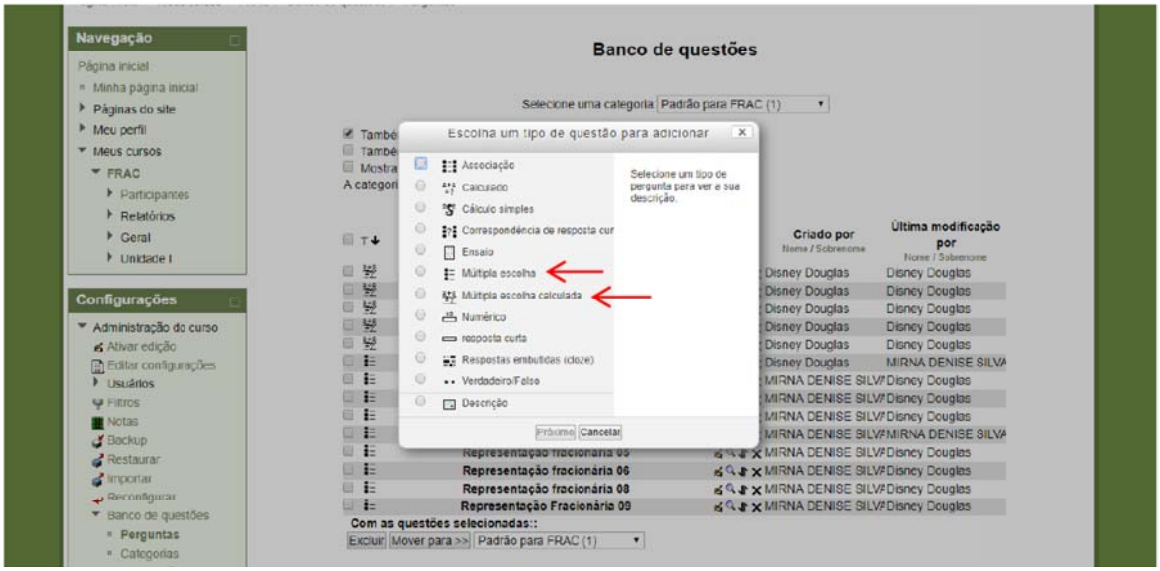


Figura 2.2: Janela para a escolha do tipo de questão.

vezes, cada estudante tinha em sua tela, uma questão sobre representação fracionária diferente das questões dos seus colegas próximos. Com isso, obtivemos dados mais precisos, observe a Figura 2.3

Figura 2.3: Janela para edição do questionário

2.2.4 Questões do tipo múltipla escolha calculada

As questões sobre frações equivalentes, soma e subtração de frações foram elaboradas no formato "múltipla escolha calculada". Para a questão 6 (seis), sobre fração equivalente, foi

elaborado um único modelo de questão como podemos ver na Figura 2.4 . O formato "múltipla escolha calculada" permite, por meio de uma fórmula, a criação de inúmeras possibilidades de questão a partir de um único modelo. Ou seja, cada vez que um estudante acessasse a questão 6 (seis), seja do teste 01, ou do teste 02, ele encontraria o mesmo enunciado, porém, com valores diferentes, alterados a cada acesso.

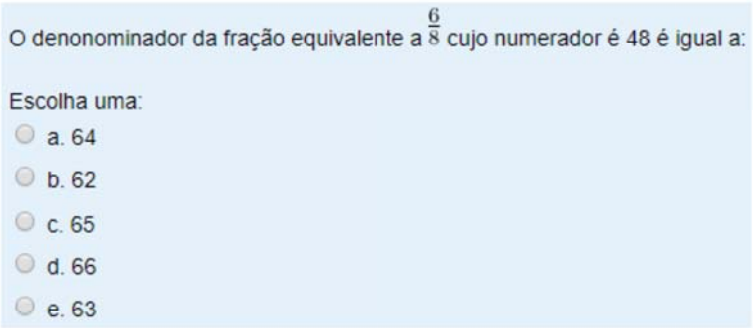


Figura 2.4: Modelo de questão sobre fração equivalente

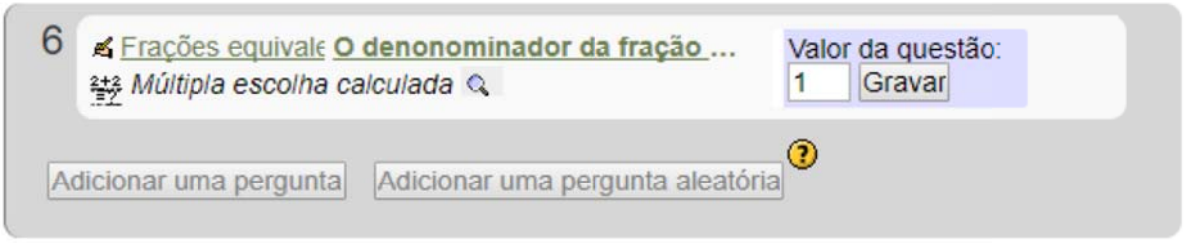


Figura 2.5: Tela indicativa- modo da questão.

As questões de 7 a 10, sobre soma e subtração de frações foram elaboradas, assim como a questão 6 (frações equivalentes), no formato múltipla escolha calculada. Foi elaborado apenas um modelo de enunciado para soma e um modelo de enunciado para subtração de frações que por meio de uma fórmula foi possível obter várias possibilidades de questões. Nesse tipo de questão,o enunciado não se modifica, mas apenas os valores são alterados. Elaborar questões no modo múltipla escolha calculada possibilita que tenhamos inúmeras questões para que os estudantes possam exercitar o que foi aprendido, com pouco investimento de tempo, além do mais, minimiza a possibilidade de "cola", pois, dificilmente, estudantes próximos terão simultaneamente em sua tela, as mesmas questões.

2.2.5 Outras características das questões

Todas as questões elaboradas para compor o "banco de questões", possuíam as seguintes configurações: cinco alternativas para cada questão (a, b, c, d e e). As respostas erradas das questões de múltipla escolha, geralmente envolviam pontos que são, segundo pesquisas, objeto

de dificuldades entre os estudantes. Cada questão valia 1,0 ponto e possuía apenas uma alternatica correta. A alternativa correta mudava de posição a cada acesso.

2.2.6 Vantagens de aplicar os testes por meio da plataforma do Moodle

Foi perceptível o interesse dos estudantes em realizar o teste na plataforma Moodle, a princípio, por ser uma novidade, mas depois que eles perceberam que a correção era feita automoticamente, muitos queriam repetir o teste, a maioria deles porque queria melhorar a nota. Após o término do teste, eles permaneceram envolvidos, falavam com os colegas sobre o que acertaram, o que erraram e onde precisavam melhorar. Observamos que a ferramenta Questionário, criou um clima propício a aprendizagam. Em Filho [12] podemos ver algumas formas criativas de usar esta ferramenta:

> Com a ferramenta Questionário, é mais fácil usar estratégias de avaliação muito significativas em termos educacionais. Uma boa proposta é usar o Questionário regularmente (em uma base semanal, por exemplo), uma vez que a correção é automaticamente feita pelo computador, em lugar de deixar as avaliações apenas para as provas presenciais (em geral, duas ou três durante todo o curso).
>
> Criando uma série de pequenos testes, é possível acompanhar com mais detalhes o grau de avanço do grupo de alunos no acompanhamento da matéria em estudo e, além disso, manter os participantes permanentemente envolvidos com os assuntos tratados.

Em síntese, podemos destacar que as principais vantagens da ferramenta Questionário são: a) possibilidade de diagnosticar o grau de aprendizagem dos estudantes de forma criativa; b) ser uma ferramenta facilitadora do trabalho do professor, pois a cada tentativa de realização do teste o computador corrige imediatamente; c) permite que os estudantes tenham retorno mais rápido sobre seu aproveitamento. O Moodle permite ao professor, celeridade em detectar os assuntos que os estudantes estão com dificuldades e portanto, planejar em tempo hábil a intervenção necessária para a superação dessas dificuldades. Permite também que o professor aplique vários testes durante o bimestre, pois ele não terá o trabalho de corrigi-los manualmente, pois a plataforma corrige os testes. Na elaboração do banco de questões, indicamos para o sistema, em que alternativa está a resposta certa de cada questão, e a essa alternativa atribuímos nota 100%, por exemplo, como mostra a Figura 2.6. A plataforma Moodle, "corrige" os questionários indicando as notas por teste (teste 01 e 02), a média entre os dois testes realizados e ainda possibilita que visualizemos quais questões cada estudante acertou e errou , como mostra a Figura 2.7.

Os resultados são rápidos, os estudantes conseguem visualizar, assim que terminam os testes, suas pontuações e quais questões acertaram e erraram, por exemplo. Isso permite que tenham clareza sobre seus desempenhos e sobre quais assuntos devem se empenhar mais. A plataforma Moodle disponibiliza gráficos e tabelas com os resultados dos desempenhos individual e da turma. Utilizamos esses gráficos e tabelas para a análise dos dados da pesquisa.

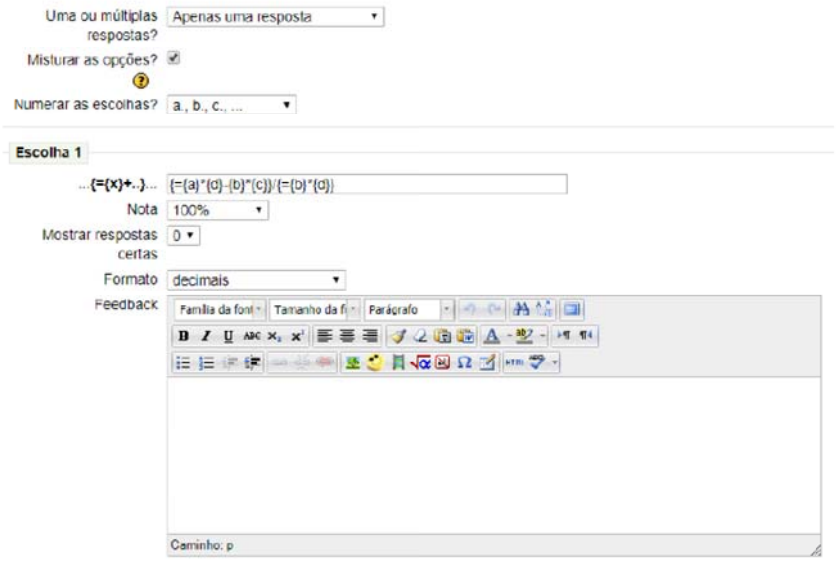


Figura 2.6: Tela que mostra onde indicar a alternativa correta

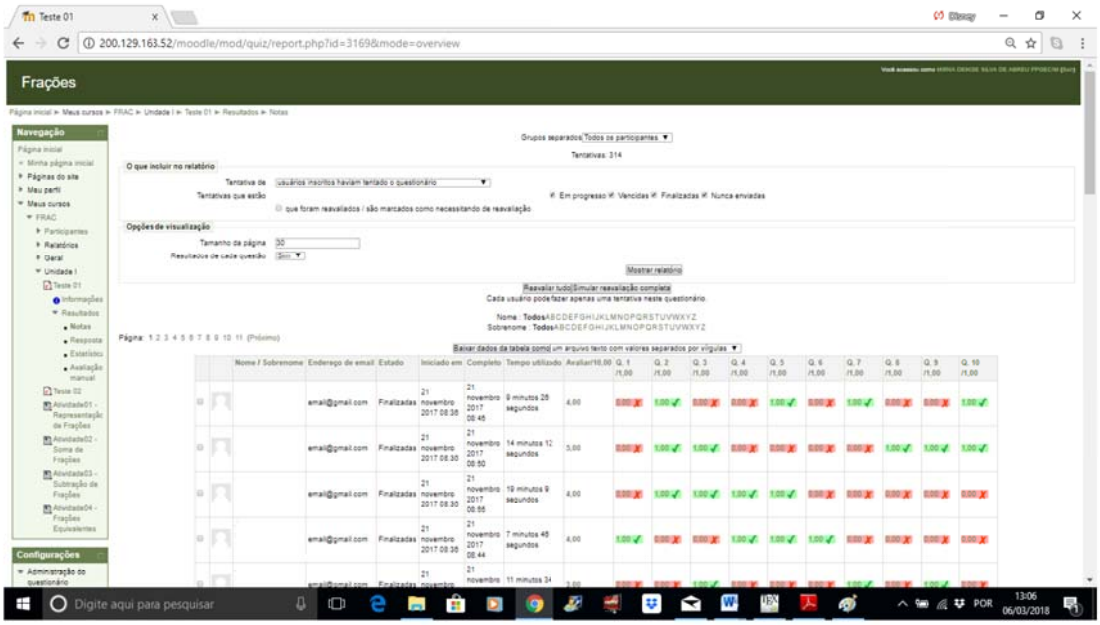


Figura 2.7: Acertos e erros dos estudantes.

2.3 Sessões da pesquisa de campo

Cada sessão teve a duração de uma hora. Ao todo, foram realizadas seis sessões em cada turma, como a pesquisa foi realizada em 3 (três) turmas, foram realizadas 18 (dezoito) sessões na escola. As seis sessões foram organizadas da seguinte forma:

- Sessão 01 - Teste 01;
- Sessão 02 - Intervenção GeoGebra (frações equivalentes);

- Sessão 3 - Intervenção GeoGebra (adição de frações);
- Sessão 4 - Intervenção GeoGebra (representação fracionária);
- Sessão 5 - Intervenção GeoGebra (subtração de frações);
- Sessão 06 - Teste 02.

As atividades do GeoGebra utilizadas foram:

- Frações equivalentes, disponível em https://www.geogebra.org/m/aVbhn2W5;
- Representação fracionária, disponível em https://www.geogebra.org/m/Y6qZhvk6;
- Adição de frações, disponível em https://www.geogebra.org/m/VpaqXmpM; e
- Subtração de frações, disponível em https://www.geogebra.org/m/ESzt2vef.

Para cada sessão de intervenção, sessões 02, 03, 04 e 05, elaboramos sequências didáticas para a condução do trabalho. Exploraremos essas sequências didáticas mais adiante, no Tópico "Detalhamento das sessões."

2.3.1 A intervenção

Para cada assunto, representação fracionária, frações equivalentes, soma e subtração de frações, elaboramos sequências didáticas para serem desenvolvidas durante as sessões de 02 a 05. A intervenção teve como foco, as questões com mais incidência de erro no teste 01, porém, todos os conteúdos que compuseram os testes 01 e 02 foram trabalhados na intervenção. A intervenção mediante os conteúdos propostos foi realizada tendo como recurso predominante, atividades no software GeoGebra, estas atividades foram inseridas na plataforma Moodle como mostra a Figura 2.8.

2.3.2 Conteúdos matemáticos abordados nas sessões

Os números racionais podem ser representados na forma decimal ou fracionária. Nosso trabalho de pesquisa focou apenas os números racionais na forma fracionária por entendermos que eles são menos vistos no contexto social que os racionais na forma decimal.

Os PCN das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental tem como um dos seus objetivos, levar o estudante a: "Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social" BRASIL [5].

Dessa forma, enxergamos o desafio de, como educadores, não negligenciarmos o trabalho com números racionais fracionários devido o seu pouco uso no dia a dia dos estudantes.

Para Bertoni [2]

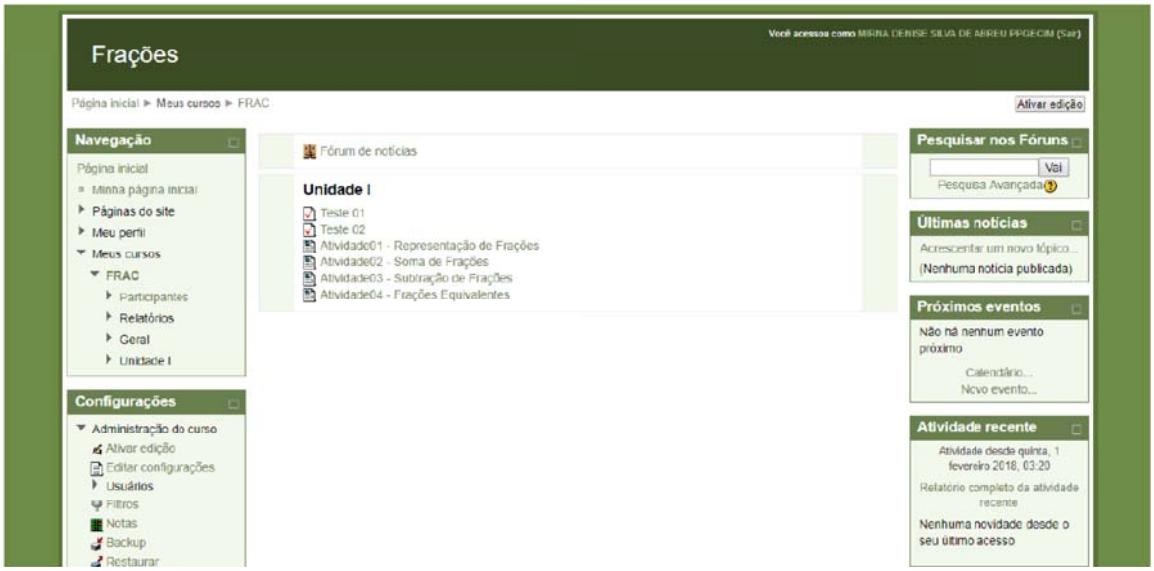


Figura 2.8: Tela de acesso aos testes e às atividades no GeoGebra

> A representação decimal tem maior presença em nossa sócio- cultura, a representação fracionária tem uso consagrado em razões, escalas, porcentagens, probabilidade. Além disso, em particionamentos da unidade, as representações fracionárias podem ser mais adequadas, sendo mais natural, por exemplo falar em 1/4 de pizza do que em 0,25 da pizza.

Segundo a autora, "por estarem presentes nas quantias monetárias e nas medidas, as representações decimais tendem a ser mais aceitas pelos alunos" BERTONI [2].

Os PCN indicam que o aprendizado dos números racionais nas séries iniciais se dê pela compreensão de alguns dos diferentes significados deste número: quociente, parte- todo, razão. Vizcarra e Sallán [16] enfatizam a importância de que se evite a exclusividade de um dos significados do número racional no processo de ensino e aprendizagem. Os autores apresentam uma proposta alternativa para o ensino dos números racionais que leva em conta as capacidades cognitivas que exige cada um dos significados. Esta proposta visa utilizar três modelos para o ensino dos números racionais: Modelo de medida direta, Modelo de cociente e Modelo de razão.

> Con el uso de estos modelos se espera que los escolares integren los diferentes significados del números racional, así como los sistemas de representación asociados, y que se evite la exclusividad de alguno de ellos puesto que cualquiera de los significados destaca alguno de los aspectos del número racional mientras que oscurece otros. (Figueras, 1988 apud Vizcarra e Sallán [16]).

Abordamos nas sessões da pesquisa de campo os conteúdos: representação fracionária, frações equivalentes, soma e subtração de frações.

Representação fracionária

As nove questões sobre representação fracionária foram elaboradas a partir do significado parte- todo: " A relação parte todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes" BRASIL [5]. Para Vizcarra e Sallán [16] a relação parte- todo consiste na "relación simbólica que se establece entre dos números naturales a partir de una representación gráfica". Optamos pelo significado parte-todo pela constatação que ele é o modelo mais utilizado nas escolas: " A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está explícita a relação parte- todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais"BRASIL [5]. Para Bertoni [2]

> Tradicionalmente, três modelos têm sido adotados no ensino e aprendizagem de frações: o modelo discreto, as figuras geométricas, principalmente quadrados, retângulos e círculos; e a representação na reta numérica. Desses, ganha de longe, em frequência, o uso de figura geométricas.

O modelo das figuras geométricas releciona- se, segundo o nosso entendimento, ao significado parte- todo. Apesar da crítica de diversos pesquisadores ao uso exclusivo deste modelo no ensino do número racional, optamos em realizar o teste 01 (diagnóstico) e o teste 02 a partir deste significado a fim de garantir, pelo menos na teoria, que todos os estudantes conhecessem o conteúdo proposto nos testes.

Nas questões sobre representação fracionária os estudantes lidaram com frações de grandezas contínuas (como um comprimento, uma área) e frações de grandezas discretas (como um conjunto de alunos de uma turma, por exemplo). A Figura 2.9 mostra uma atividade que explora fração de grandeza contínua e a Figura 2.10 explora fração de grandeza discreta.

Frações equivalentes

Os PCN indicam o trabalho com frações equivalentes a partir do 2º ciclo do ensino fundamental: "Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas" BRASIL [5]. "Dizemos que duas frações são equivalentes quando elas representam a mesma quantidade, mesmo que estejam escritas de formas diferentes" BRASIL [7]. Segundo Brasil [7], "A ideia mais importante sobre frações é a de frações equivalentes. É ela que nos permite comparar, somar e subtrair frações, além de ajudar a entender como frações se relacionam a razões e proporções, ideias que aparecem em quase todas as partes da Matemática escolar." O conceito de frações equivalentes equivale ao que Caraça [3] denomina como a propriedade de igualdade do número racional. Para ele, o conhecimento do campo racional só ficará completo após a apropriação dessas três propriedades: igualdade, desigualdade e operações. A propriedade de igualdade é definida por Caraça [3] da seguinte forma:

Figura 2.9: Grandeza contínua

Figura 2.10: Grandeza discreta

Dois números racionais r= $\frac{m}{n}$ e s= $\frac{p}{q}$ dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial. Consequências- O número s= $\frac{p}{q}$ pode não ter os mesmos numerador e denominador que r= $\frac{m}{n}$, visto que cada uma das n partes iguais em que a unidade é dividida [...] pode, por sua vez, ser subdividida em k partes, sendo k qualquer. Feita essa nova subdivisão, $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ ficarão contendo respectivamente n · k e m · k das novas partes, de modo que a medida será expressa pelo número racional (pôr as frações)que, em virtude da definição, deve ser considerado

> como igual a $\frac{m}{n}$. [...] dado um número racional r= $\frac{m}{n}$, todo o número racional s= $\frac{p}{q}$ onde p= m · k, q= n · k (k inteiro qualquer não nulo),é igual a r. Façamos o produto mq e pn; tem-se mq= mnk e pn= mnk, donde mq=pn, a definição de igualdade pode pôr-se, portanto, assim: $\frac{m}{n}$= $\frac{p}{q}$- m.q= p.n.

Para ensinar o estudante a encontrar frações equivalentes, encontramos em sites com conteúdo educacional, modelos que se relacionam as ideias supracitadas:

> Duas frações diferentes, mas equivalentes, têm, por definição, numeradores e denominadores que são múltiplos de cada um. Em outras palavras, multiplicar o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número produzirá uma fração equivalente. Embora os números na nova fração sejam diferentes, as frações terão o mesmo valor. Por exemplo, se tomamos a fração 4/8 e multiplicamos tanto o numerador, como o denominador por 2, teremos (4x2)/(8x2)= 8/16. Essas duas frações são equivalentes. Citação [17]

É comum vermos em sites educacionais, livros didáticos e apostilas a definição de igualdade entre números racionais expressa em Caraça [3] como uma técnica para conferir se duas frações são, ou não, equivalentes.

> Se você tem uma fração e quer achar outras frações que sejam equivalentes a ela, pode usar dois procedimentos. O primeiro é multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número (que não seja o zero!); o segundo é dividir o numerador e o denominador por um mesmo número (que também não pode ser o zero, porque não dá para dividir por zero) [...]. BRASIL [7].

Em Brasil [7] encontramos uma explicação sobre porque esta técnica funciona e destaca que o estudante precisa ter acesso a técnicas e algoritmos mais simples. Destaca também a importância deles saberem por que essas técnicas funcionam.

> Quando dizemos que duas frações são equivalentes, estamos dizendo que as duas representam a mesma quantidade, representam o mesmo número. Acontece que um número menos ele mesmo é sempre zero [...]. Com os números naturais, dizer isto parece quase uma coisa óbvia demais: 10-10=0 [...] Mas no caso das frações, como o mesmo número pode ter representações diferentes, isso já não é tão óbvio assim. É verdade que $\frac{3}{4}$= $\frac{3}{4}$, mas, e no caso de $\frac{2}{3}$ e $\frac{102}{153}$?[...]Se duas frações representam uma mesma quantidade, e subtrairmos uma da outra, o resultado deve ser zero, pelo mesmo motivo que 5-5=0.

Sobre frações equivalentes, escolhemos para compor os testes uma atividade que solicitou do estudante muito mais que a habilidade de encontrar frações equivalentes dada a primeira, mas uma atividade que solicitou um raciocínio algébrico, pois eles deveriam encontrar um valor desconhecido como mostra a Figura 2.11.

Como vimos na Figura 2.11, o valor desconhecido a ser encontrado pelo estudante é o denominador da fração equivalente a fração dada, cujo numerador já está estipulado.

Você pode visualizar este teste, mas se isto fosse uma tentativa real, você seria bloqueado porque:

Atualmente este questionário não é disponível

Questão 6
Ainda não respondida
Vale 1,00 ponto(s).
Marcar questão
Editar questão

O denonominador da fração equivalente a $\frac{5}{5}$ cujo numerador é 45 é igual a:

Escolha uma:
- a. 44
- b. 45
- c. 47
- d. 46
- e. 43

Figura 2.11: Questão 06 do teste 01- Atividade sobre frações equivalentes

$$\frac{5}{5} \quad \frac{45}{?}$$

Figura 2.12: Atividade sobre fração equivalente- valor desconhecido

Para encontrar a resposta desta atividade, os estudantes precisam saber que se a fração dada possui numerador igual ao denominador a fração equivalente será da mesma forma, ambas representarão um inteiro. Veja a Figura 2.12.

Caso a questão aparecesse de outra forma, com a fração dada diferente de um inteiro, o estudante poderia recorrer a técnica da multiplicação em cruz como mostra a Figura 2.13:

$$\frac{1}{7} \quad \frac{4}{?}$$

Figura 2.13: Atividade sobre fração equivalente- valor desconhecido

Se o estudante já conhece esta técnica ele saberá que para que as frações sejam equivalentes, o produto do numerador da primeira fração com o denominador da segunda fração deve ser igual ao produto do denominador da primeira fração com o numerador da segunda fração. Sendo assim, basta que ele multiplique o denominador da primeira fração com o numerador da

segunda, ele obterá o resultado: 28 (vinte e oito). Para que ele encontre o valor desconhecido, basta que pense no número que multiplicado por "1" (numerador da primeira fração) dê 28 (vinte e oito).

Operações entre números racionais

Para que o conhecimento do campo racional esteja completo é necessário o estudo de suas propriedades: igualdade, desigualdade, operações. CARAÇA [3]. Nas questões 7, 8, 9 e 10 abordamos as operações entre frações, optamos em trabalhar somente com a soma e a subtração de frações. Não abordamos a multiplicação e a divisão por entendermos, conforme indicam os PCN, que como esse assunto começou a ser trabalhado no 6º ano (ano em que foi desenvolvida a pesquisa, os estudantes ainda não teriam consolidado as habilidades necessárias para a resolução de situações problema envolvendo esse campo da aritmética. Para os anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º ano) os PCN indicam cálculo de números racionais apenas na forma decimal, com ensino a partir do 4º ano do ensino fundamental. Para Caraça [3] a soma de frações com denominadores iguais se dá da seguinte forma:

> Sejam [...] os dois segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; chama-se soma deles ao segmento $\overline{AD}$ que se obtém transportando $\overline{CD}$ para a recta sobre a qual existe $\overline{AB}$, e fazendo lá coincidir a origem C de $\overline{CD}$ com a extremidade B de $\overline{AB}$. Consequências 1º.- Se os dois números dados têm o mesmo denominador, r= $\frac{m}{n}$, s= $\frac{p}{n}$ [...] o segmento $\overline{AD}$ é medido pelo número $\frac{m+p}{n}$, logo $\frac{m}{n}$ + $\frac{p}{n}$= $\frac{m+p}{n}$

Já a soma de frações com denominadores diferentes, temos em Caraça [3]:

> 2º.-Se os dois números não têm o mesmo denominador podem reduzir-se previamente ao mesmo denominador [...]; tem-se então, dados que
>
> $$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q},$$
>
> $$r = \frac{m \cdot q}{n \cdot q}, s = \frac{n \cdot p}{n \cdot q},$$
>
> donde
>
> $$r + s = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q},$$
>
> logo
>
> $$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}.$$

Segundo pesquisas, o ensino da soma ou da subtração de frações prioriza muito mais o ensino da técnica para realizar o cálculo que a conceitualização por parte do estudante, a consequência disso é que os estudantes aplicam as técnicas mas não vêem significado no que estão fazendo.

> O estudo das operações com frações no ensino básico, em geral, tem-se apoiado em pressupostos teóricos algébricos refinados, como os de conceitos de relação de equivalência e consequentes classes de equivalências. (Nunes, 2003; Nunes e Bryant, 1997 apud Guerra e Silva [9])

Muitos estudantes por não entenderem a longa técnica apresentada pelas escolas para subtrair e somar frações com denominadores diferentes acabam desistindo de entender esse cálculo e aplicam ao cálculo dos números racionais fracionários o mesmo procedimento para operar com números naturais.

Para Vizcarra e Sallán [16] o ensino dos números racionais a partir do significado parte-todo e ignorando os outros significados dos números racionais é responsável pela construção de ideias errôneas entre os estudantes em vários conceitos relacionados ao aprendizado desses números, inclusive no aprendizado das operações:

> Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mesmo significado que en los números naturales. Los alumnos extienden los significados e técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creencias, los entes numéricos no cambian de sentido: el orden de los números racionales es igual que el de los naturales, la multiplicación de racionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc. Vizcarra e Sallán [16].

2.3.3 Detalhamento das sessões

Sessão 01- Teste 01

A sessão 01 teve como objetivo diagnosticar o conhecimento dos estudantes em relação ao conteúdo Fração no que tange aos assuntos: representação fracionária, frações equivalentes, soma e subtração de frações. Entendemos, com base nos PCN que todos os conteúdos que compuseram o teste 01, já haviam sido trabalhados com os estudantes nos anos anteriores e no ano presente, pois conforme este documento, os conteúdos supracitados devem ser desenvolvidos em sala de aula a partir do 2º ciclo, o que equivale as atuais turmas de 4º e 5º anos do ensino fundamental. Conforme este documento, é a partir do segundo ciclo que os estudantes

> [...] ampliam conceitos já trabalhados no ciclo anterior (como o de número natural, adição, medida, etc.), estabelecem relações que os aproximam de novos conceitos (como o de número racional, por exemplo), aperfeiçoam procedimentos conhecidos (contagem, medições) e constroem novos (cálculos envolvendo proporcionalidade, por exemplo). BRASIL [5].

Conforme os PCN, o trabalho com números racionais na escola, deve iniciar na quarta série do ensino fundamental (2º ciclo), porém, observamos no quadro de conteúdos, que há pouca ênfase a representação fracionária dos números racionais, percebemos ênfase maior a representação decimal. Sobre número racional na forma fracionária, encontramos no quadro de conteúdos o seguinte: "Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de

uso freqüente"; "Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária"; "Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas"; "Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte- todo, quociente e razão"; "Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária"; "Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional." BRASIL [5].

Encontramos em Brasil [5], respaldo para afirmarmos que representação fracionária e frações equivalentes, são conteúdos trabalhados na escola a partir da 4ª série do ensino fundamental. Dessa forma, constatamos que os estudantes do 6º ano do ensino fundamental poderiam ter suas habilidades avaliadas em relação a esses conteúdos.

Quanto aos conteúdos referentes às operações com números fracionários, que nos testes 01 e 02, inserimos questões de adição e subtração, não encontramos indicação nos PCN para que estes conteúdos fossem trabalhados no 2º ciclo. Conforme o quadro de conteúdos dos PCN, recomenda-se no 2º ciclo, trabalho com operações de números racionais apenas na forma decimal: "Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais." BRASIL [5]. Porém, no terceiro ciclo (equivalente as atuais 6ª e 7ª séries) observamos no quadro relativo aos conceitos e procedimentos que há indicação para o trabalho com cálculo com números naturais, inteiros e racionais: "Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações- com números naturais, inteiros e racionais- , por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados." BRASIL [6]. Diferentemente de como é indicado no segundo ciclo: cálculo de adição e subtração de números racionais explorado apenas na forma decimal, no 3º ciclo, os PCN não trazem essa especificação, o que nos leva a entender que nessa etapa, deve ser trabalhado o cálculo de números racionais tanto na forma decimal, quanto na forma fracionária. O que nos deu respaldo para inserir nos testes, adição e subtração de frações. Portanto, ao elaborarmos o teste 01, esperávamos que todos os conteúdos, nele contido, já tivessem sido trabalhados com os estudantes.

Aplicação do teste 01

O teste 01 foi aplicado na primeira sessão da pesquisa de campo, participaram do teste 01, 128 (cento e vinte e oito) estudantes. Eles foram primeiramente instruídos sobre como acessar a plataforma Moodle, entrando primeiramente no mecanismo de busca da internet Google. Após chegarem a sala Prof. Disney Douglas- Departamento Matemática- UFAM, deveriam descer por meio da barra de rolamento até uma sala denominada Fração, clicando nela, chegariam a página que lhes dariam acesso ao curso, conforme mostra a Figura 2.14

O nome de usuário e senha dos estudantes foram seus números de matrícula na escola. Foi disponibilizado um pequeno papel com a senha de uso individual para cada estudante. Assim, todos tiveram acesso ao teste e puderam realizar sem dificuldade técnica o mesmo. Foi expli-

Figura 2.14: Tela de acesso ao curso

cado a eles que apenas uma alternativa estava correta e que após clicarem nela, deveriam clicar também no botão ´´próxima" até finalizarem o teste.

Sessão 02- Intervenção GeoGebra (Frações equivalentes)

O objetivo desta sessão foi de mostrar aos estudantes graficamente, o que significa frações equivalentes e por meio do GeoGebra levá- los a encontrar frações equivalentes de várias frações dadas. Também queríamos saber o que eles já sabiam sobre o assunto e por meio da intervenção com o software ajudá-los a aprofundar um pouco mais seus conceitos sobre frações equivalentes por meio da criação de situações que requereram deles posturas diferenciadas. Iniciamos a sequência didática perguntando: o que é maior? 1/2 ou 2/4 de uma pizza? E continuamos perguntando, se alguém gosta muito de pizza, esse alguém quer ganhar o menor ou o maior pedaço? Todos concordaram que é o maior. Continuamos perguntando: esse alguém (que deseja ganhar o maior pedaço de pizza), prefere ganhar 1/2 ou 1/4 de pizza? Os alunos tiveram dúvidas em responder essa questão. Percebemos que muitos alunos, quando são interrogados sobre a comparação de frações para dizer qual a maior e qual a menor, baseiam suas respostas no conhecimento que possuem sobre os números naturais, eles observam qual das frações possuem números naturais que indicam maior quantidade, por isso foi comum que os alunos respondessem que 2/4 é maior que 1/2 pelo fato de, na lógica dos números naturais, 2 representar mais que 1 e 4 representar mais que 2. Esse tipo de resposta, reforça o que evidenciou a pesquisa de Nunes e Bryant 1997, p. 191 apud Bertoni [2] sobre o processo de ensino e aprendizagem de fração que utiliza atividades de dividir e pintar figuras geométricas:

> As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações.

"No entanto, diversas partes de pesquisa demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa." Nunes e Bryant 1997, p. 191 apud Bertoni [2]. Corroboramos com essa ideia, de que o ensino de frações, baseado apenas na divisão e na pintura de figuras geométricas não oferecem a diversidade de situações para que os estudantes construam o conceito de fração. Pois, se o assunto comparação de frações começa a ser trabalhado no 4º ano do ensino fundamental, não é razoável que os estudantes cheguem ao final do 6º ano do ensino fundamental (a pesquisa foi realizada em novembro) usando como estratégia para comparar frações a ideia adequada para comparar números naturais. Isso nos leva a constatar que muitos estudantes não construíram o conceito de número racional na forma fracionária nos anos de escolaridade destinados a este fim. Sabendo que as pesquisas recentes indicam que a forma predominante de ensinar fração consiste no modelo parte- todo, principalmente no particionamento e pintura de formas geométricas (quadrados, círculos, retângulos) como afirma Bertoni [2], conjecturamos que a maioria dos estudantes participantes da pesquisa estudaram frações a partir desse modelo de ensino.

Durante a intervenção, para ajudar os estudantes a responderem adequadamente, levamos duas folhas de papel ofício, a primeira, dividida em duas partes, sendo uma parte pintada, representando a fração 1/2. A segunda folha, dividida em 4 partes, sendo duas partes pintadas, representando a fração 2/4. Observe a Figura2.15 . Então, aplicando uma folha de ofício sobre a outra e fazendo coincidir os extremos, os estudantes puderam perceber que a parte pintada da primeira fração é do mesmo tamanho da parte pintada da segunda fração, permitindo que os mesmos concluíssem que essas frações são equivalentes, ou seja, são frações que representam a mesma parte do todo. Outra forma utilizada para que eles percebessem que as duas frações são equivalentes foi dobrando as folhas de ofício na parte pintada e comparando o tamanho dessas partes pintadas colocando uma folha sobre a outra, mais uma vez eles perceberam que as duas frações são exatamente do mesmo tamanho.

Sessão 03- intervenção GeoGebra (adição de frações)

Iniciamos a sessão 03 propondo um problema simples que requereu dos estudantes a habilidade de somar frações com denominadores diferentes. Ilustramos o problema com duas folhas de ofício para representar as frações que os estudantes deveriam somar. A primeira folha dividida em duas partes, representando graficamente a fração, $\frac{1}{2}$, a segunda folha foi divida em 4 partes e 3 partes pintadas, representando a fração $\frac{3}{4}$. O problema proposto foi:
1- Ganhei duas barras de chocolate, da primeira comi metade: $\frac{1}{2}$ e da segunda, comi $\frac{3}{4}$. Quanto

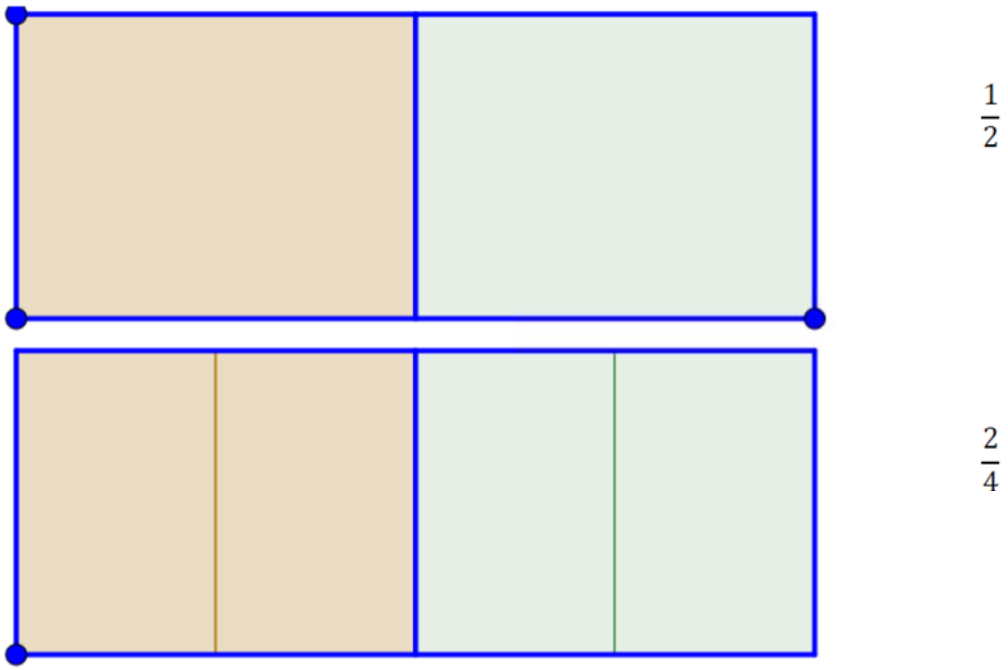


Figura 2.15: Atividades da intervenção- Frações equivalentes

eu comi ao todo? Veja na Figura 2.16 a ilustração do problema que fizemos utilizando papel ofício.

Antes de pedir que os estudantes resolvessem o problema, fizemos algumas perguntas a fim de detectarmos o conhecimento matemático dos mesmos:

a) comparando as duas frações, as mesmas são iguais?

b) se elas forem diferentes, qual a maior e qual a menor?

c) que operação vamos realizar para encontrar o resultado da questão?

Em relação a comparação de frações, muitos respoderam a questão apoiados no conhecimento que possuem dos números naturais, indicando que $1/2 < 3/4$ porque na regra dos números naturais $1 < 3$ e $2 < 4$. Os PCN apontam alguns obstáculos que os estudantes enfrentam quando raciocinam sobre números racionais como fazem sobre os números naturais.

> Ao raciocinar sobre os números racionais como se fossem naturais, os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos: [...] outro diz respeito à comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$. BRASIL [5].

Sobre a terceira pergunta, que solicitava a indicação da operação que faríamos para responder à questão, todos disseram: adição. Percebemos que os estudantes utilizamm o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) como forma de encontrar frações equivalentes e com o mesmo denominador e assim prosseguirem com a soma.

Confome percebemos, alguns estudantes não sabiam calcular o MMC e por isso, não conseguiram realizar a soma das frações.

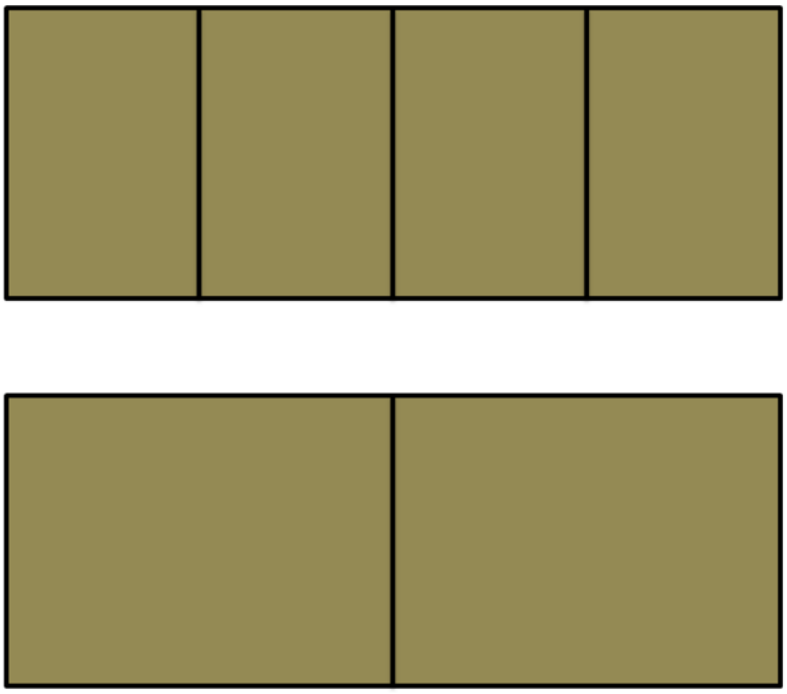


Figura 2.16: Atividades de intervenção- adição de frações

> As técnicas para se achar o MMC de dois números são simples, mas não têm nenhuma relação visível com somar frações. É comum encontrarmos crianças que não somam frações porque não sabem calcular o MMC, e outras que demoram um tempão no MMC antes de fazerem a adição (se não errarem no meio do caminho!). BRASIL [7].

Utilizando as duas folhas de ofício, a primeira dividida em 2 partes e uma das partes pintada, representando graficamente a fração $\frac{1}{2}$, a segunda, dividida em 4 partes e três dessas pintadas, representando graficamente a fração $\frac{3}{4}$ fomos paulatinamente conversando com os estudantes a fim de que esses, por meio das representações gráficas respondessem às questões supracitadas. Por meio da representação gráfica, os estudantes responderam seguramente que 1/2 > 3/4. Além do desenho, dobramos no papel a fração indicada, com isso, ficou muito mais fácil os estudantes concluírem sobre a maior fração, como mostra a Figura 2.17.

No GeoGebra, pedimos que os estudantes realizassem a mesma atividade: calculassem $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$, observe as Figuras 2.18 e 2.19:

Quando todos os estudantes conseguiram chegar na tela como mostra a Figura 2.18, pedimos para que eles clicassem no ícone "para somar marque aqui". Após clicarem no ícone informado, eles foram convidados a refletir sobre como o GeoGebra conseguiu encontrar àquela resposta. Relembramos que para somarmos frações com denominadores diferentes temos que transformar as duas em frações com o mesmo denominador, para isso, explicamos aos estudantes, segundo a linha de pensamento exposta no fascículo do Pró- letramento: Matemática:

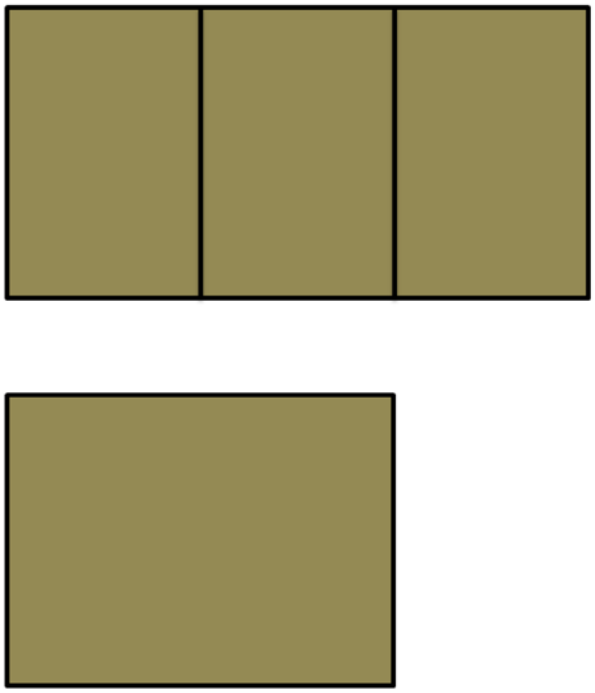


Figura 2.17: Atividades de intervenção- adição de frações- parte 2

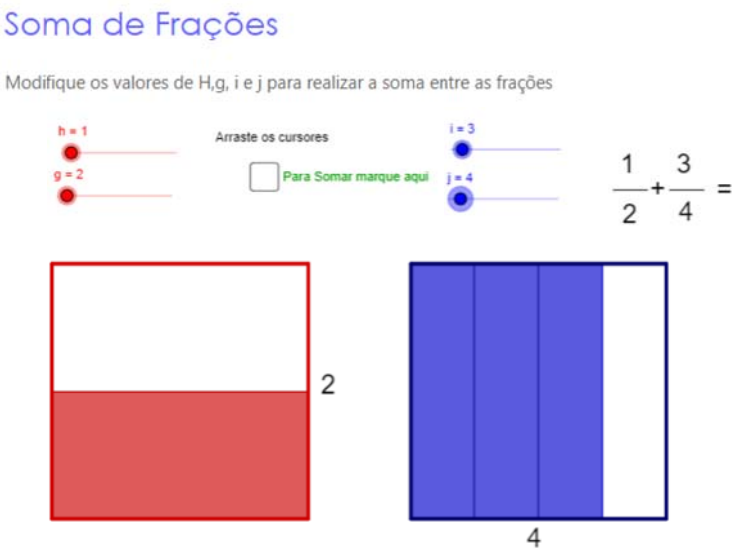


Figura 2.18: Atividades de intervenção com o GeoGebra- adição de frações- passo 1

Agora, se alguém disser que quer saber o resultado da conta 2 metros + 50 centímetros, vamos somar o 2 com o 50? Claro que não! Temos duas alternativas principais. A primeira é transformar o 2 metros em centímetros (2m =200cm) e depois somar os 200cm com os outros 50cm, dando o resultado 250cm. Outra possibilidade é transfor-

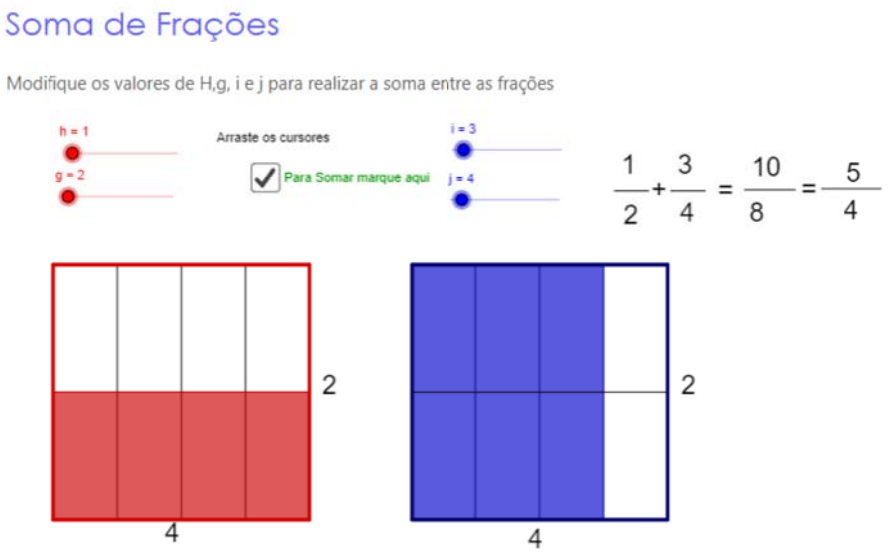


Figura 2.19: Atividades de intervenção com o GeoGebra- adição de frações- passo 2

> mar 50cm em metros (50cm=0,5m) e depois somar o 0,5m com os outros 2m, dando o resultado 2,5m. Observe que 2,5m = 250cm. Com frações é a mesma coisa. Só podemos somar frações do mesmo "tipo", quer dizer, só podemos somar, diretamente, frações com o mesmo denominador. Se quisermos somar $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{10}$, antes de efetuar a operação é preciso transformar as duas em frações do mesmo ?tipo?, isto é, em frações com o mesmo denominador. BRASIL [7].

O GeoGebra fez isso, transformou $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ em frações do mesmo "tipo", ou seja, do tipo "oitavos", portanto, multiplicando os denominadores das duas, obtemos o produto 8, dessa forma, o GeoGebra dividiu novamente o que era do "tipo" meio e o que era do "tipo" quarto em partes do tipo "oitavos". Feito isso, mostramos que para que ele obtenha o resultado que precia, basta contar cada pedacinho pintado como se tivesse lidando com frações unitárias:

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{10}{8}$

O resultado é uma fração imprópria: $\frac{10}{8}$. O trabalho com frações unitárias contribui para que o estudante supere a ideia de que frações com numeradores maiores que os denominadores não se trata de um erro.

Explicamos que para somarmos frações com denominadores diferentes temos que procurar uma fração equivalente para cada uma das frações a serem somadas e que ambas tenham o mesmo denominador. Geralmente, os estudantes aprendem na escola que para tal tarefa, eles precisam calcular o MMC (Mínimo Múltiplo Comum). O MMC de 2 e 4, da atividade feita no GeoGebra, é 4. Quando multiplicamos os denominadores 2 e 4 encontramos um múltiplo de ambos, não o mínimo, mas que com ele é possível resolver a soma.

A técnica utilizada pelo GeoGebra para a soma de frações sem a necessidade do cálculo

do Mínimo Múltiplo Comum pode ser expressa da seguinte forma: "O denominador do resultado vai ser o produto dos dois denominadores [...] Multiplique "em cruz" os numeradores e denominadores, e some os resultados [...]." BRASIL [7].

Sessão 04- Intervenção GeoGebra (representação fracionária)

Começamos esta sessão, cientes de que este assunto (representação fracionária) começou a ser trabalhado com os estudantes quando eles ainda estavam no 2º ciclo, o que hoje equivale às turmas de 4º e 5º anos. Iniciamos a conversa falando sobre a utilidade do número racional, com ênfase no número fracionário. Após isso, citamos alguns exemplos de situações que requeriam representação fracionária e a fizemos com a participação dos estudantes, revisando com eles, o que é o denominador e o numerador. Revisamos também sobre a representação gráfica e simbólica de uma fração, fizemos isso, utilizando primeiramente folhas de papel ofício. Dividindo folhas de papel ofício em duas, três e quatro partes para obtermos o denominador e pintando algumas partes para indicarmos o numerador. Disponibilizei papel ofício para que eles representassem graficamente as seguintes frações: 1/12 , 4/2 , 2/6 e 3/2 No geral, a maioria dos estudantes acertaram a representação gráfica de 1/12, bem como a representação gráfica de 2/6. Percebi que enquanto eu pedia para que os estudantes representassem graficamente frações cujos denominadores eram maiores que os numeradores, a maioria deles não apresentava dificuldades, porém, quando pedi que representassem graficamente frações cujos denominadores eram menores que os numeradores, alguns alunos falaram que não era possível, como foi no caso das frações: 4/2 e 3/2. A representação gráfica das frações: 4/2 e 3/2 foi dada por alguns estudantes, durante a pesquisa, da seguinte forma, veja a Figura 2.20:

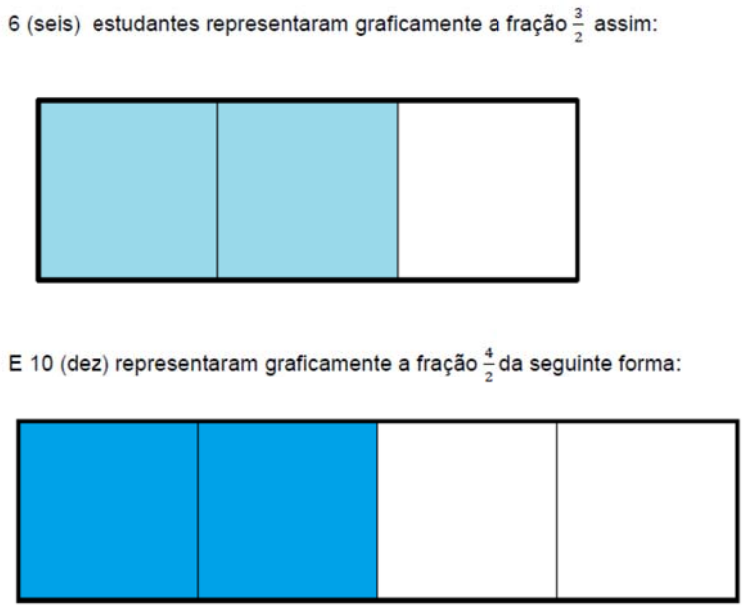


Figura 2.20: Atividades da intervenção- Representação fracionária

A ideia utilizada para representar graficamente as duas frações é a mesma, os estudantes, acostumados a fazerem uma dupla contagem para representarem graficamente frações, contam em quantas partes o todo está dividido e quantas partes foram tomadas desse todo, que são as partes pintadas. Porém, eles ignoraram o fato de que, o denominador, que é o número que fica abaixo do traço, representa em quantas partes o inteiro foi dividido e o numerador, que é o número que fica acima do traço, representa quantas partes foram tomadas do todo. Ao representarem graficamente as frações da forma como mostra a Figura 2.20, os estudantes ignoram essa propriedade e invertem os números de maneira que os numeradores assumem o papel de numerador e vice- versa. Com essa alteração, os estudantes puderam fazer àquilo que estavam acostumados: dupla contagem. Percebemos com isso, o quão frágil é o conceito que os estudantes possuem sobre representações fracionárias. Não há entre esses estudantes o entendimento que 3/2 (três meios) significa 3 pedaços referentes a metades de um "certo todo" e se temos 3 metades de "um certo todo", temos "um todo" mais uma metade, temos então um e meio. Da mesma forma, a fração 4/2 (quatro meios), significa que há 4 pedaços referentes a "meios ou metades" de um "certo todo", bom, se temos 4 metades, temos na verdade, dois inteiros. O modo pelo qual percebemos que os alunos tentaram representar as frações 4/2 e 3/2 foi a partir do significado parte-todo de fração. Segundo os PCN, a partir do segundo ciclo, os estudantes são levados a se aproximarem do conceito de número racional a partir da constatação de que há situações- problema que não podem ser resolvidas apenas com números naturais. (p.57)

Sobre o modo de ensinar frações a partir da divisão e da pintura de figuras geométricas Nunes e Bryant (1997, p.191) apud Bertoni [2] dizem que: As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações. E que "No entanto, diversas partes de pesquisa demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa". Vizcarra e Sallán [16] descrevem no artigo "Modelos de medida para la enseñanza del número racional em educación primaria" os obstáculos didáticos causados pela priorização do ensino da fração como relação parte-todo na Espanha. Para eles, o significado parte-todo trata-se da "relación simbólica que se estabelece entre dos números naturales a partir de una representación gráfica". VIZCARRA e SALLÁN [16]. Vizcarra e Sallán [16] ao constatarem que a fração com significado parte- todo não se origina da necessidade humana (p. 22) como são os significados de medida, cociente e razão e tampouco é um significado gerado pela própria Matemática, pensam ser a origem do significado parte- todo, na prática educativa. Os autores descrevem três obstáculos que tem especial relevância na construção significativa das frações por parte dos estudantes espanhóis: " se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas; se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural; se obstaculiza la formación de ideas abstractas" (p. 24) Destacam também algumas ideias errôneas identificadas nos estudantes cujo ensino de fração se sustentam no significado parte-todo: "No existen las fracciones impropias. El alumno se crea la idea de que el número de

partes que se toman debe ser menor o igual que las partes del todo" (Bonotto, 1993 apud Vizcarra; Sallán [16]). As mesmas ideias errôneas identificamos nos estudantes participantes da pesquisa, o que nos leva a crer que o ensino de frações que esses estudantes receberam, provavelmente também se sustentou no significado parte- todo, embora, para o segundo ciclo dos anos iniciais, os PCN indiquem que o ensino dos números racionais deva considerar alguns de seus diferentes significados (quociente, parte- todo, razão) e para os ciclos posteriores, além dos significados indicados para serem trabalhados no segundo ciclo, acrescenta-se também o significado da fração como operador. Brasil [5]. Para superar as ideias errôneas dos estudantes da impossibilidade de representar graficamente as frações 3/2 e 4/2 não concebendo a ideia de frações impróprias realizamos no GeoGebra a representação gráfica de várias frações impróprias levando-os a perceber visualmente o sentido deste tipo de fração.

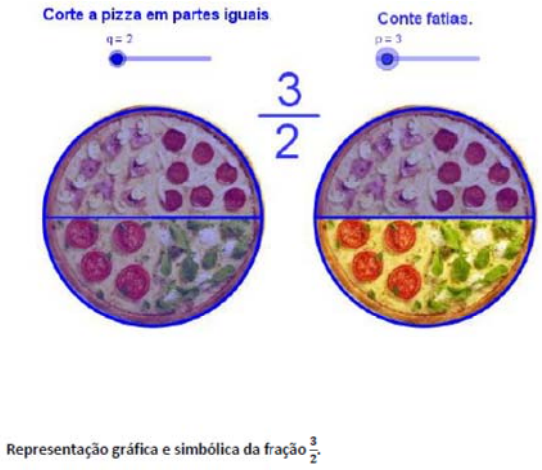


Figura 2.21: Atividades da intervenção no GeoGebra- Representação fracionária

Depois desta breve revisão por meio da conversa, dos exemplos na lousa e nas folhas de ofício, apresentamos o assunto no GeoGebra

No GeoGebra, mostramos que por meio do controle deslizante q, poderíamos cortar a pizza em diferentes quantidades e a medida que alterávamos esse quantitativo, o número abaixo do traço era modificado também, ou seja, a quantidade de partes que dividimos o inteiro é chamada de denominador e esse número é posto abaixo do traço, na representação fracionária de um número racional. Por meio do controle deslizante p, fatias iam sendo pintadas, representando graficamente a quantidade de fatias que iríamos tomando do todo, a quantidade de fatias pintadas é o numerador, esse número é posto, na representação fracionária de um número racional, acima do traço. Dessa forma, a sessão 04 foi conduzida, revisando os conteúdos por meio de exemplos e da utilização do GeoGebra. Após isso, foi pedido para que os estudantes representassem algumas frações no GeoGebra, essa atividade foi uma espécie de um "ditado" onde os estudantes deveriam ouvir e transpor o que eles ouviam para uma representação no Ge-

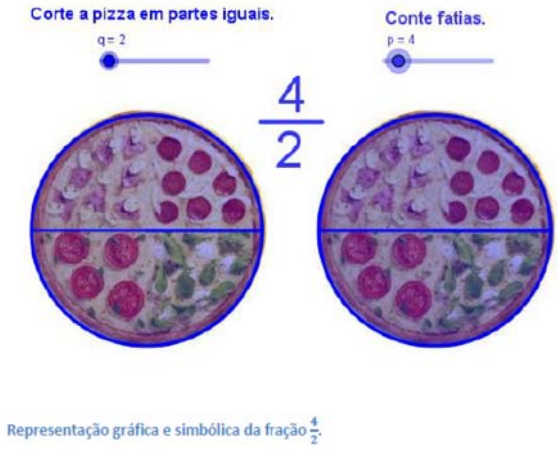


Figura 2.22: Atividade 2 da intervenção no GeoGebra- Representação fracionária

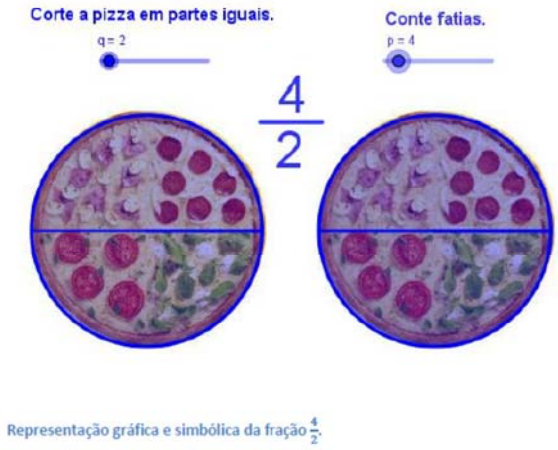


Figura 2.23: Atividade de intervenção no GeoGebra- Representação fracionária 3

oGebra, utilizando os controles deslizantes q e p. Para a realização desta atividade os estudantes precisariam ter habilidades para a definição de numerador e denomindador, saber ler frações, pois quando falássemos por exemplo, 4/8 (quatro oitavos) eles teriam que no GeoGebra deslizar o pequeno círculo do controle deslizante q para dividir a pizza em 8 partes e deslizar o controle deslizante p para pintar 4 partes desta pizza.

Sessão 05- Intervenção GeoGebra (subtração de frações)

Iniciamos a sessão perguntando quem gostava de bolo de chocolate, todos disseram que sim e ficaram muito entusiasmados com o exemplo. Lançamos então um problema fictício: A mãe de Carlos comprou um bolo de chocolate e o dividiu em 4 (quatro) partes iguais. Ela deu a ele

3/4 do bolo para que ele levasse para seus filhos. Chegando em casa, ele recebeu a visita de alguns amigos, ele os convidou para lanchar e de tão gostoso que estava o bolo, eles acabaram comendo 2 das 3 partes que a mãe dele havia lhe presenteado. Quanto de bolo ainda restou para Carlos? Para representar simbolicamente este problema utilizamos a seguinte notação:
3/4 - 1/2 =
Mostramos aos alunos a ideia dessa notação a partir de folhas de papel ofício. Para isso, ilustramos as situações da divisão do bolo, da seguinte forma: Fomos conversando com os estudantes até encontrarmos a resposta. A primeira folha de ofício estava relacionada ao bolo inteiro, portanto, dividida em 4 partes iguais. Na segunda folha de ofício, pintamos as três partes que foram tomadas do todo, dobramos cada linha divisória para que os alunos pudessem visualizar as transformações, sendo que a primeira transformação, refeia-se à fração do bolo que Carlos ganhou da mãe. A segunda transformação refere-se à fração do bolo que sobrou, após o lanche do Carlos com seus amigos. Então, explicamos como chegamos ao algoritmo: 3/4 - 2/4 = 1/4. Pedimos que eles raciocinassem conosco, tendo como apoio, a representação gráfica das frações expressas em folhas de ofício. Se Carlos tinha 3/4 de bolo e comeu junto aos seus amigos 2/4 (duas partes de quatro), pedimos que eles observassem que as duas partes do bolo que foi comida por Carlos e amigos, refere- se exatamente a metade do bolo (o que foi dividido em 4 partes) e que portanto poderíamos utilizar a representação simbólica: 3/4 - 1/2 = para fazermos a subtração. Então perguntamos aos estudantes a resposta dessa subtração, mostrando as transformações na folha de ofício, eles responderam corretamente: 1/4. A percepção dessas transformações graficamente faz muito mais sentido aos estudantes que o simples ensino dos "algoritmos" da subtração de frações. Não foi difícil, após os estudantes visualizarem essas transformações, responderem que: 3/4 - 1/2 = 1/4

Trabalhar fração de forma concreta com os estudantes, oportunizando que eles manuseiem, comparem as grandezas envolvidas no problema matemático, contribui para que eles desenvolvam o cálculo mental de números racionais na forma fracionária. Após isso, apresentamos a atividade de subtração no GeoGebra. Ditamos algumas contas para que eles realizassem com o apoio do aplicativo, explicamos que a primeira fração era modificada por meio dos controles deslizantes h (numerador) e g (denominador) e que a segunda fração era modificada pelos controles deslizantes i (numerador) e j (denominador) e que para que o GeoGebra calculasse era só clicar no quadrinho onde indicava "para subtrair marque aqui". Fomos por parte, pedimos que eles observassem a relação entre a fração representada simbolicamente e sua representação gráfica, para que eles compreendessem quanto representava o "minuendo" e quanto representava o "subtraendo", poi é muito importante que os estudantes atribuam sentido aos cálculos que estão realizando e que possam relacionar as frações dos problemas matemáticos à exemplos reais.

Após pedir que os estudantes clicassem no lugar indicado para que o GeoGebra calculasse a subtração entre as frações, foi solicitado que eles explicassem qual a lógica utilizada pelo softaware na realização deste cálculo. Para a compreensão desta lógica,julgamos necessário auxiliarmos os estudantes a contruírem esse entendimento revisitando o passo a passo traçado

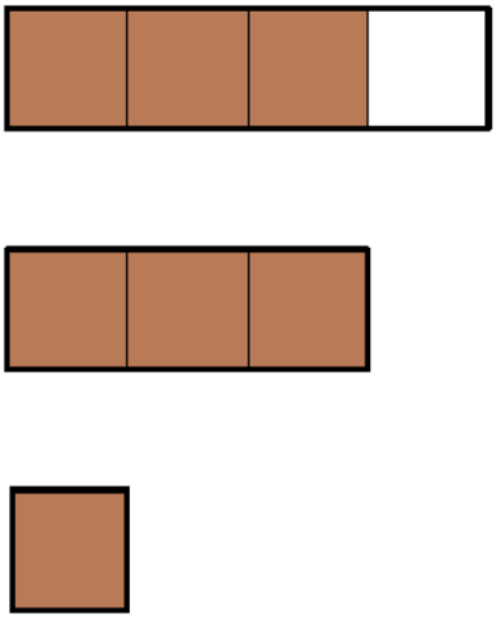


Figura 2.24: Atividade de intervenção- Subtração de frações

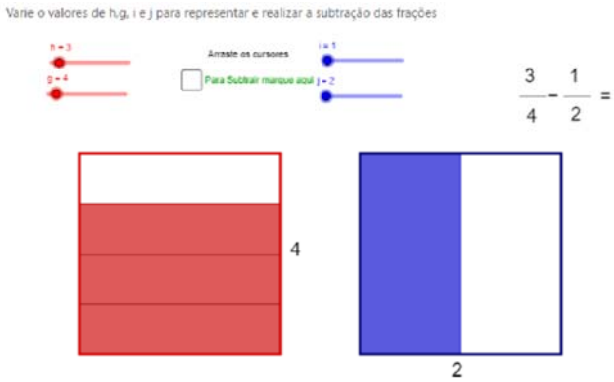


Figura 2.25: Atividade de intervenção no GeoGebra- Subtração de frações

pelo GeoGebra até a obtenção da resposta correta da subtração estre as frações. Primeiro ponto, as frações 3/4 e 1/2 possuem denominadores diferentes, isso significa que os "pedaços" dessas frações são de tamanhos diferentes. Para continuar com a realização deste cálculo, é necessário que os "pedaços" tanto os da fração que ocupa o lugar de ´´minuendo" quanto os da fração que ocupa o lugar do subtraendo estejam do mesmo tamanho. O GeoGebra consegue isso, por meio da multiplicação dos denominadores que são 4 e 2. Multiplicando os denominadores 4 e 2 obtemos a resposta "8": 4 x 2 = 8. Agora, ambas as frações estão com a mesma quantidade de partes e todas as partes ou pedaços são do mesmo tamanho. Na fração 3/4 podemos verificar

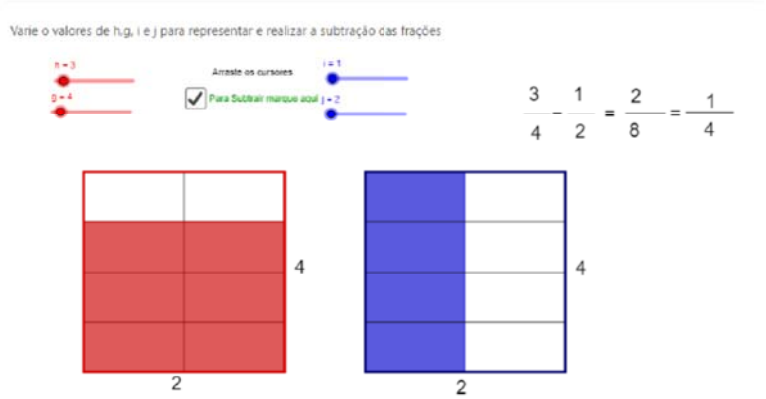


Figura 2.26: Atividade de intervenção no GeoGebra- Subtração de frações (resolução)

que as 3 partes de 4 agora equivalem a 6 partes de 8. E na fração 1/2, 1 parte de 2, agora equivale a 4 partes de 8. Como o denominador é o mesmo, basta subtrair a quantidade de retângulos vermelhos, pela quantidade de retângulos azuis que ficam: 6 retângulos vermelhos - 4 retângulos azuis = 2 retângulos, ou seja, 6/8 - 4/8 = 2/8 conforme vemos no GeoGebra e que simplificando fica 1/4.

Com os exemplos dados, os estudantes perceberam que não precisam calcular o Mínimo Múltiplo Comum para realizar subtração de fração com denominadores diferentes.

Sessão 06- Teste 02

O teste 02 foi realizado na última sessão (sessão 06), com ele queríamos perceber o quanto os alunos evoluíram após a intervenção com o GeoGebra. O questionário utilizado no teste 2 foi elaborado a partir do mesmo banco de questões utilizado para a elaboração do teste 01, ou seja, ambos os testes tiveram o mesmo grau de dificuldade. Como nos dois testes as questões eram sorteadas de um banco de questões, cada estudante parecia fazer um teste diferente do teste dos outros colegas, com isso, diminuímos a possibilidade de ´´cola" entre os estudantes, garantindo resultados mais próximos da realidade, mais fidedignos. Um detalhe importante é que mesmo que fosse sorteada a mesma questão, as alternativas eram embaralhadas a cada acesso.

2.4 Análise dos resultados- Testes 01 e 02: questões de 1 a 10

2.4.1 Questão 01- Representação fracionária

O assunto tratado na questão 01 foi representação fracionária, para esta categoria foram elaboradas 9 questões, que eram sorteadas aleatoriamente cada vez que o estudante acessasse o teste. As nove questões referentes ao assunto representação fracionária, foram elaboradas a

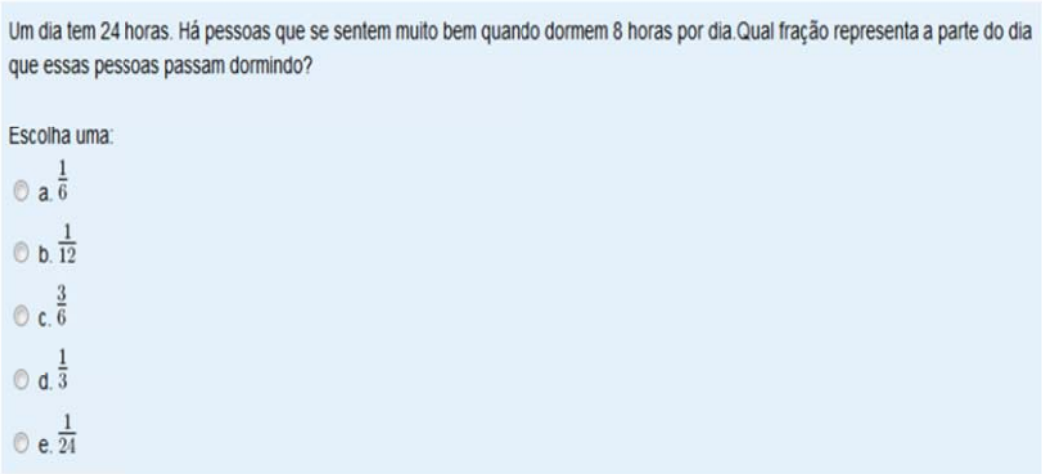
partir do significado parte- todo de fração, como indica os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Neste ciclo (segundo ciclo), são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal. BRASIL [5]. (meu destaque)

Segundo os PCN, ensinar fração com o significado parte- todo, é a forma mais comum de explorar esse conceito. BRASIL [5].

> A relação parte- todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes. BRASIL [5].

Tanto no teste 01, quanto no teste 02, foram utilizadas as mesmas nove questões, portanto, o teste 01 e o teste 02 tiveram o mesmo grau de dificuldade. Observem alguns exemplos de questão 01 dos testes 01 e 02 nas Figuras 2.27 e 2.28:


Um dia tem 24 horas. Há pessoas que se sentem muito bem quando dormem 8 horas por dia.Qual fração representa a parte do dia que essas pessoas passam dormindo?

Escolha uma:

a. $\frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{12}$

c. $\frac{3}{6}$

d. $\frac{1}{3}$

e. $\frac{1}{24}$

Figura 2.27: Questão 01 do teste 01- representação fracionária

Resultado do teste 01

Sobre a questão 1 do teste 1 houve 90 acertos e 29 erros. Esperávamos que todos acertassem a questão 1, pois os estudantes do 6º ano já deveriam ter consolidado o assunto representação fracionária, uma vez que esse conteúdo é iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental, composto pelas 3ª e 4ª séries, conforme Brasil [5], que equivale respectivamente às atuais turmas de 4º e 5º ano, onde os estudantes, se não estão em distorção idade/ano, possuem respectivamente 9 e 10 anos. Além disso, como dissemos no início, exploramos nas questões sobre

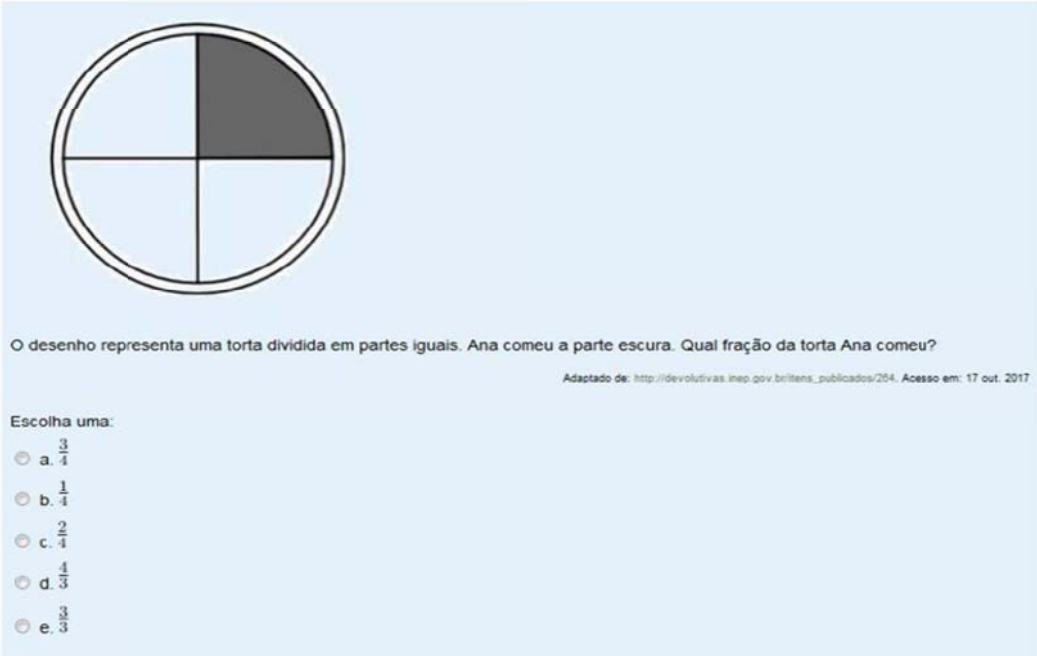


Figura 2.28: Questão 01 do teste 02- representação fracionária

representação fracionária apenas o significado parte-todo. Tomando por exemplo uma das 9 (nove) questões da categoria Representação fracionária, observemos a Figura 2.28, e considerando que esta atividade requer praticamente as mesmas habilidades que uma tarefa exemplificada por Vizcarra e Sallán [16]podemos afirmar que segundo esses autores, esta atividade exige que o estudante faça transferências entre representações gráficas e representações simbólicas e que para resolver esse tipo de tarefa o estudante deve reconhecer na representação gráfica os aspectos que representam o "todo" e os aspectos que representam "partes do todo". A representação simbólica ocorre com apoio em uma dupla contagem: conta-se as partes em que o todo foi dividido e expressa esse número embaixo de um traço, depois conta-se o número que foram tomados do todo, que está expresso por meio da pintura, e escreve esse número acima do traço. Sobre a tarefa exemplificada por Vizcarra e Sallán [16] onde, dado um retângulo dividido em 9 partes equivalentes, os estudantes deverão expressar com uma fração a parte pintada da figura, que nessa tarefa, são 4 partes, os autores descrevem o seguinte modo de proceder para a sua resolução:

> 1. Interpretar en la representación gráfica, aquellos aspectos que representan el "todo" y los que representam las partes destacadas. 2. Realizar um doble recuento: el de las partes iguales que forman el "todo" y el de las partes destacadas. 3. Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos: colocar debajo de uma raya el resultado de contar el "todo", y escribir, encima de la raya, el resultado de contar las partes destacadas.

Outra modalidade de questões sobre o assunto representação fracionária consistiu na divisão

de coleções quantificáveis cujos resultados requereram representação fracionária. Na questão 1 , do teste 01 o todo não está representado por uma figura geométrica, mas, por um número natural, que necessita ser dividido em partes iguais, como se fosse uma figura geométrica, a resposta precisa ser dada a partir de uma representação fracionária, portanto, nesta questão prevalece o modelo parte- todo.

Resultado do teste 02

Após a intervenção tendo como recurso protagonista o software GeoGebra, os estudantes alcançaram 107 acertos e 11 erros. Mediante os resultados do teste 01 e do teste 02 pudemos verificar que houve aumento no número dos estudantes que acertaram a questão.

2.4.2 Questão 02- Representação fracionária

O assunto tratado na questão 02 foi representação fracionária, observemos na Figura 2.27 mais um exemplo de questão sobre representação fracionária que compôs os testes 01 e 02. Esta questão alude aos números racionais fracionários com significado parte- todo, pois solicita do estudante que pense as 24 horas como ´´o todo"e as oito horas, como parte desse todo. Embora essa questão relacione o conceito de representação fracionária ao significado "parte- todo", ela não não é tão "óbvia" aos estudantes como àquelas que priorizam a transformação das representações gráficas, expressas em pizzas ou formas geométricas em transformações simbólicas, onde os estudantes devem identificar a partir do ´´desenho" àqueles aspectos que representam o "todo" e os aspectos que representam as partes consideradas deste "todo" e assim representar essa dupla contagem por meio de três notações a saber: dois números naturais e um traço entre os mesmos. No caso desta questão, o estudante precisaria mobilizar outras habilidades que indicam conceitos mais aprofundados de representação fracionária. Ele poderia resolver o problema aplicando o modelo das figuras geométricas, esse modelo é apontado por Bertoni [2] como o mais utilizado entre os três tradicionalmente utilizados no ensino e aprendizagem de fração:

> Tradicionalmente, três modelos têm sido adotados no ensino e aprendizagem de frações: o modelo discreto; as figuras geométricas, principalmente quadrados, retângulos e círculos; e a representação na reta numérica. Desses, ganha de longe, em frequência, o uso de figuras geométricas.

Para aplicar o modelo das figuras geométricas na resolução desta tarefa os estudantes poderiam, por exemplo, imaginar o número 24 como o "todo", e que ele pode ser representado por um retângulo, onde cada parte deste retângulo vale 8, que remete a fração do problema. O estudante deve descobrir em quantas partes equivalentes o retângulo deverá ser dividido, sabendo que cada parte deve valer 8. Dessa forma é só se perguntar: quantas vezes o oito cabe no 24?

A resposta é: o 8 cabe três vezes no 24. Após isso, bastará o estudante fazer a representação gráfica e depois a representação simbólica, que consiste em colocar em baixo de um traço o resultado de contar o "todo" e escrever em cima do traço, o resultado de contar as partes destacadas pela pintura.

Representação gráfica:

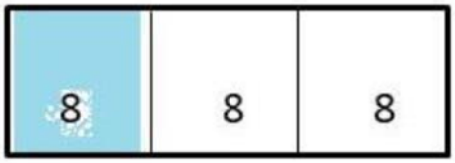


Figura 2.29: Ensino e aprendizagem de frações- Modelo: Figuras geométricas

Representação simbólica:

$$\frac{1}{8}$$

Como vimos, o "oito" é uma das partes do tipo terço. A resposta da questão é que 8 horas representa $\frac{1}{3}$ de 24 horas. Outra forma que os estudantes poderiam proceder a fim de encontrar a resposta correta da questão seria encontrando nas alternativas a fração equivalente a $\frac{8}{24}$.

Resultado do teste 01

Em relação a questão 02 do teste 01, houve 92 acertos e 26 erros.

Na intervenção resolvemos problemas do tipo: Quanto é $\frac{1}{5}$ de 20? Esta atividade se assemelha a questão da Figura 2.27, pois exige que o estudante relacione número fracionário a número natural. Primeiramente perguntamos aos estudantes qual das duas representações, indica o "inteiro" se é "$\frac{1}{5}$" ou "20". A resposta é 20. Depois perguntamos: em quantas partes temos que dividir o número 20 se quisermos saber quanto é "$\frac{1}{5}$" dele? A resposta é 5. Pedimos então que os estudantes representassem no GeoGebra a fração $\frac{1}{5}$. Após verificarmos que todos estavam com a referida fração representada em suas telas, continuamos com as reflexões. Após isso, falamos que o 20 precisaria ser dividido em 5 partes, já que 20 é o todo e o denominador 5 também representa o todo. Após eles responderem que 20: 5 = 4, pudemos escrever com pincel, na projeção do GeoGebra na lousa, o que mostra a Figura 2.30.

A questão pede aos estudantes que eles respondam quanto é $\frac{1}{5}$ de 20, uma parte pintada da fração da Figura 2.30 equivale a 4, portanto os estudantes concluíram, por meio dessas reflexões e exemplos bastante visuais, que $\frac{1}{5}$ de 20 é igual a 4.

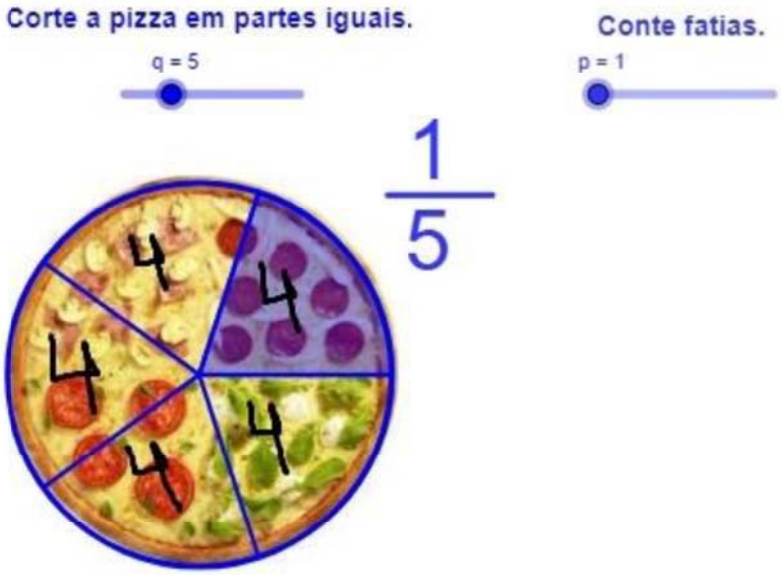


Figura 2.30: Um quinto de vinte

Resultado do teste 02

Em relação a questão 02 do teste 02 percebemos melhora nos resultados, pois houve 102 acertos e 16 erros.

2.4.3 Questão 03- Representação fracionária

Como já explicamos, as questões dos testes 01 e 02 fazem parte de um banco de questões. Para compor esse banco, foram elaboradas 09 questões sobre representação fracionária que eram sorteadas cada vez que o estudante acessava a plataforma Moodle, portanto, para não sermos repetitivos, resolvemos não apresentar exemplo de questão nesta Subseção.

Resultado do teste 01

Houve 91 acertos e 28 erros.

Resultado do teste 02

Houve 100 acertos e 17 erros.

2.4.4 Questão 04- Representação fracionária

O exemplo de questão 4, na Figura 2.31 trata de uma tarefa que relaciona fração ao significado parte- todo, ela exige que o estudante tenha procedimentos além dos que envolvem a dupla

contagem, comum nas atividades em que o estudante apenas relaciona representação simbólica a representação gráfica. Ela exige porém, que o estudante ao ler o termo "oitavos", compreenda que esse termo refere-se ao tamanho dos pedaços, em que o "todo" foi dividido, afinal, as partes de uma fração devem ser equivalentes, essa característica precisa ser reforçada com os alunos de forma maçante. Então, se a pizza foi dividida em pedaços, cuja medida relacione-se a oitavos, em relação a determinado´´inteiro", faz- se necessário que o estudante evoque o conceito de denominador, pois esse indica as partes que existem no todo. Sabendo que o todo, que neste contexto é a pizza, foi dividido em 8 partes, basta agora saber quantos pedaços de pizza, da qualidade de oitavos, Rafael comeu. A resposta a esta tarefa, está na primeira frase da questão: "Rafael comeu metade de uma pizza", se a pizza foi dividida em 8 partes e ele comeu metade e sabendo que a metade de 8 é 4, temos nossa resposta: "Rafael comeu $\frac{1}{5}$ da pizza".

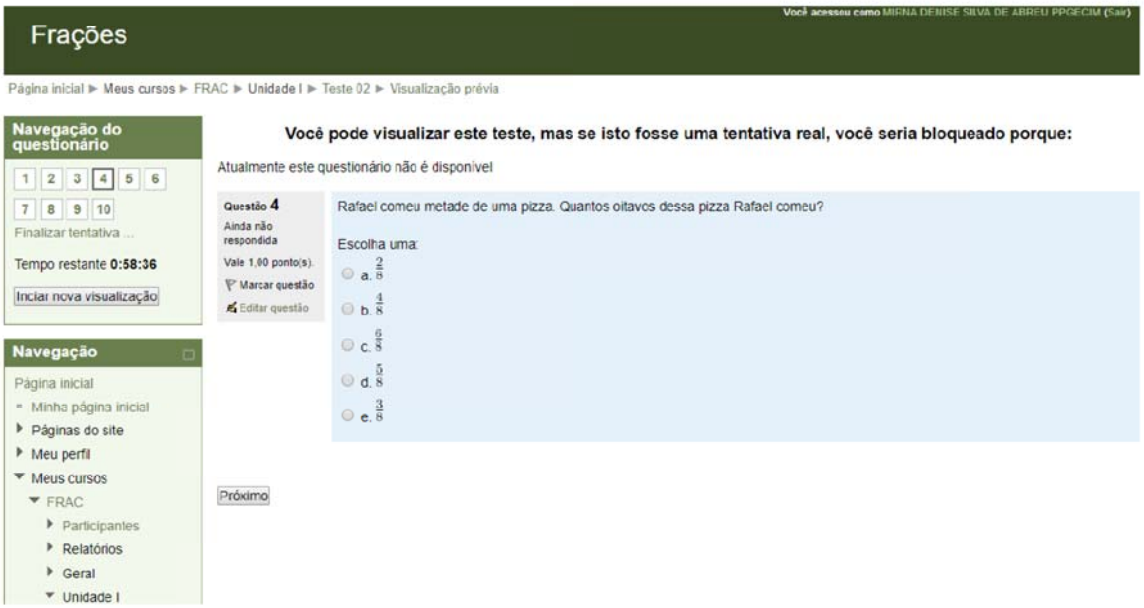


Figura 2.31: Exemplo de questão 04

Resultado do teste 01

No teste 01, em relação a questão 04, 85 alunos acertaram e 34 erraram.

Resultado do teste 02

No teste 02, 106 acertaram e 12 erraram.

2.4.5 Questão 05- Representação fracionária

A questão 05, é a última do teste cujo assunto é Representação fracionária, observe na Figura 2.32, um exemplo de questão 05 dos testes 01 e 02. Essa atividade exigiu que o estudante

relacionasse número fracionário a número natural.

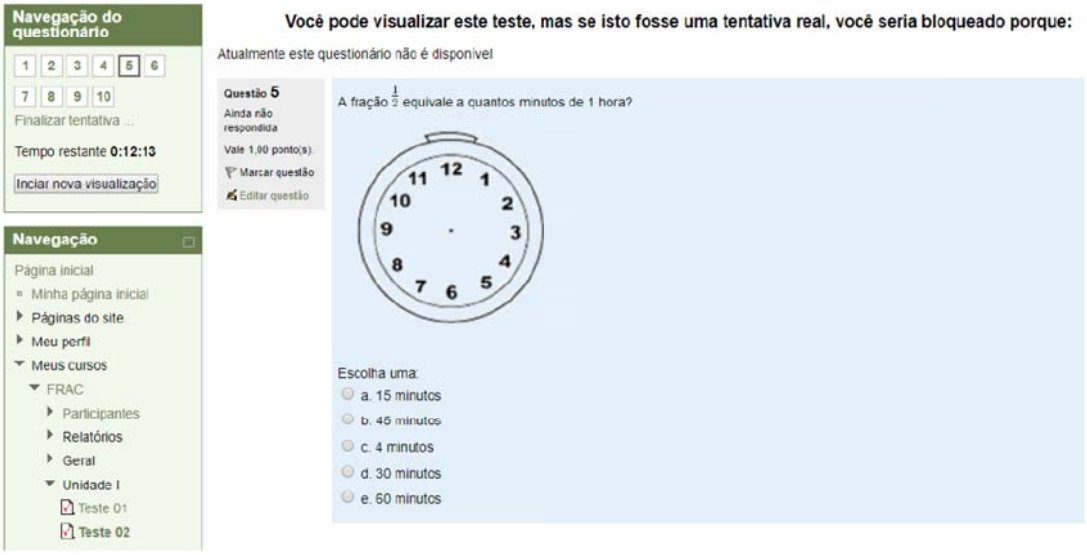


Figura 2.32: Exemplo de questão 05

Apesar desta questão abordar número racional com o significado parte- todo, ela exige outras habilidades do estudante além daquelas relacionadas a divisão de figuras geométricas em partes iguais e representação simbólica dessas divisões por meio de fração. Esta atividade exige que o estudante desenvolva alguns passos e que tenha habilidades para dar conta desses passos. Um exemplo de procedimento é que o estudante primeiramente descubra quem é o "inteiro" da questão, que neste caso é 60, pois uma hora tem 60 minutos e que depois disso ele divida 60 por 2, para isso ele precisa ter a compreensão que a fração $\frac{1}{2}$ representa metade de alguma coisa.

Resultado do teste 01

Em relação a questão 5, houve 88 acertos e 31 erros.

A questão 5, como vimos, aborda o número racional com significado parte- todo, porém requer um conjunto de habilidades, além das de relacionar representação gráfica, que na maioria das vezes se apresenta em particionamentos de figuras geométricas, pizzas, barras de chocolate, a representação simbólica, que é a fração em si. Por isso, levamos para a sessão, atividades semelhantes, em que os estudantes deveriam relacionar a ideia da fração, ou seja, o que ela representa a um "todo" que poderia ser um conjunto de elementos e não necessariamente partes equivalentes de uma superfície. Uma das 9 atividades dos testes 01 e 02 da categoria representação fracionária, ilustra o que acabamos de falar. Nela, os estudantes lidarão com o "todo" relacionado a um conjunto de elementos, como podemos ver na Figura 2.35. Transpondo a resolução desta questão para o modelo das figuras geométricas que, segundo Bertoni [2] é o mais utilizado no ensino e aprendizagem de frações, contribuímos para que os estudantes avancem no entendimento da ideia de número racional, a partir das ideais que já possuem. Não resolvemos

essa atividade, pois ela faz parte dos testes 01 e 02, mas lançamos problemas que requeriam dos estudantes, praticamente as mesmas habilidades. Um deles foi relacionado a uma caixa de chocolate, perguntamos aos estudantes o seguinte: Temos uma caixa de chocolate contendo 20 unidades, quanto é $\frac{2}{5}$ dessa quantidade?

No GeoGebra, fizemos da seguinte forma:Primeiramente perguntamos qual a fração deveríamos representar no GeoGebra, a maioria concordou que deveria ser $\frac{2}{5}$, então pedimos para que os estudantes, por meio dos controles deslizantes q e p representassem a fração no GeoGebra, como mostra a Figura 2.33.

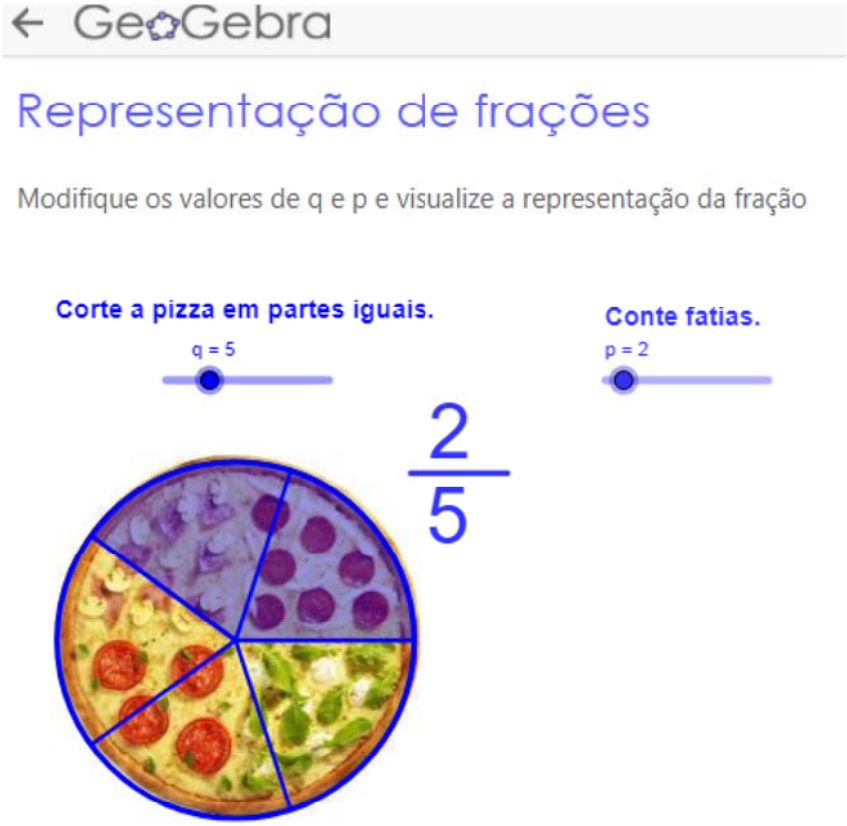


Figura 2.33: Atividade- Representação fracionária

Após isso indagamos: Onde está o "todo" desta atividade? Como esta pergunta tinha como objetivo que os estudantes, além de identificar no texto da questão que o "todo" a ser fracionado, é 20. Queríamos também que eles compreendessem, que deveríamos dividir o "20" em 5 partes, pois o denominador 5 indica que o inteiro foi dividido em cinco partes equivalentes. Perguntamos aos estudantes: Quanto é 20 : 5? A resposta é 4, portanto, transpondo esta atividade para o modelo das figuras geométricas, utilizando o GeoGebra, pusemos em cada um dos 5 particionamentos, 4 chocolates, como mostra a Figura 2.34.

Como a pergunta da questão é: "Quanto é $\frac{2}{5}$ de 20?", bastaria os estudantes contarem os chocolates das duas partes pintadas que saberiam que a resposta é 8.

Apesar de os alunos estudarem fração desde o 4º ano do Ensino Fundamental, uma boa parte

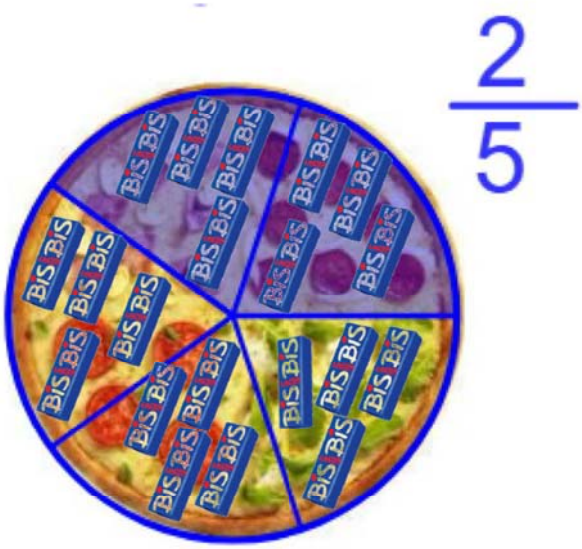


Figura 2.34: Dois quintos de 20

tem dificuldades em responder questões do tipo: " Quanto é $\frac{1}{5}$ de 20?" ou "Quanto é $\frac{1}{2}$ de 24?". É como se essa representação (fracionária), com significado parte- todo só tivesse sentido quando relacionado a figuras geométricas divididas em partes equivalentes, com algumas delas pintadas, representando as partes tomadas do todo.

Figura 2.35: Questão- representação fracionária

Resultado do teste 02

Observamos uma melhora significativa no teste 02 pois, houve 109 acertos 9 erros.

2.4.6 Questão 06- Frações equivalentes

Na questão 06, abordamos o conteúdo frações equivalentes. Segundo Brasil [7]

> A ideia mais importante sobre frações é a de "frações equivalentes". É ela que nos permite comparar, somar e subtrair frações, além de ajudar a entender como frações se relacionam a razões e proporções, ideias que aparecem em quase todas as partes da Matemática escolar.

A questão sobre fração equivalente foi elaborada no modo "múltipla escolha calculada", ou seja, elaboramos apenas um modelo de questão e a partir de uma fórmula informada na elaboração da questão, cada vez que o estudante acessasse a questão 06, ele veria o mesmo tipo de questão, porém, com números diferentes. Observemos na Figura 2.36 um exemplo de questão 06.

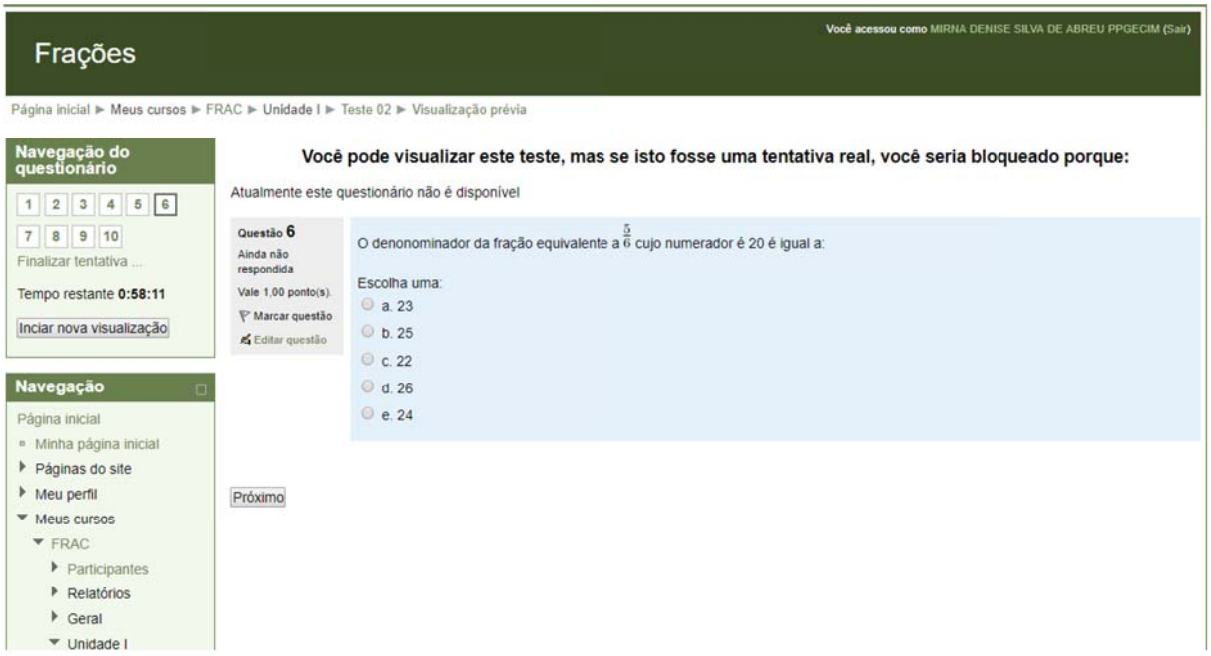


Figura 2.36: Questão- Frações equivalentes

Esta atividade requer basicamente do estudante, que ele encontre frações equivalentes a partir de uma fração dada, porém, a questão pede uma fração equivalente específica, pois indica sempre o denominador da fração equivalente que o estudante deve encontrar. Conforme o exemplo de questão 6,conforme a Figura 2.36, o estudante deverá encontrar uma fração equivalente

a $\frac{5}{6}$ cujo numerador é 20. Para resolver esta questão, os estudantes poderiam utilizar estratégias diferentes, uma dela consiste em encontrar as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$, multiplicando o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de 0 (zero) até encontrar uma fração cujo numerador é 20, dessa forma ele descobriria qual o denominador está procurando, como mostra a Figura 2.37. Nela podemos perceber que primeiro o estudante multiplicou o numerador e o denominador por 2, depois por 3 e quando multiplicou por 4, encontrou a fração equivalente a $\frac{5}{6}$, cujo numerador é 20, o denominador desta fração é 24 e essa é a solução da tarefa.

$$\frac{5\ x\ 2}{6\ x\ 2} = \frac{10}{12} \qquad \frac{5\ x\ 3}{6\ x\ 3} = \frac{15}{18} \qquad \frac{5\ x\ 4}{6\ x\ 4} = \frac{20}{24} \leftarrow$$

Figura 2.37: Frações equivalentes

Outra estratégia que o estudante poderia utilizar para resolver a questão, é realizar uma multiplicação cruzada, e verificar se os resultados dão iguais, como indica Brasil [7]:

> Para saber se duas frações são equivalentes, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda, e o denominador da primeira pelo denominador da segunda; se os resultados derem iguais elas são equivalentes, se derem diferentes, elas não são equivalentes.

Nesse sentido, ele deve multiplicar o denominador 6 pelo numerador 20 e obterá o resultado 120, depois, sabendo que para serem equivalentes, os resultados da multiplicação cruzada devem ser iguais, ele deverá descobrir qual número que multiplicado pelo numerador 5 dará 120, para isso, basta-lhe dividir 120 por 5 e encontrará o resultado: 24. Veja a Figura 2.38.

$$\frac{5}{6} \times \frac{20}{?} = \frac{120}{?}$$

Figura 2.38: Frações equivalentes/multiplicação cruzada

Resultado do teste 01

Em relação a questão 06, cujo conteúdo são frações equivalentes, houve 77 acertos e 42 erros. Esperávamos que mais estudantes acertassem as questões referentes ao assunto fração

equivalente, uma vez que, esse conteúdo deveria ter sido trabalhado, conforme os PCN, na 3 ª e 4ª séries, equivalentes as atuais turmas de 4º e 5º ano,ou seja, a partir de 9 anos de idade, as crianças começam a prender sobre frações equivalentes na escola. Para o segundo ciclo do ensino fundamental, os PCN recomendam no quadro de Conteúdos Conceituais e Procedimentais: "números naturais, sistema de numeração decimal e números racionais" que os estudantes realizem "Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas" BRASIL [5].

Na intervenção sobre frações equivalentes utilizamos uma atividade no GeoGebra, disponível em: https://www.geogebra.org/m/aVbhn2W5, como mostra a Figura 2.39. Com essa atividade pudemos mostrar na prática que, frações diferentes podem representar a mesma quantidade.

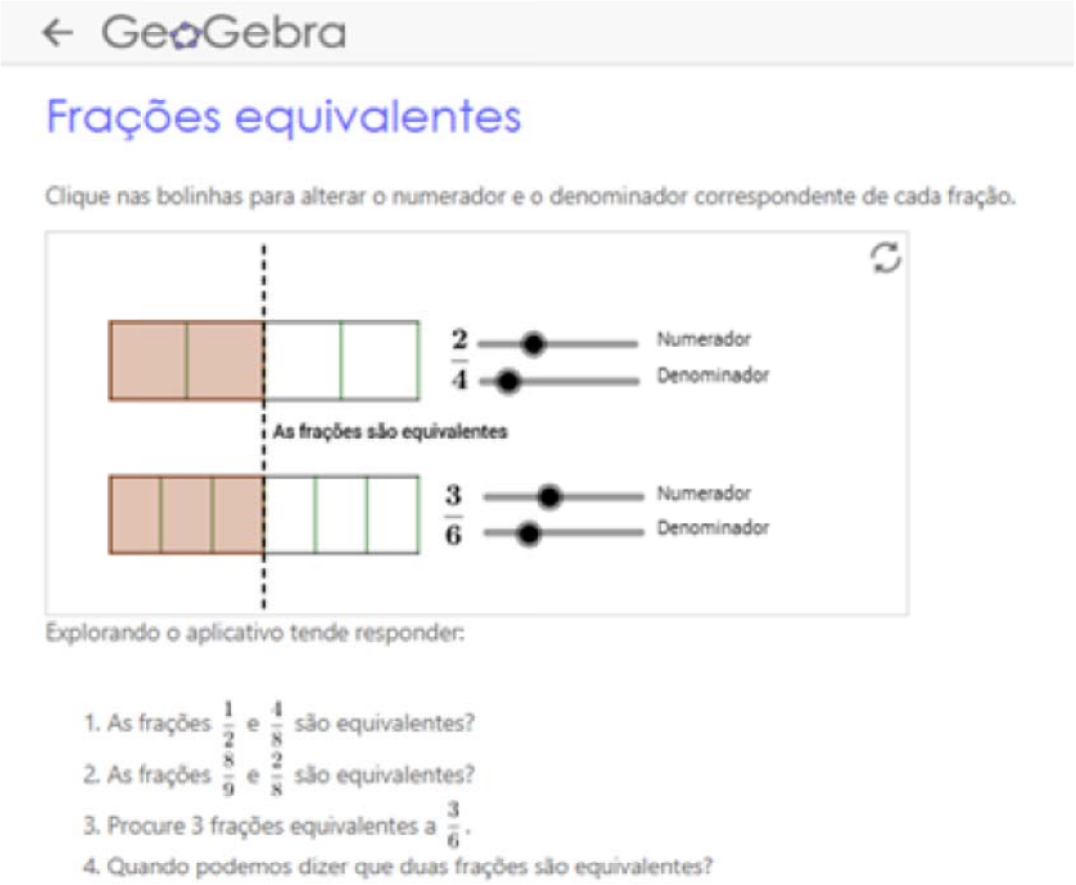


Figura 2.39: Frações equivalentes- Intervenção no GeoGebra

Esta atividade permitiu que o estudante, por meio dos controles deslizantes, alterasse o numerador e o denominador das duas frações, a de cima e a de baixo, quando ele encontrava frações equivalentes, o aplicativo o informava, por meio de uma linha tracejada e da frase "As frações são equivalentes". Outro ponto importante desta atividade é que ela permite que o es-

tudante visualize, por meio do emparelhamento das figuras geométricas, que as partes pintadas (as frações) são do mesmo tamanho (se forem equivalentes), porém, possuem representações simbólicas diferentes, isso ocorre porque uma está dividida em menos partes e a outra, em mais partes, como podemos ver na Figura 2.39. Neste exemplo, os estudantes puderam visualizar que de fato, as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são equivalentes e não apenas porque aplicaram a técnica de fazer uma "multiplicação cruzada" ou ter multiplicado ou dividido o numerador e o denominador por um mesmo número natural diferente de 0. Com isso, queremos reforçar que mais importante que conhecer técnicas para a resolução de questões matemáticas, é importante que o estudante saiba a origem destas técnicas e saibam por que elas funcionam.

Durante a intervenção, os estudantes foram incentivados a construir o conceito de "frações equivalentes", a atividade que possibilitou a ação, a transformação das frações em sua representação simbólica e gráfica possibilitou que os alunos construíssem coletivamente esse conceito, sem dificuldades. Além disso, também foi explicado aos estudantes que eles poderiam verificar a equivalência pela "multiplicação em cruz", como mostra a Figura 2.40

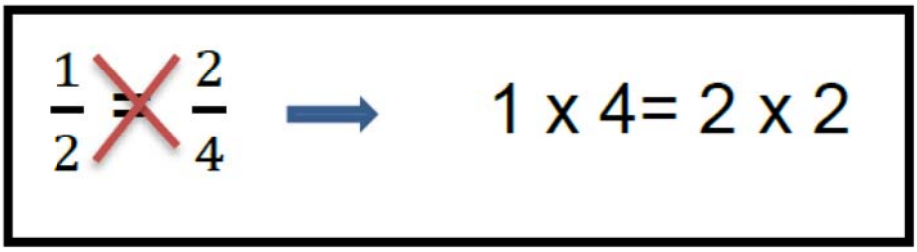


Figura 2.40: Frações equivalentes- multiplicação em cruz

Resultado do teste 02

No teste 02, após a intervenção houve 85 erros e 33 acertos, portanto, houve melhoria nos resultados. Pois no teste 01 o percentual de acerto foi de 42,8% e no teste 02 o percentual de acerto foi 61,2%.

2.4.7 Questão 07- Adição de frações

O assunto tratado na questão 7 (sete) foi adição de frações, essa questão foi elaborada na plataforma Moodle no modo "múltipla escolha calculada", pois a partir de uma fórmula, cada vez que um estudante acessasse esta questão, veria o mesmo enunciado, mas as frações a serem somadas, eram diferentes.

Resultado do teste 01

Em relação ao assunto soma de frações, os estudantes apresentaram, no teste 1, 57 acertos e 61 erros, ou seja, 52, 5% dos estudantes erraram essa questão. Verificamos os PCN de Mate-

mática - 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental (séries iniciais do Ensino Fundamental) e vimos que o documento não indica que seja trabalhado nessa etapa do ensino, o conteúdo adição de frações, no quadro dos conteúdos referentes às "Operações com números naturais e racionais", o documento menciona que seja trabalhado adição e subtração de números decimais: "Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais." BRASIL [5]. Analisando os conteúdos propostos nos PCN para o terceiro ciclo (5ª e 6ª série), que atualmente diz respeito às turmas de 6º e 7º ano, vimos o que nos faz acreditar, que é a partir do 6º ano, que o professor começa a trabalhar cálculo de frações, pois enquanto os PCN para o 2º ciclo enfatizam que o cálculo com números racionais devem ser ensinados apenas na forma decimal, a orientação de trabalho apontada para o terceiro ciclo não destaca se o cálculo de números racionais serão na forma fracionária ou decimal, mas encontramos o seguinte texto no quadro de conteúdos: "Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações- com números, inteiros e racionais-, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados". BRASIL [6]. Mais da metade dos estudantes erraram a questão relativa ao conteúdo adição de frações, Como vimos acima, 52, 5%. A questão 07, conforme mostra a Figura 2.41, é uma atividade que requer dos estudantes a habilidade de realizar a soma de frações com denominadores diferentes. O cálculo com números fracionários possuem algumas caracteríticas diferentes dos cálculos com números naturais, vejamos o que diz Bertoni [2]

> Já as representações fracionárias aparecem raramente em situações culturais, são insolitamente constituídas de dois números naturais e um traço separando- os; os cálculos são tão diferentes que nem parecem tratar-se de operações com os mesmos significados daquelas estre números naturais.

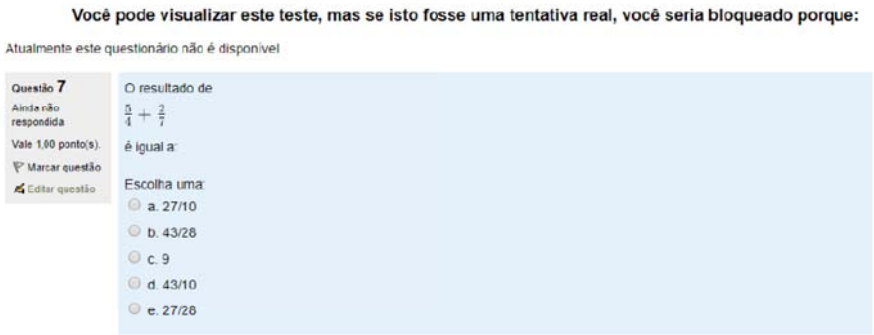


Figura 2.41: Questão 7- Adição de frações

O resultado do teste nos leva a acreditar que mais da metade dos estudantes participantes da pesquisa não conseguiram realizar a soma das frações por não compreenderem a ideia desta

soma, talvez, muitos desses estudantes ainda não construíram, de fato, a ideia de número racional fracionário. Muitas escolas, investem muito tempo ensinando técnicas e algoritmos aos estudantes, não que isso seja errado, mas se os estudantes não compreenderem o porquê destas técnicas, e o porquê desses algoritmos, e se esses não fizerem sentido para os estudantes, ambos cairão no esquecimento. A gênese da dificuldade em realizar adição de frações, pode residir na forma como os números racionais são trabalhados na escola desde a sua apresentação. Segundo Bertoni [2] o modelo das figuras geométricas é o mais adotado no ensino e aprendizagem de frações. Esse modelo, que ao nosso ver, é o mesmo que Vizcarra e Sallán [16] denominam como significado "parte- todo" do número racional. Eles descrevem os obstáculos didáticos provocados por priorizar o ensino de fração como relação parte- todo na Espanha. Dentre os três obstáculos apontados pelos autores, queremos destacar o segundo, pois se relaciona com o que estamos tratando: operação com frações: "Se obstaculiza la separación coceptual del número racional y del número natural"(p. 24) Para os autores, o ensino de fração pautado com exclusividade no significado parte- todo não faz com que o estudante compreenda o conceito de número racional e nem veja a necessidade de se apropriarem de uma nova estrutura numérica, pois a tarefa de relacionar representação gráfica a representações simbólicas só reforça o sentido do número natural, observe na Figura 2.42 um exemplo de atividade que ilustra o que acabamos de falar. Nesta atividade, para que o estudante possa representar com uma fração a representação gráfica, basta ele realizar uma dupla contagem, primeiro ele conta as partes iguais que formam o todo, o número delas será o denominador da fração, depois ele conta as partes pintadas, que será o numerador da fração. Como podemos ver, não há nesta tarefa a necessidade de se introduzir nenhuma estrutura numérica diferente da estrutura dos números naturais. Se o estudante concebe fração como um número natural, é evidente que irá aplicar no cálculo de frações, as mesmas técnicas utilizadas para realizar o cálculo dos números naturais. Vejamos uma das ideias errôneas dos estudantes quando aprendem frações exclusivamente com o significado "parte-todo:

> Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales. Los alumnos extienden los significados y técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creecias, los entes numéricos no cambian de sentido: el orden de los números racionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc.

Para a intervenção sobre o conteúdo da questão 7, que tratou da adição de frações, utilizamos uma atividade no GeoGebra, como mostra a Figura 2.43

Nesta atividade, ao alterar os valores de h, g, i e j os estudantes mudaram numeradores e denominadores das duas frações da atividade para que fosse realizada a soma. Com essa possibilidade, explorei vários problemas envolvendo adição de frações, onde o GeoGebra funcionou

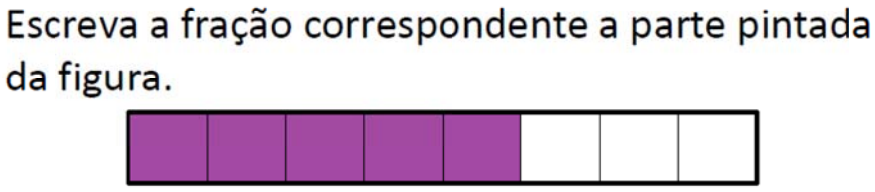


Figura 2.42: Exemplo de questão- significado parte- todo

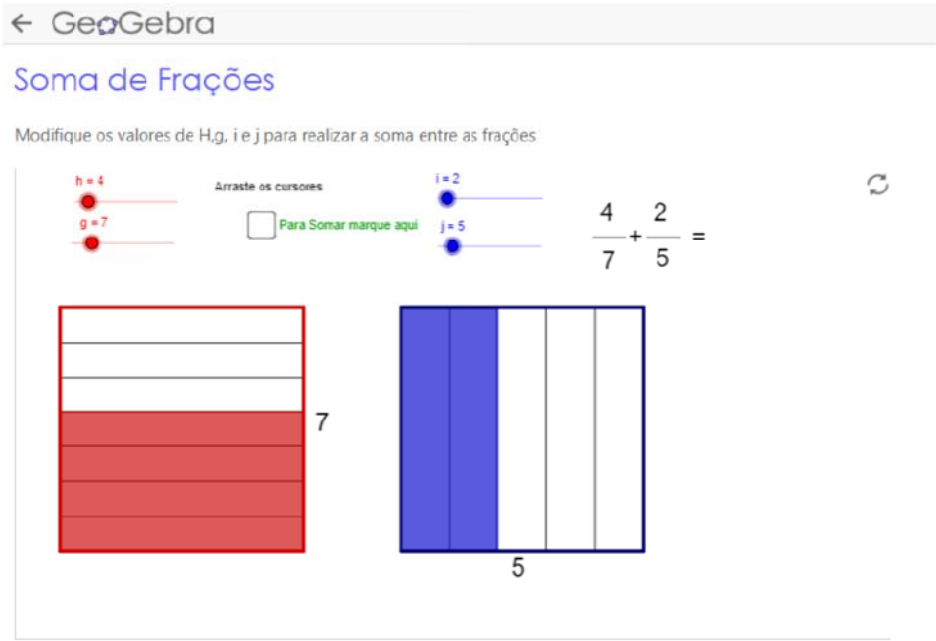


Figura 2.43: Soma de frações no GeoGebra

como uma calculadora para que os estudantes verificassem os resultados. Por meio desta atividade, pude mostrar também, que não precisamos calcular o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) para resolvermos adição de frações com denominadores diferentes, expliquei passo a passo, como o GeoGebra realiza essa operação e obtém resultados corretos.

Passo a passo de como o GeoGebra realiza a soma de frações

Observe a atividade no GeoGebra na Figura 2.43. Como podemos observar, o GeoGebra apresenta as frações que serão somadas, simbólica e graficamente, a partir desta primeira observação, os estudantes foram levados a explorar minúcias desta atividade, a saber:

1 Trata-se de adição de fração com denominadores diferentes, o que na prática, por meio da representação gráfica, os estudantes puderam perceber que trata-se da soma de partes de coisas, porém de tamanhos diferentes, ou seja,"$\frac{4}{7}$" é menor que "$\frac{2}{5}$". Os denominadores diferentes indicam que as frações têm medidas diferentes, por isso, não podemos realizar a soma delas. É importante que os estudantes percebam que em frações, quanto maior o denominador, menor é

a fração. Para isso, demos o seguinte exemplo, para quem gosta muito de chocolate, essa pessoa ganha mais, recebendo um pedaço de chocolate de uma barra que foi dividida em duas partes, ou de uma barra que foi dividida em quatro partes? Após esse exemplo, sem utilizar a representação simbólica da fração, mas apenas com apoio em duas folhas de ofício, uma dividida em 2 partes e outra dividida em 4 e da linguagem oral, os estudantes não demonstraram dúvidas para responder que ganha mais quem recebe 1 pedaço de dois do que 1 pedaço de 4. Depois disso, perguntamos com apoio na representação simbólica das frações, qual a maior fração: $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, os estudantes não responderam com a mesma prontidão de quando não utilizamos a representação simbólica,mas apenas a representação gráfica. Em um modo geral, as turmas entenderam a ideia que queríamos que ficasse clara a priori: frações com denominadores diferentes indicam "pedaços" de tamanhos diferentes.

2 A próxima ideia que consideramos importante para que o estudante realize soma de frações é que o correto é que somemos coisas do mesmo "tipo", ou seja, mesma unidade de medida. Quando falamos em ´´quintos", ´´sétimos", estamos falando de medidas. O fascículo IV do Próletramento traz um exemplo que auxilia o estudante na compreensão desta ideia:

> [...] se alguém disser que quer saber o resultado da conta 2 metros + 50 centímetros, vamos somar o 2 com o 50? Claro que não!Temos duas alternativas principais A primeira é transformar o 2 metros em centímetros (2m= 200cm) e depois somar os 200cm com os outros 50cm, dando o resultado 250cm. Outra possibilidade é transformar 50cm em metros (50cm= 0,5m) e depois somar o 0,5m com os outros 2m, dando o resultado 2,5m [...]. BRASIL [7].

Com esse exemplo, queríamos que os estudantes compreendessem que assim como na soma de m + cm foi necessário fazer transformação, pois se trata de unidades de medida diferentes, com frações é a mesma coisa. Então, sabendo que é mais adequado somar coisas do mesmo "tipo", ou mesma unidade de medida, o GeoGebra, ao clicarmos no botão "Para somar marque aqui" divide as duas frações em pedaços do mesmo tamanho, multiplicando os denominadores destas frações, como mostra a Figura 2.44.

Quando o GeoGebra multiplica os denominadores das frações, aponta um caminho para a realização da adição de frações com denominadores diferentes sem a necessidade da utilização da tradicional técnica de calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre os denominadores. Segundo a pesquisa expressa no Fascículo IV de Educação Matemática- Frações e números fracionários,"[...] noções de mínimo múltiplo comum e de máximo divisor comum interrompiam o caminho da construção da ideia de fração pela criança, e, além do mais, não eram imprescindíveis aos cálculos". BERTONI [1]. Como podemos ver na Figura 2.44, para que o estudante encontre o numerador da fração (resultado da soma), basta que ele conte todas as partes pintadas das duas frações; há 34 partes pintadas, então o resultado da soma das frações $\frac{4}{7}$ e $\frac{2}{5}$ é igual a $\frac{34}{35}$. Explicamos aos estudantes que quando eles precisarem somar frações com denominadores diferentes e não tiverem possibilidade de acessar o GeoGebra, eles poderão utilizar a ideia de

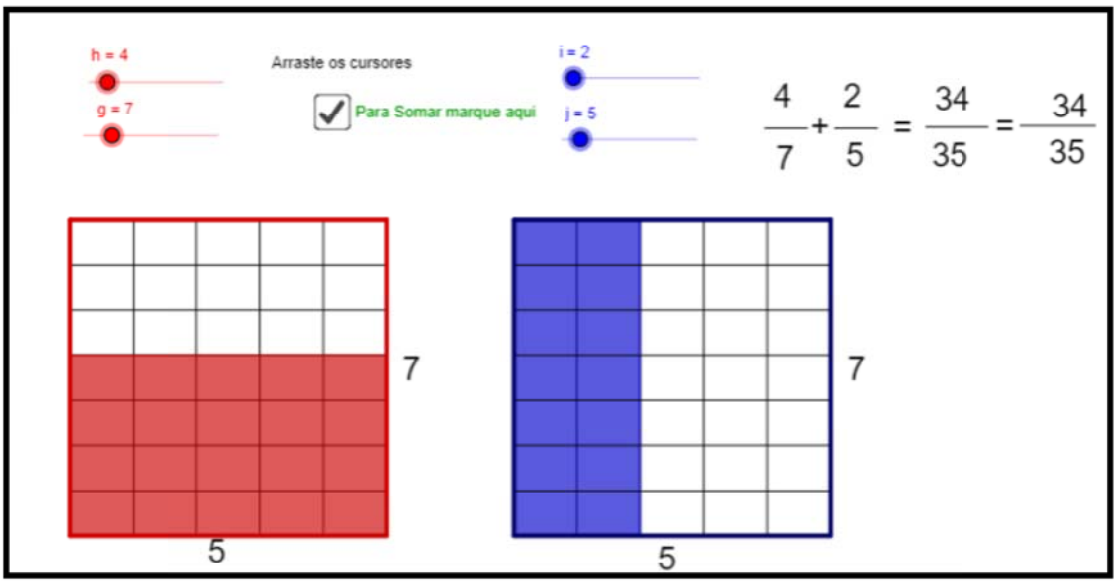


Figura 2.44: Soma de frações no GeoGebra- multiplicação dos denominadores

multiplicar os denominadores diferentes das frações e depois utilizar os passos que geralmente são ensinados para encontrar as "novas" frações a serem somadas, encontrando os numeradores das novas frações dividindo 35 pelo denominador da primeira fração e multiplicando o resultado pelo seu numerador e depois repetindo o mesmo procedimento na segunda fração. Fazendo uso ainda do mesmo exemplo utilizado no GeoGebra, as novas frações são $\frac{20}{35}$ e $\frac{14}{35}$ que somadas dá $\frac{34}{35}$, o mesmo resultado visto no GeoGebra.

Resultado do teste 02

Após a intervenção, percebemos que houve melhora nos resultados, pois no teste 01, houve 57 acertos e 63 erros e no teste 02, 81 acertos e 37 erros. Atribuímos esta melhora ao fato de os estudantes terem amadurecido suas concepções de soma de fração, por meio de/a: solução de problemas que tinham a ver com sua realidade; exemplos concretos que comprovam a necessidade das duas frações de denominadores serem transformadas em duas frações com o mesmo denominador; comprovação de que não precisamos calcular o MMC dos denominadores destas frações; e compreensão do sentido da técnica de somar frações com denominadores diferentes.

Caraça [3], ao falar de uma fórmula para a resolução da soma de frações tanto com denominadores iguais, quanto com denominadores diferentes, nos lembra que essa definição (A adição de frações), é dada segundo o primeiro critério para o entendimento das propriedades do campo racional, que a origem concreta dos números racionais, isto é, o seu significado como expressão numérica está relacionada a de medição de segmentos. (p.38- 41) Observe o procedimento para a adição de frações com denominadores diferentes expresso em Caraça [3]:

> [...] Se os dois números não têm o mesmo denominador podem reduzir-se previamente

ao mesmo denominador [...]; tem-se então, dados que

$$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q},$$

$$r = \frac{m \cdot q}{n \cdot q}, s = \frac{n \cdot p}{n \cdot q},$$

donde

$$r + s = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q},$$

logo

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}.$$

Lembramos que mais importante que ensinar notações, técnicas e algoritmos aos estudantes é garantir que os mesmos, construam ideias abstratas sobre número racional que vão além do procedimento. Segundo Vizcarra e Sallán [16], muitos estudantes reduzem o tema "soma de fração", por exemplo, ao algoritmo que proporciona o resultado desta soma. Este modelo de ensino, que dá mais ênfase a técnica que a construção do conceito, gera problemas do tipo: "solo el 33% de los alumnos de 6º curso de Educación Primaria (12 años) responde corretamente a la pregunta ¿qué tanto por ciento representan 2/5? (INCE, 2002, p.2 apud Vizcarra e Sallán [16]).

2.4.8 Questão 08- Subtração de frações

A questão 08 foi referente a subtração de frações. Observe um exemplo dessa questão na Figura 2.45.

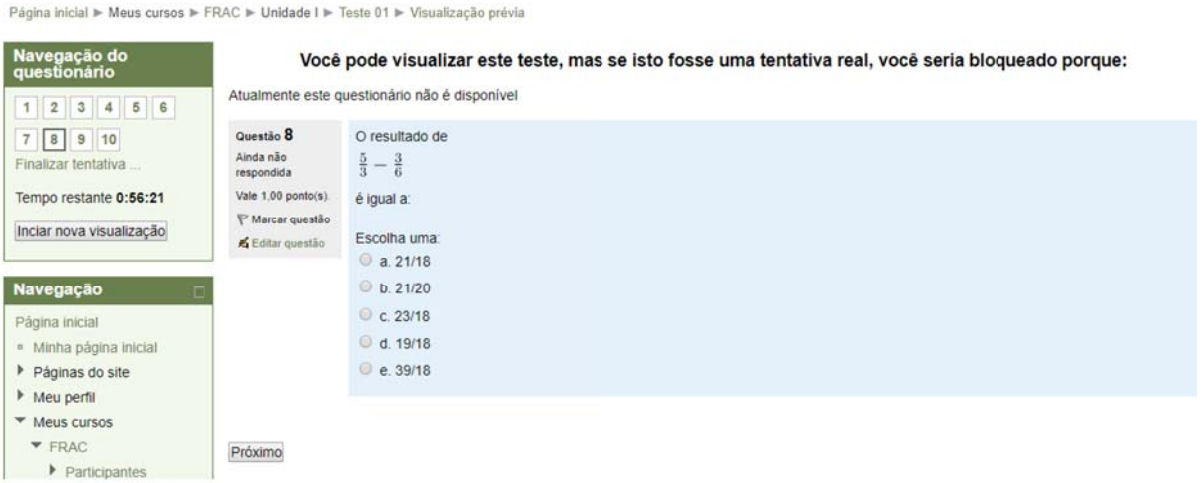


Figura 2.45: Subtração de frações- Questão 08

Tendo como base os conteúdos indicados nos PCN, acreditamos que esse conteúdo não foi trabalhado nos anos anteriores ao 6º ano. Porém, esse conteúdo foi trabalhado na série em que

se encontravam os estudantes, quando ocorreu a pesquisa, talvez esse seja um dos motivos de os estudantes terem demonstrado tanta dificuldade em resolver esta questão.

Resultado do teste 01

No teste 01, os estudantes apresentaram 35 acertos e 81 erros, em termos percentuais, 70,33% dos estudantes erraram a questão 08 sobre subtração de frações, foi a questão que os estudantes mais erraram. Um ponto importante, refere-se aos resultados de uma pesquisa expostos por Bertoni [1] que fala sobre a grande diferença entre os algoritmos operatórios para a resolução de operações com frações e os algoritmos para operações com números naturais:

> a constatação de que os algoritmos operatórios desenvolvidos na escola eram de compreensão quase impossível para as crianças, e afastavam-se muito dos algoritmos para as mesmas operações nos números naturais. Comparem-se, por exemplo, os algoritmos tradicionais da soma e da divisão de frações, com os algoritmos da soma e da divisão entre os números naturais. São tão distintos que as crianças não chegam a identificar que os novos algoritmos possam estar efetivamente ligados a uma situação real de soma ou de divisão. (p. 4)

É possível que o outro problema resida no fato de que muitos estudantes aprenderam a somar e a subtrair frações por meio de algoritmos memorizados, tendo que calcular o MMC quando os denominadores forem diferentes. Muitas vezes esses estudantes não sabem por que precisam encontrar o mínimo múltiplo comum dos denominadores. BERTONI [1].

Para a intervenção referente ao conteúdo Subtração de frações, utilizamos como recurso, uma atividade no GeoGebra como mostra a Figura 2.46.

Para realizar a subtração no GeoGebra, os estudantes repetiram os mesmos procedimentos realizados a soma. Bastou variar os valores de g, h, i e j até encontrarem as frações que desejavam, após isso, tiveram que clicar no quadro ao lado da frase"Para subtrair marque aqui", como mostra a Figura 2.47.

As sequências didáticas para a intervenção sobre o conteúdo subtração de frações foram semelhantes as utilizadas para o trabalho com adição de frações, enfatizando junto aos estudantes que para subtrair frações com denominadores diferentes não é necessário calcular o MMC dos denominadores. Basta multiplicá-los, como faz o GeoGebra. No mais, tudo o que explicamos sobre a adição de frações, aplica-se também a subtração.

Resultado do teste 02

Após a intervenção com o GeoGebra, houve 67 acertos e 51 erros, mesmo no Teste 02, a questão 08, que tratou do assunto Subtração de frações, continuou sendo a que mais os estudantes erraram. Porém, após a intervenção com o GeoGebra, percebemos uma melhora, pois no Teste 01, 35 estudantes haviam acertado a questão, e no Teste 02, esse número subiu para 67.

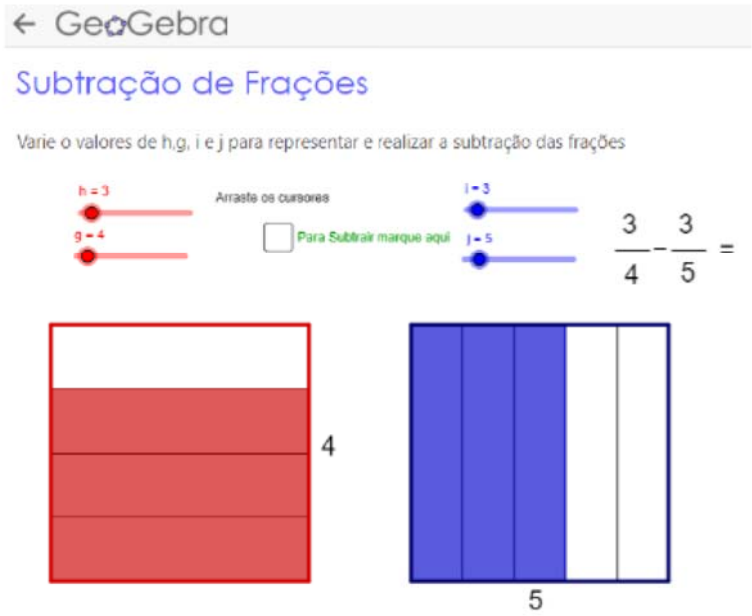


Figura 2.46: Subtração de frações- intervenção no GeoGebra

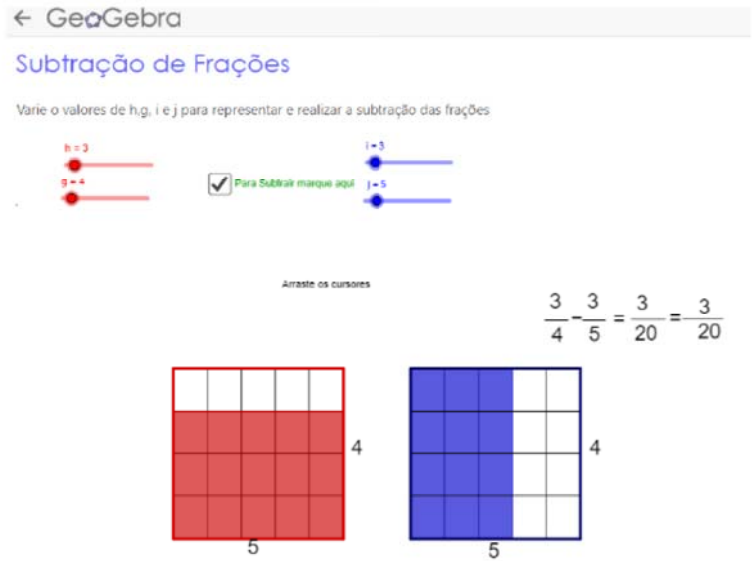


Figura 2.47: Subtração de frações- Resposta dada no GeoGebra

2.4.9 Questão 09- Adição de fração com números inteiros

O assunto tratado na questão 09 foi adição de fração com números inteiros, observe na Figura 2.48 , um exemplo de questão 9.

Resultado do teste 01

No Teste 01, houve 56 acertos e 62 erros.

Você pode visualizar este teste, mas se isto fosse uma tentativa real, você seria bloqueado porque:

Atualmente este questionário não é disponível

Questão 9
Ainda não respondida
Vale 1,00 ponto(s).
Marcar questão
Editar questão

O resultado de

$4 + \frac{4}{3}$

é igual a:

Escolha uma:
- a. 16/3
- b. 16/4
- c. 17/3
- d. 15/3
- e. 15/4

Figura 2.48: Questão 09- adição de fração com número inteiro

Sobre a intervenção utilizando o GeoGebra, não utilizamos atividade específica para tratarmos do assunto "soma de fração com número inteiro", foi explicado aos estudantes que para realizar esta tarefa, eles poderiam transformar o número inteiro em fração, acrescentando-lhe o denominador 1. Dada essa dica, pedimos que os estudantes fizessem as seguintes somas no GeoGebra:

4 + $\frac{3}{5}$= e 8+ $\frac{2}{5}$=

A maioria dos estudantes não apresentou dificuldade em realizar esta atividade no GeoGebra, observe na Figura 2.49, um exemplo de como a atividade foi desenvolvida.

Resultado do teste 02

Em relação ao Teste 02, após a intervenção, houve 79 acertos e 39 erros, percebemos uma melhora significativa, pois no Teste 01, apenas 56 estudantes acertaram a questão.

2.4.10 Questão 10- Subtração de fração com números inteiros

O assunto tratado na questão 10 foi subtração de fração com número inteiro, observe na Figura 2.50.

Resultado do teste 01

Na questão 10 do Teste 01, houve 56 acertos e 62 erros.

A intervenção feita em relação ao conteúdo subtração de fração com número inteiro foi semelhante a intervenção feita em relação ao conteúdo adição de fração com número inteiro. As

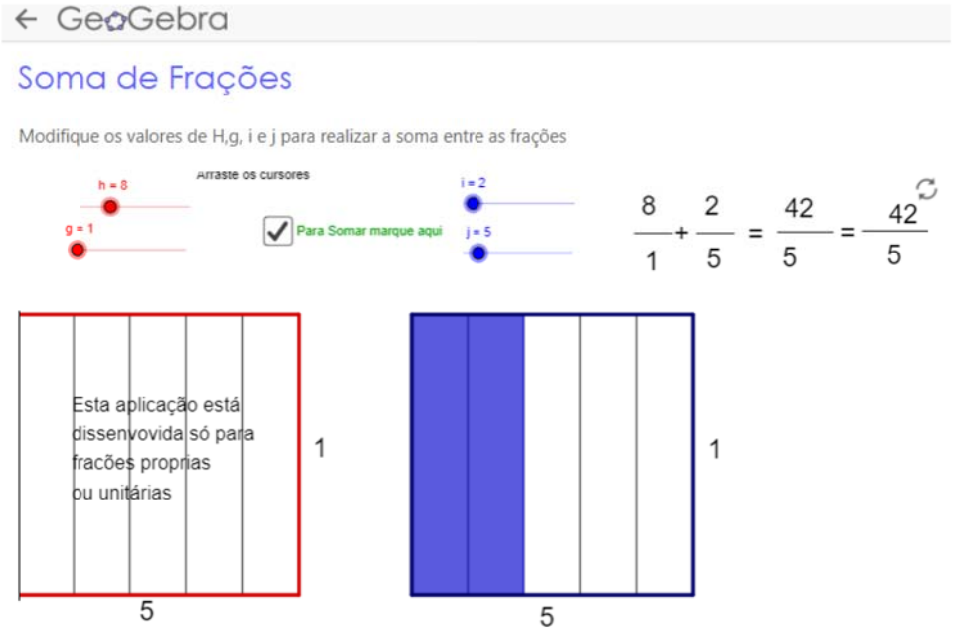


Figura 2.49: GeoGebra- adição de fração com número inteiro

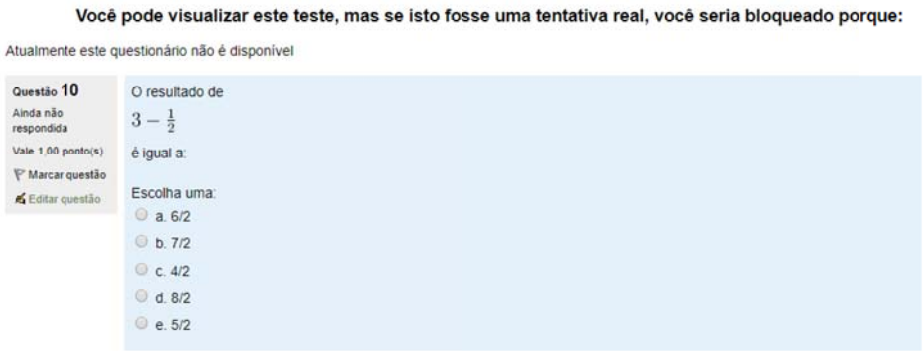


Figura 2.50: Questão- subtração de fração com número inteiro

atividades de subtração de fração com número inteiro foram possíveis no GeoGebra transformando o número inteiro em fração, acrescentando-lhe o número 1 como denominador. Observe na Figura 2.51 , a subtração da fração 3+ $\frac{1}{2}$.

Resultado do teste 02

No teste 02, em relação a questão 10, houve 75 acertos e 43 erros.

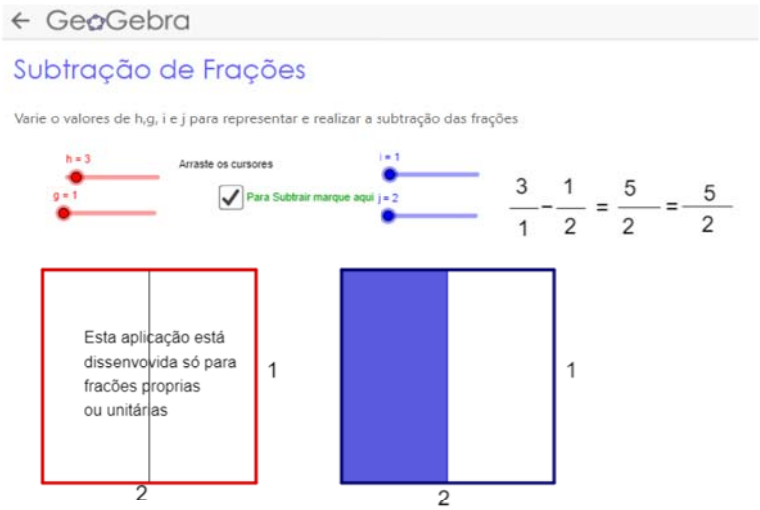


Figura 2.51: Subtração de fração com número inteiro no GeoGebra

2.5 Considerações gerais sobre a análise dos resultados

As questões que os estudantes tiveram maior desempenho tanto no teste 01, quanto no teste 02 foram as referentes ao conteúdo representação fracionária (Q1, Q2, Q3, Q4 e Q5), observe o gráfico na Figura 2.53 e na Figura 2.54. Os estudantes demonstraram familiaridade em resolver questões cujo número racional se apresenta com o significado parte- todo, principalmente quando se tratava de frações de grandezas contínuas. Muitos estudantes, durante as sessões, demonstraram que não consideram "certo" frações cujos numeradores são maiores que os denominadores. Ao pedir que eles representassem em uma folha de papel a fração $\frac{4}{2}$, alguns estudantes disseram "não dá". Conforme Vizcarra e Sallán [16] o ensino do número racional que prioriza apenas o significado parte-todo gera consequências ao aprendizado dos estudantes. Dentre essas consequências, destacamos a criação de obstáculos a formação de concepções adequadas como por exemplo: "No existen la fracciones impropias. El alumno se crea la idea de que el número de partes que se toman debe ser menor o igual que las partes del "todo" (BONOTTO, 1993 apud VIZCARRA e SALLÁN, 2005, p. 23). Apesar dos estudantes terem apresentado bom desempenho nas questões sobre representação fracionária, pudemos intervir em algumas dificuldades detectadas nos conteúdos: frações impróprias e frações de grandezas discretas.

A tabela na Figura 2.52 mostra o comparativo entre o teste 01 e o teste 02 no que tange aos acertos no assunto representação fracionária.

Como podemos observar, após as sessões com o GeoGebra, houve aumento no número de acerto entre os estudantes em todas as questões.

Em relação a questão 06, que tratou do assunto "Frações equivalentes" também percebemos melhoria nos resultados, pois no Teste 01, 77 de 119 (64,70%) estudantes acertaram a questão e

Questões sobre representação fracionária- percentual de acertos

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Número de acertos- Teste 01	75,63%	77,96%	76,47%	71,42%	73,94%
Número de acertos- Teste 02	90,67%	86,44%	85,47%	89,83%	92,37%

Figura 2.52: Questões sobre representação fracionária- percentual de acerto

no teste 02, 85 de 118 (72,03%) estudantes acertaram a questão , em termos percentuais, as sessões com o GeoGebra contribuíram para que 7,33% dos estudantes que não acertaram no teste 01, acertassem no teste 02. Percebemos que as sessões com o GeoGebra não foram tão eficientes nesse assunto (frações equivalentes), entretanto, esse resultado nos leva a conjecturar que os estudantes não se sentem familiarizados com questões que requeiram raciocínio algébrico, pois na questão 06 não bastava que o estudante tivesse a habilidade de encontrar frações equivalentes a partir de uma fração dada, multiplicando ou dividindo o denominador e o numerador da mesma por um mesmo número. Na questão 06, os estudantes tiveram que encontrar um valor desconhecido, observe um exemplo de questão 06 realizada pelos estudantes: "O denominador da fração equivalente a $\frac{3}{6}$ cujo numerador é 9 é igual a". Além da questão 06 "fugir a regra" das questões do tipo "exercício" onde os estudantes apenas aplicam procedimentos memorizados, percebemos que um bom número de estudantes apresentavam dúvidas quanto a comparação de frações. Comparar frações implica em conhecer as propriedades igualdade e desigualdade dos números racionais, só assim, os estudantes poderão ordenar frações e indicar a maior, a menor ou a equivalente. Se apropriar dessas propriedades é uma tarefa complexa pois os estudantes precisam romper com as ideias sobre número natural para a construção de um novo número: número racional. Nas turmas em que a pesquisa foi realizada, muitos estudantes acreditavam, por exemplo, que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$ porque na lógica dos números naturais $3 > 2$. Para que o estudante construa a ideia de igualdade e desigualdade de frações é importante que ele vivencie, por exemplo, situações concretas de particionamento da unidade (figuras planas, coleções quantificáveis, tiras de papel) e que sejam estimulados a comparar esses particionamentos. Bertoni [2] sugere um trabalho com "família de frações", como as famílias dos "terços- sextos- doze avos" e "quintos-décimos-vinte avos".

> a constatação de que trabalhar com famílias de frações interrelacionadas como meio/quarto/oitavo; terço/sexto/nono; quinto/décimo/vinte avo, permitia que a criança estabelecesse relações e atribuísse significado a operações iniciais com esses números.

> Elas percebiam, por exemplo, que 1 quarto é metade de 1 meio; que 1 quarto + 1 quarto é igual a 1 meio; que duas vezes 1 quarto dá 1 meio, que 1 meio dividido por 2 dá 1 quarto etc. BERTONI [1].

Para que o conhecimento do campo racional esteja completo é necessário o estudo de suas propriedades: igualdade, desigualdade e operações. CARAÇA [3]. Nas questões 7, 8, 9 e 10 abordamos a soma e a subtração de frações. Resolvemos não abordar a multiplicação e a divisão por entendermos, conforme indicam os PCN, que esses assuntos foram trabalhados há pouco tempo com os estudantes do 6º ano, uma vez que não há, nos PCN, indicação para o trabalho com operações entre frações nos anos iniciais do ensino fundamental. Conforme o quadro de conteúdos dos PCN, recomenda-se apenas a operação com números racionais na forma decimal. As questões de 7 a 10, sobre operação com frações, foram as que os estudantes demonstraram menor desempenho, entretanto, após as sessões com o GeoGebra, houve avanço no número de acerto em todas elas.

No teste 01, menos da metade dos estudantes acertaram cada uma das questões de 7 a 10. Na questão 7 (soma de frações) 57 de 118 (48,30%) estudantes acertaram a questão; na questão 8 (subtração de frações) 35 de 116 (30,17%) estudantes acertaram a questão; na questão 9 (soma de fração com número inteiro) 56 de 118 (47,45%) estudantes acertaram a questão e na questão 10 (subtração de fração com número inteiro)alcançaram o mesmo resultado apresentado na questão 9. Constatamos que o assunto que os estudantes possuem mais dificuldade quanto ao conteúdo fração são as operações. Com base na literatura lida, os motivos pelos quais os estudantes apresentam dificuldade na operação com frações são: 1- o modo de calcular frações é bem diferente do modo de calcular os número naturais, com os quais os estudantes são bem mais familiarizados: "os cálculos são tão diferentes que nem parecem tratar-se de operações com os mesmos significados daquelas entre números naturais." BERTONI [2]; 2- Para que os estudantes aprendam a realizar a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes, muitas escolas deixam de trabalhar o aspecto conceitual e enfatizam o procedimental, ensinando aos estudantes as técnicas para calcular o MMC e encontrar frações equivalentes:

> As técnicas para se achar o MMC de dois números são simples, mas não têm nenhuma relação visível com somar frações. É comum encontrarmos crianças que não somam frações porque não sabem calcular o MMC, e outras que demoram bastante tempo para encontrar no MMC antes de fazerem a adição (se não errarem no meio do caminho!) BRASIL [7].

> O estudo das operações com frações no ensino básico, em geral, tem-se apoiado em pressupostos teóricos algébricos refinados, como os conceitos de relação de equivalência e consequentes classes de equivalências (NUNES,2003; NUNES e BRYANT, 1997 apud GUERRA e SILVA [9].

3- O ensino dos números naturais a partir apenas do significado parte- todo não justifica a introdução de uma nova estrutura numérica, pois para a resolução das tarefas (realização de

transferências entre representações gráficas e simbólicas) basta que o estudante realize a contagem de números naturais. VIZCARRA e SALLÁN [16], para os autores, é necessário que se provoque "una ruptura entre la idea de número natural y la de número racional a partir de sus diferentes usos" VIZCARRA e SALLÁN [16] O não entendimento da distinção desses dois campos (números naturais e números racionais) provoca ideias errôneas nos estudantes, do tipo:

> Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales. Los alumnos extienden los significados y técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creencias, los entes numéricos no cambian de sentido: el ordem de los números racionales es igual que el de los naturales, la multiplicación de recionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc. VIZCARRA e SALLÁN [16].

Como vimos, tanto no Teste 01, quanto no Teste 02, o assunto subtração de frações foi o conteúdo que os estudantes mais erraram. No Teste 01, apenas 30,17% de 116 estudantes acertaram a questão e no Teste 02, após as sessões de intervenção, 56,77% de 118 estudantes acertaram a questão, isso pode ser observado nos Gráficos 2.53 e 2.54. Num modo geral, os estudantes não apresentaram resultados satisfatórios no assunto operações de números racionais fracionários, em adição de frações, por exemplo, somente 48% de 118 estudantes acertaram a questão que tratava deste assunto. Quando o assunto foi adição e subtração de frações com números inteiros, os estudantes obtiveram o segundo menor resultado, somente 47,45% de 118 estudantes acertaram as questões que tratavam deste assunto. Conjecturamos que alguns fatores podem ter contribuído para esses resultados: 1º- Tiveram pouco tempo para consolidarem as ideias a respeito da adição e subtração de frações, pois é provável que os estudantes só tenham estudado esse conteúdo no ano letivo em que a pesquisa ocorreu. Como a pesquisa foi realizada no quarto bimestre, os estudantes já haviam estudado todos os conteúdos propostos pela escola. 2º- Ainda é comum que as escolas ao ensinarem adição e subtração de frações, deem mais importância ao aprendizado da técnica e do algoritmo para resolver essas questões que a construção do conceito para realizar operações com esses números. 3º- Metodologia de ensino que prioriza o cálculo do MMC entre os denominadores (quando diferentes). 4º- Os estudantes aplicam para resolverem operações com números racionais fracionários as mesmas técnicas que utilizam para resolverem as operações com números naturais. Citamos anteriormente que os números racionais passam a ser trabalhados na escola a partir do 2º ciclo, porém os PCN não indicam na lista de conteúdos do 2º ciclo o trabalho com operações entre números racionais na forma fracionária, no quadro de conteúdos é indicado o cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal "Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais" BRASIL [5]. Com base no que recomenda esse documento oficial, acreditamos que os estudantes não estudaram, de forma formal, o conteúdo operações com frações nos anos anteriores,

esses são alguns pontos que podem justificar o resultado insatisfatório no assunto "operação com frações". Sabemos que antes da pesquisa ser realizada, os estudantes já haviam estudado adição e subtração de frações, obtemos esta informação por meio do professor de Matemática da escola. De fato, segundo os PCN, operação com frações devem ser trabalhadas na sala de aula a partir do terceiro ciclo do ensino fundamental. Recomenda-se no quadro de conteúdos

> Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações- com números naturais, números inteiros e racionais-, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados.BRASIL [6],

Para superar estes problemas, recomendamos as sessões com o GeoGebra, como as utilizadas na pesquisa dando ênfase a: 1º-Que o estudante compreenda a necessidade da criação dos números racionais. 2º- Consolide a ideia de frações equivalentes. 3º- Compreenda a distinção entre número natural e número fracionário, superando a ideia de transpor as mesmas técnicas utilizadas para comparar e calcular números naturais aos números racionais fracionários. Em relação ao conteúdo frações equivalentes, tratado na questão 06, 64,7% de 119 estudantes acertaram a questão, nesse conteúdo esperávamos um resultado melhor, pois ele começa a ser trabalhado no 2º ciclo do Ensino Fundamental. Podemos afirmar, com base no que indica os PCN, que os estudantes já trabalharam com esse assunto durante três anos letivos, a saber, no 4º, 5º e 6º ano do Ensino Fundamental. Sobre esse assunto, observemos o que consta no quadro de conteúdos dos PCN para o segundo ciclo: "Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas." BRASIL [5].

O assunto que os estudantes tiveram mais acertos foi em representação fracionária, as questões referentes a este assunto foram as de 1 a 5, no gráfico do teste 01, Figura 2.53, podemos observar o desempenho nessas questões.

Caraça [3] exemplifica sobre a necessidade da criação dos números racionais pela constatação que o conjunto de números inteiros era insuficiente para a tarefa de exprimir numericamente qualquer medida. Caraça, destaca duas vantagens da criação dos números racionais:

> 1ª- É possível exprimir sempre a medida dum segmento tomando outro como unidade; se por exemplo, dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz-se que a medida é $\frac{2}{5}$. 2ª- A divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$- o cociente de 2 por 5 é o número fraccionário $\frac{2}{5}$, o cociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5}$= 2. CARAÇA [3].

A partir da tabela na Figura 2.55 Verificamos que a sequência didática com o GeoGebra foi mais eficiente no assunto "Subtração de frações", pois no teste 01, apenas 35 de 116 (30,17%) estudantes acertaram a questão 8. No teste 02, 67 de 118 (56,77%) estudantes acertaram a

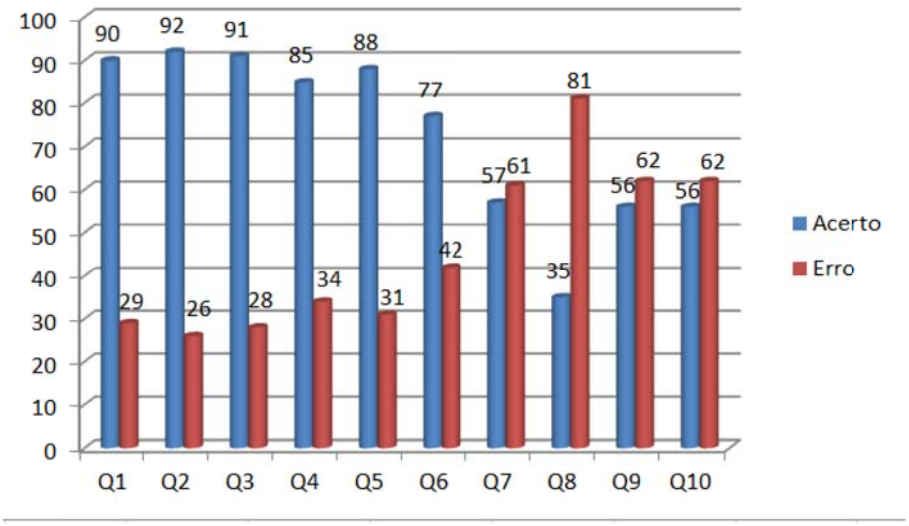


Figura 2.53: Gráfico- Teste 01

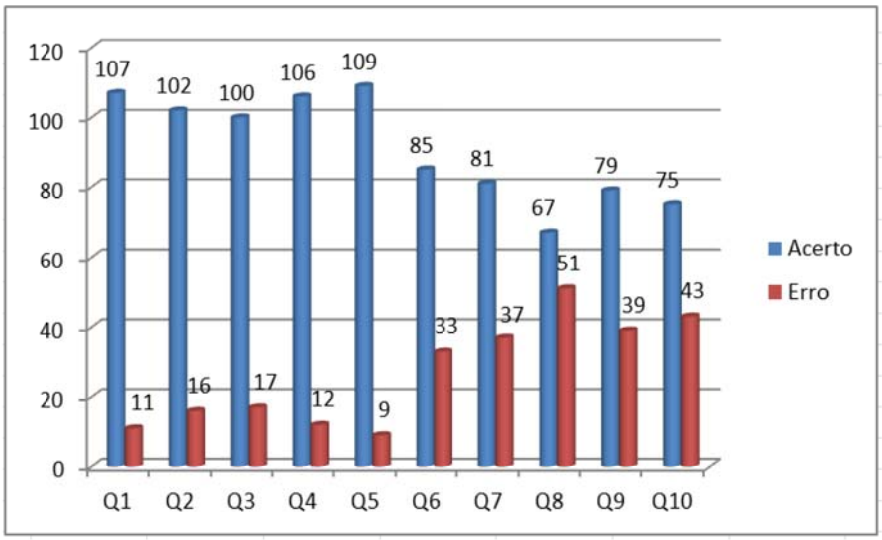


Figura 2.54: Gráfico- Teste 02

questão 8. Nesta questão o crescimento foi de 26,6%. Verificamos também que a sequência didática foi menos eficiente no assunto "Frações Equivalentes", pois no teste 01, 77 de 119 (64,70%) estudantes acertaram a questão 6. No teste 02, 85 de 118 (72, 03%) acertaram a questão 8. Nesta questão o crescimento foi de 7,33%.

Recomendamos sequências didáticas com o uso do GeoGebra pois, conforme o gráfico na Figura 2.57, 73, 45% dos estudantes apresentaram melhoria no seu desempenho individual no Teste 02. Houve um estudante que conseguiu melhorar 7 pontos, significa que no Teste 01, este estudante obteve a média 3,0 e no Teste 02, obteve a média 10,00. . A maioria dos estudantes melhoraram de 2 a 3 pontos no rendimento individual. Houve também estudantes que pioraram

Quantitativo de acertos- Testes 01 e 02

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Acertos- Teste 01	75,63%	77,96%	76,47%	71,42%	73,94%	64,70%	48,30%	30,17%	47,45%	47,45%
Acertos Teste 02	90,67%	86,44%	85,47%	89,83%	92,37%	72,03%	68,64%	56,77%	66,94%	63,55%
Diferença	15,02%	8,48%	9%	18,41%	18,43%	7,33%	20,34%	26,6%	19, 49%	16,1%

Figura 2.55: Quantidade de acertos nos testes 01 e 02

seu rendimento individual do teste 01 para o teste 02, mas esse número foi muito pequeno, como mostra o gráfico na Figura 2.56.

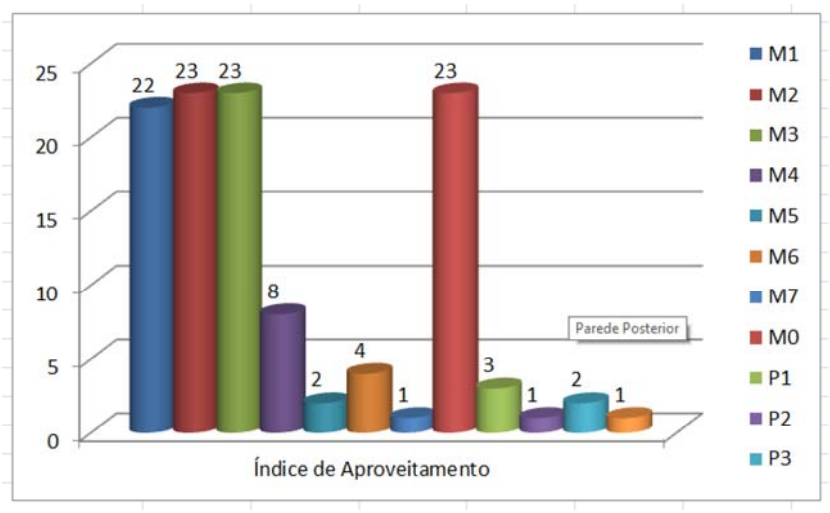


Figura 2.56: Índice de aproveitamento individual dos estudantes

Analisando o grau de dificuldade das questões, percebemos que a questão 6 era a única das 10 que exigia dos estudantes que mobilizassem ideias abstratas, pois nessa questão, não bastava o estudante multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração dada por qualquer número natural para encontrar infinitas frações equivalentes. Nessa questão, com o grau de dificuldade maior que as demais, exigia que o estudante marcasse uma fração equivalente específica, onde os estudantes tinham como pista, apenas o numerador desta. No teste 01 64,70% dos estudantes acertaram a questão supracitada. Após as sessões com o GeoGebra, no teste 02, esse número subiu para 72%. Analisando esse resultado, concordamos com Vizcarra e Sallán [16] quando dizem que o ensino do número racional que explora predominantemente o significado parte-todo cria obstáculos a formação de ideias abstratas. Isso porque essa escolha, implica numa prática docente que não incentiva os estudantes a buscarem estratégias para a

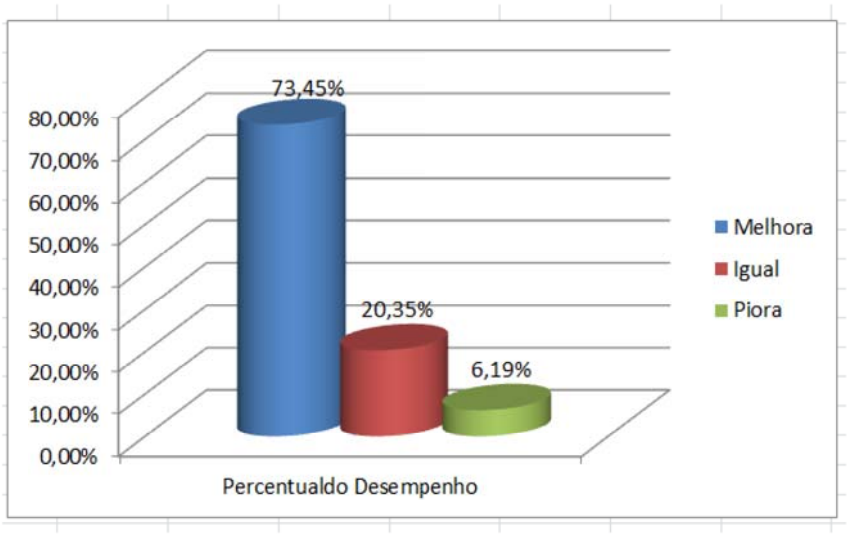


Figura 2.57: Gráfico de desempenho

solução de situações- problema.

Em suma, as sessões com o GeoGebra contribuíram para a melhoria dos resultados em todas as questões e em todos os assuntos: representação fracionária, frações equivalentes, soma e subtração de frações.

Percebemos que falta aos estudantes maior familiaridade com os números racionais, no sentido de que eles pudessem responder corretamente as questões dadas sem precisarem recorrer às técnicas e algoritmos anteriormente memorizados.

Bertoni [2] indica o trabalho com frações a partir de situações do cotidiano, sem a necessidade dos estudantes aprenderem a representação simbólica da fração, mas a partir da linguagem verbal e das escritas correspondentes.

Verificamos a importância do ensino de frações não se resumir ao significado parte- todo, pois observamos nas 3 turmas, que muitos estudantes não criam na existência de frações impróprias, para eles, o numerador deve ser sempre menor que o denominador. Portanto, reiteramos a necessidade de que o aprendizado dos números racionais se dê pela compreensão de seus diferentes significados: quociente, parte-todo, razão (anos iniciais do ensino fundamental); e parte-todo, quociente, razão e operador (anos finais do ensino fundamental). BRASIL [5] e [6]. Queremos destacar a necessidade do estudante conhecer a separação conceitual entre o número racional e o número natural. para Vizcarra e Sallán [16] a não separação conceitual dos campos dos números naturais e racionais gera consequências, uma delas é quando os estudantes estendem os significados e técnicas do número natural para resolverem situações matemáticas que requeiram resolução no campo racional. VIZCARRA e SALLÁN, [16]. Os PCN enfatizam que quando os estudantes raciocinam sobre números racionais como se fossem naturais, eles enfrentam vários obstáculos,

- um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado

por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9, e 4/12 são diferentes representações de um mesmo número;

• outro diz respeito à comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$;

• se o "tamanho" da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais (8. 345>41), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério;

• se ao multiplicar um número natural por outro número natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por 1/2 se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;

• se a sequência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. BRASIL [5].

Queremos destacar também a importância da ação dos estudantes na construção do conhecimento, o GeoGebra permitiu esta ação, embora o uso de materiais concretos como papel, lápis, tesoura sejam indispensáveis a essa construção. Destacamos ainda a importância de que o ensino dos números racionais fracionários se dê a partir da resolução de situações- problema, possibilitando aos estudantes a construção de novos significados a esses números. Acreditamos que o GeoGebra ajudou os estudantes a entenderem melhor sobre frações, principalmente pela possibilidade da visualização de frações com diferentes representações simbólicas, porém, equivalentes. Os estudantes também gostaram de visualizar que para somar ou subtrair frações de "tamanhos diferentes" é necessário fazermos novas "divisões" a fim de que se tornem equivalentes. Eles puderam visualizar que não precisamos calcular o MMC para realizarmos a soma ou subtração de frações. Os estudantes também puderam visualizar na atividade sobre representação fracionária, a representação gráfica de frações impróprias.

Em suma, verificamos que o GeoGebra é um recurso com muito potencial para contribuir com a qualidade no aprendizado de frações.

Capítulo 3

Conclusão

Quando fomos pesquisar a utilização do GeoGebra nas escolas de Ensino Fundamental, percebemos que geralmente este software está associado ao ensino e aprendizagem de Geometria. Vimos pouquíssimos trabalhos publicados que falavam da utilizavam do GeoGebra como ferramenta para o ensino e aprendizagem de fração. Nesta pesquisa, pudemos constatar que o GeoGebra é uma ferramenta com muito potencial para melhorar a qualidade no ensino de frações, a partir dela os estudantes puderam consolidar ideias importantes a cerca da construção do conhecimento do campo dos números racionais pela: 1- Identificação de frações equivalentes por meio da observação de representações gráficas; 2- Compreensão da ideia da soma e subtração de frações sem a necessidade de calcular o MMC dos denominadores quando os mesmos forem diferentes. 3- Visualização de representações gráficas de frações imprórpias, compreendendo que nem sempre, em uma fração, o numerador é menor que o denominador. Indicamos dessa forma, o uso do software GeoGebra em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental articulado a um planejamento que crie condições para que os estudantes construam o conceito de número racional a partir de seus diferentes significados: quociente, parte-todo e razão (em turma dos anos iniciais do Ensino Fundamental) e parte- todo, quociente, razão e operador (em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental). Constatamos na pesquisa, que Frações, conforme Bertoni, [2] é um dos conteúdos mais problemáticos na aprendizagem da matemática das séries iniciais. Acreditamos que a pesquisa levou benefícios a escola em que a mesma foi realizada. Esses benefícios alcançaram, diretamente, tanto os estudantes, quanto o professor, pois em relação aos estudantes, durante todas as sessões, puderam tirar dúvidas e por meio das atividades desenvolvidas, aprofundarem seus conhecimentos em números racionais, melhorando assim o rendimento escolar. Em relação ao professor das turmas participantes, destacamos que no decorrer da pesquisa, pode conhecer uma ferramenta para auxiliá- lo no ensino dos números racionais. É importante lembrar que mesmo após o término da pesquisa, tanto os estudantes, quanto o professor poderão continuar utilizando a ferramenta, pois a mesma é gratuita tanto para o trabalho online, quanto para o trabalho off- line. Além do mais, se a escola tiver interesse, o professor que participou das sessões poderá socializar a ferramenta com os demais professores. Em suma, destacamos como principais contribuições do nosso trabalho:

1- A constatação do potencial da ferramenta tecnológica GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes do 6º ano da escola participante da pesquisa. Portanto a indicamos pelo seu potencial pedagógico, por ser gratuita e poder ser utilizada tanto online quanto off-line e pela possibilidade dos estudantes visualizarem propriedades indispensáveis a construção do conhecimento em números racionais. A ferramenta GeoGebra também pode ser utilizada como uma espécie de "calculadora de frações" onde os estudantes poderão conferir se suas atividades estão certas ou erradas, fomentando a auto-avaliação. Dessa forma, os estudantes terão mais autonomia para produzirem as próprias questões e estudarem individualmente ou em grupo, em casa ou em clubes para o aperfeiçoamento do conhecimento matemático.
2- A produção de sequências didáticas que associam o uso de tecnologias digitais a tecnologias tradicionais (papel, lápis, régua, borracha) e que alcançaram bons resultados no ensino e aprendizagem dos números racionais fracionários conforme a Análise dos resultados descritas no Capítulo 02.
3- Indicação da plataforma Moodle para organização de testes e atividades no formato de curso. As vantagens desta ferramenta é o Moodle possui espaço para a criação de banco de questões e questionários, podendo serem utilizados em testes, em recuperação etc. O ambiente Moodle corrige os testes, facilitando assim o trabalho do professor. Além disso fornece ao estudante um feedback rápido sobre seu aproveitamento nos conteúdos escolares. Assim, o professor pode fazer mais testes e intervir a tempo, pois o Moodle além de corrigir os testes, gera gráficos para a melhor análise do rendimento dos estudantes.
4- Registro de observações a luz das pesquisas atuais sobre o ensino e aprendizagem de frações elencando fatores que favorecem e os que desfavorecem o aprendizado deste conteúdo.

Assim, esperamos que as reflexões expostas neste trabalho possam contribuir significativamente para a melhoria no ensino da Matemática.

Capítulo 4

Trabalhos futuros

Nesta pesquisa, nos ocupamos prioritariamente em conhecer o potencial do GeoGebra no ensino e aprendizagem dos números racionais fracionários, por isso, elaboramos os Testes 01 e 02 com questões com pouca complexidade, adotando predominantemente o significado parte-todo dos números racionais. Nas atividades de representação fracionária e nas atividades de operações com frações, exigimos apenas que os estudantes fizessem o cálculo mediante as contas dadas, não trabalhamos com problemas matemáticos envolvendo a soma e a subtração de frações. Das dez questões, a única que possuía um caráter de situação- problema, foi a questão 6, que tratou do conteúdo "frações equivalentes". Mediante os resultados apresentados, concluímos que o GeoGebra é uma potente ferramenta ao processo de ensino e de aprendizagem quando associada a uma prática de ensino que valorize os conhecimentos prévios dos estudantes, a participação, a ação na construção do conhecimento, a contextualização do conteúdo, a ciência da utilidade dos conteúdos na vida social e a valorização da construção de conceitos e não apenas do conhecimento de técnicas e procedimentos. Levando em consideração que os estudantes erraram mais as questões referentes a operação com frações e que as sessões com o GeoGebra tiveram pouca eficiência na superação das dificuldades em resolver questão que requeira do estudante a mobilização das ideias abstratas, o que foi detectado na questão 6 (frações equivalentes), nos sentimos impulsionados a realizar na próxima pesquisa o seguinte: 1- Construir sessões pautadas na resolução de situações- problema; 2- Investigar as concepções que os estudantes possuem a cerca das operações com números racionais fracionários; 3- Desenvolver atividades no GeoGebra que ajude os estudantes a superarem as dificuldades em mobilizar ideias abstratas para a resolução de situações- problema e no cálculo de frações.

Referências Bibliográficas

[1] Nilza Eigenheer Bertoni. Frações e números fracionários. https://www.ime.usp.br/~iole/fracoes_nilza_bertoni.pdf. Acessado em 17-01-2018.

[2] Nilza Eigenheer Bertoni. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife*, 15, 2004.

[3] Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Editora Tipografia Matemática, 1951.

[4] CEALE. Tecnologia digital. http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/tecnologia-digital. Acessado em 19-03-2018.

[5] Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. secretaria de Educação Fundamental. *Parametros curriculares nacionais: matemÃ¡tica*. MEC, 1997.

[6] Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. secretaria de Educação Fundamental. *Parametros curriculares nacionais:terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática*. MEC, 1998.

[7] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Pró- Letramento: Matemática*. MEC, 2007.

[8] Instituto São Paulo GeoGebra. Sobre o geogebra. http://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acessado em 19-03-2018.

[9] Francisco Hermes Santos da Guerra, Renato Borges; Silva. As operações com frações e o princípio da contagem. *Boletim de Educação Matemática*, 21(31), 2008.

[10] Vani Moreira Kenski. *Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação*. Papirus, 2012.

[11] Maria Cecília Minayo. *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*.

[12] Athail Rangel Pulino Filho. A atividade questionário em moodle. 2009.

[13] Zélia Ramozzi-Chiarotino. *Psicologia e Epistemologia Genética de Jean Piaget*. EPU, 1988.

[14] Robson Pequeno de Sousa, Filomena da Moita, Ana Beatriz Gomes Carvalho, et al. Tecnologias digitais na educação. 2011.

[15] David Tripp. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. *Educação e pesquisa*, 31(3), 2005.

[16] Rafael Escolano Vizcarra and José María Gairín Sallán. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1:17–35, 2005.

[17] WikiHow. Como fazer frações equivalentes. https://pt.wikihow.com/Fazer-Fra%C3%A7%C3%B5es-Equivalentes. Acessado em 16-04-2018.