



UFAM

MODELO GUMBEL MULTIVARIADO COM EFEITOS ALEATÓRIOS ESPACIALMENTE COMPARTILHADOS

Milena Nascimento Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Max Sousa de Lima

Manaus - AM

Março de 2018

MODELO GUMBEL MULTIVARIADO COM EFEITOS ALEATÓRIOS ESPACIALMENTE COMPARTILHADOS

Milena Nascimento Lima

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA
(M.Sc).

BANCA EXAMINADORA

Max Sousa de Lima

Prof. Max Sousa de Lima, D.Sc. - Orientador
Universidade Federal do Amazonas

Jeremias da Silva Leão

Prof. Jeremias da Silva Leão, D.Sc.
Universidade Federal do Amazonas

Manoel Ferreira dos Santos Neto

Prof. Manoel Ferreira dos Santos Neto, D.Sc.
Universidade Federal de Campina Grande

MANAUS, AM- BRASIL

MARÇO de 2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

L732m Lima, Milena Nascimento
Modelo Gumbel multivariado com efeitos aleatórios
espacialmente compartilhados / Milena Nascimento Lima. 2018
70 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Max Sousa de Lima
Dissertação (Mestrado em Matemática - Estatística) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Distribuição Gumbel . 2. Efeitos Aleatórios. 3. Dependência
Espacial. 4. Predição Espaço-Temporal. I. Lima, Max Sousa de II.
Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedicatória

À minha mãe, Anita Nascimento.

Agradecimentos

- ♡ A Deus, pela honra de ingressar no Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM.
- ♡ Ao meu orientador, Max Sousa de Lima.
- ♡ Ao meu noivo, Alex Leal Mota.
- ♡ A Minha Família.
- ♡ À Fundação de Amparo as Pesquisas do Amazonas - FAPEAM, pelo apoio financeiro.
- ♡ Aos Professores dos Departamentos de Matemática e Estatística.
- ♡ À equipe da Secretaria de Pós-graduação: Ary e Euclimar.
- ♡ Aos colegas: Guilherme, Regina, Renata, Alice, Jhonata e Neíza.
- ⋮
- ♡ A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

“Em seu coração o homem
planeja o seu caminho, mas o
Senhor determina os seus
passos”.

Provérbios 16:9.

Resumo da dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. (M.Sc.)

MODELO GUMBEL MULTIVARIADO COM EFEITOS ALEATÓRIOS ESPACIALMENTE
COMPARTILHADOS

Milena Nascimento Lima

Março/2018

Orientador: Prof. Dr. MAX SOUSA DE LIMA

Linha de Pesquisa: Estatística

Neste trabalho foi proposto um modelo multivariado para predição de valores extremos espacialmente dependentes. O modelo foi construído condicionando uma distribuição Gumbel com respeito a um efeito aleatório espacialmente compartilhado seguindo uma distribuição alfa-estável. Algumas propriedades deste novo modelo foram apresentadas e um algoritmo MCEM foi desenvolvido para estimação dos parâmetros. O modelo foi ilustrado através da predição espaço-temporal de temperatura máxima no estado do Amazonas.

Palavras-chave: Distribuição Gumbel; Efeitos Aleatórios; Dependência Espacial; Predição Espaço-Temporal.

Abstract of Dissertation presented to Postgraduate in Mathematics, of the Federal University of Amazonas, as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Mathematics. (M.Sc.)

MULTIVARIATE GUMBEL MODEL WITH SPATIALLY SHARED RANDOM EFFECTS

Milena Nascimento Lima

Março/2018

Advisor: Prof. Dr. MAX SOUSA DE LIMA

Research area: Statistics

In this work were proposed a multivariate model for prediction of spatially dependent extreme values. The model was constructed by conditioning a Gumbel distribution with respect to spatially shared random effect following an alpha-stable distribution. Some properties of this new model are presented and a MCEM algorithm was developed for the estimation of the parameters. The model was illustrated by the spatio-temporal prediction of maximum temperature in the Amazonas state, Brazil.

Keyword: Gumbel Distribution; Random Effects; Spatial Dependence; Spatio-temporal Prediction.

Lista de Figuras

2.1	<i>Gráficos da função de distribuição acumulada Gumbel univariada para alguns valores dos parâmetros.</i>	5
2.2	<i>Gráficos da função densidade de probabilidade Gumbel univariada para alguns valores dos parâmetros.</i>	6
3.1	<i>Gráfico da fda Gumbel bivariada.</i>	18
3.2	<i>Gráfico da fdp Gumbel bivariada.</i>	18
3.3	<i>Sistemas de vizinhanças A e B.</i>	21
5.1	<i>Representação espacial da modelagem.</i>	38
6.1	<i>Distribuição espacial das estações meteorológicas do estado do Amazonas.</i>	46
6.2	<i>Séries de temperaturas máximas anuais por estações meteorológicas/1997-2016.</i> .	46
6.3	<i>Divisão das estações meteorológicas em três grupos.</i>	48
6.4	<i>Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/1997-2000.</i>	51
6.5	<i>Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2001-2004.</i>	52
6.6	<i>Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2005-2008.</i>	53
6.7	<i>Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2009-2012.</i>	54
6.8	<i>Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2013-2016.</i>	55

Lista de Tabelas

6.1	<i>Coordenadas geográficas das estações meteorológicas do estado do Amazonas.</i>	47
6.2	<i>Estimativas e erros padrões do parâmetro de dependência espacial, α.</i>	49
6.3	<i>Estimativas e erros padrões do parâmetro de larga escala temporal, σ.</i>	50
6.4	<i>Medidas de ajuste: RMSE's e MAPE's.</i>	57

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Aspectos gerais	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura do trabalho	3
2 Revisão da literatura	4
2.1 Distribuição Gumbel univariada	4
2.2 Distribuições estáveis	7
2.3 Distribuições condicionais G-exponencializadas	10
2.4 Marginais univariadas de distribuições condicionais G-exponencializadas . .	11
2.5 Distribuição de Dirichlet	12
2.6 Algoritmos EM e MCEM	14
3 Classe Gumbel multivariada para dados dependentes	16
3.1 Modelo Gumbel multivariado: Caso geral	16
3.2 Modelos especiais	19
3.2.1 Modelo de efeitos aleatórios	19
3.2.2 Modelos para séries temporais	19
3.2.3 Modelo espacial de média móvel latente	21
3.2.4 Modelo hierárquico	22
3.3 Propriedades da classe Gumbel multivariada	22
3.3.1 Distribuições marginais e do máximo	22

3.3.2	Dependência positiva	23
3.3.3	Função densidade conjunta	25
3.3.4	Função densidade conjunta por grupos	26
3.3.5	Geração de vetores aleatórios por grupos	28
3.3.6	Inferência via máxima verossimilhança por grupos	30
4	Inferência via algoritmo EM	33
4.1	Algoritmo EM	33
4.1.1	Distribuição condicional $\mathbf{H} \mathbf{Y}$	34
4.1.2	Passo E: Esperança condicional	35
4.1.3	Passo M: Maximização de $Q(\phi)$ por Newton-Raphson	35
5	O modelo Gumbel multivariado com efeitos aleatórios espacialmente compartilhados	37
5.1	Construção do modelo proposto	37
5.2	Uma representação estocástica do modelo proposto	39
5.3	Dependência espacial	39
5.3.1	Covariância	40
5.4	Inferência via algoritmo MCEM	40
5.4.1	O algoritmo MCEM	41
6	Aplicação do modelo proposto em dados reais	45
6.1	Análise descritiva dos dados	45
6.2	Realização da predição espacial	48
6.3	Análise dos resultados	49
6.4	Avaliação do modelo proposto	55
	Considerações finais	58
A	Distribuição e valores característicos de $W_{t,m}$	60
A.1	Distribuição de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$	60
A.1.1	Função geradora de momentos de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$	61
A.1.2	Esperança de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$	62
A.1.3	Segundo momento de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$	62
A.1.4	Variância de $W = \log Z_{t,m}$	63

B Cálculo das esperanças $\mathbb{E}_{m,1}, \mathbb{E}_{m,2}, \mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$	64
---	-----------

Referências bibliográficas	66
-----------------------------------	-----------

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos gerais

Em teoria das probabilidades a distribuição Gumbel é definida como um modelo probabilístico contínuo que surge quando se toma o logaritmo de uma variável com a distribuição Weibull. É também um caso particular da distribuição generalizada de valores extremos (GVE) (Kotz e Nadarajah, 2000).

Uma das principais aplicações desta distribuição (ou modelo) é a de estimar valores extremos para previsão de fenômenos raros. Desta forma, condições ambientais extremas compõem um vasto campo de aplicações do modelo Gumbel. Por exemplo, em relação aos estudos meteorológicos o interesse está na análise de observações e registros de máximos e mínimos ao longo do tempo. Tendo em vista que os dados de chuva e vento apresentam, geralmente, aspectos alarmantes e impactantes para a sociedade, eles estão entre os temas mais discutidos da atualidade.

De acordo com (Beirlant et al., 2004), em análises sobre frequência de inundação, tem-se interesse na estimativa anual de elevação do nível de água, que é o nível excedente a cada T anos em média, sendo necessária uma grande quantidade de dados observados, normalmente de um período de 100 anos, mas a estimativa é realizada principalmente com base em dados por um período mais curto. Consequências das inundações superiores a um certo nível pode implicar em grandes inundações (Bruun e Tawn, 1998). Outro parâmetro hidrológico para o qual a cauda da distribuição correspondente é de especial interesse é a intensidade da precipitação, onde é possível fazer modelagem em sistemas de cursos de água, drenagem urbana e escoamento.

Na maioria das pesquisas já publicadas, os pesquisadores têm o objetivo de examinar valores que excedam um limiar específico, que venha de alguma forma, ser comprometedor para a sociedade. Em estudos mais particulares, os modeladores podem examinar, por exemplo, quão comprometedor um certo valor possa ser para as reservas de uma empresa.

Em todos os exemplos enfatizados acima faz-se uso de distribuições multivariadas de valores extremos para a modelagem (Fougeres, 2004, Kotz e Nadarajah, 2000). No entanto, poucos trabalhos envolvendo quatro ou mais dimensões têm sido desenvolvidos. Isso porque, em geral, os modelos paramétricos de alta dimensionalidade têm funções de densidades bastante complexas, tornando os procedimentos de inferência bastante complicados (Stephenson, 2009). Com base nisso, neste trabalho, propomos um modelo multivariado para predição de valores extremos espacialmente dependentes, em que a construção do modelo é feita condicionando uma distribuição Gumbel com respeito a um efeito aleatório espacialmente compartilhado seguindo uma distribuição alfa-estável. Algumas propriedades deste novo modelo são apresentadas e um algoritmo de *Monte Carlo Expectation Maximization* (MCEM) é desenvolvido para estimação dos parâmetros. A ilustração do modelo é feita através da predição espaço-temporal de temperatura máxima no estado do Amazonas.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é baseado na modelagem e predição espacial e espaço-temporal de valores extremos.

Como metas e objetivos específicos, temos:

- ① Construir uma classe multivariada para dados dependentes e desenvolver suas propriedades;
- ② Desenvolver e implementar um algoritmo para estimação dos parâmetros da classe;
- ③ Propor um modelo particular da classe multivariada para o problema de predição espaço-temporal de temperatura máxima no Estado do Amazonas;
- ④ Comparar os resultados do modelo proposto com os resultados de um modelo padrão existente na literatura.

1.3 Estrutura do trabalho

A presente dissertação é composta de seis capítulos. No primeiro capítulo decorremos sobre aspectos gerais da distribuição Gumbel, como também definimos os objetivos gerais e específicos. Em seguida, no segundo capítulo, apresentamos uma revisão bibliográfica que serve de suporte para o desenvolvimento do trabalho. No terceiro capítulo, o modelo Gumbel multivariado é construído a partir do condicionamento da variável a uma mistura de distribuições α -estáveis e alguns casos especiais são abordados; suas propriedades também são apresentadas. Em seguida, no quarto capítulo, é apresentado o algoritmo *Expectation Maximization* (EM) para a estimação dos parâmetros dos modelos anteriores. No capítulo cinco propomos um caso particular do modelo Gumbel multivariado para a modelagem de dados espacialmente compartilhados e desenvolvemos o algoritmo *Monte Carlo Expectation Maximization* (MCEM). No capítulo seis o modelo proposto é aplicado no problema de predição espaço-temporal de temperatura máxima no estado do Amazonas.

Capítulo 2

Revisão da literatura

Neste Capítulo apresentaremos os principais conceitos e teorias matemáticas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Inicialmente, na Seção (2.1) faremos uma abordagem significativa da distribuição Gumbel univariada, destacando sua importância para o estudo de fenômenos extremos, e detalharemos suas principais propriedades, em especial àquelas que serão aplicadas nos capítulos posteriores. Na Seção (2.2), explanaremos sobre classe de distribuição estável e suas propriedades mais relevantes. Em seguida, na Seção (2.3), faremos uma abordagem a definição de distribuições condicionais G-exponencializadas usando como base a técnica introduzida por (Lehmann, 1953) no contexto de teste de hipóteses. Na Seção (2.4) serão apresentadas marginais G-exponencializadas. Posteriormente, na Seção (2.6), será introduzido o algoritmo *Expectation Maximization* (EM), que é um método computacional para calcular o *estimador de máxima verossimilhança* (EMV) quando a função log-verossimilhança dos dados observados é analiticamente intratável. E, finalmente, na Seção (2.5), definiremos a distribuição Dirichlet que nos auxiliará na geração de vetores aleatórios para o modelo Gumbel multivariado.

2.1 Distribuição Gumbel univariada

A distribuição de Gumbel, nomeada assim em homenagem a Emil Julius Gumbel (1891-1966), surge quando se toma o logaritmo de uma variável com a distribuição Weibull. Isto é, se a variável X tem uma distribuição Weibull, então a variável $Y = \log(X)$ tem uma distribuição Gumbel. Ela é bastante utilizada para modelar a distribuição do

máximo (ou do mínimo) de um número de amostras de várias distribuições comuns (Exponencial, Gamma, Normal, Log-Normal, etc), geralmente em série anuais. Desta forma, em aplicações ambientais, torna-se muito eficaz em estudos sobre previsão de eventos raros como terremotos, inundações e outros desastres naturais.

Definição 2.1. *Seja Y uma variável aleatória (v.a). Dizemos que Y possui distribuição Gumbel com parâmetros μ e σ , e denotamos por $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$, se possui a seguinte função de distribuição acumulada (fda) (Ver Figura 2.1):*

$$G(y; \mu, \sigma) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

em que, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ são, respectivamente, os parâmetros de locação e escala.

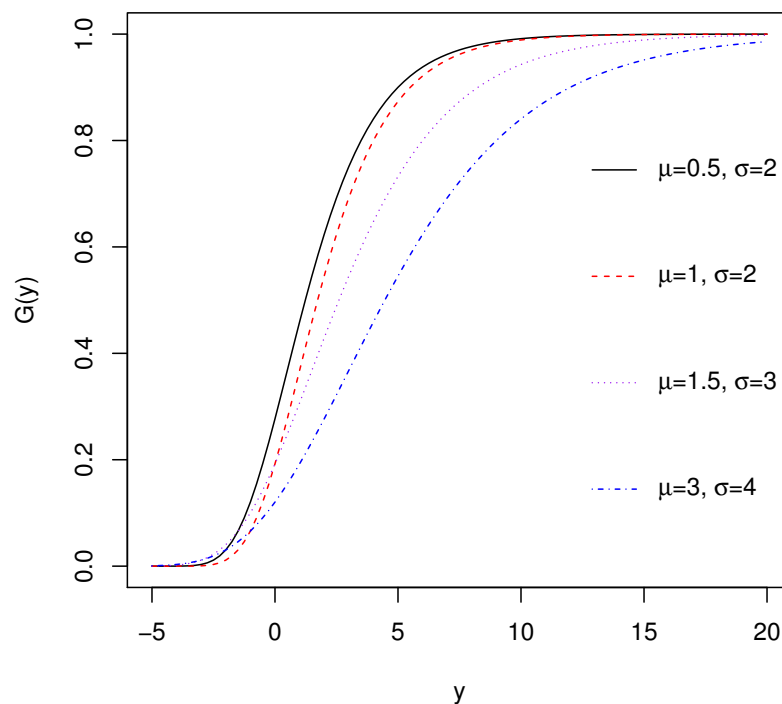


Figura 2.1: Gráficos da função de distribuição acumulada Gumbel univariada para alguns valores dos parâmetros.

Dentro da teoria dos valores extremos, a distribuição Gumbel é obtida como um dos casos particulares da classe de distribuições generalizada de valores extremos (GVE) (Markose e Alentorn, 2010).

Considere a variável padronizada $s = \frac{(y - \mu)}{\sigma}$, em que $y \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de localização e $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala. A função de distribuição acumulada GEV é dada por:

$$G_{\xi,s}(y) = \exp \left[-(1 + \xi s)^{-1/\xi} \right], \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

em que $\xi \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de forma. Deste modo, os três tipos de distribuições de valores extremos são: Gumbel ($\xi = 0$), Weibull ($\xi < 0$) e Fréchet ($\xi > 0$) (Kotz e Nadarajah, 2000).

Definição 2.2. Se $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$, então a função densidade de probabilidade (fdp) de Y tem a seguinte expressão (Ver Figura 2.3):

$$g(y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{y - \mu}{\sigma} \right) - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

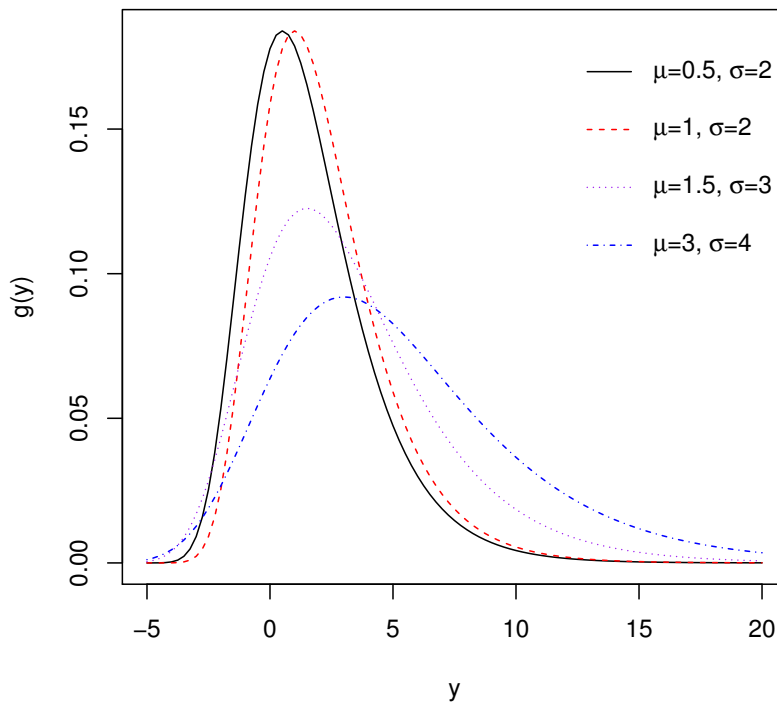


Figura 2.2: Gráficos da função densidade de probabilidade Gumbel univariada para alguns valores dos parâmetros.

A média e a variância do modelo Gumbel, são, respectivamente:

$$\mathbb{E}(Y) = \mu - \sigma\gamma \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2 \frac{\pi^2}{6},$$

em que $\gamma \approx 0,577$ é a constante de Euler.

Para a estimação dos parâmetros μ e σ do modelo Gumbel univariado, temos que a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\mu, \sigma; \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left[\exp \left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) + \left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}. \quad (2.3)$$

Desta forma, a função log-verossimilhança é expressa por:

$$\ell(\mu, \sigma; \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) - n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right). \quad (2.4)$$

Logo, os estimadores para μ e σ são obtidos resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \ell(\mu, \sigma; \mathbf{y}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \ell(\mu, \sigma; \mathbf{y}) = 0 \end{cases}$$

De acordo com (Mahdi e Cenac, 2005), a resolução do sistema é obtida numericamente e produz os estimadores de máxima verossimilhança

$$\hat{\mu} = -\hat{\sigma} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) \right],$$

e

$$\hat{\sigma} = \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^n y_i \exp \left(-\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right)}{\sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right)}.$$

2.2 Distribuições estáveis

O conceito de distribuições estáveis refere-se à estabilidade de uma variável aleatória. Trata-se de uma propriedade em que uma combinação linear de duas ou mais amostras independentes da variável tem a mesma distribuição, a menos de uma mudança nos parâmetros de locação e escala. Resultados avaliados em teoria das probabilidades mostram que todas as possíveis distribuições tendo esta propriedade são membros desta família de distribuições que possuem quatro parâmetros (Lukacs, 1970).

Definição 2.3. *Uma variável aleatória E possui distribuição estável, denotada por $E \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, se sua função característica é da seguinte forma:*

$$\phi_E(t) = \begin{cases} \exp [it\delta - |\gamma t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi)], & \text{se } \alpha \neq 1; \\ \exp [it\delta - |\gamma t|(1 + i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi)], & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

em que

- $\text{sgn}(t)$ é o sinal de t ;
- $\Phi = \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ se $\alpha \neq 1$, caso contrário $\Phi = \frac{2\log|t|}{\pi}$;
- $\delta \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação;
- $\beta \in [-1, 1]$, é o parâmetro de controle de assimetria da distribuição;
- $\gamma > 0$, é parâmetro de escala, chamado de dispersão;
- $\alpha \in (0, 2]$ é o expoente característico e controla o grau de estabilidade.

Um caso particular da definição acima, que será bastante utilizado, é o de distribuições α -estáveis positivas, cuja definição é dada a seguir:

Definição 2.4. *Seja $E \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Quando $\alpha \in (0, 1]$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0$ dizemos que a v.a $E > 0$ possui distribuição α -estável positiva e denotamos por $E_\alpha \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$. Neste caso, sua distribuição fica especificada pela seguinte transformada de Laplace:*

$$\mathbb{E}(e^{-tE}) = e^{-t^\alpha}, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Considere $B \in (0, 1)$ uma variável auxiliar tal que a distribuição conjunta de (E, B) é dada pela seguinte expressão:

$$f(E, B; \alpha) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} E^{-\frac{1}{1-\alpha}} c(B) e^{-c(B)E^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}, \quad E > 0, \quad (2.6)$$

em que, $c(B) = \left\{ \frac{\sin(\pi\alpha B)}{\sin(\pi B)} \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin\{(1-\alpha)\pi B\}}{\sin(\pi\alpha B)}$. Então, marginalmente a B , $E \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$ é α -estável positiva (Stephenson, 2009).

Corolário 2.1. *Considere V e U variáveis aleatórias independentes onde $V \sim \exp(1)$ e $U \sim \mathcal{U}[0, \pi]$. Então para $\alpha \in (0, 1)$ tem-se que $\left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sim \alpha$ -estável positiva.*

Demonstração. Ver (Kanter, 1975).

Os valores de E podem ser gerados através dos seguintes passos:

- ① Gere $U \sim \mathcal{U}(0, \pi)$ e $V \sim \exp(1)$;

② Obtenha $E^* = \left(\frac{a(U)}{V}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

Pelo Corolário (2.1), segue que $E^* \sim \alpha$ -estável.

Proposição 2.1. *Sejam $E_b \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$, $b \in \mathcal{B}$ em que \mathcal{B} é um conjunto de índices discretos. Se $H_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b} E_b$, em que $a \in \mathcal{A}$ e $\omega_{a,b}$ são constantes não-negativas, então $H_a \sim S(\alpha, 0, \gamma_a, 0)$, com $\gamma_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b}^\alpha$.*

Demonstração. Com efeito, seja $\phi_{H_\ell}(\cdot)$ a função característica de H_ℓ , então:

$$\begin{aligned} \phi_{H_a}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ it \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b} E_b \right\} \right) \quad (\text{por independência de } E_b, b \in \mathcal{B}) \\ &= \prod_{b \in \mathcal{B}} \mathbb{E} (\exp \{ it \omega_{a,b} E_b \}) \\ &= \prod_{b \in \mathcal{B}} \phi_{E_b}(\omega_{a,b} t) \\ &= \prod_{b \in \mathcal{B}} e^{-(\omega_{a,b} t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi_{H_a}(t) = \exp \left\{ -t^\alpha \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b}^\alpha \right\},$$

portanto

$$H_a \sim S(\alpha, 0, \gamma_a, 0),$$

em que $\gamma_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b}^\alpha$. ■

Teorema 2.1 (Densidade assintótica de H_a). *Seja $H_a \sim S(\alpha, 0, \gamma_a, 0)$ com $0 < \alpha \leq 1$. Se para algum m , $E_b \rightarrow \infty$, então $h_a \rightarrow \infty$ e pelo Teorema 1.12 (Nolan, 2012)*

$$P(H_a > h_a) \sim \gamma_\ell c_\alpha h_a^{-\alpha},$$

em que $c_\alpha = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$.

Demonstração. Ver (Nolan, 2012).

Deste modo, a função densidade de probabilidade (aproximada) de H_a é dada por

$$\begin{aligned} f(h_a; \alpha) &\sim -\frac{\partial}{\partial h_a} P(H_a > h_a; \alpha, \gamma_a) \\ &\sim -\left[\frac{\partial}{\partial h_a} \gamma_a c_\alpha h_a^{-\alpha} \right] \\ &\sim \alpha \gamma_a c_\alpha h_a^{-(\alpha+1)}, \quad \text{com } h_a > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 2.5. Dizemos que a variável aleatória M possui distribuição exponencial estável com vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \mu, \sigma)$, se $M = \mu + \sigma \log(E)$. Notação: $M \sim \exp S(\boldsymbol{\theta})$.

2.3 Distribuições condicionais G-exponencializadas

Outro conceito que será muito utilizado nesta dissertação, é o de distribuições condicionais G-exponencializadas, onde as funções de distribuições acumuladas G (de variáveis aleatórias) podem ser elevadas a um expoente E , que representa uma variável aleatória. Este tipo de distribuição, com E fixo, foi apresentada primeiramente por (Lehmann, 1953) no contexto de testes de hipóteses, mas aqui nós o reformulamos com objetivo de introduzir a dependência em distribuições Gumbel multivariadas, que será abordado no próximo capítulo.

Definição 2.6. Sejam Y e $E > 0$ duas variáveis aleatórias. Dizemos que condicional a E , Y possui distribuição G-Exponencializada, se a distribuição de Y for dada por:

$$F(y; \boldsymbol{\theta}|E) = [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E, \quad (2.7)$$

em que G é chamada de função de distribuição de base dependendo do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

Exemplo 2.1. Seja $G \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$, isto é, a distribuição de base é Gumbel. Então, $Y|E \sim \text{Gumbel}(\mu + \sigma \log E, \sigma)$, ou seja,

$$P(Y \leq y|E) = \exp \left\{ - \exp \left\{ - \frac{y - (\mu + \sigma \log E)}{\sigma} \right\} \right\}. \quad (2.8)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} P(Y \leq y|E) &= [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E \\ &= \left[\exp \left\{ - \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right\} \right]^E \\ &= \exp \left\{ -E \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \exp \{ \log E \} \times \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \exp \left\{ \frac{\sigma \log E}{\sigma} - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \exp \left\{ - \frac{y - (\mu + \sigma \log E)}{\sigma} \right\} \right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Seja $G \sim \text{Fréchet}(\mu, \sigma, \beta)$, isto é, a distribuição de base é Fréchet. Então, $Y|E \sim \text{Fréchet}\left(\mu, \sigma E^{\frac{1}{\beta}}, \beta\right)$, ou seja,*

$$P(Y \leq y|E) = \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\frac{\sigma}{E}} \right)^{-\beta} \right\}. \quad (2.9)$$

Demonstração. :

$$\begin{aligned} P(Y \leq y|E) &= [G(y; \boldsymbol{\theta})]^E \\ &= \left[\exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right\} \right]^E \\ &= \exp \left\{ -E \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\frac{\sigma}{E^{-1/\beta}}} \right)^{-\beta} \right\}. \blacksquare \end{aligned}$$

2.4 Marginais univariadas de distribuições condicionais G-exponencializadas

Considere que a variável condicional $Y|E$ tenha distribuição G-exponencializada (2.3), então, marginalmente podemos expressar a função de distribuição da v.a. Y na seguinte maneira:

$$F(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \mathbb{E}(P(Y \leq y|E)) = \mathbb{E}([G(y; \boldsymbol{\theta})]^E), \quad (2.10)$$

em que esse o valor esperado é calculado com relação à distribuição da variável E .

Um resultado obtido a partir de (2.10) é que quando consideramos que a variável aleatória E possui distribuição α -estável, isto é, $E \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$. Pois, aplicando a transformada de Laplace (2.5), obtemos marginais da seguinte forma:

$$F(y; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \exp \left\{ - [-\log(G(y; \boldsymbol{\theta}))]^\alpha \right\}. \quad (2.11)$$

Exemplo 2.3. *Se $Y|E \sim \text{Gumbel}(\mu + \sigma \log E, \sigma)$ com $E \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$, então a marginal $Y \sim \text{Gumbel}\left(\mu, \frac{\sigma}{\alpha}\right)$.*

Demonstração. :

$$\begin{aligned} P(Y \leq y|E) &= \exp \left\{ \exp \left\{ - \frac{y - (\mu + \sigma \log E)}{\sigma} \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ -E \exp \left\{ \left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando esperança em ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= \exp \left\{ - \left\{ \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right\}^\alpha \right\} \\ &= \exp \left\{ - \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\frac{\sigma}{\alpha}} \right) \right\} \right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 2.4. Se $Y|E \sim \text{Fréchet}(\mu, \sigma E^{\frac{1}{\beta}}, \beta)$ com $E \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$, então $Y \sim \text{Fréchet}(\mu, \sigma, \beta\alpha)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} P(Y \leq y|E) &= \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\left(\frac{\sigma}{E^{-1/\beta}} \right)} \right)^{-\beta} \right\} \\ &= \exp \left\{ -E \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right\}. \end{aligned}$$

e, daí aplicando-se esperança em ambos os lados e, em seguida, a transformada de Laplace, vem que

$$P(Y \leq y) = \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta\alpha} \right\}. \quad \blacksquare$$

Estes exemplos nos dizem que as respectivas distribuições, condicionais e marginais pertencem à mesma família.

2.5 Distribuição de Dirichlet

É uma família de distribuições de probabilidades contínuas para variáveis aleatórias multivariadas. Esta distribuição é definida pelo vetor $\boldsymbol{\alpha}$ de números reais positivos. Em geral, ela é vista como uma generalização multivariada da distribuição beta (Blackwell e MacQueen, 1973).

Definição 2.7. Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_K)$ um vetor aleatório. Dizemos que \mathbf{X} possui distribuição Dirichlet com vetor de parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$, e representamos por $\mathbf{X} \sim \text{Dir}(\boldsymbol{\alpha})$, se sua função densidade tem a seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_K; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K) = \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i - 1}. \quad (2.12)$$

onde $0 < x_i < 1$ para $i = 1, 2, \dots, K$ e com $\sum_{i=1}^K x_i = 1$.

A constante normalizadora, $B(\boldsymbol{\alpha})$, é a função Beta multivariada, na qual pode ser expressada em termos da função gamma dada por

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\prod_{i=1}^K \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^K \alpha_i\right)}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_K).$$

Propriedades:

Seja $X = (X_1, X_2, \dots, X_k) \sim Dir(\boldsymbol{\alpha})$, significando que as $K - 1$ primeiras componentes possuem a distribuição precedente e que $X_K = 1 - X_1 - \dots - X_{K-1}$. Sendo $\alpha_0 = \sum_{i=1}^K \alpha_i$, temos que:

① Valor esperado

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_0},$$

e

$$\mathbb{E}(\log(X_i)) = \psi(\alpha_i) - \psi(\alpha_0).$$

② Variância

$$\mathbb{V}ar(X_i) = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}.$$

③ Covariância

$$\mathbb{C}ov(X_i, X_j) = \frac{-\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}, \quad i \neq j,$$

e

$$\mathbb{C}ov(\log X_i, \log X_j) = \psi'(\alpha_i) \delta_{i,j} - \psi'(\alpha_0).$$

onde ψ é a função digamma, ψ' é a função trigamma e $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker, definido na seguinte maneira:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Um caso particular desta distribuição que usaremos nos próximos é a distribuição Dirichlet simétrica, isto é, quando $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k) \sim \text{Dirichlet}(1, 1, \dots, 1)$.

2.6 Algoritmos EM e MCEM

Nesta seção apresentamos duas técnicas computacionais iterativas para maximização em modelos com variáveis latentes. O que ocorre, é que muitas vezes os cálculos são bastante complicados, pois o processo para encontrar uma solução de probabilidade máxima requer as derivadas da função de probabilidade em relação a todos os valores desconhecidos (parâmetros e variáveis latentes) e exige simultaneamente, a resolução das equações resultantes. Em modelos estatísticos com variáveis latentes, isso geralmente não é possível. Em vez disso, o resultado é tipicamente um conjunto de equações interligadas em que a solução para os parâmetros exige os valores das variáveis latentes e vice-versa; daí substituindo um conjunto de equações na outra produz uma equação insolúvel (Chuong et al., 2008).

O algoritmo *Expectation Maximization* (EM) tem como base a ideia de substituir uma difícil tarefa de maximização da função de verossimilhança por uma sequência de maximizações mais fáceis, cujo limite é resposta para o problema original, possibilitando a estimação de parâmetros em modelos probabilísticos de variáveis latentes. O processo ocorre por meio de uma rotina iterativa que requer dois cálculos primários para cada iteração: Primeiro faz-se a computação de uma esperança condicional particular da log-verossimilhança (Etapa E) e depois a maximização desta esperança sobre os parâmetros relevantes (etapa M). Ver (Casella e Berger, 2010, Chuong et al., 2008).

Considere \mathbf{y} o vetor dos dados observados e \mathbf{y}^* o vetor dos dados latentes tais que admitem a seguinte representação hierárquica:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}|\mathbf{y}^* &\sim f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}^*) \\ \mathbf{y}^* &\sim f(\mathbf{y}^*; \boldsymbol{\theta}).\end{aligned}$$

O vetor $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{y}^*)$ é chamado de dados completos ou aumentados e possui função densidade de probabilidade $f(\mathbf{y}_c; \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}^*) \times f(\mathbf{y}^*; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$.

Sejam $\ell_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_c)$ e $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$, respectivamente, as funções log-verossimilhanças dos dados completos e dos dados observados. Segundo (Zhu e Lee, 2001), na maioria das aplica-

ções estatísticas, a função log-verossimilhança dos dados completos geralmente tem forma mais simples que a log-verossimilhança dos dados observados.

Defina $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ como a estimativa da k -ésima iteração e $f(\mathbf{y}^*; \hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{y})$ a distribuição condicional de \mathbf{Y}^* dados observados com esperança $\mathbf{E}_{\mathbf{Y}^* | \mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}}$. Cada iteração do algoritmo EM envolve dois passos, um passo E (esperança) e um passo M (maximização), definido da seguinte maneira:

① **Passo E:** Na $(k + 1)$ -ésima iteração compute a quantidade:

$$\tilde{\ell}_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}^* | \mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}} \left(\ell_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) \right).$$

② **Passo M:** Encontre $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} = \text{Argmax}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \left(\tilde{\ell}_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) \right)$.

Estes passos devem ser repetidos até se atingir uma convergência. Podemos adotar como critério de parada $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\| < \epsilon$ ou $\|\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}; \mathbf{y}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y})\| < \epsilon$ em que ϵ é um valor, maior do que zero, especificado para o erro de aproximação; e $\|a\|$ é a norma do vetor a .

Em muitas aplicações, a esperança condicional $\mathbb{E}_{\mathbf{Y}^* | \mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}} \left(\ell_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}; \mathbf{y}_c) \right)$ do passo E apresenta-se complexa. Quando este problema ocorre, geralmente, usamos o método de Monte Carlo para solucioná-lo e, assim, o algoritmo EM passa a ser chamado *Monte Carlo Expectation Maximization* (MCEM) (Levine e Casella, 2001, Wei e Tanner, 1990).

Capítulo 3

Classe Gumbel multivariada para dados dependentes

Neste capítulo estudaremos o modelo Gumbel multivariado para dados dependentes proposto por (Fougeres et al., 2009). Além disso, desenvolveremos alguns modelos especiais, propriedades e discutiremos métodos para a estimação e inferência para os parâmetros destes modelos.

3.1 Modelo Gumbel multivariado: Caso geral

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} conjuntos de índices discretos, onde \mathcal{A} é assumido finito. Além disso, sejam $\{\omega_{a,b} : a \in \mathcal{A} \text{ e } b \in \mathcal{B}\}$ constantes não-negativas e $\{E_b : b \in \mathcal{B}\}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas α -estáveis. Assumimos, sem perda de generalidade, que $H_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b} E_b$ converge quase certamente para cada $a \in \mathcal{A}$.

Assuma ainda que $\{Y_a | H_a : a \in \mathcal{A}\}$ são variáveis aleatórias condicionalmente independentes tais que $Y_a | H_a \sim \text{Gumbel}(\mu_a + \sigma_a \log h_a, \sigma_a)$, isto é, possuem função de distribuição:

$$F(y_a; \boldsymbol{\theta}_a | h_a) = \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y_a - (\mu_a + \sigma_a \log h_a)}{\sigma_a} \right) \right\}, \quad y_a \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Considere ainda \mathbf{H} um vetor cujas coordenadas são marginais formadas por mis-

turas de distribuições α -estáveis positivas. Então,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h}) &= \prod_{a \in \mathcal{A}} F(y_a; \boldsymbol{\theta}_a | h_a) \quad (\text{pela Equação (3.1)}) \\ &= \prod_{a \in \mathcal{A}} \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y_a - (\mu_a + \sigma_a \log h_a)}{\sigma_a} \right) \right\} \\ &= \prod_{a \in \mathcal{A}} \exp \left\{ - h_a \exp \left(- \frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando esperança em ambos os lados da igualdade, tem-se que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) &= \mathbb{E} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}} \exp \left\{ - \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b} E_b \exp \left(- \frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right) \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - E_b \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_{a,b} \exp \left(- \frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right) \right\} \right). \end{aligned}$$

Como $E_b, b \in \mathcal{B}$, são variáveis aleatórias independentes tais que $E_b \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$, aplicando (2.5), obtemos que:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_{a,b} e^{-\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}} \right)^\alpha \right\}, \quad y_a \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

O modelo descrito acima é chamado de modelo Gumbel multivariado para dados dependentes, sendo denotado por $\mathbf{Y} \sim GM(\boldsymbol{\theta}, \alpha)$. Veremos mais adiante que α será o parâmetro responsável por mensurar a dependência entre as variáveis.

Nas Figuras 3.1 e 3.2 apresentamos, respectivamente, os gráficos das funções de distribuição e densidade do modelo gumbel bivariado para b fixo e $\alpha = 0.5$, $\mu_1 = 29$, $\mu_2 = 31$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\omega_{1,b} = \omega_{2,b} = 0.5$.

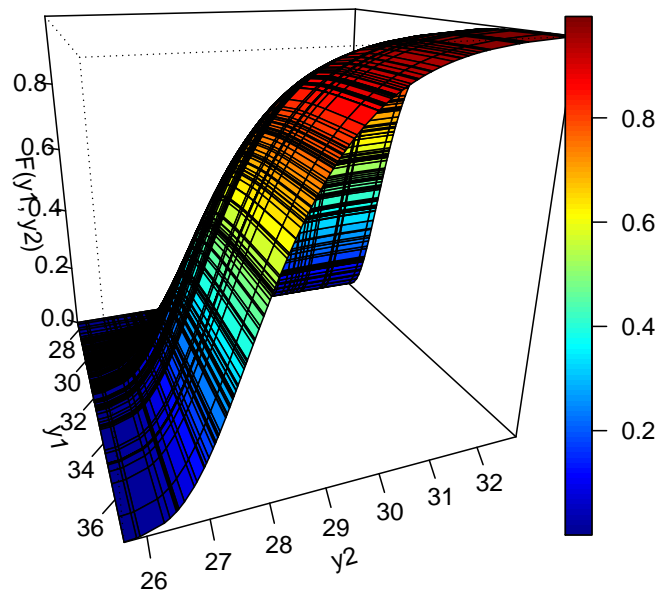


Figura 3.1: Gráfico da fda Gumbel bivariada.

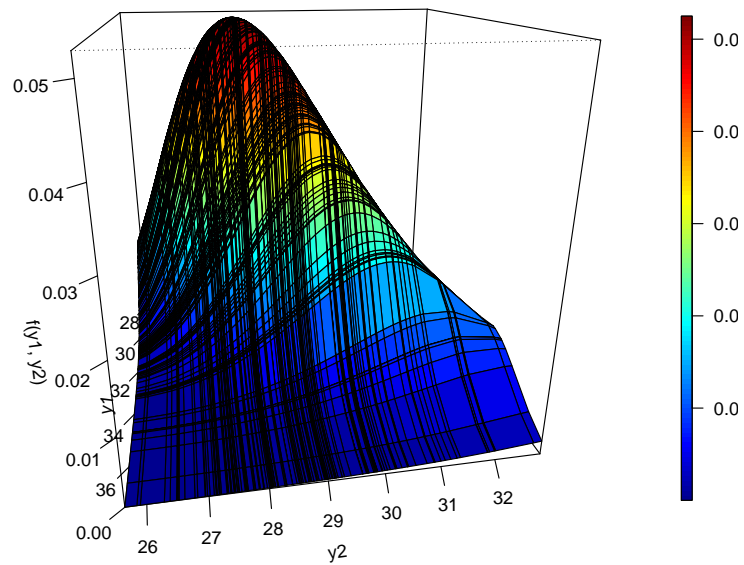


Figura 3.2: Gráfico da fdp Gumbel bivariada.

3.2 Modelos especiais

Nesta seção apresentaremos vários modelos multivariados que decorrem imediatamente do modelo Gumbel multivariado geral, construído na seção anterior. Os modelos são desenvolvidos em vários contextos, o que os torna bastante úteis em aplicações práticas.

3.2.1 Modelo de efeitos aleatórios

O modelo de efeitos aleatórios é definido da seguinte maneira:

$$Y_{i,j} = \mu + \tau_i + G_{i,j},$$

sendo μ uma constante, $\tau_i \sim \text{ExpS}(\alpha, 0, \sigma)$, $G_{i,j} \sim \text{Gumbel}(0, \sigma)$ e todas as variáveis são independentes. Definido-se $\mathcal{A} = \{(i, j); 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, m\}$ e $\omega_{(i,j),k} = 1_{\{i=k\}}$, obtemos a seguinte função de distribuição:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \prod_{i=1}^m \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^{n_i} e^{-\frac{y_{i,j} - \mu}{\sigma}} \right)^\alpha \right\}. \quad (3.3)$$

3.2.2 Modelos para séries temporais

Um processo estacionário linear estável-positivo pode ser obtido fazendo-se:

$$H_a = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i E_{a-i},$$

no qual $E_i \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$, ω_i são constantes não-negativas e a soma converge em distribuição se $\sum \omega_i^\alpha < \infty$.

Definindo:

$$Y_a = \mu_a + \sigma \log(H_a) + G_a, \quad (3.4)$$

é obtido um modelo Gumbel para séries temporais. Em particular (3.4) inclui modelos ARMA latentes. A seguir temos dois casos mais simples derivados deste:

- ① **Modelo de média móvel latente:** Suponha que $H_a = \omega_0 E_a + \omega_1 E_{a-1} + \dots + \omega_q E_{a-q}$ e Y_a definido pela expressão anterior, onde Y_a é definido pela expressão (3.4), onde $E_i \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$, $G_a \sim \text{Gumbel}(0, \sigma)$, e todas as variáveis são mutuamente

independentes. Então, para $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\mathcal{B} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, temos o seguinte modelo Gumbel multivariado:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \prod_{k=1-q}^n \exp \left\{ - \left(\sum_{a=1 \vee k}^{n \wedge (k+q)} \omega_{a-k} e^{-\frac{y_a - \mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right\}, \quad (3.5)$$

onde, $\max(1, k) \leq a \leq \max(n, k + q)$.

② **Modelo autorregressivo latente:** Para $0 < \rho < 1$ definimos o processo autorregressivo estável positivo H_a por:

$$H_a = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_{a-i}. \quad (3.6)$$

Seja Y_a dada por (3.4) com $E_i \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$ e $G_a \sim \text{Gumbel}(0, \sigma)$. Pela definição de H_a temos:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_{-i} \\ H_1 &= \rho H_0 + E_1 \\ &\vdots \\ H_n &= \rho^n H_0 + \rho^{n-1} E_1 + \dots + \rho E_{n-1} + E_n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

e, além disso, por pelo teorema (2.1), $H_0 \sim S\left(\alpha, 0, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{i\alpha}, 0\right)$. Então, H_0 tem a mesma distribuição

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^{i\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} E_0 = (1 - \rho^\alpha)^{\frac{-1}{\alpha}} E_0, \quad (\text{pela convergência da série geométrica}),$$

é independente de E_1, E_2, \dots, E_n . Considere $\mathcal{A} = \{0, \dots, n\}$, $\mathcal{B} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,

$$\omega_{a,b} = \begin{cases} \rho^a (1 - \rho^\alpha)^{\frac{-1}{\alpha}}, & \text{se } b = 0; \\ \rho^{a-b}, & \text{se } b = 1, \dots, a; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, a função de distribuição é a seguinte:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \exp \left\{ -(1 - \rho^\alpha)^{-1} \left(\sum_{a=0}^n \rho^a e^{-\frac{y_a - \mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right\} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ - \left(\sum_{a=i}^n \rho^{a-i} e^{-\frac{y_a - \mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right\} \quad (3.8)$$

3.2.3 Modelo espacial de média móvel latente

Considere $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região contínua do plano. Seja $n_{i,j}$ um sistema de vizinhanças com as seguintes propriedades: $(i, j) \in n_{(i,j)}$, $(k, l) \in n_{(i,j)} \Leftrightarrow (i, j) \in n_{(k,l)}$.

Um exemplo simples é quando as vizinhanças são os quatro pontos mais próximos e o próprio ponto, ou seja, quando $n_{(i,j)} = \{(i, j), (i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1), (i, j + 1)\}$ (Ver Figura 3.3 caso A).

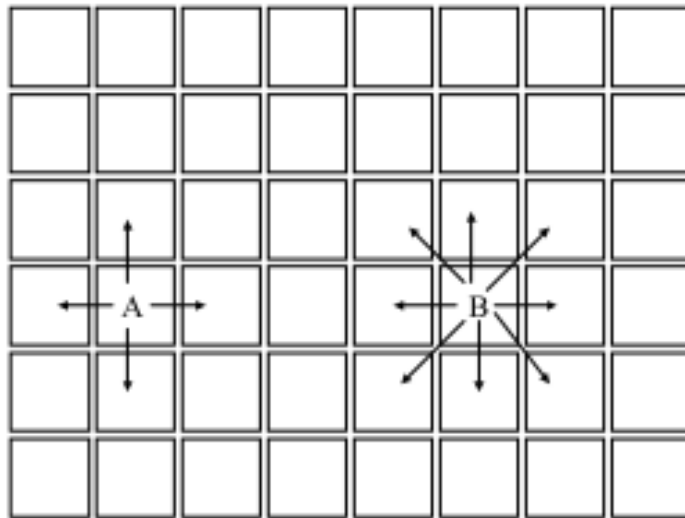


Figura 3.3: Sistemas de vizinhanças A e B.

Sejam $\{E_{i,j}; -\infty < i, j < \infty\}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas α -estáveis positivas e defina $H_{i,j} = \sum_{(k,l) \in n_{(i,j)}} \delta E_{k,l}$, onde δ é uma constante positiva. Considere:

$$Y_{i,j} = \mu_{i,j} + \sigma \log(H_{i,j}) + G_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (3.9)$$

em que as $G_{i,j}$ são mutuamente independentes si e independentes de $E_{i,j}$, e $G_{i,j} \sim \text{Gumbel}(0, \sigma)$.

Admita que:

$$\omega_{(i,j),(k,l)} = \begin{cases} \delta, & \text{se } (i, j) \in n_{(k,l)}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para escrever a distribuição conjunta é conveniente usar a notação

$$\bar{n}_{(k,l)} = n_{(k,l)} \cap (i, j); 1 \leq i, j \leq n.$$

Logo, obtemos:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \prod_{(k,l)} \exp \left\{ -\delta^\alpha \left(\sum_{(i,j) \in \bar{n}_{(k,l)}} e^{-\frac{y_{i,j} - \mu_{i,j}}{\sigma}} \right)^\alpha \right\}.$$

3.2.4 Modelo hierárquico

Considere o modelo:

$$Y_{i,j,k} = \mu + \tau_i + \eta_{i,j} + G_{i,j,k}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq r_{i,j},$$

em que μ é uma constante $\tau_i \sim \text{ExpS}(\beta, 0, \frac{\sigma}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$, $\eta_{i,j} \sim \text{ExpS}(\beta, 0, \sigma)$, $G_{i,j,k} \sim \text{Gumbel}(0, \sigma)$ e todas as variáveis são independentes. Após alguns cálculos obtemos:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \prod_{i=1}^m \exp \left\{ - \left[\sum_{j=1}^{\eta_i} \left(\sum_{k=1}^{r_{i,j}} e^{-\frac{y_{i,j,k} - \mu}{\sigma}} \right)^\alpha \right]^\beta \right\}. \quad (3.10)$$

3.3 Propriedades da classe Gumbel multivariada

Nesta seção algumas propriedades do modelo Gumbel multivariado serão desenvolvidas.

3.3.1 Distribuições marginais e do máximo

Em qualquer conjunto $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ não-vazio, as distribuições marginais e do máximo pertencem à mesma família Gumbel.

Demonstração. Para a prova, consideremos a restrição que todos os parâmetros de escala assumem o mesmo valor, isto é, que $\sigma_a = \sigma$, $a \in \mathcal{A}$.

(i) Seja $Y^* = \max_{a \in \mathcal{A}_0} Y_a$. Então,

$$\begin{aligned} F(y^*; \boldsymbol{\theta}, \alpha) &= \mathbb{E} \left(P \left(\max_{a \in \mathcal{A}_0} Y_a \leq y^* \mid \mathbf{H} \right) \right) \quad (\text{Por independência condicional}) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_0} P(Y_a \leq y^* \mid H_a) \right). \end{aligned}$$

Como $Y_a \mid H_a \sim \text{Gumbel}(\mu_a + \sigma \log H_a, \sigma)$, temos que,

$$\begin{aligned} F(y^*; \boldsymbol{\theta}, \alpha) &= \mathbb{E} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_0} \exp \left\{ -H_a e^{-\left(\frac{y^* - \mu_a}{\sigma}\right)} \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{a \in \mathcal{A}_0} H_a e^{-\left(\frac{y^* - \mu_a}{\sigma}\right)} \right\} \right). \end{aligned}$$

Substituindo $H_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b} E_b$, temos:

$$\begin{aligned} F(y^*; \boldsymbol{\theta}, \alpha) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{a \in \mathcal{A}_0} \sum_{b \in \mathcal{B}} \omega_{a,b} E_b e^{-\left(\frac{y^* - \mu_a}{\sigma}\right)} \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - E_b \sum_{a \in \mathcal{A}_0} \omega_{a,b} e^{-\left(\frac{y^* - \mu_a}{\sigma}\right)} \right\} \right). \end{aligned}$$

Agora, como $E_b \sim S(\alpha, 0, 1, 0)$ são independentes para cada $b \in \mathcal{B}$, aplicando a transformada de Laplace (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} F(y^*; \boldsymbol{\theta}, \alpha) &= \prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_0} \omega_{a,b} e^{-\left(\frac{y^* - \mu_a}{\sigma}\right)} \right)^\alpha \right\} \\ &= \prod_{b \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_0} \omega_{a,b} e^{-\frac{y^*}{\sigma}} e^{\frac{\mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right\} \\ &= \exp \left\{ - e^{-\frac{y^*}{\sigma/\alpha}} \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_0} \omega_{a,b} e^{\frac{\mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos que:

$$F(y^*; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y^* - \mu^*}{\sigma^*} \right) \right\}, \quad (3.11)$$

em que $\mu^* = \sigma^* \log \left[\sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_0} \omega_{a,b} e^{\frac{\mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right]$ e $\sigma^* = \frac{\sigma}{\alpha}$. Portanto,

$$Y^* \sim \text{Gumbel}(\mu^*, \sigma^*).$$

que pertence a família Gumbel.

(ii) Em particular, se \mathcal{A}_0 for um conjunto unitário temos que neste caso, as distribuições marginais são dadas por:

$$Y_a \sim \text{Gumbel} \left(\sigma^* \log \left[\sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\omega_{a,b} e^{\frac{\mu_a}{\sigma}} \right)^\alpha \right], \sigma^* \right), \quad a \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

3.3.2 Dependência positiva

De acordo com (Oliveira, 2012) as ideias de dependência positiva foram exploradas para exemplos particulares e relevantes. Por exemplo, foram utilizados procedimentos estatísticos envolvendo pares de variáveis aleatórias dependentes, onde tentavam detectar se grandes valores de uma variável tendem a ser associados a grandes valores da outra variável, ou, para saber se as variáveis aleatórias tendem a aumentar ou diminuir

simultaneamente. Além das distribuições particulares consideradas, houve interesse na distribuição de pares de variáveis aleatórias e foi introduzida uma noção de dependência bem adaptada para este caso, notando imediatamente algumas consequências sobre a covariância entre elas. Assim, era natural que as noções de dependência positiva surgissem em um contexto bivariado. Posteriormente, essa ideia foi estendida a distribuições multivariadas à noção de associação. As principais ideias das noções de dependência positiva são a tendência global para aumentar ou diminuir a família de variáveis aleatórias, e o fato de que a aproximação à independência é completamente caracterizada pela estrutura da covariância.

Para o caso geral, (Shaked, 1982) definiu que Y_1, \dots, Y_n são positivamente dependentes quando:

$$\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\prod_{i=1}^n F(y_i; \boldsymbol{\theta}_i)} > 1.$$

Sendo assim, se $\mathbf{Y} \sim GM(\boldsymbol{\theta}, \alpha)$, então pelas propriedades anteriores, vem:

$$\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{\prod_{a \in \mathcal{A}} F(y_a; \boldsymbol{\theta}_a, \alpha)} = \frac{\exp \left\{ - \sum_{b \in \mathcal{B}} \left[\sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_{a,b} \exp \left(- \frac{y_a - \mu_a}{\sigma} \right) \right]^\alpha \right\}}{\exp \left\{ - \sum_{a \in \mathcal{A}} \exp \left(- \frac{y_a - \sigma^* \log \left(\sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b} e^{\mu_a/\sigma})^\alpha \right)}{\sigma^*} \right) \right\}}. \quad (3.12)$$

Considere que,

$$v_{a,b} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_{a,b} \exp \left(- \frac{y_a - \mu_a}{\sigma} \right), \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (3.13)$$

Agora, aplicando logaritmo em ambos os lado da igualdade da Equação (3.12), vem:

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{\prod_{a \in \mathcal{A}} F(y_a; \boldsymbol{\theta}_a, \alpha)} \right) &= - \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} v_{a,b} \right)^\alpha + \sum_{a \in \mathcal{A}} \exp \left(- \frac{y_a - \sigma^* \log \left(\sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b} e^{\frac{\mu_a}{\sigma}})^\alpha \right)}{\sigma^*} \right) \\ &= - \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} v_{a,b} \right)^\alpha + \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(e^{-\frac{y_a}{\sigma^*}} \sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b} e^{\frac{\mu_a}{\sigma}})^\alpha \right) \\ &= - \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} v_{a,b} \right)^\alpha + \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b})^\alpha \exp \left(- \frac{y_a - \mu_a}{\sigma} \right)^\alpha \right) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{b \in \mathcal{B}} v_{a,b}^\alpha \right) - \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} v_{a,b} \right)^\alpha. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, quando $\alpha \rightarrow 1$ a razão $\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{\prod_{a \in \mathcal{A}} F(y_a; \boldsymbol{\theta}_a, \alpha)} \rightarrow 1$, isto é, as variáveis tendem a completa independência. Por outro lado, quando $\alpha \rightarrow 0$ a razão $\frac{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{\prod_{a \in \mathcal{A}} F(y_a; \boldsymbol{\theta}_a, \alpha)}$ será sempre maior do que 1 e, neste caso, as variáveis tornam-se mais correlacionadas. Desta forma, dizemos que o parâmetro α pode ser interpretado como o parâmetro responsável para medir o grau de dependência entre as variáveis.

3.3.3 Função densidade conjunta

A função de densidade de $\mathbf{Y} \sim GM(\boldsymbol{\theta}, \alpha)$ é dada por,

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \frac{\partial^{(|\mathcal{A}|)} F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{\partial y_1, \dots, \partial y_{|\mathcal{A}|}} = F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha),$$

em que,

$$D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = D_{1,2,\dots,(|\mathcal{A}|-1)}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{|\mathcal{A}|}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) + \frac{\partial}{\partial y_{|\mathcal{A}|}} D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha).$$

Definindo, $D_0(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = 1$, então:

$$D_a(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \frac{1}{\sigma_a} \sum_{b \in \mathcal{B}} \alpha v_{a,b} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} v_{a,b} \right)^{\alpha-1}, \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, |\mathcal{A}|.$$

A quantidade $D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) = \frac{f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}$ representa a taxa de falha reversa multivariada (Kundu e Gupta, 2010, Kundu et al., 2014).

Demonstração. Note que

$$\frac{\partial F}{\partial y_a} = F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_a(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Procedendo por diferenciação recursiva, teremos que se

$$\frac{\partial^{(|\mathcal{A}|-1)} F}{\partial y_1 \dots \partial y_{|\mathcal{A}|-1}} = F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(|\mathcal{A}|)} F}{\partial y_1, \dots, \partial y_{|\mathcal{A}|}} &= \frac{\partial}{\partial y_{|\mathcal{A}|}} [F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)] \\ &= F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{|\mathcal{A}|}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) \\ &\quad + F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) \frac{\partial}{\partial y_{|\mathcal{A}|}} D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) \\ &= F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha) D_{1,2,\dots,|\mathcal{A}|}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \alpha). \end{aligned}$$

Esta fórmula recursiva da densidade é conveniente para programação computacional.

Observa-se que a função densidade conjunta do modelo não possui uma forma fechada, pois depende de algumas quantidades obtidas de forma recursiva. Entretanto, existem situações em que temos o interesse de estudar observações agrupadas, de forma tal que os grupos sejam independentes, mas que suas respectivas observações compartilhem de algum efeito aleatório particular. Sendo assim, nas subseções seguintes, trataremos deste caso.

3.3.4 Função densidade conjunta por grupos

Considere que a família de subconjuntos $\{\mathcal{A}_b; b \in \mathcal{B}\}$ é uma partição de \mathcal{A} e que para cada $b \in \mathcal{B}$ temos observações da forma $\mathbf{y}_b = (y_1, y_2, \dots, y_{|\mathcal{A}_b|})$ em \mathcal{A}_b .

De (3.2) obtemos que a função distribuição marginal do vetor aleatório $\mathbf{Y}_b \sim \text{MGMD}(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha)$ é dada por:

$$F(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) = e^{-z_b}, \quad z_b > 0, \quad (3.15)$$

em que é admitido que $z_b = \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} v_{a,b} \right)^\alpha$ com $v_{a,b} = \omega_{a,b} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{a,b} - \mu_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) \right\}$.

Proposição 3.1. *A função densidade conjunta de (3.15), é expressa por:*

$$f(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) = \alpha^{|\mathcal{A}_b|} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} z_b^{1 - \frac{|\mathcal{A}_b|}{\alpha}} Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b, \alpha), \quad (3.16)$$

em que $\boldsymbol{\theta}_b = (\boldsymbol{\mu}_b, \boldsymbol{\sigma}_b)$ é o sub-vetor de parâmetros e $Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b, \alpha)$ é um polinômio de ordem $(|\mathcal{A}_b| - 1)$ em z_b (Shi, 1995), isto é,

$$Q_1(z_b, \alpha) = 1;$$

$$Q_2(z_b, \alpha) = z_b + \frac{1}{\alpha} - 1;$$

$$Q_3(z_b, \alpha) = z_b^2 + 3 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) z_b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right);$$

$$Q_4(z_b, \alpha) = z_b^3 + 6 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) z_b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{11}{\alpha} - 7 \right) z_b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{3}{\alpha} - 1 \right);$$

$$Q_5(z_b, \alpha) = z_b^4 + 10 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) z_b^3 + 5 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{7}{\alpha} - 5 \right) z_b^2;$$

$$+ 5 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{5}{\alpha} - 3 \right) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{3}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{4}{\alpha} - 1 \right).$$

De modo geral, para $|\mathcal{A}_b| \geq 2$:

$$Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b, \alpha) = \left(\frac{|\mathcal{A}_b| - 1 - \alpha}{\alpha} + z_b \right) Q_{|\mathcal{A}_b|-1}(z_b, \alpha) - z_b \frac{\partial}{\partial z_b} Q_{|\mathcal{A}_b|-1}(z_b, \alpha).$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{a,b}} &= \frac{\partial F(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial z_b} \times \frac{\partial z_b}{\partial v_{a,b}} \times \frac{\partial v_{a,b}}{\partial y_{a,b}} \\ &= \frac{\omega_{a,b} e^{-z_b} \times \alpha \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} v_{a,b} \right)^{\alpha-1} \times \exp \left\{ - \left(\frac{y_{a,b} - \mu_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) \right\}}{\sigma_{a,b}} \\ &= \frac{e^{-z_b} \times \alpha \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} v_{a,b} \right)^{\alpha} \times v_{a,b}}{\sigma_{a,b} \sum_{a \in \mathcal{A}_b} v_{a,b}} \\ &= \frac{\alpha e^{-z_b} \times z_b \times v_{a,b}}{\sigma_{a,b} \left[\left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} v_{a,b} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= \frac{\alpha e^{-z_b} \times z_b \times v_{a,b}}{\sigma_{a,b} z_b^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= \frac{\alpha v_{a,b} e^{-z_b} z_b^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\sigma_{a,b}}, \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, |\mathcal{A}_b|. \end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$f(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) = \frac{\partial^{(|\mathcal{A}_b|)} F(\mathbf{y}_b; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{1,b} \cdots \partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}.$$

Sendo assim, vamos aplicar o Princípio da Indução Finita (PIF) sob $|\mathcal{A}_b| \geq 2$.

Para isso, considere as seguintes etapas :

I) Para $|\mathcal{A}_b| = 2$

$$\begin{aligned} f(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) &= \frac{\partial^{(2)} F(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{1,b} \partial y_{2,b}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_{2,b}} \left(\frac{\partial F(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{1,b}} \right), \end{aligned}$$

daí, pela expressão da derivada temos que:

$$\begin{aligned} f(y_{1,b}, y_{2,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) &= \frac{\alpha v_{1,b}}{\sigma_{a,b}} \times \frac{\partial}{\partial y_{2,b}} \left(e^{-z_b} z_b^{1-\frac{1}{\alpha}} \right) \\ &= \frac{\alpha v_{1,b}}{\sigma_{a,b}} \left[\left(\frac{\partial e^{-z_b}}{\partial y_{2,b}} \right) z_b^{1-\frac{1}{\alpha}} + e^{-z_b} \left(\frac{\partial z_b^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\partial y_{2,b}} \right) \right] \\ &= \alpha \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} \left(\alpha z_b^{2-\frac{2}{\alpha}} - (\alpha - 1) z_b^{1-\frac{2}{\alpha}} \right) \\ &= \alpha^2 \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} z_b^{1-\frac{2}{\alpha}} \left(z_b + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \\ &= \alpha^2 \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} z_b^{1-\frac{2}{\alpha}} Q_2(z_b, \alpha), \end{aligned}$$

em que o resultado é válido para $|\mathcal{A}_b| = 2$.

II) Suponha que o resultado é válido para $|\mathcal{A}_b| = k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$\begin{aligned} f(y_{1,b}, \dots, y_{k,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) &= \frac{\partial^{(k)} F(y_{1,b}, \dots, y_{k,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{1,b} \partial y_{2,b}, \dots, y_{k,b}}, \\ &= \alpha^k \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} z_b^{1-\frac{k}{\alpha}} Q_k(z_b, \alpha) \quad (\text{Hipótese de Indução}). \end{aligned}$$

III) Devemos mostrar que o resultado vale também para $|\mathcal{A}_b| = k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

De fato,

$$\begin{aligned} f(y_{1,b}, \dots, y_{k+1,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) &= \frac{\partial^{(k+1)} F(y_{1,b}, \dots, y_{k+1,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{1,b}, \dots, y_{k+1,b}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_{k+1,b}} \left(\frac{\partial^{(k)} F(y_{1,b}, \dots, y_{k+1,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha)}{\partial y_{1,b}, \dots, y_{k,b}} \right) \quad (\text{Pela hipótese de indução}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_{k+1,b}} \left(\alpha^k \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} z_b^{1-\frac{k}{\alpha}} Q_k(z_b, \alpha) \right) \\ &= \alpha^k \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) \frac{\partial}{\partial y_{k+1,b}} \left(e^{-z_b} z_b^{1-\frac{k}{\alpha}} Q_k(z_b, \alpha) \right). \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k(z_b, \alpha)}{\partial y_{k+1,b}} &= \frac{\partial Q_k(z_b, \alpha)}{\partial z_b} \times \frac{\partial z_b}{v_{k+1,b}} \times \frac{\partial v_{k+1,b}}{y_{k+1,b}} \\ &= \frac{\partial Q_k(z_b, \alpha)}{\partial z_b} \times \left(-\frac{\alpha}{\sigma_t} z_b^{1-\frac{1}{\alpha m}} v_{k+1,b} \right). \end{aligned}$$

Logo, depois de alguns cálculos obtemos que

$$f(y_{1,b}, \dots, y_{k+1,b}; \boldsymbol{\theta}_b, \alpha) = \alpha^{k+1} \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) e^{-z_b} z_b^{1-\frac{k+1}{\alpha}} Q_{k+1}(z_b, \alpha),$$

e, portanto, o resultado é válido para todo $|\mathcal{A}_b|$. ■

3.3.5 Geração de vetores aleatórios por grupos

Considere que a condição imposta na expressão (3.16) é satisfeita. Então, para todas as observações \mathbf{y}_b pertencentes ao b -ésimo grupo, introduzimos a seguinte transformação:

$$(x_1, \dots, x_{|\mathcal{A}_b|-1}, z_b) = \left(\frac{v_{1,b}}{z_b^{1/\alpha}}, \dots, \frac{v_{|\mathcal{A}_b|-1,b}}{z_b^{1/\alpha}}, \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_b} v_{a,b} \right)^\alpha \right), \quad (3.17)$$

com $\sum_{a \in \mathcal{A}_b} x_a = 1$. Sendo assim,

$$\frac{\partial y_{a,b}}{\partial x_{j,b}} = \begin{cases} \frac{\partial y_{a,b}}{\partial v_{a,b}} \times \frac{\partial v_{a,b}}{\partial x_{a,b}}, & \text{se } a = j; \\ 0, & \text{se } a \neq j. \end{cases}$$

$$\frac{\partial y_{a,b}}{\partial x_{j,b}} = \begin{cases} \frac{\partial y_{a,b}}{\partial v_{a,b}} \times z_b^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{se } a = j; \\ 0, & \text{se } a \neq j. \end{cases}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial z_b} &= \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial v_{|\mathcal{A}_b|,b}} \times \frac{\partial v_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial z_b} \\ &= \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial v_{|\mathcal{A}_b|,b}} \times \frac{z_b^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, o Jacobiano da Transformação $(y_{1,b}, \dots, y_{|\mathcal{A}_b|,b}) \rightarrow (\mathbf{x}_b, z_b)$ é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{1,b}}{\partial x_{1,b}} & \frac{\partial y_{1,b}}{\partial x_{2,b}} & \dots & \frac{\partial y_{1,b}}{\partial z_b} \\ \frac{\partial y_{2,b}}{\partial x_{1,b}} & \frac{\partial y_{2,b}}{\partial x_{2,b}} & \dots & \frac{\partial y_{2,b}}{\partial z_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial x_{1,b}} & \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial x_{2,b}} & \dots & \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial z_b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{1,b}}{\partial x_{1,b}} & 0 & \dots & \frac{\partial y_{1,b}}{\partial z_b} \\ 0 & \frac{\partial y_{2,b}}{\partial x_{2,b}} & \dots & \frac{\partial y_{2,b}}{\partial z_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial z_b} \end{vmatrix}.$$

Assim, obtemos que o módulo do Jacobiano é dado por

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= \left(\prod_{a=1}^{|\mathcal{A}_b|-1} \frac{\partial y_{a,b}}{\partial x_{a,b}} \right) \times \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial z_b} \\ &= \left(\prod_{a=1}^{|\mathcal{A}_b|-1} \frac{\partial y_{a,b}}{\partial v_{a,b}} \times z_b^{\frac{1}{\alpha}} \right) \times \frac{\partial y_{|\mathcal{A}_b|,b}}{\partial v_{|\mathcal{A}_b|,b}} \times \frac{z_b^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \times z_b^{\frac{|\mathcal{A}_b|-1}{\alpha}} \times z_b^{\frac{1}{\alpha}-1} \times \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{\partial y_{a,b}}{\partial v_{a,b}} \right) \\ &= \frac{z_b^{\frac{|\mathcal{A}_b|-1}{\alpha}}}{\alpha \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \left| \frac{\partial y_{a,b}}{\partial v_{a,b}} \right| \right)^{-1}} \\ &= \frac{z_b^{\frac{|\mathcal{A}_b|-1}{\alpha}}}{\alpha \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \left| \frac{\partial v_{a,b}}{\partial y_{a,b}} \right| \right)}. \end{aligned}$$

Como $\left| \frac{\partial v_{a,b}}{\partial y_{a,b}} \right| = \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}}$, obtemos que $|\mathbf{J}| = \frac{z_b^{\frac{|\mathcal{A}_b|}{\alpha} - 1}}{\alpha \left(\prod_{a \in \mathcal{A}_b} \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right)}$. Consequentemente,

$$f(x_{1,b}, x_{2,b}, \dots, x_{|\mathcal{A}_b|-1}, z_b) = \Gamma(|\mathcal{A}_b|) \times \frac{\alpha^{|\mathcal{A}_b|-1} e^{-z_b} Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b; \alpha)}{\Gamma(|\mathcal{A}_b|)}.$$

Desta forma, o vetor aleatório \mathbf{X}_b é independente de Z_b , sendo que $\mathbf{X}_b \sim \text{Dirichlet}(1, \dots, 1)$ e Z_b é uma mistura de distribuições Gammas com pesos determinados por $Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b; \alpha)$ (Shi, 1995).

Observe que, da transformação (3.17), temos que $v_{a,b} = x_{a,b} \times z_b^{\frac{1}{\alpha}}$. Mas $v_{a,b}$ também é determinado por $v_{a,b} = \omega_{a,b} e^{-\left(\frac{y_{a,b} - \mu_{a,b}}{\sigma_{a,b}}\right)}$, isso implica que

$$y_{a,b} = -\sigma_{a,b} \log \left(\frac{x_{a,b} \times z_b^{\frac{1}{\alpha}}}{\omega_{a,b}} \right) + \mu_{a,b}. \quad (3.18)$$

Deste modo, após a estimação dos parâmetros, geramos \mathbf{X}_b e Z_b e em seguida obtivemos o vetor $\mathbf{y}_b = (y_{1,b}, y_{2,b}, \dots, y_{|\mathcal{A}_b|})$ através da transformação inversa (3.18).

3.3.6 Inferência via máxima verossimilhança por grupos

Fazer inferência nestes modelos multivariados é uma tarefa complexa, pois a função densidade conjunta não tem forma fechada e, conseqüentemente, as propriedades são difíceis de serem obtidas. Uma alternativa é fazer a *inferência via máxima verossimilhança por grupos* considerando os grupos mutuamente independentes, (ver (Fougeres et al., 2009)). Desta forma, a função log-verossimilhança para o b -ésimo grupo dada por:

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= |\mathcal{A}_b| \log \alpha + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \log v_{a,b} - \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \log(\sigma_{a,b}) - z_b + \log(z_b) \\ &\quad - \frac{|\mathcal{A}_b|}{\alpha} \log(z_b) + \log(Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b, \alpha)). \end{aligned}$$

Assim, as funções score para α , $\mu_{a,b}$ e $\sigma_{a,b}$ em termos de z_b são dadas a partir das expressões seguintes:

Derivadas de 1ª ordem

- Em relação a α

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) = \frac{A(z_b, \alpha)}{\alpha} + S_2(z_b, \alpha).$$

- Em relação a $\mu_{a,b}$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{a,b}} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) = \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} - \frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} (1 - S_1(z_b, \alpha)) + \left(1 - \frac{|\mathcal{A}_b|}{\alpha}\right) \frac{\alpha v_{a,b}}{\sigma_{a,b} z_b^{1/\alpha}}.$$

- Em relação a $\sigma_{a,b}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_{a,b}} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= \frac{v_{a,b}(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}^2} \left(1 - \alpha z_b^{1-1/\alpha} + \left(1 - \frac{|\mathcal{A}_b|}{\alpha}\right) \frac{\alpha}{z_b^{1/\alpha}} + S_1(z_b, \alpha) \alpha z_b^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_{a,b}}. \end{aligned}$$

Derivadas de 2^a ordem

- Em relação a α

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= -\frac{A(z_b, \alpha)}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha S_2(z_b, \alpha) + A(z_b, \alpha)) \\ &\quad + \frac{z_b \log z_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z_b} \left(\alpha S_2(z_b, \alpha) - \frac{A(z_b, \alpha)}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

- Em relação a $\mu_{a,b}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mu_{a,b}^2} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} - \left(\frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}}{\sigma_{a,b}^2} \right) [(\alpha - 1) z_b^{-1/\alpha} v_{a,b} + 1] [1 - S_1(z_b, \alpha)] \\ &\quad - \left(\frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}}{\sigma_{a,b}^2} \right) (\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}) \times K_1(z_b, \alpha) + \left(\frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \right) z_b^{-1/\alpha} \\ &\quad \times [1 - v_{a,b} z_b^{-1/\alpha}]. \end{aligned}$$

- Em relação a $\sigma_{a,b}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_{a,b}^2} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= \frac{v_{a,b}(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}^3} \left\{ \frac{(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}} - 2 \right\} \\ &\quad \times \left[1 - \alpha z_b^{1-1/\alpha} + \left(1 - \frac{|\mathcal{A}_b|}{\alpha}\right) \frac{\alpha}{z_b^{1/\alpha}} + \alpha S_1(z_b, \alpha) z_b^{1-1/\alpha} \right] \\ &\quad - \frac{v_{a,b}^2 (y_{a,b} - \mu_{a,b})^2 z_b^{-2/\alpha}}{\sigma_{a,b}^4} \times [(\alpha - 1) z_b + (\alpha - |\mathcal{A}_b|)] \\ &\quad + \frac{v_{a,b}^2 (y_{a,b} - \mu_{a,b})^2 z_b^{-2/\alpha}}{\sigma_{a,b}^4} \times \alpha z_b [\alpha z_b K_1(z_b, \alpha) + (\alpha - 1) S_1(z_b, \alpha)]. \end{aligned}$$

Derivadas mistas

- Em relação a $\mu_{a,b} \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mu_{a,b} \partial \alpha} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= \frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{z_b} - \log z_b - 1 + (\log z_b + 1) S_1(z_b, \alpha) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}}{\sigma_{a,b}} \left\{ \frac{1}{\alpha} (z_b \log z_b K_1(z_b, \alpha)) + K_2(z_b, \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

- Em relação a $\sigma_{a,b}\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \sigma_{a,b}} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= \frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{z_b} - \log z_b - 1 + (\log z_b + 1) S_1(z_b, \alpha) \right) \right\} \\ &+ \frac{\alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} (z_b \log z_b K_1(z_b, \alpha)) + K_2(z_b, \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

- Em relação a $\mu_{a,b}\sigma_{a,b}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mu_{a,b} \sigma_{a,b}} \ell(\boldsymbol{\theta}_b, \alpha; \mathbf{y}_b, z_b) &= \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}^2} \left(\frac{(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}} - 1 \right) - \frac{[1 - S_1(z_b, \alpha)] \alpha z_b^{1-1/\alpha} v_{a,b}}{\sigma_{a,b}^2} \\ &\times \left\{ \frac{(y_{a,b} - \mu_{a,b}) [(\alpha - 1) z_b^{-1/\alpha} + 1]}{\sigma_{a,b}} + 1 \right\} \\ &+ \frac{\alpha^2 z_b^{2-2/\alpha} v_{a,b}^2 (y_{a,b} - \mu_{a,b}) K_1(z_b, \alpha)}{\sigma_{a,b}^3} \\ &+ (\alpha - |\mathcal{A}_b|) \left\{ \frac{v_{a,b}(y_{a,b} - \mu_{a,b})}{\sigma_{a,b}^3 z_b^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{v_{a,b}}{z_b^{1/\alpha}} \right) - \frac{v_{a,b}}{\sigma_{a,b}^2 z_b^{1/\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

em que:

- $S_2(z_b, \alpha) = \frac{\partial \log Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b, \alpha)}{\partial \alpha}$, $S_1(z_b, \alpha) = \frac{\partial \log Q_{|\mathcal{A}_b|}(z_b, \alpha)}{\partial z_b}$,
- $A(z_b, \alpha) = |\mathcal{A}_b| + \log z_b - z_b \log z_b + z_b \log z_b \times S_1(z_b, \alpha)$,
- $K_1(z_b, \alpha) = \frac{\partial S_1(z_b, \alpha)}{\partial z_b}$, $K_2(z_b, \alpha) = \frac{\partial S_2(z_b, \alpha)}{\partial z_b}$.

Observe que quando o número de elementos em um dos grupos é maior ou igual a 5, o cálculo do polinômio Q torna-se exaustivo, conseqüentemente a função log-verossimilhança torna-se analiticamente intratável. Com base nisto, no próximo capítulo será proposto um novo método inferencial mais simples computacionalmente e analiticamente de ser realizado.

Capítulo 4

Inferência via algoritmo EM

Neste capítulo construiremos o algoritmo *Expectation Maximization* (EM) para a estimação dos parâmetros do modelo Gumbel multivariado para dados dependentes e seus casos particulares descritos no capítulo anterior.

4.1 Algoritmo EM

Para a construção do algoritmo EM, considere $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{h})$ o vetor dos dados completos e $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\theta}, \alpha) = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ seu respectivo vetor de parâmetros.

Então, a função de verossimilhança completa é dada por:

$$\begin{aligned} L_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) &= f(\mathbf{y}, \mathbf{h}; \boldsymbol{\phi}) = f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h}, \alpha) \times f(\mathbf{h}; \alpha) \\ &= \prod_{a \in \mathcal{A}} (f(y_a; \boldsymbol{\theta}_a | h_a, \alpha) \times f(h_a; \alpha)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

mas, $Y_a | H_a \sim \text{Gumbel}(\mu_a + \sigma_a \log(H_a), \sigma_a)$ e pelo Teorema (2.1) $H_a \sim S(\alpha, 0, \gamma_a, 0)$ em que $\gamma_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b})^\alpha$, então:

$$f(y_a; \boldsymbol{\theta}_a | h_a) = \frac{1}{\sigma_a} \exp \left\{ - \exp \left\{ - \left(\frac{y_a - (\mu_a + \sigma_a \log(h_a))}{\sigma_a} \right) \right\} - \left(\frac{y_a - (\mu_a + \sigma_a \log(h_a))}{\sigma_a} \right) \right\} \quad (4.2)$$

e,

$$f(h_a; \alpha) \sim \alpha \gamma_a^\alpha c_\alpha h_a^{-(\alpha+1)}, \quad h_a > 0, \quad (4.3)$$

com $c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$.

Daí, substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), temos que:

$$L_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) = \prod_{a \in \mathcal{A}} \left(\frac{1}{\sigma_a} \exp \left\{ -e^{-\left(\frac{y_a - (\mu_a + \sigma_a \log(h_a))}{\sigma_a} \right)} - \left(\frac{y_a - (\mu_a + \sigma_a \log(h_a))}{\sigma_a} \right) \right\} \times \alpha \gamma_a^\alpha c_\alpha h_a^{-(\alpha+1)} \right) \quad (4.4)$$

Deste modo, a função log-verossimilhança completa $\ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) &= \underbrace{-\sum_{a \in \mathcal{A}} \log(\sigma_a) - \sum_{a \in \mathcal{A}} h_a e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right)} - \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right)}_{\ell_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_c)} \\ &+ \underbrace{\sum_{a \in \mathcal{A}} (\log \alpha + \alpha \log \gamma_a + \log c_\alpha - \alpha \log h_a)}_{\ell_2(\alpha; \mathbf{h})}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos perceber que a função log-verossimilhança completa é especificada pela soma de duas outras log-verossimilhanças, sendo que, a primeira depende apenas do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$ e a segunda depende somente do parâmetro α . Isto é,

$$\ell(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) = \ell_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_c) + \ell_2(\alpha; \mathbf{h}). \quad (4.5)$$

4.1.1 Distribuição condicional $\mathbf{H}|\mathbf{Y}$

Para maximizarmos (4.5) pelo algoritmo EM, precisamos da distribuição condicional $\mathbf{H}|\mathbf{Y}$.

Por definição de distribuição condicional e por Bayes, temos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{h}; \alpha | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) &= \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{h}; \boldsymbol{\theta}, \alpha)}{f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{f(\mathbf{h}; \alpha) \times f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h})}{\int_{\mathbf{H}} f(\mathbf{h}; \alpha) \times f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h}) d\mathbf{h}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como $\int_{\mathbf{H}} f(\mathbf{h}; \alpha) \times f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h}) d\mathbf{h}$ é constante em relação a \mathbf{h} , temos que:

$$f(\mathbf{h}; \alpha | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) \propto f(\mathbf{h}; \alpha) \times f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h}),$$

e, pela Equação (4.4) obtemos que

$$f(\mathbf{h}; \alpha | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \propto \prod_{a \in \mathcal{A}} \left[h_a^{-\alpha} \exp \left(-h_a e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right)} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{H}} f(\mathbf{h}; \alpha) \times f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{h}) d\mathbf{h} &= \prod_{a \in \mathcal{A}} \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)} \right)}} \times \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)} \right)}}{\Gamma(1 - \alpha)} h_a^{(1 - \alpha) - 1} \exp \left(-h_a e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a} \right)} \right) dh_a \\ &= \prod_{a \in \mathcal{A}} \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)} \right)}}. \end{aligned}$$

Logo

$$f(\mathbf{h}; \alpha | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{a \in \mathcal{A}} \frac{e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)}\right)}}{\Gamma(1 - \alpha)} h_a^{(1 - \alpha) - 1} \exp\left(-h_a e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)}\right).$$

Portanto,

$$H_a | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \alpha \sim \text{Gamma}\left((1 - \alpha), e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)}\right). \quad (4.8)$$

4.1.2 Passo E: Esperança condicional

Agora, seja $Q(\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{E}_{\mathbf{H} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}} \{\ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c)\}$. Então,

$$Q(\boldsymbol{\phi}) = Q(\boldsymbol{\theta}) + Q(\alpha), \quad (4.9)$$

em que,

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} \log(\sigma_a) - \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{H_a | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}}(h_a) e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)} - \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right),$$

e,

$$Q(\alpha) = \sum_{a \in \mathcal{A}} (\log \alpha + \alpha \log \gamma_a + \log c_\alpha - \alpha \mathbb{E}_{H_a | \mathbf{y}, \alpha}(\log h_a)).$$

Considere $\varphi_{1,a} = \mathbb{E}_{H_a | \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}}(h_a)$ e, $\varphi_{2,a} = \mathbb{E}_{H_a | \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}}(\log h_a)$, então

$$\begin{aligned} \varphi_{1,a} &= \frac{(1 - \alpha)}{e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)}\right)}} \\ &= (1 - \alpha) \exp\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)}\right). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_{2,a} &= \psi(1 - \alpha) - \log e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)}\right)} \\ &= \psi(1 - \alpha) + \left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a / (1 - \alpha)}\right), \end{aligned}$$

em que $\psi(\cdot)$ é a função digamma.

4.1.3 Passo M: Maximização de $Q(\boldsymbol{\phi})$ por Newton-Raphson

$$\mathcal{U}(\alpha) = \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \alpha} = \frac{|\mathcal{A}|}{\alpha} + \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\log \gamma_a + \frac{\alpha \gamma'_a}{\gamma_a} - \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_{2,a} \right) + |\mathcal{A}| \left(\psi(\alpha) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi \alpha}{2}\right) \right).$$

$$\mathcal{J}(\alpha) = \frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \alpha^2} = |\mathcal{A}| \left(\psi'(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) + \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\frac{2\gamma'_a - \alpha(\gamma''_a + \gamma'_a)}{\gamma_a} \right).$$

Então, o estimador via Newton-Raphson para o parâmetro α é dado por:

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \mathcal{J}^{-1}(\alpha^{(k)}) \times \mathcal{U}(\alpha^{(k)}),$$

e satisfaz $|\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}| < 10^{-3}$.

Para $\boldsymbol{\theta}_a = (\mu_a, \sigma_a)$, temos que

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \mu_a^2} & \frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \mu_a \sigma_a} \\ \frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \mu_a \sigma_a} & \frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \sigma_a^2} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_a) = \left\langle \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \mu_a}, \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \sigma_a} \right\rangle.$$

O estimador Newton-Raphson para o vetor $\boldsymbol{\theta}_a$ é o seguinte:

$$\boldsymbol{\theta}_a^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}_a^{(k)} - \mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_a^{(k)}) \times \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_a^{(k)}),$$

em que,

- $-\sigma_a \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \mu_a} = \varphi_{1,a} e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)} - 1;$
- $-\sigma_a^2 \frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \mu_a^2} = \varphi_{1,a} e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)};$
- $-\sigma_a^2 \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})}{\partial \sigma_a} = \sigma_a + \varphi_{1,a} e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)} (y_a - \mu_a) - (y_a - \mu_a);$
- $-\sigma_a^4 \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})^2}{\partial \sigma_a^2} = -\sigma_a^2 + 2\sigma_a (y_a - \mu_a) + \varphi_{1,a} e^{-\left(\frac{y_a - \mu_a}{\sigma_a}\right)} [(y_a - \mu_a) + 2\sigma_a];$
- $-\sigma^2 \frac{\partial Q(\boldsymbol{\phi})^2}{\partial \mu_a \sigma_a} = \varphi_{1,a} e^{-\left(\frac{y_a - \sigma_a}{\sigma_a}\right)} \left[\left(\frac{y_a - \sigma_a}{\sigma_a}\right) - 1 \right] - 1;$
- $\gamma'_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b})^\alpha \log \omega_{a,b}$, $\gamma''_a = \sum_{b \in \mathcal{B}} (\omega_{a,b})^\alpha (\log \omega_{a,b})^2$, $\psi(\cdot)$ é a função digamma e $\psi'(\cdot)$ é a função trigamma.

Desta forma, a descrição do algoritmo EM é a seguinte:

- **Passo E:** Inicialize o processo iterativo com $\boldsymbol{\phi}^{(0)} = (\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \alpha^{(0)})$ e na k -ésima iteração obtenha $\varphi_{1,a}^{(k)}$ e $\varphi_{2,a}^{(k)}$. Em seguida, compute $Q(\boldsymbol{\phi}|\boldsymbol{\phi}^{(k)})$.
- **Passo M:** Na $(k+1)$ -ésima iteração, maximize $Q(\boldsymbol{\phi}|\boldsymbol{\phi}^{(k)})$.

Capítulo 5

O modelo Gumbel multivariado com efeitos aleatórios espacialmente compartilhados

5.1 Construção do modelo proposto

Considere uma região espacialmente contínua \mathcal{D} um subconjunto do \mathbb{R}^2 . Seja $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_L\}$ um subconjunto de \mathcal{D} formado pelas localizações espaciais de L estações meteorológicas, em que para cada tempo t observa-se o processo estocástico espacial $\mathbf{Y}_t = (Y_t(\mathbf{s}_1), Y_t(\mathbf{s}_2), \dots, Y_t(\mathbf{s}_L))'$. A variável $Y_t(\mathbf{s}_\ell)$ é uma medida de interesse observada na ℓ -ésima estação no tempo t (semana, mês ou ano). Considere que $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M\}$ é um conjunto com M localizações espaciais arbitrárias próximas às localizações $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_L$. Na linguagem de estatística espacial, dizemos que \mathcal{S} é o campo aleatório observado e \mathcal{U} é o campo aleatório latente ou não observado. Sejam $\{\omega(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{u}_m) \equiv \omega_{\ell,m} : m = 1, 2, \dots, M, \text{ e } \ell = 1, 2, \dots, L\}$ constantes que representam uma medida de distância entre o par de localizações (\mathbf{s}, \mathbf{u}) e $\{E(\mathbf{u}_m) : m = 1, 2, \dots, M\}$ um campo aleatório latente construído por variáveis independentes α_m -estáveis. Este processo $\{E(\mathbf{u}_m) : m = 1, 2, \dots, M\}$ é incorporado ao modelo para capturar a dependência espacial entre os componentes do processo observado $\mathbf{Y}_t(\mathbf{s})$. Para acomodar essa dependência espacial, definimos a função Kernel Gaussiana centrada em \mathbf{u}_m e avaliada em \mathbf{s}_ℓ , dada por:

$$k(\|\mathbf{u}_m - \mathbf{s}_\ell\|; \tau_{\mathbf{u}_m}) = \frac{1}{2\pi\tau_{\mathbf{u}_m}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{u}_m - \mathbf{s}_\ell\|^2}{2\tau_{\mathbf{u}_m}^2}\right), \quad \tau_{\mathbf{u}_m} > 0,$$

em que $\|\mathbf{u}_m - \mathbf{s}_\ell\|$ representa a distância euclidiana e $\tau_{\mathbf{u}_m}$ é chamado de parâmetro de suavização da função núcleo. Deste modo, os pesos $\omega_{\ell,m}$ são calculados a partir de uma função de $k(\cdot)$ tais que $0 < \omega_{\ell,m} < 1$ e $\sum_{m=1}^M \omega_{\ell,m} = 1$.

Uma maneira de representar esse processo espacial é mostrada na Figura 5.1 (Cunha, 2009).

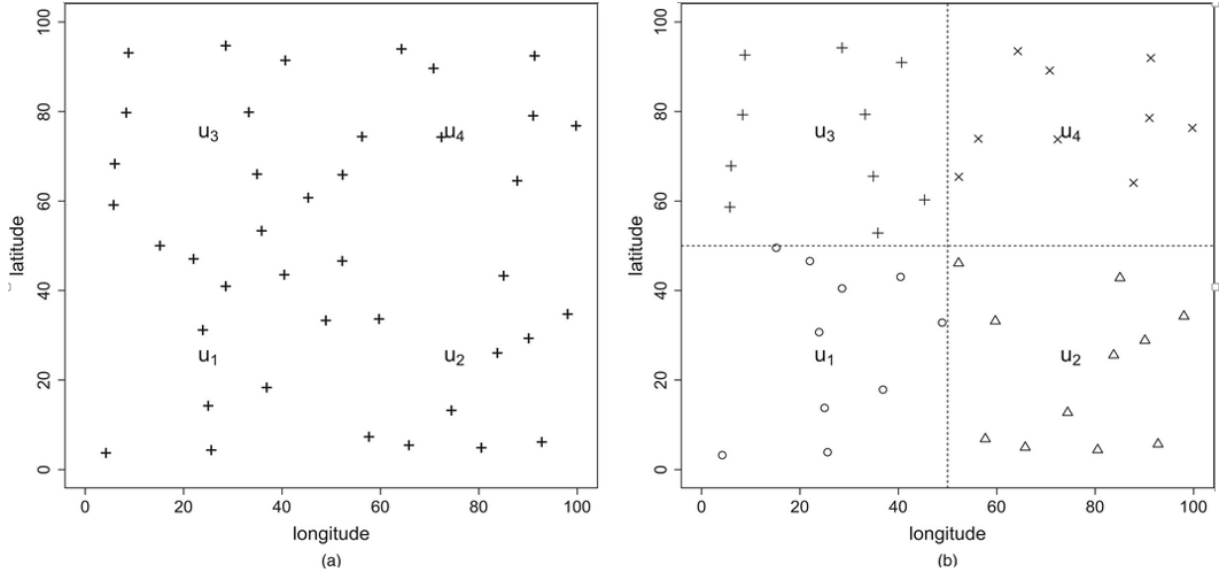


Figura 5.1: Representação espacial da modelagem.

Para um valor de m fixado, temos $H^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) = \omega_{\ell,m} E(\mathbf{u}_m)$. Neste caso, dizemos que E_m é um efeito aleatório espacialmente compartilhado por todas as estações meteorológicas próximas do ponto \mathbf{u}_m e $H^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)$ é a contribuição desse efeito para a medida da variável $Y_{t,\ell}^{(m)}$ na ℓ -ésima estação. Assumindo que dado o efeito aleatório E_m , $Y_t(\mathbf{s}_\ell) | H^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) \sim \text{Gumbel}(\mu(\mathbf{s}_\ell) + \sigma_t \log(H^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)), \sigma_t)$, e são condicionalmente independentes para todo $\ell = 1, 2, \dots, L_m$ e $m = 1, 2, \dots, M$ e $t = 1, 2, \dots, T$, obtemos que a distribuição conjunta do processo observado em cada tempo t , isto é, $\mathbf{Y}_t = (Y_t(\mathbf{s}_1), Y_t(\mathbf{s}_2), \dots, Y_t(\mathbf{s}_L))'$ é dada por:

$$F(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\theta}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \exp \left\{ - \left[\sum_{\ell=1}^{L_m} \omega_m(\mathbf{s}_\ell) e^{-\left(\frac{y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) - \mu(\mathbf{s}_\ell)}{\sigma_t}\right)} \right]^{\alpha_m} \right\}. \quad (5.1)$$

Portanto, \mathbf{Y}_t segue o modelo Gumbel multivariado (MGM).

5.2 Uma representação estocástica do modelo proposto

Uma representação usual de \mathbf{Y}_t pode ser feita através da seguinte decomposição:

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Z}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

em que, $\boldsymbol{\mu} = g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$ é um parâmetro de locação (*tendência*) associado a p covariáveis \mathbf{X} e a um vetor ($p \times 1$) de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$, \mathbf{Z}_t é um vetor ($n \times 1$) de realizações de um *campo aleatório espacial com distribuição exponencial α -estável* e $\boldsymbol{\epsilon}$ é um vetor ($n \times 1$) de *erros de medida* independentes e identicamente distribuídos com $\epsilon_t \sim Gumbel(0, \sigma_t)$ tal que $\boldsymbol{\epsilon}_t$ e \mathbf{Z}_t são independentes.

5.3 Dependência espacial

A dependência espacial pode ser entendida como a tendência de que um valor de uma variável associada a uma determinada localização assemelha-se mais ao valor de suas amostras vizinhas do que ao restante das localizações do conjunto amostral (Paiva, 2007). Para uma série de aplicações em pesquisa de clima, as observações estão desorganizadas no espaço, seja por uma grade regular ou em locais espaçados irregularmente. Dados de temperatura, vento ou poluentes são gravadas em diferentes locais e suas respectivas medidas, tradicionalmente, apresentam algum grau de dependência espacial. Enquanto o comportamento médio da maioria dos processos espaciais - tais como temperaturas diárias ou ventos - é bem modelado e compreendido, a nossa compreensão de como medir a dependência espacial para eventos extremos ainda é incompleta do ponto de vista estatístico (Naveau et al., 2005).

De acordo com (Camara et al., 2000), uma das consequências da dependência espacial é que a inferência estatística neste tipo de dados não será muito eficaz. Isto leva a uma perda de poder explicativo e reflete em grandes desvios de estimativas e menores níveis de significância em testes de hipóteses. Os dados espaciais devem ser considerados como um processo estocástico e não como um conjunto de amostras independentes.

5.3.1 Covariância

Considere que $Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell)$ e $Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_j)$ compartilhem do mesmo efeito aleatório E_m . Então pela propriedade da geração de vetores aleatórios, temos que:

$$Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) = -\sigma_t \log \left(\frac{X_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell) Z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}}{\omega_m(\mathbf{s}_\ell)} \right) + \mu(\mathbf{s}_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, L_m.$$

Assim, utilizando as devidas propriedades de covariância (Magalhães, 2006) temos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_j)) &= \sigma_t^2 \text{Cov} \left(\log X_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), \log X_t^{(m)}(\mathbf{s}_j) \right) + \sigma_t^2 \text{Cov} \left(\log X_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), Z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}} \right) \\ &+ \sigma_t^2 \text{Cov} \left(\log Z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}, \log X_t^{(m)}(\mathbf{s}_j) \right) + \sigma_t^2 \text{Cov} \left(\log Z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}}, \log Z_{t,m}^{\frac{1}{\alpha_m}} \right). \end{aligned}$$

Daí, pela independência das variáveis $X_t(\mathbf{s}_\ell)$ e $Z_{t,m}$, temos que

$$\text{Cov}(Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_j)) = \sigma_t^2 \left[\text{Cov} \left(\log X_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), \log X_t^{(m)}(\mathbf{s}_j) \right) + \left(\frac{1}{\alpha_m} \right)^2 \text{Var}(\log Z_{t,m}) \right].$$

Agora, como $\text{Cov}(\log X_t(\mathbf{s}_\ell), \log X_t(\mathbf{s}_j)) = \psi'(1)\delta(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{s}_j) - \psi'(L_m)$ (Ver Seção 2.5) e $\text{Var}(\log Z_{t,m}) = \sum_{\ell=1}^{L_m} q_{L_m, \ell} \psi'(\ell)$ (Ver **Apêndice A**), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_j)) &= \sigma_t^2 \psi'(\sigma_t) \delta(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{s}_j) - \psi'(L_m) + \left(\frac{\sigma_t}{\alpha_m} \right)^2 \sum_{\ell=1}^{L_m} q_{L_m, \ell} \frac{\Gamma''(\ell)}{\Gamma(\ell)} \\ &- \left(\frac{\sigma_t}{\alpha_m} \right)^2 \left(\sum_{\ell=1}^{L_m} q_{L_m, \ell} \psi(\ell) \right)^2, \end{aligned}$$

em que $\psi(\cdot)$ e $\psi'(\cdot)$ são, respectivamente, as funções digamma e trigamma.

Estamos interessados no caso em que $\mathbf{s}_\ell \neq \mathbf{s}_j$, o que implica que $\delta(\mathbf{s}_\ell, \mathbf{s}_j) = 0$. Desta forma,

$$\text{Cov}(Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_\ell), Y_t^{(m)}(\mathbf{s}_j)) = -\sigma_t^2 \psi'(L_m) + \left(\frac{\sigma_t}{\alpha_m} \right)^2 \times \left[\sum_{\ell=1}^{L_m} q_{L_m, \ell} \frac{\Gamma''(\ell)}{\Gamma(\ell)} - \left(\sum_{\ell=1}^{L_m} q_{L_m, \ell} \psi(\ell) \right)^2 \right].$$

5.4 Inferência via algoritmo MCEM

O algoritmo EM construído no capítulo anterior só é válido para o caso em que as distribuições α -estáveis positivas são independentes e identicamente distribuídas com

o mesmo parâmetro α . Neste nosso modelo específico assumimos que cada variável α_m -estável positiva mude de acordo com o grupo $m = 1, 2, \dots, M$. Logo, é necessário a construção de outro algoritmo para a estimação dos parâmetros deste modelo. Com base nisso, nosso objetivo nesta seção é construir o algoritmo MCEM em que o passo E do algoritmo EM é calculado por uma aproximação de Monte Carlo.

5.4.1 O algoritmo MCEM

Considere $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{E})$ o vetor dos dados completos e $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$ o vetor de parâmetros. Neste caso, a função de verossimilhança completa é dada por:

$$\begin{aligned} L_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) &= f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta} | \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}) \times f(\mathbf{E}; \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \prod_{m=1}^M \left[\left(\prod_{t=1}^T \prod_{\ell=1}^{L_m} \omega_{\ell,m} E_m G(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell})^{\omega_{\ell,m} E_m} r(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) \right) f(E_m; \alpha_m) \right], \end{aligned}$$

em que $G \sim \text{Gumbel}(\mu_\ell, \sigma_t)$ é a função de distribuição Gumbel com parâmetros μ_ℓ e σ_t e,

$$r(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(m)}) = \frac{g(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(m)})}{G(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(m)})} = \frac{1}{\sigma_t} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\},$$

é a função de taxa de falha reversa e por (2.6), temos que:

$$f(E_m; \alpha_m) = \frac{\alpha_m}{(1 - \alpha_m)} E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 c(B_m) e^{-c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}} dB_m, \quad E_m > 0. \quad (5.2)$$

em que $B_m \sim \mathcal{U}(0, 1)$ é uma variável auxiliar. Logo, a função log-verossimilhança completa é dada por

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c) &= \sum_{m=1}^M \left(\sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log \omega_{\ell,m} - E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log r(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) \right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (\log f(E_m; \alpha_m) + T L_m \log E_m) \\ &= \ell_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_c) + \ell_2(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que $v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \omega_{\ell,m} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\}$.

Agora, considere as seguintes funções,

$$\varphi_0(E_m, \alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 c(B_m) e^{-c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}} dB_m, \quad (5.4)$$

$$\varphi_1(E_m, \alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 \log(c(B_m)) \times c(B_m) e^{-c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}} dB_m, \quad (5.5)$$

$$\varphi_2(E_m, \alpha_m) = E_m^{-\frac{1}{1-\alpha_m}} \int_0^1 c^2(B_m) e^{-c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{(1-\alpha_m)}}} dB_m. \quad (5.6)$$

Passo E: Esperança condicional

Proposição 5.1. *A distribuição condicional de $\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}$ é dada por*

$$p(\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1} E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} \varphi_0(E_m, \alpha_m)}{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))},$$

em que $\mathcal{G} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$.

Demonstração Observe que:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) &\propto f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}|\mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{E}; \boldsymbol{\alpha}), \\ &= k \prod_{m=1}^M E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} \varphi_0(E_m, \alpha_m), \end{aligned}$$

em que k é a constante de normalização. Afirmamos que $k = \prod_{m=1}^M \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}$ sendo que $\mathcal{G} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} k^{-1} &= \prod_{m=1}^M \int_0^{\infty} \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} d(E_m), \\ &= \prod_{m=1}^M \frac{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}, \end{aligned}$$

e, portanto

$$k = \prod_{m=1}^M \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m + 1) \mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}. \quad \blacksquare$$

Agora, considere $Q(\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}}(\ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c))$, então a partir da proposição acima, temos

$$Q(\boldsymbol{\phi}) = Q_1(\boldsymbol{\theta}) + Q_2(\boldsymbol{\alpha}), \quad (5.7)$$

em que,

$$Q_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log \omega_{\ell, m} - v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}) \mathbb{E}_{m,1} + \sum_{t=1}^T \sum_{\ell=1}^{L_m} \log r(y_{t,\ell}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}) \right),$$

e,

$$Q_2(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{m=1}^M \left(\log \left(\frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m} \right) - \left(\frac{1}{1 - \alpha_m} \right) \mathbb{E}_{m,2} + \mathbb{E}_{m,3} - \mathbb{E}_{m,4} + TL_m \mathbb{E}_{m,2} \right),$$

com

- $\mathbb{E}_{m,1} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))};$
- $\mathbb{E}_{m,2} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m)) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))};$
- $\mathbb{E}_{m,3} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(c(B_m))) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_1(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))};$
- $\mathbb{E}_{m,4} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \varphi_2(E_m; \alpha_m)) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \times \varphi_2(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))},$

em que $E_m|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))$ (Ver **Apêndice B**).

Passo M: Maximização de $Q(\phi)$ por Newton-Raphson

$$\mathcal{U}(\alpha_m) = \frac{\partial Q(\phi)}{\partial \alpha_m} = \frac{1 - \alpha_m(\mathbb{E}_{m,2} + 1)}{\alpha_m(1 - \alpha_m)^2}$$

$$\mathcal{J}(\alpha_m) = \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \alpha_m^2} = \frac{2\mathbb{E}_{m,2}}{(1 - \alpha_m)^3} - \frac{(1 - 2\alpha_m)}{\alpha_m(1 - \alpha_m)^2}$$

Então, o estimador via Newton-Raphson para o parâmetro α_m é dado por:

$$\alpha_m^{(k+1)} = \alpha_m^{(k)} - \mathcal{J}^{-1}(\alpha_m^{(k)}) \times \mathcal{U}(\alpha_m^{(k)}) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, M$$

e, satisfaz $|\alpha_m^{(k+1)} - \alpha_m^{(k)}| < 10^{-3}$.

Para $\boldsymbol{\theta}_{t,l} = (\mu_\ell, \sigma_t)$ temos que :

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_{t,l}) = \left\langle \frac{\partial Q(\phi)}{\partial \mu_\ell}, \frac{\partial Q(\phi)}{\partial \sigma_t} \right\rangle$$

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_{t,l}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \mu_\ell^2} & \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \mu_\ell \sigma_t} \\ \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \mu_\ell \sigma_t} & \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \sigma_t^2} \end{pmatrix}$$

em que:

- $\frac{\partial Q(\phi)}{\partial \mu_\ell} = \left(- \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \frac{\mathbb{E}_{m,1} \omega_{\ell,m}}{\sigma_t} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\} \right) + M \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t};$
- $\frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \mu_\ell^2} = - \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \frac{\mathbb{E}_{m,1} \omega_{\ell,m}}{\sigma_t^2} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\};$
- $\frac{\partial Q(\phi)}{\partial \sigma_t} = \sum_{m=1}^M \sum_{\ell=1}^{L_m} \left(\frac{\omega_{m,\ell} \mathbb{E}_{m,1}(y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell)}{\sigma_t} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\} - \left(\frac{1}{\sigma_t} - \frac{(y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell)}{\sigma_t^2} \right) \right);$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \sigma_t^2} &= \frac{1}{\sigma_t^3} \sum_{m=1}^M \sum_{\ell=1}^{L_m} \left(\omega_{m,\ell} \mathbb{E}_{m,1}(y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell) \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\} \left[(y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell) - \sigma_t \right] \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_t^3} \sum_{m=1}^M \sum_{\ell=1}^{L_m} \left[(\sigma_t - 2(y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell)) \right]; \\
\bullet \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\mu_\ell \sigma_t^2} &= \frac{-1}{\sigma_t^4} \sum_{m=1}^M \left(\mathbb{E}_{m,1} \omega_{\ell,m} \exp \left\{ - \left(\frac{y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell}{\sigma_t} \right) \right\} \left[(y_{t,\ell}^{(m)} - \mu_\ell) - 2\sigma_t \right] \right) - \frac{M}{\sigma_t^2}.
\end{aligned}$$

Então o estimado Newton-Raphson para o vetor $\boldsymbol{\theta}_{t,\ell}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(k)} - \mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(k)}) \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_{t,\ell}^{(k)}), \quad \text{para } \ell = 1, 2, \dots, L_m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T.$$

Desta forma, o **MCEM** para maximização de $\ell_c(\boldsymbol{\phi}; \mathbf{y}_c)$ é da seguinte forma:

- ① **Passo E:** Inicialize o processo iterativo com $\boldsymbol{\phi}^{(0)} = (\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)})$ e na k -ésima iteração, obtenha $v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$, gere $\{(B_m^{j_k}, E_m^{j_k}) : j_k = 1, 2, \dots, N\}$, onde $E_m^{j_k} \sim \text{Gamma}(TL_m + 1, v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}))$ e $B_m^{j_k} \sim U(0, 1)$. Compute $\mathbb{E}_{m,1}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,2}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,3}^{j_k}, \mathbb{E}_{m,4}^{j_k}$ e, finalmente, aproxime, $\mathbb{E}_{m,1}, \mathbb{E}_{m,2}, \mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$ por Monte Carlo,

$$\tilde{\mathbb{E}}_{m,1}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,1}^{j_k}, \quad \tilde{\mathbb{E}}_{m,2}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,2}^{j_k}, \quad \tilde{\mathbb{E}}_{m,3}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,3}^{j_k} \text{ e } \tilde{\mathbb{E}}_{m,4}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{j_k=1}^N \mathbb{E}_{m,4}^{j_k}.$$

- ② **Passo M:** Na $(k+1)$ obtenha $\boldsymbol{\phi}^{(k+1)} = \text{Argmax}_{\boldsymbol{\phi}} Q(\boldsymbol{\phi}^{(k)})$.

Capítulo 6

Aplicação do modelo proposto em dados reais

Neste capítulo aplicaremos o modelo Gumbel multivariado (5.1) no problema de predição de valores de temperatura máxima no estado do Amazonas. Ao final avaliaremos o ajuste do modelo por meio de um estudo comparativo com o método ponderação pelo inverso da distância (IDW).

6.1 Análise descritiva dos dados

O conjunto de dados utilizados neste trabalho consiste da temperatura máxima anual compreendida de janeiro de 1997 a dezembro de 2016 ($T = 20$ anos), observados em $L = 14$ estações meteorológicas, correspondendo a 3360 observações mensais. As estações são automáticas, localizadas em 13 municípios do Estado do Amazonas, (ver Figura 6.1), (sendo que o município de São Gabriel da Cachoeira possui duas estações: a Iauaretê e a S.G. da Cachoeira) e são gerenciadas pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET).

A Tabela 6.1, a seguir, nos mostra as coordenadas geográficas (longitude, latitude e altitude) correspondentes a cada uma dessas estações.

Para a modelagem usaremos somente as temperaturas anuais dos meses mais quentes do Estado - Agosto, Setembro, Outubro e Novembro. A Figura 6.2 nos mostra o comportamento desses dados, onde é possível observar que a menor temperatura foi $33,6^{\circ}\text{C}$, registrada no ano de 2011 na estação de Benjamim Constant, enquanto que a maior foi $39,8^{\circ}\text{C}$ observada no ano de 2014 na estação de Eirunepé.

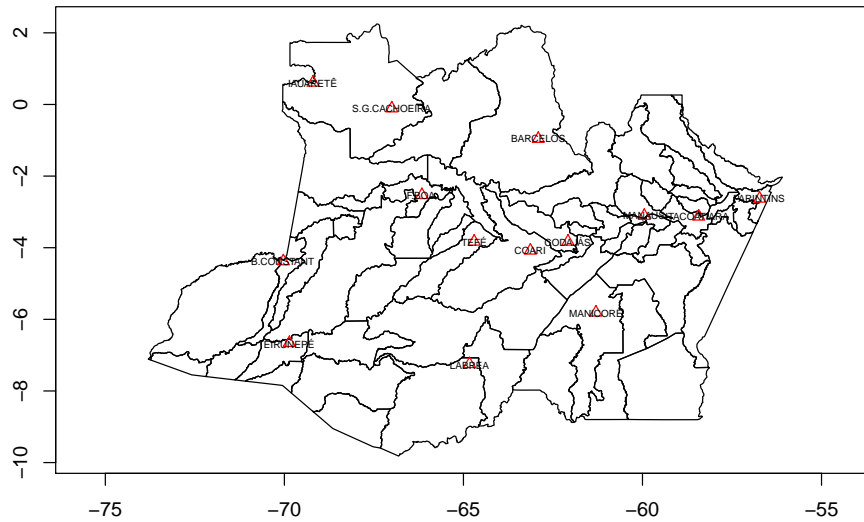


Figura 6.1: Distribuição espacial das estações meteorológicas do estado do Amazonas.

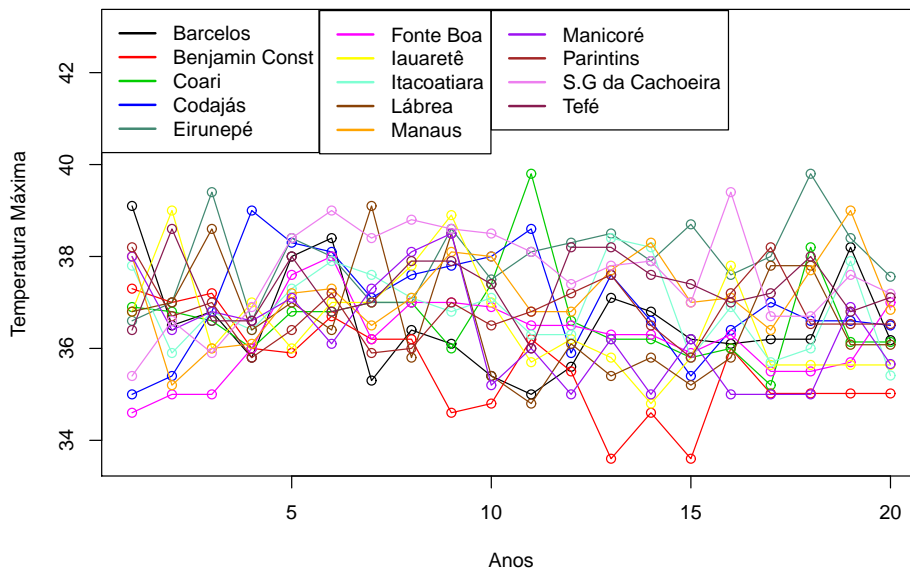


Figura 6.2: Séries de temperaturas máximas anuais por estações meteorológicas/1997-2016.

Em seqüência, as estações meteorológicas foram dispostas em $M = 3$ sub-regiões/grupos com centros em \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 em que alocamos as variáveis latentes α_m -estáveis, $m = 1, 2$ e 3 . Essa divisão foi feita de acordo com o regime pluviométrico para o Estado (Quadro et al., 2014). A composição desses grupos é mostrada na Figura 6.3.

Tabela 6.1: Coordenadas geográficas das estações meteorológicas do estado do Amazonas.

N ^o	Estações Meteorológicas	Longitude	Latitude	Altitude
1	Barcelos	-62,91	-0,96	40
2	Iauaretê	-69,2	0,61	120
3	S. G. da Cachoeira	-67	-0,11	90
4	Fonte Boa	-66,16	-2,53	55,57
5	Tefé	-64,7	-3,83	47
6	B. Constant	-70,03	-4,38	65
7	Eirunepé	-69,86	-6,66	104
8	Lábrea	-64,83	-7,25	61
9	Coari	-63,13	-4,08	46
10	Codajás	-62,08	-3,83	48
11	Manicoré	-61,3	-5,81	50
12	Manaus	-59,95	-3,11	67
13	Itacoatiara	-58,43	-3,13	40
14	Parintins	-56,73	-2,63	29

Observe que $L_1 = 5$, $L_2 = 3$ e $L_3 = 6$, representam a quantidade de estações próximas a \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 , respectivamente. Como a distância entre as estações são grandes, pois o Estado do Amazonas apresenta extensões continentais, os pesos $\omega_{\ell,m}$ foram normalizados da seguinte maneira:

$$\omega_{\ell,m} = \frac{k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m)}{\sum_{m=1}^M k(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|); \tau_m)}, \quad m = 1, 2 \text{ e } 3.$$

Os parâmetros de suavização τ_m , $m = 1, 2, 3$, foram estimados por:

$$\hat{\tau}_m = \left(\frac{4}{3L_m} \right)^{\frac{1}{5}} \times \frac{\text{Me}\{(|\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|)|) - \text{Me}(\log(\|\mathbf{s}_\ell - \mathbf{u}_m\|)); \forall \mathbf{s}_\ell \sim \mathbf{u}_m\}}{0,6745}, \quad m = 1, 2 \text{ e } 3,$$

em que " \sim " e Me indicam vizinhança e mediana, respectivamente (Bowman e Azzalini, 1997).

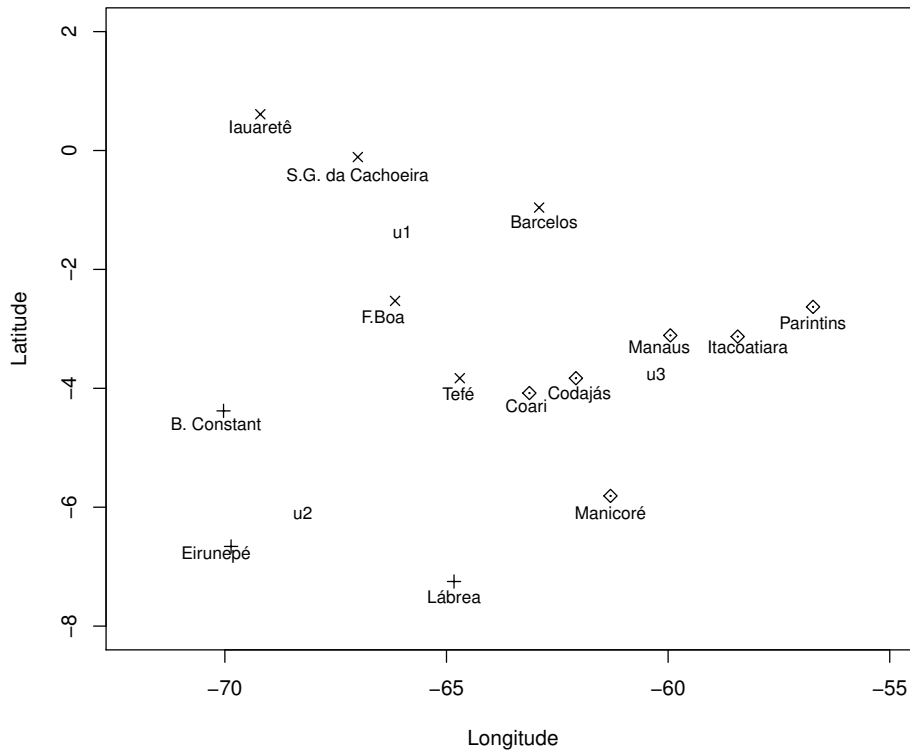


Figura 6.3: Divisão das estações meteorológicas em três grupos.

6.2 Realização da predição espacial

Para a realização das predições espaço-temporais primeiramente consideramos os parâmetros estimados pelo algoritmo MCEM $\hat{\phi} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\alpha})$.

Como para cada $Y_{t,\ell}^{(m)} | H_{\ell}^{(m)} \sim Gumbel(\mu_{\ell} + \sigma_t \log H_{\ell}^{(m)}, \sigma_t)$, temos que marginalmente $Y_{t,\ell}^{(m)} \sim Gumbel\left(\mu_{\ell} + \sigma \log(\omega_{m,\ell}), \frac{\sigma_t}{\alpha_m}\right)$. Desta maneira, admitindo a mesma distribuição para cada $s_0 \in D$, obtemos o seguinte preditor de temperatura para cada tempo t

$$\widehat{Y}_{t,0}^{(m)} = \widehat{\mu}_0 + \widehat{\sigma}_t \log(\omega_{m,0}) - \frac{\widehat{\sigma}_t}{\widehat{\alpha}_m} \gamma, \quad (6.1)$$

em que, $\gamma \approx 0,577$ é a constante de Euler.

6.3 Análise dos resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados referentes a aplicação do modelo Gumbel multivariado no problema espaço-temporal de temperatura máxima. Todos os parâmetros do modelo foram estimados usando o algoritmo MCEM (implementado no *software R* (R, 2016)), descrito no Capítulo 5.

A Tabela 6.2 nos mostra as estimativas para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e seus respectivos erros padrões, que foram gerados através do método Bootstrap paramétrico da seguinte maneira:

- ① Estimamos os parâmetros com os dados reais;
- ② Com os parâmetros estimados, geramos $N = 1000$ reamostras do modelo usando a Equação (3.18);
- ③ Com estas $N = 1000$ reamostras estimamos novamente os parâmetros do modelo;
- ④ O erro padrão Bootstrap foi estimado pelo desvio padrão das $N = 1000$ estimativas geradas.

Tabela 6.2: *Estimativas e erros padrões do parâmetro de dependência espacial, $\boldsymbol{\alpha}$.*

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão
α_1	0,51851	0,05713
α_2	0,89244	0,06885
α_3	0,43322	0,05356

Percebe-se que todas as estimativas $\hat{\alpha}_m$ indicam uma razoável dependência entre as observações pertencentes à mesma sub-região com centro em \mathbf{u}_m . Essa dependência é esperada desde que estamos trabalhando com dados medidos em estações meteorológicas. Note que as observações pertencentes a sub-região centrada em \mathbf{u}_2 são menos espacialmente dependentes que as demais. Isto porque as estações pertencentes a essa sub-região são as mais distantes uma das outras.

No que diz respeito ao parâmetro de tendência de temperatura em cada estação, $\mu(\mathbf{s})$, este foi estimado com o auxílio de regressão linear simples, em que usamos como variável regressora a altitude $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ de cada estação meteorológica dada na Tabela 6.1. Os

valores estimados para os parâmetros β_0 e β_1 foram, respectivamente, $\hat{\beta}_0 = 37,61393$ e $\hat{\beta}_1 = 0,00743$. Aqui, o parâmetro β_0 representa o gradiente horizontal de temperatura e o parâmetro β_1 o gradiente vertical. Deste modo, temos que

$$\hat{\mu}(\mathbf{s}) = 37,61393 + 0,00743 \times \mathbf{x}(\mathbf{s}).$$

A variação em larga escala, σ_t , estimadas para cada tempo é descrita na Tabela 6.3. Percebe-se que durante os 20 anos avaliados foi estimada uma variação média de aproximadamente 0.92 °C em torno da temperatura do Estado.

Tabela 6.3: *Estimativas e erros padrões do parâmetro de larga escala temporal, σ .*

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Parâmetros	Estimativa	Erro padrão
σ_1	1,16919	0,04603	σ_{11}	0,92640	0,16632
σ_2	1,11955	0,28260	σ_{12}	0,93847	0,06581
σ_3	0,99527	0,05288	σ_{13}	1,07858	0,05500
σ_4	0,80149	0,05195	σ_{14}	1,05172	0,06202
σ_5	0,65875	0,05623	σ_{15}	1,12223	0,28196
σ_6	0,57681	0,06407	σ_{16}	0,88522	0,09715
σ_7	0,75606	0,06673	σ_{17}	1,06064	0,07288
σ_8	0,57987	0,11183	σ_{18}	1,02787	0,06394
σ_9	0,86525	0,09581	σ_{19}	0,87219	0,08844
σ_{10}	0,90902	0,05106	σ_{20}	0,91587	0,071200

Com estes parâmetros estimados obtivemos as temperaturas preditas utilizando o preditor valor esperado marginal dado na Equação (6.1). Após a realização das predições em cada município, o pacote *kriging* do *software* R (Kriging, 2014) foi utilizado para a suavização dos mapas. As Figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 apresentam resultados gerados pela aplicação do modelo para os últimos 20 anos (1997-2016). Podemos perceber um suave aumento na distribuição espacial da temperatura no Estado do Amazonas. Esse aumento é mais evidente nos anos 2001 a 2005. É importante ressaltar que nesse período o Estado sofreu com uma das principais secas do século, afetando principalmente a região sudoeste (Serrão et al., 2015).

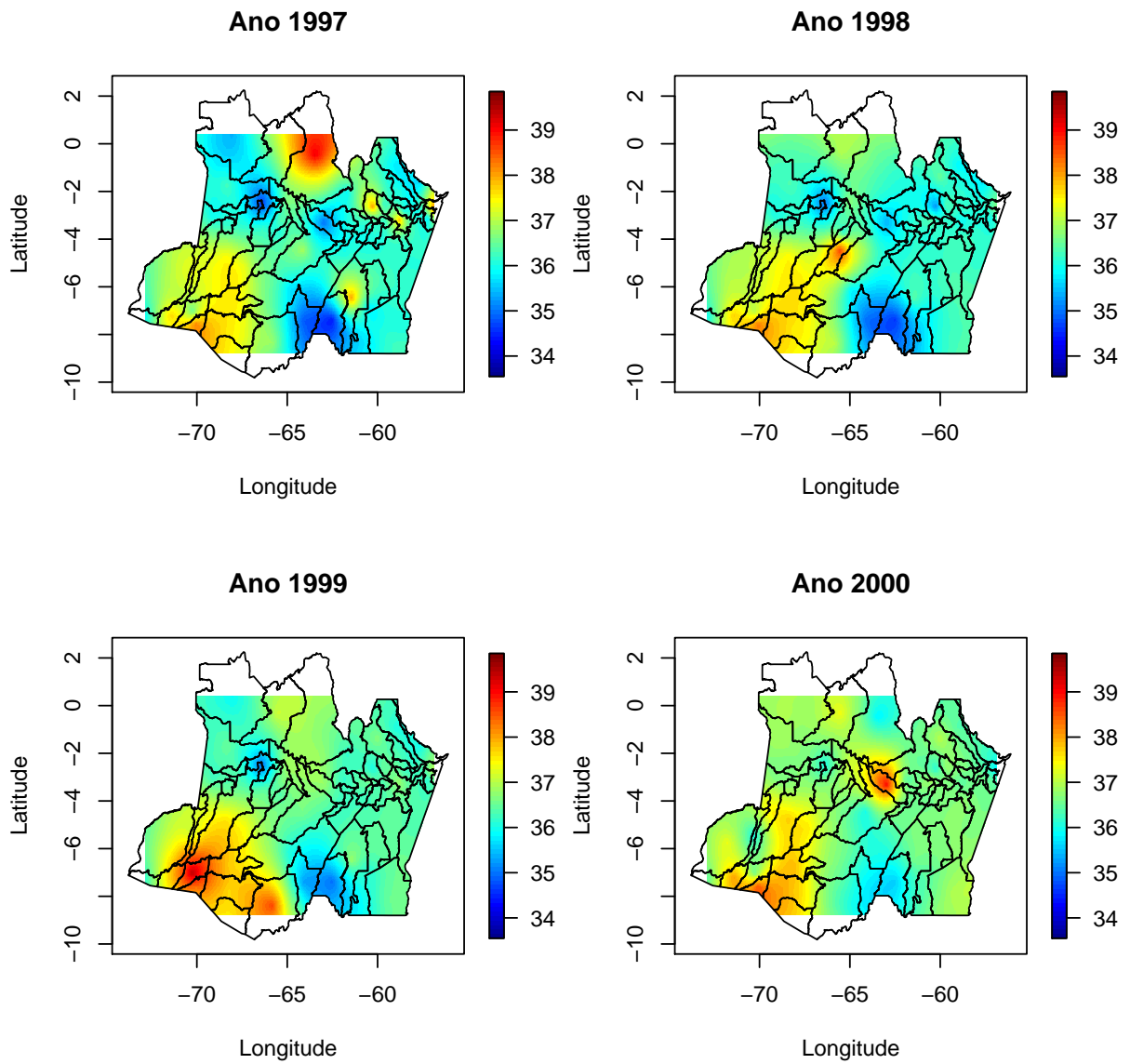


Figura 6.4: *Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/1997-2000.*

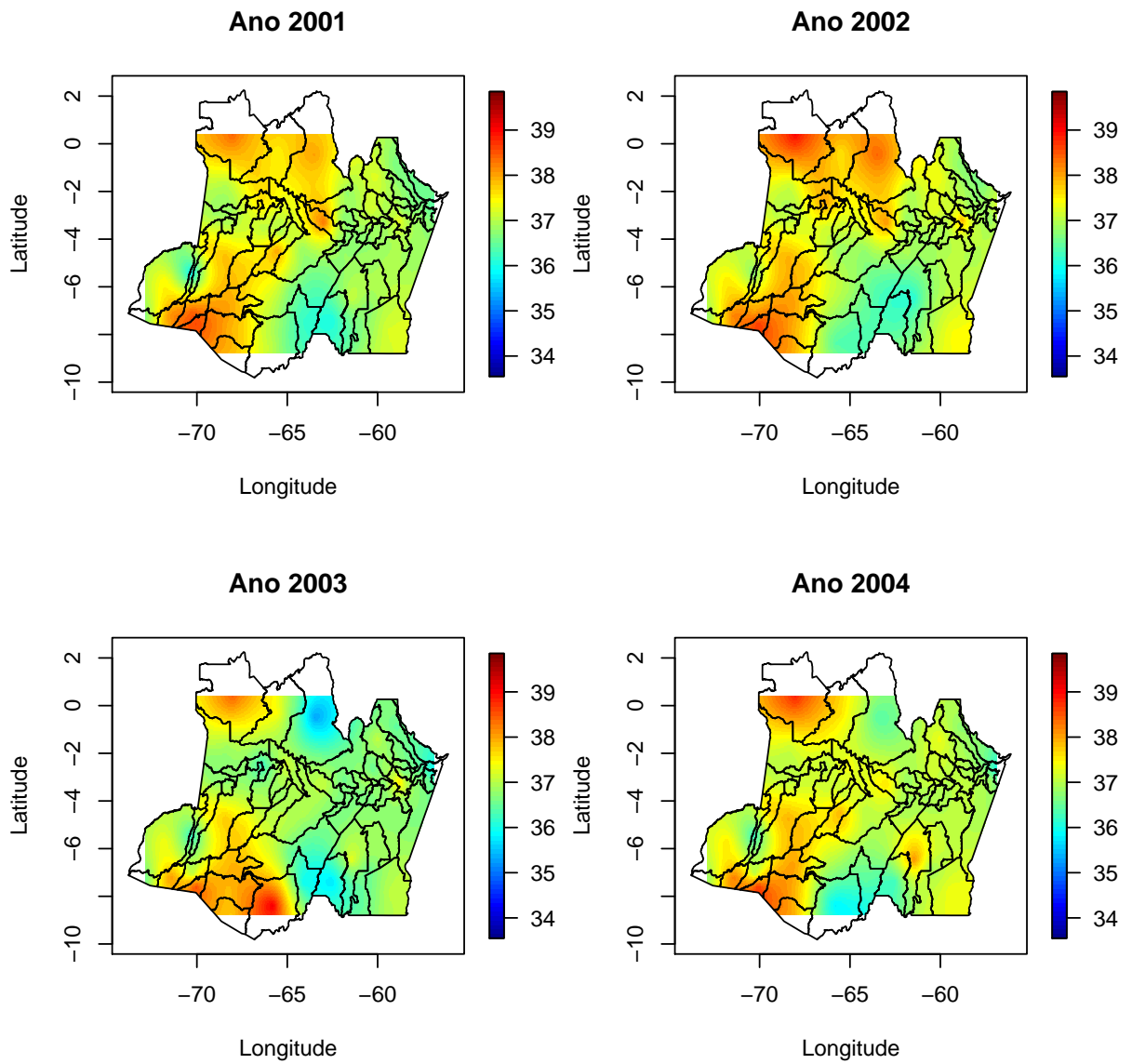


Figura 6.5: *Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2001-2004.*

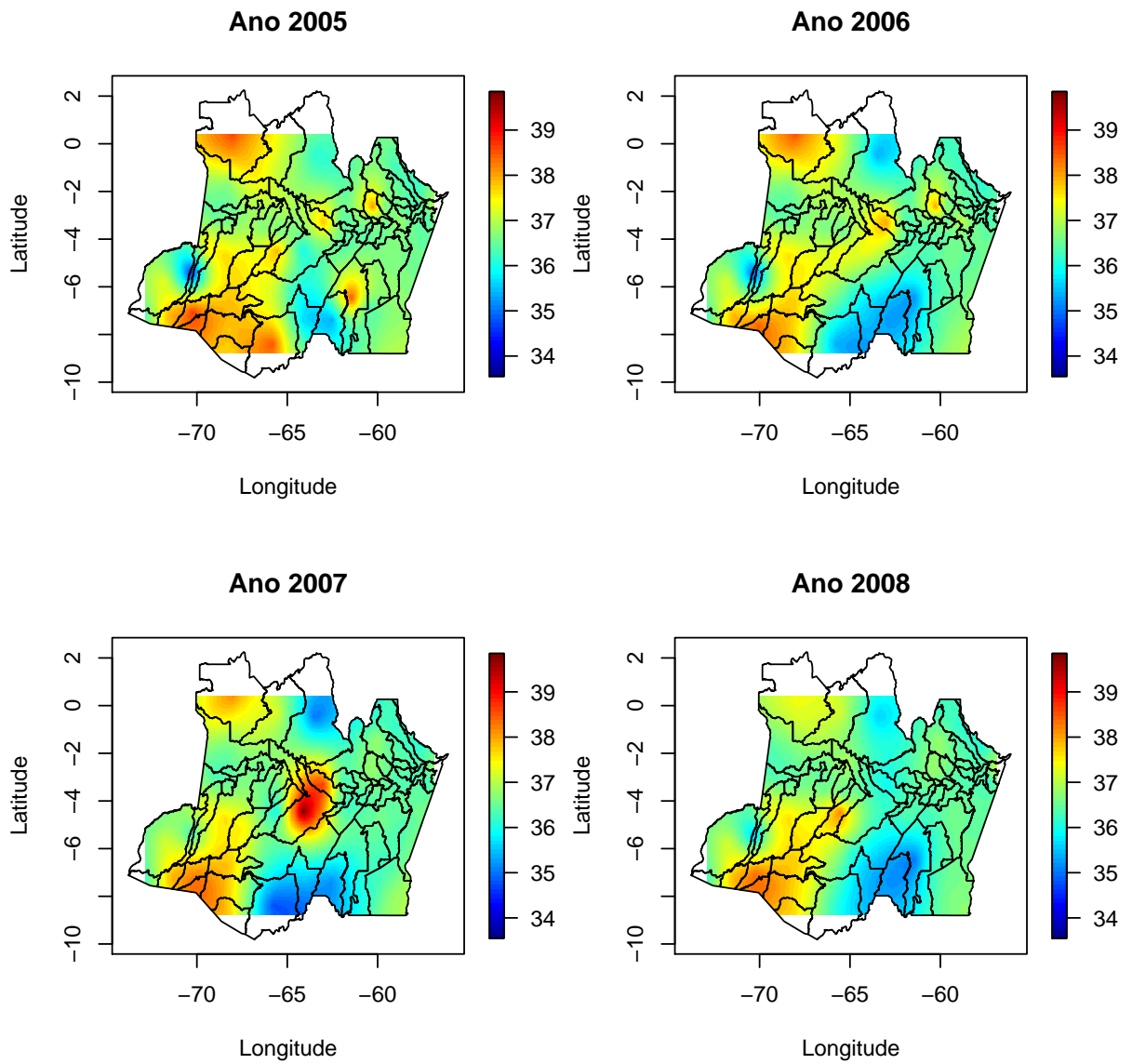


Figura 6.6: *Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2005-2008.*

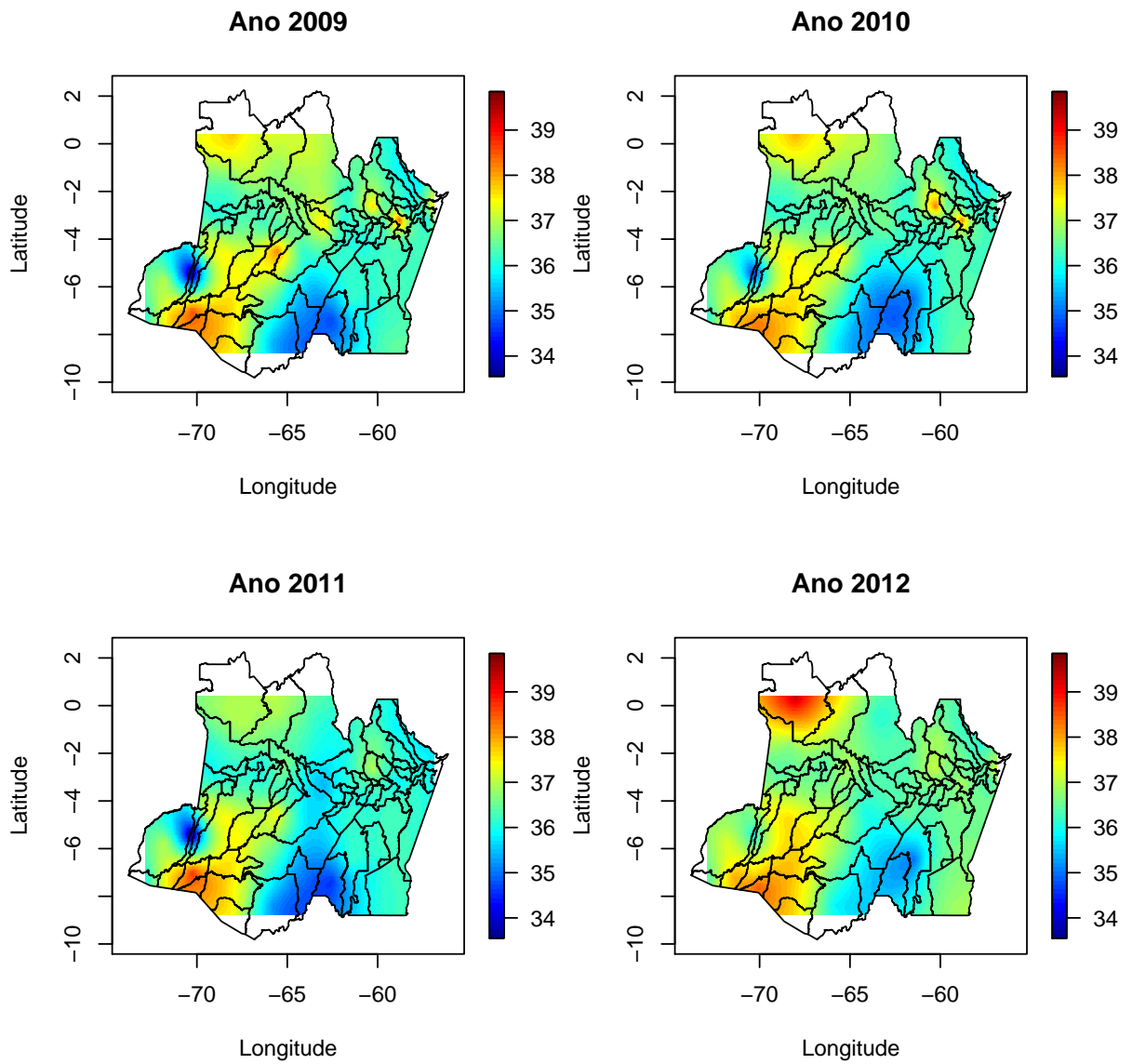


Figura 6.7: *Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2009-2012.*

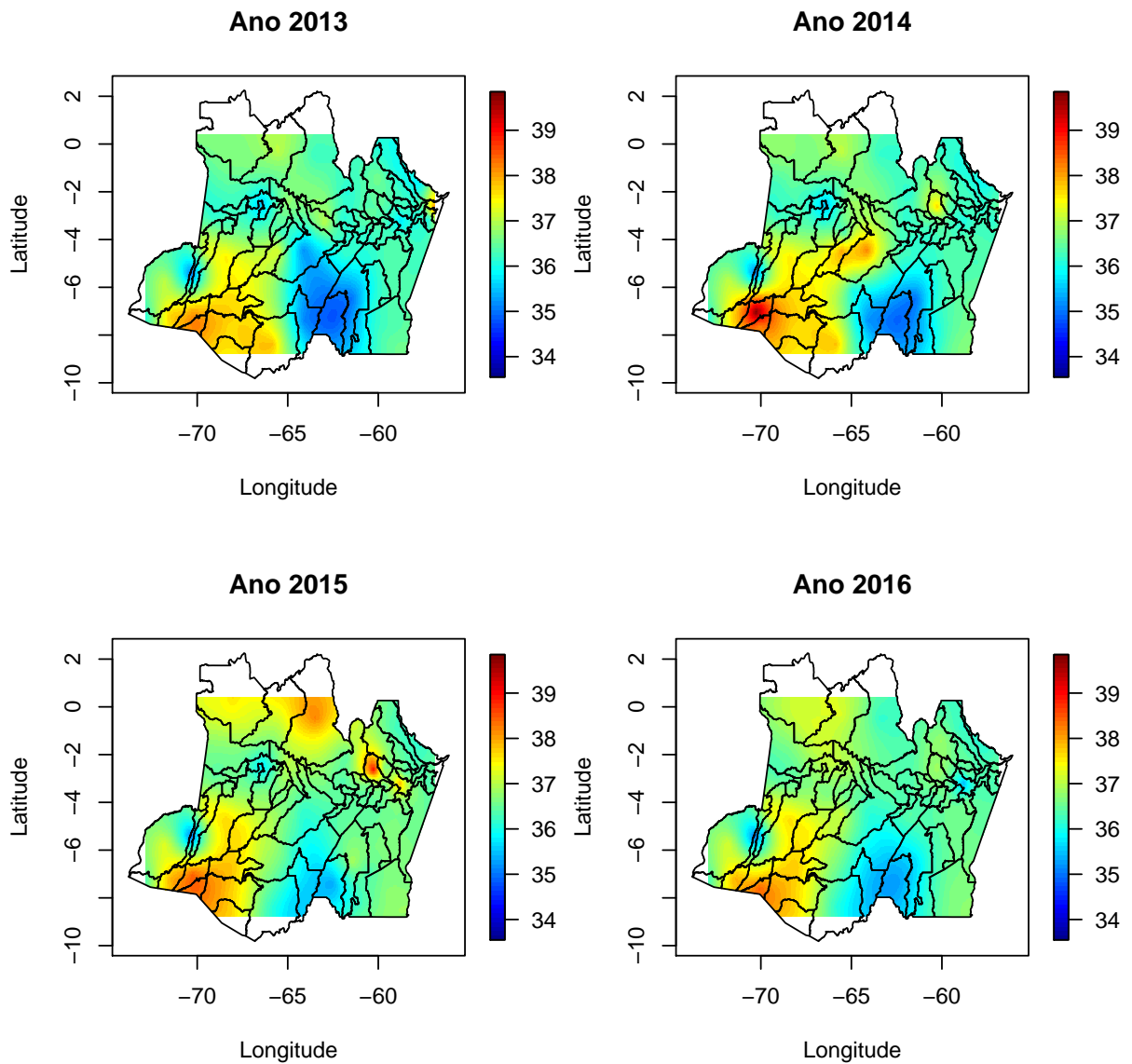


Figura 6.8: *Predições de temperatura máxima no estado do Amazonas/ 2013-2016.*

6.4 Avaliação do modelo proposto

Nesta seção avaliamos o ajuste do modelo proposto (5.1) aplicado no problema de predição espaço-temporal de temperatura no Estado do Amazonas através de um estudo comparativo.

Inicialmente, retiramos uma estação do conjunto de localizações das estações meteorológicas (\mathcal{S}) e repetimos os procedimentos de estimação dos parâmetros (MCEM) com as informações das 13 estações restantes. Em seguida realizamos a predição dos valores de temperatura utilizando o método da esperança marginal, descrito na Subseção

(6.2), para a estação retirada e comparados com os valores preditos usando o interpolador padrão conhecido como método de Ponderação de Distância Inversa (IDW) para interpolação multivariada. Este método popular é de fato uma generalização da aproximação de Lagrange em um espaço multidimensional (Lukaszyk, 2004, Shepard, 1968).

Para comparar a precisão das predições, foram empregadas as seguintes medidas (Sungil, 2016):

(i) Raiz do Erro quadrático médio - RMSE:

$$RMSE(\hat{Y}_{t,\ell}) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (Y_{t,\ell} - \hat{Y}_{t,\ell})^2}{T}}.$$

(ii) Média Percentual Absoluta do Erro - MAPE:

$$MAPE(\hat{Y}_{t,\ell}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{Y_{t,\ell} - \hat{Y}_{t,\ell}}{Y_{t,\ell}} \right|.$$

A Tabela 6.4 apresenta os valores RMSE's e MAPE's para o modelo Gumbel Multivariado (MGM) e para o Método de Ponderação de Distância Inversa (IDW) para cada estação (valores menores indicam uma melhor precisão). Observa-se que os valores RMSE's para o modelo MGM foram menores em sete estações, enquanto que para o método IDW foram menores para outras 7 restantes. Já os valores MAPE's para o modelo MGM foram menores para 9 estações, enquanto que para o método IDW foram menores para outras 5 estações. Além disso, o valor médio de MAPE (MGM) foi 0.04302 com desvio padrão $dp = 0,06547$ e o MAPE médio (IDW) foi 0,02746 ($dp = 0,00971$). O RMSE médio (MGM) foi de 1,1727 ($dp = 0,27841$), e o RMSE médio (IDW) foi de 1,21775 ($dp = 0,39803$). Aplicando o teste de Kolmogorov-Smirnov ao nível de 5% para comparar duas distribuições (Corder & Foreman, 2011), obtém-se que tanto os valores do RMSE's quanto os valores do MAPE's não mostraram diferenças significativas entre as distribuições (p -valor RMSE's = 0,9205 e p -valor MAPE's = 0,6355).

Esses resultados sugerem que o modelo proposto (MGM) fornece resultados consistentes, considerando que o método IDW é bastante padrão para interpolação. Evidentemente, essa comparação muito limitada, não é conclusiva mas é fornecida apenas como uma ilustração da metodologia proposta em uma configuração de dados reais.

Tabela 6.4: *Medidas de ajuste: RMSE's e MAPE's.*

Grupos	Estações	RMSE(MGM)	RMSE(IDW)	MAPE(MGM)	MAPE(IDW)
1	Barcelos	1,12159	1,19727	0,02324	0,02488
	Iauretê	1,55942	1,17598	0,03862	0,02681
	S. G. da Cachoeira	0,97708	1,34778	0,02165	0,03201
	Fonte Boa	0,93292	1,06624	0,02085	0,02465
	Tefé	1,27090	1,10891	0,02799	0,02402
2	B. Constant	1,89733	2,05097	0,04678	0,05024
	Eirunepé	1,23438	2,07695	0,02617	0,0456
	Lábrea	1,25190	1,23116	0,26883	0,02847
3	Coari	1,24208	1,0664	0,02178	0,02287
	Codajás	1,02180	1,09416	0,02201	0,02299
	Manicoré	1,12641	1,21626	0,02550	0,02817
	Manaus	0,94579	0,86362	0,01983	0,01954
	Itacoatiara	0,87299	0,67677	0,01873	0,01481
	Parintins	0,96324	0,87603	0,02036	0,01944

Considerações finais

Neste trabalho uma classe multivariada Gumbel para dados dependentes foi construída através da marginalização de uma distribuição Gumbel univariada condicionada a uma mistura de distribuições α -estáveis. Em seguida, foram desenvolvidos alguns modelos especiais que envolvem séries temporais, espaciais e efeitos aleatórios.

No desenvolvimento das propriedades, podemos perceber que todas as distribuições marginais e do máximo para qualquer subconjunto de observações pertencem à mesma família Gumbel. A função densidade conjunta da classe não possui uma forma fechada dificultando a estimação direta por máxima verossimilhança, por isso desenvolvemos o algoritmo EM.

Como um caso particular da classe multivariada, propomos o modelo espaço-temporal Gumbel multivariado com efeitos aleatórios espacialmente compartilhados e modelados por variáveis com distribuições α_m -estáveis positivas. A dependência espacial neste modelo foi mensurada por grupos. Para isso, as medidas de distâncias foram calculadas através da função Kernel Gaussiana. Para esse modelo foi desenvolvido o algoritmo MCEM para estimação dos seus parâmetros, visto que os efeitos aleatórios, apesar de serem independentes, não são identicamente distribuídos implicando numa esperança condicional difícil de ser calculada.

O foco da nossa aplicação foi a análise dos dados de temperatura máxima, observados nas 14 estações meteorológicas do estado do Amazonas, durante os últimos 20 anos (1997-2016). O modelo mostrou um suave aumento na distribuição espacial da temperatura, principalmente no sudoeste do Estado. Esse aumento foi mais evidente nos anos 2001 a 2005. É importante ressaltar que nesse período o Estado sofreu com uma das principais secas do século.

Para verificar o ajuste do modelo, foi realizado um estudo comparativo com o modelo espacial de ponderação pelo inverso da distância - IDW, considerado padrão para

este tipo de problema. As medidas de ajuste utilizadas foram a Raiz do Erro Quadrático Médio - RMSE e a Média Percentual Absoluta do Erro - MAPE. Percebemos que os resultados gerados pelo modelo proposto (MGM) foram consistentes com os do modelo IDW. Evidentemente, essa comparação muito limitada, não é conclusiva mas foi fornecida apenas como uma ilustração da metodologia proposta em uma configuração de dados reais.

Apêndice A

Distribuição e valores característicos de $W_{t,m}$

A.1 Distribuição de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$

Seja a função densidade de $Z_{t,m}$:

$$h(z_{t,m}) = \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times z^{l-1} \times e^{-z_{t,m}}, \quad z_{t,m} > 0; \quad \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} = 1.$$

Vamos calcular a distribuição de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$.

$$\begin{aligned} F_W(w_{t,m}) &= P(W_{t,m} \leq w_{t,m}), \\ &= P(\log Z_{t,m} \leq w_{t,m}), \\ &= P(Z_{t,m} \leq e^{w_{t,m}}), \\ &= F_{Z_{t,m}}(e^{w_{t,m}}). \end{aligned}$$

Derivando ambos os membros

$$\begin{aligned}
f_{W_m}(w_{t,m}) &= \frac{\partial F_{W_{t,m}}(w_{t,m})}{\partial w_{t,m}}, \\
&= \frac{\partial F_{Z_{t,m}}(z_{t,m})}{\partial z_{t,m}} \times \left| \frac{\partial z_{t,m}}{\partial w_{t,m}} \right|, \quad z_{t,m} = e^{w_{t,m}} \\
&= f_{Z_{t,m}}(e^{w_{t,m}}) \times e^{w_{t,m}}, \\
&= \left[\sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times (e^{w_{t,m}})^{l-1} \times e^{-e^{w_{t,m}}} \right] \times e^{w_{t,m}} \\
&= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times e^{w_{t,m}l} \times e^{-e^{w_{t,m}}}, \quad w_{t,m} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A.1.1 Função geradora de momentos de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$

$$\begin{aligned}
M_{W_m}(k) &= \mathbb{E}(e^{kW_{t,m}}), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{kW_{t,m}} \times f_{W_{t,m}}(w_{t,m}) dw_{t,m} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{kW_{t,m}} \times \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times e^{w_{t,m}l} \times e^{-e^{w_{t,m}}} dw_{t,m} \\
&= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{W_{t,m}(k+l)} \times e^{-e^{w_{t,m}}} dw_{t,m}.
\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$u = e^w \Rightarrow du = e^w dw$$

Desta forma, quando

$$\begin{cases} w \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow 0; \\ w \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
M_{W_{t,m}}(k) &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} u^{(k+l)} \times e^{-u} \times \frac{du}{u} \\
&= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} u^{(k+l)-1} \times e^{-u} du \\
&= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{\Gamma(k+l)}{\Gamma(l)}.
\end{aligned}$$

A.1.2 Esperança de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$

Por definição,

$$\mathbb{E}(W_{t,m}) = \left. \frac{\partial}{\partial k} M_{W_m}(k) \right|_{k=0}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} M_{W_{t,m}}(k) &= \frac{\partial}{\partial k} \left[\sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{\Gamma(k+l)}{\Gamma(l)} \right] \\ &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times [\Gamma(k+l)]' \\ &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times \Gamma'(k+l) \times (k+l)', \end{aligned}$$

aplicando no ponto $t = 0$, vem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{t,m}) &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{\Gamma'(l)}{\Gamma(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \psi(l), \end{aligned}$$

em que $\psi(l)$ é a função digamma definida por $\psi(l) = \frac{\partial \psi(l)}{\partial l} \log \Gamma(l)$.

A.1.3 Segundo momento de $W_{t,m} = \log Z_{t,m}$

$$\mathbb{E}(W_{t,m}^2) = \left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} M_{W_m}(k) \right|_{k=0}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial k^2} M_{W_{t,m}}(k) &= \frac{\partial}{\partial k} \left[\sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times \Gamma'(k+l) \right] \\ &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times \{\Gamma'(k+l)\}' \\ &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times \Gamma''(k+l) \times (k+l)' \\ &= \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{1}{\Gamma(l)} \times \Gamma''(k+l). \end{aligned}$$

Pondo $k = 0$, vem:

$$\mathbb{E}(W_{t,m}^2) = \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{\Gamma''(l)}{\Gamma(l)}.$$

A.1.4 Variância de $W = \log Z_{t,m}$

$$\text{Var}(W_{t,m}) = \sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \frac{\Gamma''(l)}{\Gamma(l)} - \left[\sum_{l=1}^{L_m} q_{L_m,l} \times \psi(l) \right]^2.$$

Apêndice B

Cálculo das esperanças

$\mathbb{E}_{m,1}$, $\mathbb{E}_{m,2}$, $\mathbb{E}_{m,3}$ e $\mathbb{E}_{m,4}$

Neste apêndice vamos demonstrar as seguintes expressões:

①

$$\mathbb{E}_{m,1} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

②

$$\mathbb{E}_{m,2} = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

③

$$\mathbb{E}_{m,3} = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_1(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

④

$$\mathbb{E}_{m,4} = \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_b^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \times \varphi_2(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.$$

Demonstração. Usando a proposição (5.1) e as funções φ_0 , φ_1 e φ_2 definidas nas equações (5.4), (5.5) e (5.6), temos que

①

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,1} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty E_m p(\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{E} \\
&= \int_0^\infty E_m p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty E_m \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty E_m \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,2} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m)) = \int_0^\infty \log(E_m) p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty \log(E_m) \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty \log(E_m) \varphi_0(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(E_m) \times \varphi_0(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.
\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,3} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\log(c(B_m))) = \int_0^\infty \log(c(B_m)) p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty \varphi_1(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty \varphi_1(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_1(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.
\end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{m,4} &= \mathbb{E}_{\mathbf{E}|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}}) = \int_0^\infty c(B_m) E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} p(E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) dE_m \\
&= \frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \int_0^\infty E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \varphi_2(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))} \left(\frac{(v^{(m)}(\boldsymbol{\theta}))^{TL_m+1}}{\Gamma(TL_m+1)} \int_0^\infty E_m^{-\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}} \varphi_2(E_m, \alpha_m) E_m^{TL_m} e^{-E_m v^{(m)}(\boldsymbol{\theta})} dE_m \right) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{E_m|\mathbf{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\varphi_2(E_m, \alpha_m))}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\varphi_0(E_m, \alpha_m))}.
\end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

- BEIRLANT, Jan; GOEGEBEUR, Yuri; TEUGEELS, Jozef. *Statistics of extremes : theory and applications*, USA, John Wiley & Sons, 2004.
- BOWMAN, A. W; AZZALINI, A. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-Plus Illustrations* 1^aed, Oxford University Press Inc, New York, 1997.
- BRUUN, J. T. and TAWN, J. A. (1998). *Comparison of approaches for estimating the probability of coastal flooding*, Appl. Statist., **47**: 405-423.
- CAMARA G., A. Monteiro, S. Druck, o Sr. Carvalho, *Análise e Espacial Geoprocessamento* 2000.
- CASELLA, G.; BERGER, R.L. *Inferência Estatística*, São Paulo, Cengage Learning, 2010.
- CHUONG, B. D.; BATZOGLOU, Serafim (2008). *What is the expectation maximization algorithm?*, Nature Biotechnology, **26**: 897-899.
- COLES, S. G.; TAWN, J.A.(1991). *Modelling multivariate extreme events.*, J. Roy. Statist.Soc. B , **53**: 377-392.
- CORDER, Gregory W.; FOREMAN, Dale I. (2011). *Nonparametric Statistics for Non-Statisticians: A Step-by-Step Approach*. John Wiley & Sons. ISBN 9781118211250.
- CROWDER, M J.(1998). *A multivariate model for repeated failure time measurements*, Scand. J. Statist., **25**: 53-67.
- CROWDER, M J.(1997). *A score test for the multivariate Burr and other Weibull mixture distributions*, Scand J. Statist., **24**: 419-432.

- CUNHA, Geraldo Marcelo (2009). *Modelos de convolução para dados espaço-temporais*. Tese(doutorado) IM, UFRJ, 2009.
- BLACKWELL, D. MACQUEEN J. B. (1973). *Ferguson distributions via Pólya urn schemes*. Ann. Statist. , **1**: 353-355.
- FOUGÈRES, A.L. *Multivariate extremes*. In *Extreme Values in Finance, Telecommunications and the Environment*, Finkenstädt, B. and Rootzén, H. (Ed.), 373-388, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- FOUGÈRES, A L.(2009), NOLAN John, and ROOTZEN Holger. *Models for dependent extremes using stable mixtures*, Scandinavian Journal of Statistics, Wiley-Blackwell, 2009, 36, pp.42-59.
- GONZALES, D.S. *Modelos de Mezcla de distribuciones α -estáveis: Aplicación a matrices de expresión genética*, Universidade de Granada, Departamento de Física, 2008.
- GUMBEL, E.J. *Les valeurs extrêmes des distributions statistiques*, Annales de l'institut Henri Poincaré, Volume 5 (1935) no. 2, p. 115-158
- HAAN, de L.; RONDE, J.(1998). *Sea and wind: multivariate extremes at work*, Extremes, **1**: 7-45
- HEFFERNAN, J.E.; TAWN, J.A. (2004). *A conditional approach for multivariate extreme values*, J. Roy. Statist. Soc. B, **66**: 497-546.
- HOUGAARD, P. (1986). *A class of multivariate failure time distributions*, Biometrika, **73**: 671-678.
- INMET (BDMEP - Série Histórica - Dados Mensais). *Temperatura Máxima Média-estado do Amazonas*. Disponível em: http://www.inmet.gov.br/projetos/rede/pesquisa/mapas_mensal_sem.php
- JOHNS, David A. and MARTIN, Ken. *Analog Integrated Circuit Design*, John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- KOTZ, S ; NADARAJAH, S. *Extreme Value Distributions : Theory and Applications*, London, Imperial College Press, 2000.

- KUNDU, D. & GUPTA, R.D. (2010). *A class of bivariate models with proportional reversed hazard marginals*. Sankhya, **72**: 236-253.
- KUNDU, D.; FRANCO, M. and VIVO, J.M. (2014). *Multivariate distributions proportional reversed hazard marginals*. Computational Statistics Data Analysis, **77**: 98-112.
- LEHMANN, E. L.(1953). *The Power of Rank Tests*. Ann. Math. Statist., **24**: 23-43.
- LEADBETTER, M.R. ; LINDGREN, G.; ROOTZÉN, H. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Springer, 1983.
- LEVINE, R.A; CASELLA, G. (2001). *Implementations of the Monte Carlo EM Algorithm*, Statist. Sci, **23**: 192-195.
- LEDFORD, A.W.; TAWN, J.A. (1996). *Statistics for near independence in multivariate extreme values*, Revista, **83**: 169-187.
- LUKACS(1970),Eugene. *Characteristic functions*, London : Griffin, cop. 1970.
- LUKASZK S, 2004. A new concept of probability metric and its applications in approximation of scattered data sets. Computational Mechanics **33**: 299-304.
- MAGALHÃES, Marcos N.. *Noções de Probabilidade e Estatística*. Vol. 1 , 2.ed, São Paulo, Edusp, 2006.
- MAHDI, S. ; CENAC M.(2005), *Estimating parameters of gumbel distribution using the methods of moments, probability weighted moments and maximum likelihood*, Teoría y Aplicaciones 2005 12(1 & 2) : 151–156 cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433.
- MARKOSE, Sheri e ALENTORN, Amadeo (2010). *The Generalized Extreme Value (GEV) Distribution, Implied Tail Index and Option Pricing* .J The Journal of Derivatives.
- MITRA, Sanjit K. , *Digital Signal Processing - A Computer-Based Approach.*, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.
- McFADDEN, D. *Modelling the choice of residential location. In Spatial Interaction Theory and Planning Models*, Amsterdam,North-Holland, 1978.

- MIKOSCH, T.; FINKENSADT, B.;ROOTZÉN, H. *Modelling dependence and tails of financial time series. In Extreme Values in Finance, Telecommunications and the Environment*, Boca Raton,Chapman and Hall/CRC, 2004.
- NAVEAU, Philippe,COOLEY, Dan, PONCET, Paul. (2005). *Modeling Spatial Dependence for Extremes Inclimate Studies*. Laboratoire des Sciences du Climat et de l'Environnement (LSCE-IPSL), France. Disponível em: <http://statwww.epfl.ch/seminars/2005/naveau.htm>.
- NOLAN, J.P. (2012). *Numerical calculation of stable densities and distribution functions*, *Commun, Statist. Stochastic Models*, **13**: 759-774.
- OUARDIGHI, Jalal (2002). *Dépendance spatiale sur données de panel : application à la relation Brevets-R&D au niveau régional*. *L'Actualité économique*, **781(2002)**: 67-86.
- OLIVEIRA, Paulo Eduardo. *Asymptotics for Associated Random Variables*, Springer, Berlin, 2012.
- OLMEDO, Omar E.(2014). *kriging: Ordinary Kriging*. R package version 1.1. <https://CRAN.R-project.org/package=kriging>.
- PAIVA, C., *Dependência Espacial: Setores censitários, Zonas OD, Distritos, SubPrefeituras, etc*. Carlos Eduardo de Paiva Cardoso, comunicação pessoal, CET/SP e PUC/SP, 2007
- QUADRO, Mario F.L et al. *Climatologia de Precipitação e Temperatura*. Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos - CPTEC/INPE. Disponível em: <http://climanalise.cptec.inpe.br/~rcliman1/boletim/cliesp10a/chuesp.html>, acesso: março de 2017.
- R Core Team.(2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- SERRÃO, E.; Santos, C.; WANZELER, R.; Gonçalves, L.; Lima,A.(2015). *Avaliação da Seca de 2005 e 2010 na Amazônia: Análise da Bacia Hidrográfica do Rio Solimões*, *Rev. Geogr. Acadêmica* v.9, n.2 (xii.2015), **15**:(5 - 20).

- SHAKED, Moshe (1982). *A general theory of some positive dependence notions*, Journal of Multivariate Analysis, **12**: 161-315.
- SHEPARD, D. 1968. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. Proceedings of the 1968 ACM National Conference, 517-524.
- SHI, D.(1995). *Fisher information for a multivariate extreme value distribution*, Biometrika, **82**: 644-649.
- SMITH, R. L. *Statistics of extremes, with applications in environment, insurance, and finance. In Extreme Values in Finance, Telecommunications and the Environment*, Boca Raton,Chapman and Hall/CRC, 2004.
- STEPHENSON, A.G. (2003). *Simulating multivariate extreme value distributions of logistic type*, Extremes, **6(1)**: 49-59.
- STEPHENSON, A.G. (2009). *High-dimensional Parametric Modelling of Multivariate Extreme Events*, Extremes, **51(1)**: 77-88.
- SUNGIL K, & HEEYOUNG K. (2016). A new metric of absolute percentage error for intermittent demand forecasts. *International Journal of Forecasting.*, **32 (3)**: 669-679.
- TAWN, J.A. (1990). *Modelling multivariate extreme value distributions*, Biometrika, **77**:245-253.
- WEY,C.G.; TANNER, M.A. (1990). *A Monte Carlo Implementation oh the EM algorithm and the Poor Man's Data Augmentation Algorithms*, Journal of the American Statistical Association, **85**: 699-704.
- ZOLOTAREV, V. M. *One-dimensional Stable Distributions*, Russian,Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, 1986.
- ZHU, H. e LEE, S. (2001). *Local influence for incomplete-data models*.Journal of the Royal Statistical Society, B, **63**, 111-126.