UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

# *UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NO ENSINO MÉDIO*

Manoela Franco da Silva

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Manoela Franco da Silva

# *UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NO ENSINO MÉDIO*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586u

Silva, Manoela Franco da
Uma Proposta de Aplicação da Lógica Fuzzy no Ensino Médio / Manoela Franco da Silva. 2018
43 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Roberto Antonio Cordeiro Prata
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. ensino médio. 2. lógica fuzzy. 3. pensamento matemático. 4. modelagem matemática. 5. subjetividade. I. Prata, Roberto Antonio Cordeiro II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

MANOELA FRANCO DA SILVA

UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 de julho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata - UFAM
Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira - UFAM
Membro

Profa. Dra. Jeanne Moreira de Sousa - IFAM
Membro

# AGRADECIMENTOS

À Deus, por me permitir realizar mais esse sonho profissional e pessoal.

À minha mãe, Maria de Nazaré, por sempre me apoiar e incentivar nos estudos e por ser a melhor mãe do mundo.

Ao meu pai , Manoel Ramos (*in memoriam*), que me ensinou tanta coisa e sempre me incentivou e inspirou nos estudos e na vida profissional e tenho certeza que está muito feliz por essa conquista.

À minha irmã, Lídia Ramos, por ser a minha força e inspiração desde criança e por cuidar dos nossos pais enquanto eu estava ausente.

Ao meu orientador, Roberto Prata, por aceitar me orientar e me guiar nesse trabalho desde quando foi meu professor durante as aulas do mestrado.

À UFAM, pela oportunidade de cursar o mestrado.

À CAPES, por me incentivar no estudo e na pesquisa através da concessão da bolsa durante o curso.

Aos meus professores, em especial à professora Rita Gil, que sempre me incentivou desde a graduação, a quem eu tenho como exemplo.

Ao meu noivo, Walace, pelo apoio e ajuda de sempre nas idas e vindas à UFAM.

Aos meus amigos, em especial aos que eu conheci aqui em Manaus e me receberam de braços abertos e sempre estão dispostos a me ajudar, os quais tiveram grande contribuição para que eu chegasse até aqui: Francisca, Marcos, Otávio, José, Gabrielle, Jader, Rilner, Rose, Neide, Daniel e aos demais colegas do Profmat. Muito obrigada!

# RESUMO

A lógica fuzzy trabalha com termos imprecisos na matemática, cuja representação não pode ser feita através das propriedades dos conjuntos clássicos conhecidas. Esses termos, mesmo que imprecisos podem ser interpretados por números. O presente trabalho apresenta uma proposta para trabalhar lógica Fuzzy no ensino médio com base em análise de problemas em que se pode aplicar a teoria dos conjuntos Fuzzy a partir do pensamento intuitivo. O referencial teórico encontra-se em Barros e Bassanezi (2006) e nos resultados de Corcoll-Spina (2010) e Gayer (2017). O objetivo deste trabalho é fazer com que os alunos utilizem a lógica fuzzy no seu cotidiano através de aplicações que eles deverão desenvolver a partir da teoria clássica dos conjuntos, passando pela lógica fuzzy e, através da modelagem matemática, modelar fenômenos por meio da subjetividade e conseguir interpretar as aplicações da lógica fuzzy em variadas situações.

Palavras-chave: Ensino Médio, Lógica Fuzzy, Pensamento Matemático.

# ABSTRACT

The Fuzzy logic is about uncertainty in Math, whose representation can't be done by crisp sets properties known. This representation, even uncertaintly can be interpretados by numbers. This job presents a proposta to use Fuzzy logic at high school based in analysis of problems that can be applied the Fuzzy sets theory from intuitive thinking. The theoretical framework is Barros and Bassanezi (2006) and in the results of Corcoll-Spina (2010) and Gayer (2017). The objective of this work is to make the students use the fuzzy logic in their daily life through applications that they must develop from the classical theory of sets, passing through the fuzzy logic and, through mathematical modeling, to model phenomena through subjectivity and to be able to interpret the applications of fuzzy logic in many situations.

Keywords: High school, Fuzzy logic, Mathematical thinking.

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\in$ | Pertence a. |
| $\notin$ | Não pertence a. |
| $\subset$ | Está contido em. |
| $\Rightarrow$ | Implica em. |
| $A^C$ | Complementar do conjunto A. |
| $\cup$ | União. |
| $\cap$ | Intersecção. |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números reais. |
| $\sum$ | Somatório. |
| $\leq$ | Menor ou igual. |
| $max\,\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ | Maior elemento de $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. |
| $min\,\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ | Menor elemento de $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. |
| $\mathbb{N}$ | Conjunto dos números naturais. |
| $\emptyset$ | Conjunto vazio. |

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

# Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy, desenvolvida por Lotfi Asker Zadeh (1921-2017), trabalha com termos imprecisos ou vagos na matemática. A lógica baseada nessa teoria foi feita a partir dos conceitos já conhecidos da lógica clássica. O conceito fuzzy pode ser aplicado em situações nas quais não podemos responder apenas sim ou não à uma determinada questão.

De acordo com a pesquisa de Corcoll-Spina [6], a lógica fuzzy pode ser aplicada a certos problemas do ensino médio através da modelagem matemática. Com isso os alunos poderão eles mesmos estabelecer os graus de pertinência de determinado problema a partir de questões propostas a eles e que devem ser respondidas e analisadas com base na lógica fuzzy. Então, é lançada uma proposta para se trabalhar a lógica fuzzy com os alunos do ensino médio, voltada à realidade deles, utilizando a modelagem matemática.

Este trabalho busca desenvolver uma relação da lógica matemática trazendo-a para o mundo real em diversas situações de modo a mostrar a lógica fuzzy como uma ferramenta para solucionar esse tipo de problema.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo é feita uma descrição do que é a modelagem matemática, citando os principais teóricos que trabalham com esse tema no Brasil. Também são descritas as etapas da modelagem matemática. O segundo capítulo é sobre os conjuntos clássicos (crisp) e suas propriedades e em seguida são abordados a lógica fuzzy e os conjuntos fuzzy. No terceiro capítulo são apresentadas propostas de como trabalhar a lógica fuzzy no ensino médio com situações propostas aos alunos, de forma introdutória. E finalmente, no quarto capítulo, é lançada a proposta de se trabalhar um problema usando os principais elementos de uma base de regras fuzzy.

# Capítulo 1

# Modelagem Matemática

## 1.1 Histórico da Modelagem Matemática

A modelagem matemática existe há quase 40 anos e ao longo desse tempo ela vem tornando-se significativa na aplicação de conhecimentos matemáticos.

Biembegut [4] afirma que, nos Estados Unidos, evidências do uso da modelagem matemática são encontradas em uma coleção de textos preparados entre 1958 e 1965. Ela afirma ainda que entre os anos de 1966 e 1970, no 69º anuário da National Society for the Study of Education há um capítulo em que o processo da modelagem é descrito ainda sem se fazer uso do termo.

Na década de 60 foram formados grupos de pesquisadores para abordarem o tema modelagem matemática, através de movimentos que buscavam ensinar matemática de forma útil, envolvendo o cotidiano do aluno para que ele visse que o assunto estudado poderia ser aplicado à sua realidade.

Em 1983 consolidou-se o Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações que, além de fazer parte dos grupos do International Congress Mathematics Education - ICME, tem realizado bi-anualmente o evento internacional.

A modelagem matemática no Brasil tem grandes representantes como: Aristides Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, desde o final dos anos 1970 e início dos anos 1980 e estes influenciam o uso do tema até hoje.

Rodney C. Bassanezi é um dos maiores disseminadores da modelagem matemática no Brasil. Ele ministrou cursos de formação continuada e de pós-graduação de modelagem e atuou em diversas instituições de quase todos estados brasileiros, de acordo com Biembegut [5]. Ele defende a modelagem como estratégia de ensino de matemática em função das dificuldades dos alunos em entender para quê aprender matemática e também da dificuldade do professor de, em muitos casos, esclarecer essa dúvida.

Biembegut [4] afirma que a proposta de Bassanezi, nos cursos que ministrou para professores, era levar os estudantes a se inteirarem das atividades de uma região à qual pertenciam e, a partir desse contato com as questões da realidade, levantar problemas de interesse para serem investigados.

Bassanezi orientou 6 dissertações em Educação Matemática com foco na modelagem matemática no ensino. Em 2002 ele publicou o livro Ensino-aprendizagem com modelagem matemática - adotado em vários programas de graduação e pós graduação no país. Ele é uma das pessoas que deu impulso significativo para a implantação e a disseminação da modelagem matemática na educação brasileira.

## 1.2 Modelagem Matemática como tendência na Educação Matemática

A Educação Matemática, segundo Mendes [12], é constituída por um corpo de atividades com finalidade de: desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores no ensino; elaborando e implementando mudanças curriculares; criando e testando materiais de apoio para o ensino e aprendizagem da Matemática.

A Educação Matemática também é fundamental na formação continuada de professores de Matemática, tendo como objetivo tornar o ensino mais eficaz e proveitoso, visando a superação das dificuldades encontradas por professores e estudantes durante o processo educativo, nos diferentes níveis de ensino da Educação Básica.

As Tendências em Educação matemática surgiram da necessidade de soluções para alguns obstáculos encontrados por educadores matemáticos no decorrer de suas práticas. A possibilidade de se contribuir para melhorar a prática pedagógica dos professores a partir de experiências docentes concretizou o uso dessas tendências e uma delas é a Modelagem Matemática.

Mendes [12] classifica a Modelagem Matemática da seguinte maneira:

> A Modelagem Matemática e a representação do pensamento matemático são práticas desenvolvidas pela sociedade humana desde os primórdios da historia da evolução do homem. A representação formal das ações vivenciadas ocorreu através da sistematização das ideias presentes na tentativa de solucionar situações-problema que envolviam as atividades e necessidades dos povos.

Nesta abordagem a matemática pode ser considerada um artefato criado pela sociedade para representar situações onde se produz conhecimentos para solucionar os problemas, que surgem, enfatizando o pensamento e o raciocínio utilizado na solução do desafio em questão. A arte da Modelagem Matemática começa com um problema de ordem prática ou de natureza empírica, depois busca a matemática que deve ser utilizada para ajudar a resolver esta situação. Sua metodologia consiste numa análise de problemas reais e a busca de modelos matemáticos apropriados para resolvê-los.

## 1.3 Procedimentos para a modelagem matemática

De acordo com Bassanezi [3], a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente, sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador.

Ainda de acordo com Bassanezi [3], deve-se buscar aliar preocupações teóricas, filosóficas e metodológicas especiais, levando em conta os recursos humanos disponíveis, tais como os interesses partilhados pelos professores e alunos para que se desenvolva a capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos e aplicá-los em seu ambiente.

Bassanezi [3] define as seguintes etapas para a realização da modelagem matemática:

### 1.3.1 Escolha de temas

Para fazer modelagem matemática deve-se primeiramente escolher o tema. Pode ser feito um levantamento de possíveis situações de estudo, que sejam abrangentes para que se tenha questionamentos em vários aspectos. Por exemplo, se o tema escolhido for o encontro das águas entre os rios Negro e Solimões, deve-se levantar questionamentos sobre como se dá esse encontro, o que influencia para que as águas se misturem ou não, como temperatura, densidade, cor, direção do vento, etc. Caso o tema escolhido for desconhecido ou inédito, o professor deve, antes de mais nada, procurar temas correlacionados e buscar uma analogia entre os fenômenos.

É importante que os alunos participem da escolha dos temas para que se sintam parte do processo de aprendizagem, fazendo com que sua participação seja mais efetiva.

Os alunos podem trabalhar em pequenos grupos com problemas específicos do tema comum ao grupo. O professor deve procurar não propor diretamente os problemas e sim atuar como monitor em cada grupo, sugerindo situações que devem impulsionar os alunos a dar continuidade ao desenvolvimento do problema.

Para Bassanezi [3],

> A diversidade dos temas por si só já é uma demonstração da abrangência do programa e muitos servem como motivação de pesquisa em projetos de Matemática Aplicada. Por exemplo, o projeto de espalhamento de doenças proporcionou um estudo a posteriori de modelos alternativos de disseminação de doenças em ambientes fechados onde introduziu-se sistemas dinâmicos fuzzy.

### 1.3.2 Coleta de dados

Uma vez escolhido o tema, o próximo passo é buscar informações relacionadas com o assunto. A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas:

i) Através de entrevistas e pesquisas executadas com os métodos de amostragem aleatória. Neste caso a organização de um questionário eficiente e a utilização de alguns conceitos básicos de Estatística são fundamentais;

ii) Através de pesquisa bibliográfica, utilizando dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas;

iii) Através de experiências programadas pelos próprios alunos.

Segundo Bassanezi [3],

> Quando se efetua uma coleta de dados, tendo como pano de fundo o tema escolhido, muitas vezes o resultado obtido é bastante inesperado e interessante e acabamos coletando ou selecionando informações de outras situações correlatas ao tema inicial. Em termos de ensino-aprendizagem de matemática esta situação é bastante favorável pois proporciona direcionamentos alternativos para se desenvolver a aprendizagem de algum conteúdo.

Os dados coletados podem ser organizados em tabelas para que se tenha uma análise mais eficiente, e também podem ser utilizadas para a construção dos gráficos das curvas de tendências.

### 1.3.3 Análise de dados, formulação de modelos e validação

Bassanezi [3] afirma que buscar um modelo matemático que expressa a relação entre as variáveis é o que se convencionou chamar de modelagem matemática. Muitas vezes, tais modelos são dados pela solução de sistemas variacionais. Desta forma, é sempre conveniente entender as variáveis envolvidas no fenômeno analisado.

De acordo com Bassanezi [3]:

> A escolha do modelo matemático é determinante para se ter uma previsão de algum fato. Modelos determinísticos de um mesmo fenômeno podem prever resultados diferentes. Isto acontece invariavelmente porque nem sempre é possível dispor de todas as variáveis que atuam no fenômeno. Neste sentido, por mais exata que seja a matemática, por mais determinísticos que sejam os modelos, sempre teremos soluções aproximadas de alguma realidade. Assim, o uso de uma matemática menos determinística e mais grosseira pode ser muitas vezes tão eficaz para previsões quanto às obtidas pelos processos clássicos.

Segundo Bassanezi [3], a validação de um modelo é um processo de aceitação ou rejeição do mesmo e esta análise é condicionada a vários fatores, sendo preponderante o confronto dos dados reais com os valores do modelo. Um bom modelo deve servir para explicar os resultados e tem capacidade de previsão de novos resultados ou relações insuspeitas.

A formulação inicial de um modelo simples é fundamental para se entender melhor o problema e diagnosticar quais características do fenômeno devem ser consideradas no modelo. Entretanto, nem sempre um primeiro enfoque do problema ou um modelo simplista conduz a bons resultados sendo necessário sua reformulação que, geralmente, é obtida com modificações nas variáveis ou nas leis de formação previamente estabelecidas.

Ainda, no processo de modelagem, a escolha do instrumental matemático é fundamental principalmente em se tratando de promover o conhecimento matemático. Assim, num ambiente de estudo do ensino básico um modelo simples, mesmo que não reproduza perfeitamente os dados experimentais, pode ser bastante eficiente no contexto educacional. Um modelo matemático é bom quando satisfaz algum objetivo e quando o usuário o considera como tal.

O uso de gráficos das soluções e a confecção de tabelas de dados modelados em confronto com os dados experimentais, podem facilitar a validação de um modelo matemático ou mesmo, sugerir modificações nos mesmos.

O ideal é partir de um modelos simples, de preferência que seja construído ou criado com a participação do aluno e adaptar esse modelo à realidade do aluno. Em seguida sugere-se aumentar aos poucos a complexidade do modelo e as variadas formas de utilização e representação deste modelo, bem como a criação e o uso de outros modelos.

## 1.4 Modelagem Matemática no Ensino Médio

Biembegut [4], em seu artigo sobre os 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira, afirma que promover modelagem matemática no ensino implica também ensinar o estudante, em qualquer nível de escolaridade, a fazer pesquisa sobre um assunto de seu interesse. Assim, além de uma aprendizagem matemática mais significativa, possibilita estímulo à criatividade na formulação e na resolução de problemas e senso crítico em discernir os resultados obtidos. Uma experiência realizada com estudantes da Educação Secundária os levou, durante o processo de modelagem, a sentirem necessidade em saber o porquê do resultado da pesquisa e o quanto este resultado conduzia a verdade.

Biembegut [4] afirma que:

> O processo de modelar envolve criar um problema e tirar conclusões que podem ser extrapoladas ao problema original. O significado da compreensão não está somente na segurança e na convicção do estudante, mas também na simples disposição, julgamento, pensamento e fundamento. O significado do fato ou fenômeno estudado pelo estudante inclui conhecimento obtido pela experiência e compreensão gerada pelas provas matemáticas obtidas com ações matemáticas.

De acordo com Corcoll-Spina [6],

> O tratamento fuzzy de variáveis linguísticas subjetivas ganhou um espaço substancial na modelagem matemática, particularmente quando não dispomos de dados suficientes para uma estatística ou então quando a situação não comporta medições e dependemos de informações subjetivas de especialistas.

Se explicarmos para o aluno os fundamentos da lógica matemática, como por exemplo, a condicional "se ... então" da forma "se p, então q", provavelmente ele não irá entender. Mas se explicarmos que se x é um número par, então x é divisível por 2, ele vai entender melhor, pois foi utilizado um exemplo prático, o qual ele pode visualizar ou lidar com esse exemplo em alguma situação.

Bassanezi [3] afirma que:

> A modelagem nem sempre pressupõe que se tenha dados reais, a intuição ou bom senso pode guiar as formulações dos modelos. Do ponto de vista do ensino-aprendizagem de Matemática o "melhor modelo" é secundário, pois sempre se pode fazer um melhor do que o anterior e sempre se pode imaginar situações diferentes para o mesmo fenômeno.

Os problemas que serão propostos aos alunos terá justamente essa aplicação prática, porém, utilizando a lógica fuzzy. No próximo capítulo será mostrado os princípio básicos da lógica fuzzy bem como as operações com conjuntos fuzzy.

# Capítulo 2

# Lógica Fuzzy

## 2.1 Sobre a Lógica Fuzzy

Para se ter uma nova maneira de ver e trabalhar a teoria dos conjuntos pode-se utilizar a lógica fuzzy. Através da lógica fuzzy é possível trabalhar com informações imprecisas e transformá-las em números utilizando a intuição e o raciocínio lógico na solução de problemas.

A teoria dos conjuntos fuzzy trabalha com termos imprecisos como aproximadamente, muito, pouco, alto, baixo, entre outros, e procura dar significado matemático a esses termos. Ela tem vasta aplicação, desde programação de computadores e sistemas de controle de processos industriais até diagnóstico de doenças. A teoria de conjuntos fuzzy foi concebida por Lofti Asker Zadeh com o objetivo de fornecer uma ferramenta matemática para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago.

De acordo com Santos [13], Zadeh observou que recursos tecnológicos baseados na lógica booleana não eram suficientes para automatizar atividades relacionadas a problemas de natureza industrial, biológica ou química. A lógica baseada nessa teoria foi inicialmente construída a partir dos conceitos já estabelecidos de lógica clássica, sendo que operadores foram definidos à semelhança dos tradicionalmente utilizados e outros foram introduzidos ao longo do tempo.

A lógica fuzzy facilita a especificação de regras de controle em uma linguagem próxima à natural, o que deixa as variáveis mais perto do pensamento humano, além de simplificar a solução de problemas.

O conceito fuzzy pode ser aplicado em situações nas quais não podemos responder apenas sim ou não, como é feito na lógica booleana, que comparada à lógica fuzzy acaba sendo imprecisa, pois não há um meio termo.

Sabemos que há infinitos valores entre zero e um. Será mostrado que, em algumas situações, não podemos atribuir os valores 0 ou 1, pois há infinitos valores nesse intervalo, os quais são chamados graus de pertinência na Lógica Fuzzy.

## 2.2 Conjuntos clássicos

Na teoria clássica, os conjuntos são denominados "crisp" (o termo vem da palavra inglesa crispness, que significa correto, exato, definido, valor conhecido) e um dado elemento pertence ou não pertence ao referido conjunto.

Esse tipo de conjunto estabelece que as propriedades que se aplicam aos elementos do conjunto são sempre verdadeiras ou sempre falsas. Nesse caso, a intenção é que se descubra se tal propriedade é satisfeita por todos os elementos desse conjunto, por parte deles, ou por nenhum deles.

Um conjunto crisp é definido como um subconjunto de um universo qualquer (conjunto universo U), onde possui elementos desse universo. Grande parte das ferramentas utilizadas hoje para modelagem formal são crisp, ou seja, aplicam a lógica binária convencional, onde os resultados somente podem ser verdadeiros ou falsos.

Um conjunto (crisp) é uma coleção de objetos bem definidos. Sua representação característica é:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Os conjuntos crisp obedecem às seguintes propriedades:

i. $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$.

ii. $A^C = X - A$.

iii. $(A^C)^C = A$.

iv. $A \cup B = \{x | x \in A \quad ou \quad x \in B\}$.

v. $A \cap B = \{x | x \in A \quad e \quad x \in B\}$ .

vi. $A \cup X = X$.

vii. $A \cap X = A$.

viii. $A \cup B = B \cup A$.

ix. $A \cap B = B \cap A$.

x. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

xi. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

xii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

xiii. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

xiv. $A \cup A = A$.

xv. $A \cap A = A$.

Os conjuntos crisp seguem a teoria dos conjuntos clássicos e as relações acima são válidas para qualquer conjunto do universo U.

Agora veja uma situação em que a utilização do conjunto crisp ficaria um tanto confusa: Digamos que uma pessoa é considerada jovem se tem idade até 35 anos e é considerada velha se tem idade superior a 35 anos. Por essa lógica (booleana) temos que uma pessoa de 20 anos de idade é jovem e uma pessoa de 50 anos de idade é velha, o que está muito coerente. Mas se formos incluir em um desses conjuntos uma pessoa de 34 anos de idade e outra de 36 anos de idade, essa definição de pessoa jovem e pessoa velha ficaria incoerente.

É nesse tipo de situaçãao que se pode trabalhar a ideia de conjuntos fuzzy, pois nesse caso não temos como determinar com certeza, se uma pessoas de 34 anos de idade é realmente jovem e se uma pessoa com apenas dois anos a mais de diferença será considerada velha. Observe que há uma imprecisão na definição da pertinência do conjuntos de pessoas jovens e pessoas velhas.

## 2.3 Conjuntos Fuzzy

Um conjunto crisp pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mu_A \to \{0, 1\}, \tag{2.2}$$

na qual elementos somente pertencem ou não pertencem a determinado conjunto.

Na teoria dos conjuntos "fuzzy"o grau de pertinência é utilizado para verificar que não existe uma fronteira bem definida para decidirmos quando um elemento pertence ou não a um conjunto.

Vejamos a situação anterior, onde temos que uma pessoa é considerada jovem se tem idade até 35 anos e é considerada velha se tem idade acima de 35 anos.

Vamos admitir 4 pessoas com idades diferentes: pessoa A com 20 anos de idade, pessoa B com 34 anos de idade, pessoa C com 36 anos de idade e pessoa D com 50 anos de idade.

Têm-se que as pessoas A e B são classificadas como pessoas jovens e as pessoas C e D são classificadas como pessoas velhas. Esse processo considera que duas pessoas com uma diferença de 2 anos de idade sejam classificadas, em relação a sua idade, diferentemente.

A lógica fuzzy busca modelar um raciocínio que considera a pertinência dessa pessoa não em apenas um conjunto, mas nos dois ao mesmo tempo, e, em cada um, um grau diferente de o quão ela é membro. Com os conjuntos "fuzzy"podemos definir critérios e graus de pertinência para várias situações.

A representação matemática do conjunto fuzzy pode ser descrita por:

$$\mu_A \to [0,1] \tag{2.3}$$

Para obter os conjuntos fuzzy e suas operações, basta generalizar a função característica da lógica clássica para o intervalo [0, 1]. O elemento irá pertencer ao conjunto A com um grau de pertinência que é um valor no intervalo [0, 1].

Um conjunto fuzzy A em um conjunto universo U é um conjunto de pares ordenados e seu grau de pertinência é da forma:

$$\{(x, \mu_A(x))| \quad x \in X\}. \tag{2.4}$$

**Exemplo 2.1.** *Seja X o conjunto dos números naturais:*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} \tag{2.5}$$

*E seja $A$ o conjunto fuzzy dos números próximos de 3:*

$$\{x \in A \quad | \quad x \quad é \quad próximo \quad de \quad 3\}. \tag{2.6}$$

*Definimos a função* $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$, *que associa cada x natural ao valor próximo de 3 por:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & se \quad 1 < x < 3 \\ 1, & se \quad x = 3 \\ \dfrac{-x+5}{2}, & se \quad 3 < x < 5 \\ 0, & se \quad x \geq 5 \end{cases} \tag{2.7}$$

*Veja agora os graus de proximidade de alguns números do conjunto X em relação ao conjunto A:*

$\mu_A(1) = 0$
$\mu_A(2) = 0.5$
$\mu_A(3) = 1$
$\mu_A(4) = 0.5$
$\mu_A(5) = 0$

*Então, para o conjunto $A$ teremos:*

$$A = \{(1;0), (2;0,5), (3;1), (4;0,5), (5;0), ...\}. \tag{2.8}$$

Veja que o conjunto fuzzy é caracterizado por uma função de pertinência, e o grau de pertinência pode ser considerado como uma medida que expressa a possibilidade de que um dado elemento seja membro do conjunto fuzzy.

Para representar um conjunto fuzzy, pode-se enumerar os seus elementos juntamente com seus graus de pertinência na forma:

$$A = \{x, \mu_A(x)\}$$

ou

$$A = \sum \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

A função de pertinência é construída de acordo de com o que se propõe como por exemplo, para o termo próximo de 3, em 2.1.

## 2.4 Operações nos conjuntos Fuzzy

**Definição 2.1.** *Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos fuzzy de um universo U, com funções de pertinência $\mu_A$ e $\mu_B$, respectivamente. Temos que $A$ é subconjunto fuzzy de $B$, ou $A \subset B$, se $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, para todo $x \in U$.*

**Definição 2.2.** *A união de $A$ com $B$ é o subconjunto fuzzy $A \cup B$ de U cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{A \cup B}(x) = max_{x \in U}\{(\mu_A(x)), \mu_B(x)\}$$

**Definição 2.3.** *A intersecção de $A$ com $B$ é o subconjunto fuzzy $A \cap B$ de U cuja função de pertinência é dada por:*

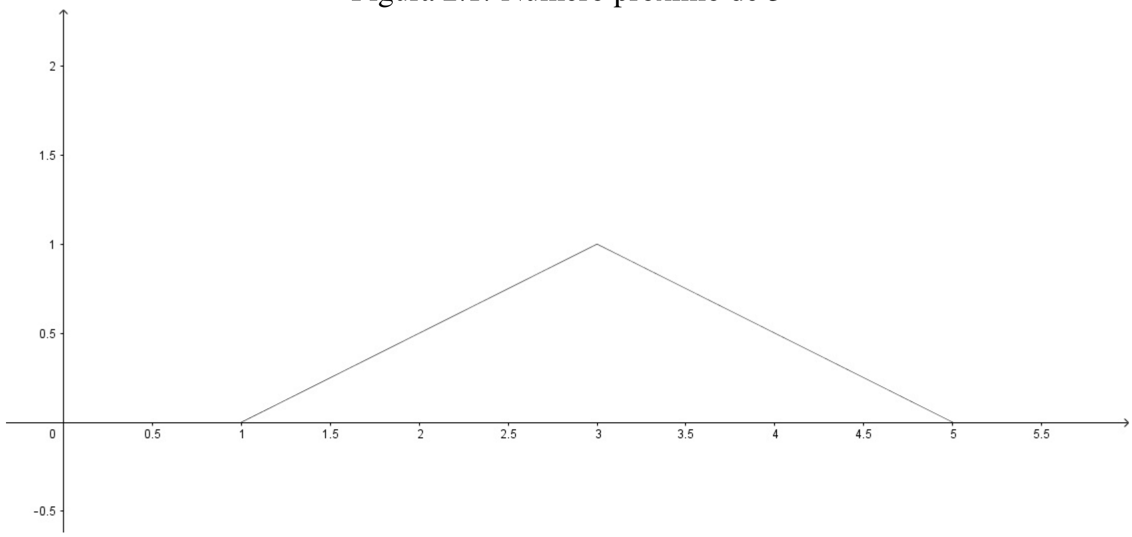
$$\mu_{A \cap B}(x) = min_{x \in U}\{(\mu_A(x)), \mu_B(x)\}$$

**Definição 2.4.** *O complementar de $A$ em relação a U é o subconjunto fuzzy $A^C$ de U cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in U$$

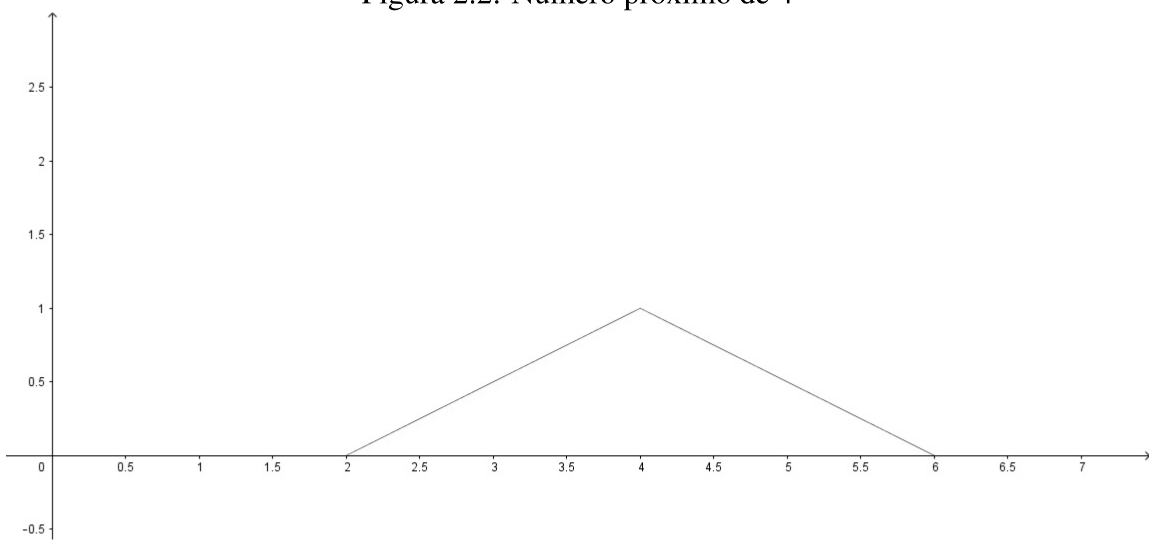
**Exemplo 2.2.** *Veja a representação gráfica para os números próximos de 3 do exemplo 2.1 e para os números próximos de 4.*

Figura 2.1: Número próximo de 3




(Gráfico elaborado pela autora no Geogebra 5.0)

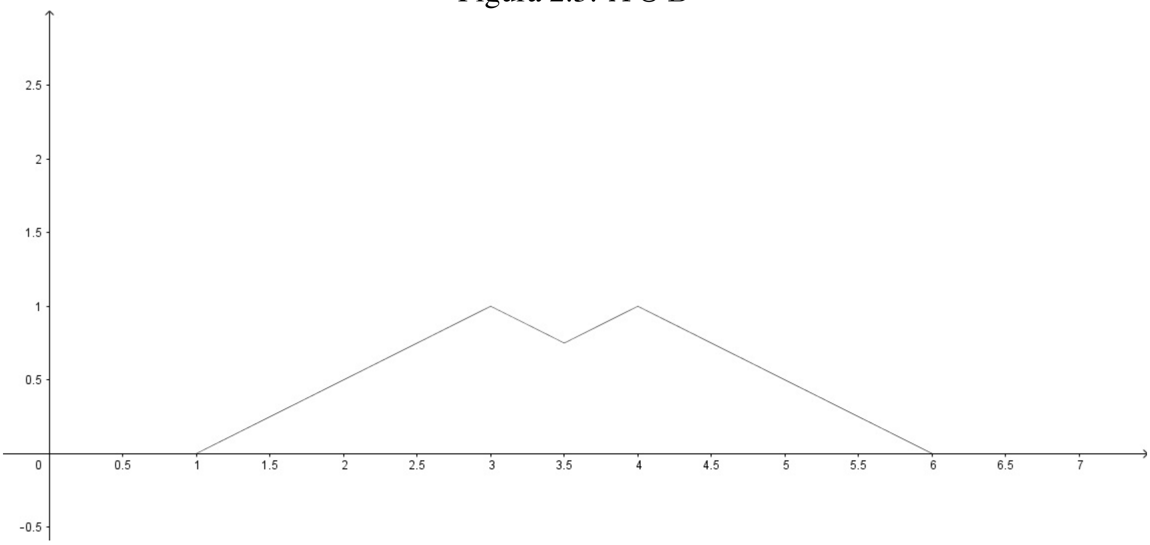
Figura 2.2: Número próximo de 4




(Gráfico elaborado pela autora no Geogebra 5.0)

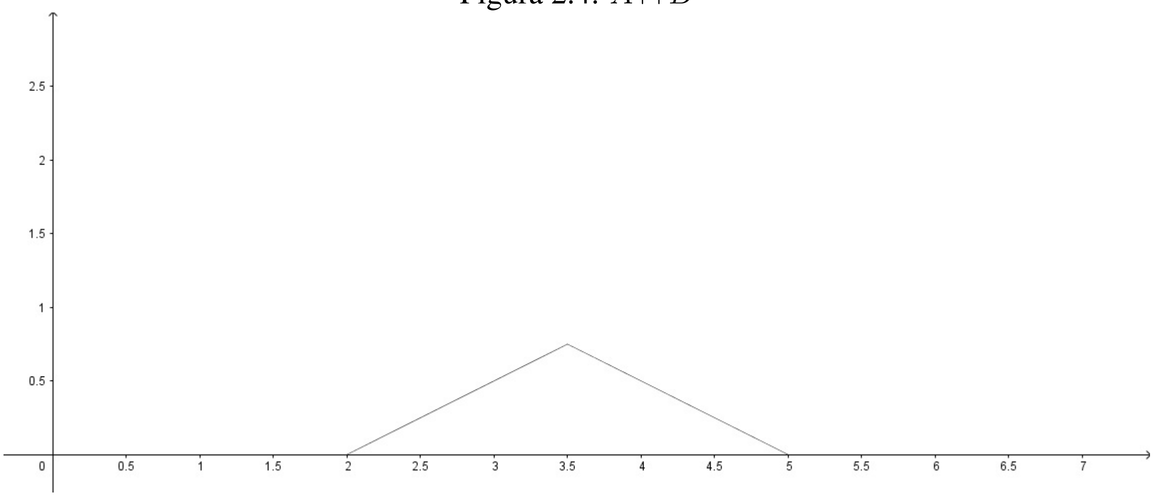
**Exemplo 2.3.** *Seja A o conjunto dos números próximos de 3 e B o conjunto dos números próximos de 4, veja a representação gráfica de* $A \cup B$ *e de de* $A \cap B$*:*

Figura 2.3: $A \cup B$




(Gráfico elaborado pela autora no Geogebra 5.0)

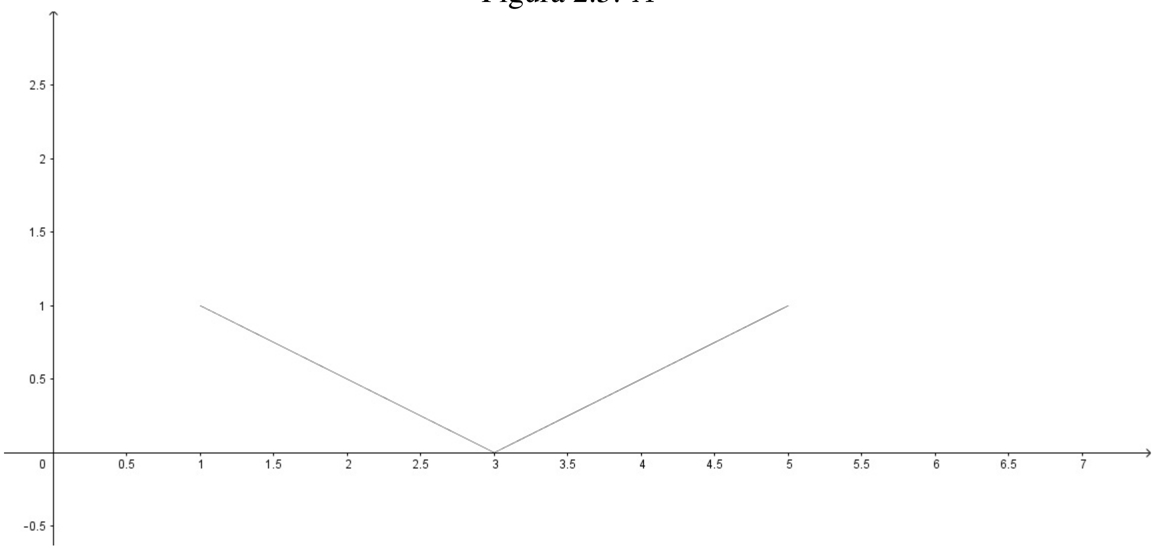
Figura 2.4: $A \cap B$




(Gráfico elaborado pela autora no Geogebra 5.0)

**Exemplo 2.4.** *Veja a representação gráfica de $A^C$:*

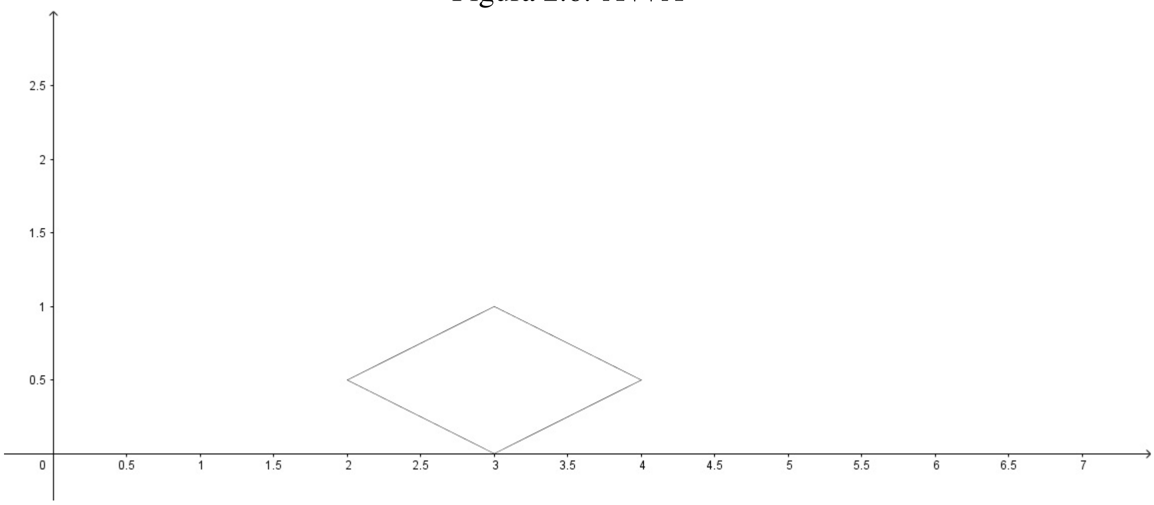
Figura 2.5: $A^C$




(Gráfico elaborado pela autora no Geogebra 5.0)

**Exemplo 2.5.** *Veja como fica a intersecção de $A$ com $A^C$:*

Figura 2.6: $A \cap A^C$



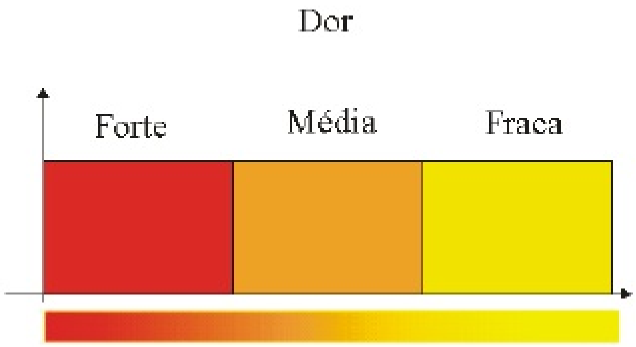

(Gráfico elaborado pela autora no Geogebra 5.0)

## 2.5 Conjuntos crisp versus conjuntos fuzzy

Será feita uma comparação, através de exemplos, do conjunto crisp com o conjunto fuzzy.

Veja a representação crisp de uma situação que representa os graus de intensidade de uma dor de cabeça que vai do vermelho (mais forte) para o amarelo (mais fraco) no trabalho de Corcoll-Spina [6].

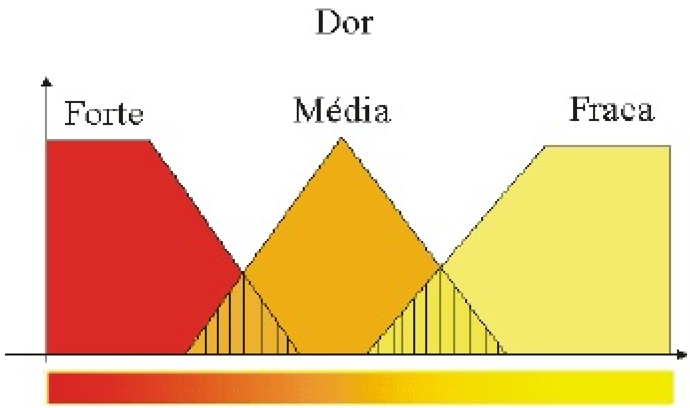
Figura 2.7: Representação crisp




(Configuração crisp para a intensidade de uma dor de cabeça)

Agora veja a mesma representação dos graus de intensidade de uma dor de cabeça que vai do vermelho (mais forte) para o amarelo (mais fraco) em um gráfico fuzzy.

Figura 2.8: Representação fuzzy




(Configuração fuzzy para a intensidade de uma dor de cabeça)

Observe que não há uma fronteira delimitada na passagem do grau forte para média e nem do grau média para fraca. O que se vê é que nas duas regiões hachuradas, um determinado valor pode pertencer a dois graus diferentes com valores distintos de pertinência para cada característica da dor de cabeça.

### 2.5.1 Operações nos conjuntos crisp

Seja o conjunto A o conjunto dos números pares:

$$A = 2, 4, 6, ... \tag{2.9}$$

E seja B o conjunto dos números ímpares:

$$B = 1, 3, 5, ... \tag{2.10}$$

A tabela abaixo mostra as operações de união, intersecção e complementar entre esses conjuntos.

| A | B | A $\cup B$ | A $\cap B$ | A$^C$ | A $\cap A^C$ | A $\cup A^C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2, 4, 6, ... | 1, 3, 5,... | $\mathbb{N}$ | $\emptyset$ | B | $\emptyset$ | $\mathbb{N}$ |

Tabela 2.1: Operações com conjuntos crisp

Agora seja o conjunto A um número com grau de pertinência 0,8 para um número próximo de 3 e B um número com grau de pertinência 0,7 para um número próximo de 3. Observe a tabela que mostra as mesmas operações da tabela anterior, agora com conjuntos fuzzy:

| A | B | A $\cup B$ | A $\cap B$ | A$^C$ | A $\cap A^C$ | A $\cup A^C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,2 | 0,2 | 0,8 |

Tabela 2.2: Operações com conjuntos fuzzy

Veja que a intersecção do conjunto A com o seu complementar não é vazia no conjunto fuzzy, diferentemente do conjunto crisp.

## 2.6 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Um sistema baseado em regras fuzzy (SBRF) serve para utilizar conceitos para constuir um sistema que simule as decisões humanas.

De acordo com Gayer [8], um sistema baseado em regras fuzzy é um sistema que utiliza lógica fuzzy para tomar decisões, gerando uma saída para cada entrada do sistema.

Através da base de regras será obtida a relação fuzzy, que produzirá a saída para cada entrada. Por exemplo, se o café está com pouco açúcar (entrada) e se o café está muito forte (entrada), então o café está ruim (saída).

Será utilizado o módulo de inferência de Mamdani, onde cada saída representa a ação correspondente à entrada do SBRF. Os controladores fuzzy irão comandar as tarefas através da linguagem usual.

Laghetto [10] afirma que a base de regras é composta por proposições fuzzy e consiste em catalogar as variáveis e suas classificações linguísticas. Ela afirma ainda que essa etapa é considerada o núcleo do sistema e pode ser considerada como um conjunto de proposições linguísticas do tipo, "Se... então..." e que essas regras serão importantes no estabelecimento das relações entre as variáveis linguísticas.

### 2.6.1 Variável linguística

De acordo com Azevedo [1], uma variável linguística no universo é uma variável cujos valores assumidos são subconjuntos fuzzy de U.

Esses subconjuntos fuzzy são chamados de termos linguísticos. Assim, cada variável linguística assume valores que são representados por termos linguísticos. Esses termos são identificados por subconjuntos fuzzy que, por sua vez, tem uma função de pertinência que o caracteriza.

Sentenças em que aparecem variáveis linguísticas juntamente com seus subjetivos (atributos) são comumente chamadas proposições fuzzy.

Bassanezi [3] afirma que um conjunto fuzzy é aquele que valoriza seus elementos, isto é, se x pertence a A, devemos conhecer também com que grau de pertinência x está em A. Ele afirma ainda que definir funções de pertinência na forma triangular é muito comum nas aplicações da teoria fuzzy.

Azevedo [1] afirma que: "Quando a entrada e a saída representam a condição e a ação, respectivamente, os SBRF são chamados Controladores Fuzzy. Suas tarefas são comandadas por intermédio dos subconjuntos fuzzy das variáveis linguísticas. Esses subconjuntos fuzzy reproduzem a base de conhecimentos através de uma coleção de regras fuzzy, denominada base de regras fuzzy."

### 2.6.2 Módulo de fuzzificação

Azevedo [1] afirma que o módulo de fuzzificação é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios e, juntamente com os especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo.

Cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy. Por exemplo, se $x \in \mathbb{R}$ é uma entrada, o fuzzificador associa a essa entrada uma função de pertinência $\mu_A(x)$ , ou seja, um número fuzzy.

### 2.6.3 Módulo da base de regras

De acordo com Azevedo [1], uma base de regras fuzzy é formada por proposições fuzzy, da forma "se ... então".

As variáveis linguísticas são modeladas por conjuntos fuzzy e as proposições são descritas de acordo com as informações de um especialista. Quanto mais informações se tem das condições, mais preciso será o resultado.

As proposições são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída, as quais serão modeladas por funções de pertinência. A combinação das regras formadas pelas proposições gera uma saída. Quanto mais termos se tiver, mais informações serão incorporadas ao modelo.

### 2.6.4 Módulo de inferência fuzzy

Neste módulo cada proposição fuzzy é transformada matematicamente por meio das técnicas da lógica fuzzy. Para isso, será utilizado o método de inferência de Mamdani, que será descrito a seguir. Dessa forma, o suceso do controlador fuzzy depende do método de inferência, pois o método fornecerá a saída a ser adotada pelo controlador a partir da entrada.

### 2.6.5 Método de inferência de Mamdani

O método de inferência de Mamdani é baseado na regra máximo-mínimo, uma relação binária, onde cada regra da base de regras fuzzy, a condicional "se ... então" é modelada pela proposição mínimo.

Barros, Bassanezi e Lodwick [2] (tradução nossa) afirmam que:

> Mamdani propôs essa relação para modelar matematicamente a base de regras. O método Mamdani é baseado de acordo com o seguinte procedimento:
>
> - Em cada regra da base de regras a condicional se ... então é modelada pela operação mínimo;
> - Adota-se a aplicação mínimo para o conceito lógico "e" e o máximo para "ou".
>
> A saída do controlador fuzzy, dada pelo método de inferência de Mamdani, é um subconjunto fuzzy (mesmo para o caso com uma entrada crisp). Assim, quando é necessário tem-se um número final real de saída que precisamos para defuzzificar a saída do conjunto fuzzy e obter um valor crisp que o represente.

### 2.6.6 Módulo de defuzzificação

O conjunto fuzzy pode ser representado por um valor crisp através da defuzzificação. No momento em que o módulo de inferência produz uma saída, cabe a ele converter tal saída fuzzy em um número real.

Os principais métodos de defuzzificação são:

i. Centro de Gravidade: é a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy.

ii. Centro dos Máximos: Neste procedimento são levados em conta apenas as regiões de maior possibilidade entre os possíveis valores da variável que modela o conceito fuzzy em questão.

iii. Média dos Máximos: Busca extrair o ponto que possui o maior grau de pertinência, porém no universo podem existir mais de um ponto com grau de pertinência máxima. Ao invés de pegar um ponto aleatório, realiza-se uma média entre eles.

Um modelo de sistema baseado em regras fuzzy será mostrado no capítulo 4. Antes é necessário trabalhar com o o aluno do ensino médio a ideia introdutória e intuitiva da lógica fuzzy. Um modo de abordagem da lógica fuzzy será mostrado no capítulo a seguir.

# Capítulo 3

# Atividades Introdutórias da Lógica Fuzzy no Ensino Médio

A lógica fuzzy tem vasta aplicação em variados assuntos e, por ser uma teoria de conjuntos, ela pode ser aplicada à estudantes do ensino médio.

A proposta para aplicar a lógica fuzzy no ensino médio é oferecer aos alunos, inicialmente, um questionário com problemas voltados para resolução através da lógica fuzzy para que se tenha uma concepção prévia de como eles solucionariam cada questão antes mesmo de conhecerem os princípios básicos da teoria fuzzy. O questionário deve ser composto pelas aplicações descritas nas próximas seções.

Depois que eles tiverem conhecimento dos conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, bem como suas propriedades e exemplos de aplicações da teoria, o mesmo questionário deve ser reaplicado para que eles respondam com base na teoria fuzzy e verifiquem qual a diferença de solução do primeiro questionário para o segundo.

A ordem das aplicações irão do mais simples para o mais complexo conforme se seguem. As aplicações serão acompanhadas de informações que possam vir a ajudar o aluno a sugerir soluções para o problema. Também podem surgir dúvidas e questionamentos que serão discutidos após a aplicação do questionário. O professor também pode adequar o nível de dificuldade do problema de acordo com cada aluno/grupo/turma, além de poder explorar qualquer um dos problemas em vários aspectos, que serão descritos mais adiante para cada aplicação.

## 3.1 Atividades com a Lógica Fuzzy

**Aplicação 1.** *(Espectro visível da luz) Onde começa e onde termina a cor azul no espectro visível da luz da figura 3.1?*

De acordo com Garcia [7], do ponto de vista fisiológico, a luz é a região do espectro de radiações eletromagnéticas percebidas pelo olho humano. Este espectro compreende radiações cujo comprimento de onda vão desde os raios gama, passando pelos raios X, radiação ultravioleta, luz visível, infravermelho, microondas até as ondas de rádio, em ordem crescente de comprimento de onda e ordem decrescente de freqüência.

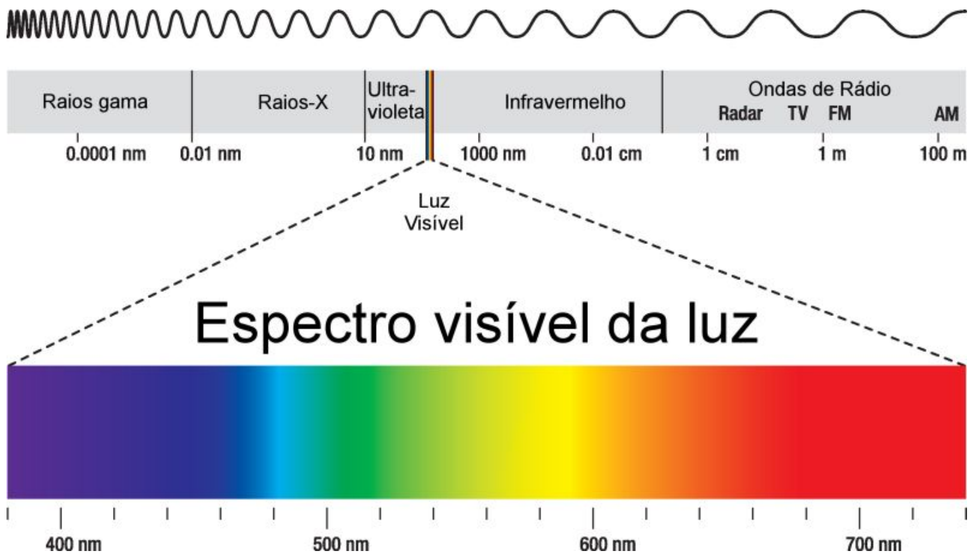



Figura 3.1: Espectro visível

Os nossos olhos são sensíveis somente à região visível do espectro eletromagnético, que vai do violeta, passando pelo azul, verde, amarelo, laranja e vermelho, e é o cérebro quem atua em todo o mecanismo que nos faz enxergar essa faixa de cores (radiação).

Observe que na figura 3.1 há uma nebulosidade na faixa de 400 nm onde não está bem definido onde termina o violeta e onde começa o azul. O mesmo acontece com a transição do azul para o verde. Sem contar que há vários graus para os tons de azul.

Esses graus podem ser definidos pelo aluno como os graus de pertinência do azul mais forte indo para o azul mais fraco.

Também pode-se pedir para que o aluno verifique se a faixa correspondente a 420 nm tem mais azul ou mais violeta, por exemplo.

É possível também pedir ao aluno que determine em que faixa ocorre a mudança da cor violeta para a cor azul e em qual faixa ocorre a mudança da cor azul para a cor verde. Sugere-se ainda fazer essa verificação para as outras cores do espectro. Outra sugestão é dividir a turma em grupos e pedir que cada grupo escolha uma cor para aplicar a atividade.

**Aplicação 2.** *(Tempo de viagem) Uma viagem de ônibus de Manaus-AM até o município de Humaitá-AM dura aproximadamente 11 horas e 35 minutos. Mas o ônibus que faz a viagem sempre se atrasa. A que horas o ônibus chega a Humaitá partindo de Manaus?*


Figura 3.2: Mapa Manaus-Humaitá (Fonte: Google Maps)

Humaitá é um município brasileiro localizado no interior do estado do Amazonas. Pertencente à mesorregião do Sul Amazonense e microrregião do Madeira. Está localizado a 697 km da capital Manaus e é interligado pela rodovia BR 319.

O objetivo dessa atividade é dar significado aos termos em torno de, aproximadamente, próximo de, etc. Os alunos podem levantar questões sobre o que pode influenciar nessa atraso como condições climáticas, condições da estrada, tempo em que fica parado para refeições, entre outros.

Essa é uma atividade que pode ser adaptada à região ou ao convívio da turma. Pode-se usar um exemplo mais próximo da realidade dos alunos, como o ônibus que eles pegam para ir a escola, por exemplo.

**Aplicação 3.** *(Conservação de um automóvel) Você precisa analisar e classificar qual o melhor carro para comprar levando em conta sua quilometragem e ano de fabricação dentre os carros descritos a seguir: Um carro zero km, recém fabricado, que acabou de ser lançado em 2018 (carro 1), um carro com 50000 km rodados desde o seu ano de fabricação em 2012 (carro 2), um carro com 35000 km rodados desde o seu ano de fabricação em 2000 (carro 3), um carro* *com 50000 km rodados desde o seu ano de fabricação em 1990 (carro 4) e um carro com 80000 km rodados desde o seu ano de fabricação em 1975 (carro 5).*

Yazbek [14] afirma:

> Acredita-se que um período de 10 anos é mais econômico manter o mesmo carro até os 200.000 quilômetros, do que trocar o carro depois de cinco anos, ou aos 100.000 quilômetros. Para manter um veículo por 10 anos, no entanto, é essencial que o motorista faça uma boa manutenção do automóvel.
>
> No Brasil não há nenhum tipo de pesquisa que compare especificamente a durabilidade de diferentes modelos. Porém, é possível analisar alguns aspectos que contribuam para a conservação do automóvel, como checar os benefícios do modelo escolhido, se há problemas com manutenção, se as peças possuem um preço bom e qual é a disponibilidade da peça, escolher um modelo adequado às suas preferências, se ele circulará em grandes cidades, se será usado para carga, se precisará de um motor mais potente, ou se irá acomodar uma família.
>
> Um outro aspecto é observar os veículos mais vendidos na região, participar da inspeção técnica do carro, avaliar se há alguma assimetria entre as portas, os para-choques e o teto,não comprar um veículo sem o manual, seguir as orientações do manual do veículo, dirigir com cuidado, não economizar gastos que podem gerar prejuízos depois, cuidar da limpeza do veículo, entre outros.

Um modo de realizar essa atividade é pedir que os alunos comparem dois carros, inicialmente, de preferência o carro 1 com outro da escolha do professor, e em seguida que se acrescente os demais carros para que seja feita a comparação entre os cinco carros.

A partir da análise dos cinco carros e levando em conta a quilometragem combinada com o ano de fabricação, o aluno fará um comparativo e a análise, de fato, de qual carro é o melhor para comprar e estabelecer uma ordem de classificação para os demais carros.

**Aplicação 4.** *(Temperatura do ambiente) Você precisa atribuir valores de temperatura do ambiente e classificá-las em fria, agradável e quente.*

Uma sugestão é que o aluno defina qual valor de temperatura ambiente é considerado frio, agradável ou quente para ele.

Levando em consideração as temperaturas registradas na cidade de Manaus, provavelmente uma temperatura ambiente fria seria a de uma noite chuvosa, por exemplo, de 22°C. A partir desse valor ele pode estabelecer os valores de temperatura para um ambiente agradável e em seguida para um ambiente quente.

A atividade também pode ser feita estabelecendo valores de temperatura em ambientes fechados, como lugares com uso de ar condicionado, onde uma temperatura considerada mais fria seria um valor próximo de 17°C, por exemplo. E a partir desse valor o aluno pode estabelecer valores de temperatura para agradável e quente em ambientes com ar condicionado.

Após coletar essas informações pode-se montar os gráficos que serão os números fuzzy e realizar as operações com os conjuntos fuzzy relacionando esses dados, além de definir os graus de pertinência de cada estado de temperatura.

Para ampliar a discussão pode-se pedir que eles se informem sobre qual temperatura é agradável no inverno de Estocolmo, na Suécia, por exemplo. Fica a critério do professor escolher qual lugar para se fazer as comparações. A sugestão também pode ser feita pelos alunos.

Também é possível associar essa aplicação na disciplina Física e fazer as devidas análises para as temperaturas em Kelvin (K) e graus Fahrenheit (°F).

**Aplicação 5.** *(Encontro das águas) Em uma amostra de água da região de fronteira entre os rios Negro e Solimões, quanto de água pertence a cada rio?*

Figura 3.3: Encontro das águas

O Rio Negro é um rio de águas muito escuras e sua coloração é devido a grande quantidade de ácidos orgânicos provenientes da decomposição da vegetação. Ele apresenta um alto grau de acidez com pH de 3,8 a 4,9. Ele tem uma temperatura média de 28° C e flui lentamente em torno de 2 km/h.

O Rio Solimões tem uma cor barrenta por conta do grande número de sedimentos que a água carrega ao fluir por baixo da Cordilheira dos Andes. Ele é mais frio que o Rio Negro, possuindo 22° C. Além disso, flui mais rápido do que o Rio Negro, pois apresenta velocidade em torno de 6 km/h.

A diferença de composição, a taxa de acidez, a temperatura de fluxo e a densidade é o que evita a mistura dos dois quando eles se encontram. O contraste de cores é muito evidente, sendo possível avistar o fenômeno de longas distâncias, como de um avião, por exemplo.

Podemos dizer que o encontro das águas desses rios de diferentes densidades, colorações e temperaturas criam uma fronteira difusa, onde a mistura de águas dá-se lentamente e é feita de maneira não homogênea.

Os alunos podem identificar estes aspectos antes de fazer sua análise e responder a questão. Eles poderão verificar o quanto cada uma destas características influenciam na quantidade de água que pertence a cada rio ou se há alguma mistura na região de fronteira.

Os alunos podem estabelecer graus de pertinência combinando itens como velocidade dos rios, temperatura, cor, densidade, composição química, etc. de uma amostra fictícia, com uma determinada quantidade de cada rio na amostra.

## 3.2 Como resolver esses problemas

O professor deve organizar as questões seguindo um nível de dificuldade adequado para a turma e fazer as adaptações necessárias à sua realidade, dependendo do contexto da questão. Nessa etapa inicial, os alunos devem sugerir soluções sem alguma informação sobre a lógica fuzzy. O professor deve enfatizar que as respostas devem ser apresentadas de acordo com o entendimento do aluno sobre a pergunta e com as informações presentes na questão. Depois de apresentar essas situações e analisar o que os alunos sugeriram como resposta pode-se fazer um discussão prévia e considerações sobre suas respostas e em seguida relembrar a teoria clássica dos conjuntos para então apresentar a teoria fuzzy.

Para alunos que não tenham estudado a teoria clássica dos conjuntos, pode ser feita uma análise separada e combinar os resultados posteriormente. Esse é um caso pouco provável de acontecer, mas é possível que ocorra. Para os alunos que já estudaram a teoria clássica dos conjuntos, sugere-se relembrar exemplos simples da relação de pertinência e as propriedades de união e intersecção entre conjuntos. A partir disso, começa-se a falar na lógica fuzzy.

Pode-se começar fazendo um histórico da origem da lógica fuzzy e sua relação com a lógica clássica. Em seguida, sugere-se mostrar em que momento a lógica fuzzy surgiu e suas variadas aplicações. Um exemplo que pode ser utilizado é mostrar aos alunos uma relação de pertinência de um determinado conjunto, que pode ser feito entre os próprios alunos, considerando suas idades ou alguma outra variável.

Com isso, eles já podem tentar resolver a aplicação 1 (espectro visível da luz) através da lógica fuzzy definindo os graus de pertinência para a cor azul do espectro visível.

Em um segundo momento pode-se apresentar as operações com os conjuntos fuzzy mostrando como se realizam a união, interseção e complementar de um conjunto fuzzy para que eles as possam usar nas demais aplicações. Podem ser usados os exemplos mostrados no capítulo 2 para os números próximos de 3.

## 3.3 Resultados esperados

As aplicações sugeridas podem ser trabalhadas em vários aspectos. Serão descritos alguns possíveis modos de trabalhar cada uma das aplicações, que podem ser ideias dos próprios alunos ou mesmos sugestões do professor para explorar melhor cada uma delas.

### 3.3.1 Espectro visível da luz

Os alunos serão capazes de definir os graus de pertinência da cor azul no espectro visível da luz atribuindo o grau de pertinência 1 para o azul entre o violeta e o azul (com comprimento de onda em torno de 450 nm) e o grau de pertinência zero para a transição do azul para o verde (próximo de 500 nm de comprimento de onda) ou o inverso. Isso pode ficar a critério do aluno. O mais lógico é que o grau de pertinência 1 seja para a faixa onde o azul é mais forte (azul mais escuro) e o grau de pertinência seja zero para a faixa onde o azul é mais fraco (azul mais claro).

Essa mesma atividade pode ser aplicada aos demais intervalos de cores. Pode-se medir a os graus de pertinência do violeta, do verde, do amarelo, do laranja e do vermelho, separadamente. Cabe ao professor em conjunto com os alunos decidir com qual faixa de cores trabalhar. Ou até mesmo trabalhar todas as faixas se houver tempo.

Uma aplicação que pode ir além seria atribuir graus de pertinência para comprimento de onda. Nesse caso, pode-se trabalhar com as variáveis relacionadas ao comprimento de onda da radiação eletromagnética, cujas variáveis são: raios gama, raios-X, raios ultra violeta, espectro visível (inclusive), infravermelho e ondas de rádio, onde os alunos podem definir qual comprimento é menor, médio e maior, por exemplo. Eles podem explorar as propriedades de conjuntos fuzzy utilizando essas variáveis.

Essa é uma aplicação que pode ter vários resultados, além de poder ser explorada em outros aspectos, de acordo com a criatividade do professor e dos alunos.

O professor pode adaptar a atividade ao seu critério de acordo com o objetivo do que se queira explorar. Ideias sugeridas pelos alunos também são bem vindas para se trabalhar a lógica fuzzy utilizando a figura 3.1.

### 3.3.2 Tempo de viagem

Esse é um dos problemas que provavelmente irá gerar muitos questionamentos. A principal questão será o porquê de esse ônibus sempre se atrasar. A partir disso, os próprios alunos podem sugerir acontecimentos que possam causar esse atraso e assim, obter um meio de responder a que horas o ônibus chegará ao seu destino.

Uma sugestão é incluir um estudo aprofundado de como é a estrada que liga os dois municípios. Os alunos provavelmente irão obter a informação de que é necessário fazer a travessia de balsa em um determinado trecho da viagem e que esse pode ser um agravante no atraso do ônibus. Aí entra a questão dos horários de travessia. Nesse caso o ônibus pode não chegar a tempo de fazer a travessia e ter que esperar o próximo horário.

Uma outra situação é que eles podem perceber a influência de chuvas na região que podem prejudicar a estrada e consequentemente o atraso da viagem. Podem surgir ideias relacionadas a problemas mecânicos que dificultem o andamento da viagem, entre outros. A criatividade do alunos e as sugestões do professor podem ser inúmeras.

Outra opção é adequar esse tipo de problema à realidade do aluno. Por exemplo, se se deseja trabalhar com uma abordagem mais simplificada, sugere-se alterar o trecho da viagem para uma distância menor e com menos inconvenientes que venham atrasar a viagem.

Uma outra sugestão para trabalhar a aplicação de maneira mais aprofundada seria sugerir aos alunos que elaborassem uma proposta para que esse ônibus não sofra o atraso para solucionar o problema, criando uma base de regras.

### 3.3.3 Conservação do automóvel

Uma comparação entre veículos diferentes para definir o quanto um ou outro é mais novo ou mais velho está associado ao seu tempo de uso e/ou sua data de fabricação. O que podemos esperar dessa análise é que os automóveis seriam considerados novos ou velhos com mais ou menos intensidade de acordo com sua data de fabricação associado ao seu tempo de uso. O aluno pode perceber isso imediatamente ao analisar o ano de fabricação de cada carro. Agora cabe a ele fazer as devidas associações com a quilometragem e estabelecer uma ordem e qualificar os carros analisados a partir dessas duas características.

Como temos duas análises em dois aspectos diferentes, pode-se modelar esses dados com base na lógica fuzzy e gerar as operações com os devidos conjuntos fuzzy que cada característica (relacionada ao tempo de uso ou data de fabricação) apresenta.

Primeiramente os alunos irão definir os graus de pertinência para o ano de fabricação dos automóveis. Espera-se que eles atribuam um grau de pertinência 1 para o carro fabricado em 2018 e um grau de pertinência zero ou próximo de zero (ele pode considerar que há outros carros anteriores ao mais antigo citado no problema) para o carro fabricado em 1975. Para os demais fica a critério do aluno definir os graus de pertinência. Em seguida ele fará uma análise separada do tempo de uso de cada automóvel estabelecendo também os graus de pertinência para cado carro. Outra sugestão é solicitar ao aluno que crie um problema parecido com esse criando mais variáveis para fazer a aplicação baseada na lógica fuzzy.

Após a realização dessas análises, podem ser feitas as operações de união e intersecção entre esses conjuntos, estabelecendo uma base de regras, que será mais detalhado no capítulo 4.

### 3.3.4 Temperatura do ambiente

Para realizar essa aplicação o aluno deve estar familiarizado com a variação de temperatura do local em que ele vive. Ele pode, previamente, fazer uma pesquisa das maiores e menores temperaturas já registradas em sua cidade para ter uma base de um máximo e um mínimo valores de temperatura para fazer sua análise. Além de pesquisar a variação de temperaturas em outros ambientes e localidades.

Essa é uma atividade que pode ser feita de maneira individual, pois a questão de calor e temperatura é muito relativo, levando-se em consideração fatores como a diferença de temperatura de cada região, por exemplo.

É muito comum, por exemplo, uma pessoa que estava acostumada com temperaturas mais baixas vir para a região amazônica e se sentir desconfortável quando comparada a quem vive na região.

Essa questão também varia para ambientes fechados. Por exemplo, tem pessoas que acham que é confortável dormir em um ambiente com temperatura igual a 18°C, enquanto que outras pessoas acham mais confortável dormir com temperatura igual a 23°C.

A aplicação pode ser feita em grupo quando for o momento de juntar as informações referentes às temperaturas em ambientes abertos e fechados e a partir de então relacionar essas duas análises utilizando os conjuntos fuzzy.

### 3.3.5 Encontro das águas

Essa última aplicação pode levar a vários caminhos. Questões devem ser levantadas pelos alunos já nas discussões iniciais, e o objetivo é exatamente este. Que eles questionem, sugiram soluções e participem da resolução do problema de acordo com suas concepções.

Um dos primeiros questionamentos provavelmente será a quantidade de cada rio na amostra, bem como o tamanho da amostra. Nesse caso, os alunos deverão analisar as proporções de amostra de cada rio e levar em consideração os fatores que podem influenciar no encontro das águas dos dois rios. Como a análise a ser feita será de uma amostra fictícia, deve-se ter muito cuidado ao manipular as variáveis.

Essa é uma atividade que pode ser melhor trabalhada utilizando algum software recomendado para esse tipo de aplicação. Caso não seja possível, os alunos devem ser incentivados a sugerir uma solução junto ao professor.

É importante que os alunos se atentem e até mesmo pesquisem de forma aprofundada sobre as características de cada rio. Supõe-se que os alunos já tenham alguma ideia do que sugerir, pois se trata de um dos fenômenos da natureza mais conhecidos da região amazônica.

Uma outra sugestão é incluir a disciplina Química, se possível, e trabalhar misturas homogêneas e heterogêneas, como misturar álcool com água e água com óleo, ou mesmo substâncias bifásicas ou trifásicas que são fáceis de encontrar no mercado e fazer uma análise detalhada da quantidade de cada mistura envolvida na aplicação e assim, fazer alguma relação com o encontro das águas.

Todas aplicações sugeridas até aqui podem ser aprofundadas da mesma maneira que será feito no capítulo a seguir, que descreve uma aplicação da lógica fuzzy utilizando o MATLAB®.

Outras sugestões sempre são bem vindas e, principalmente, se as ideias partirem dos alunos, pois será melhor para envolver os alunos na aplicação.

# Capítulo 4

# Uma proposta de aplicação da Lógica Fuzzy no Ensino Médio

Após a análise introdutória das aplicações envolvendo a lógica fuzzy, é importante que seja feito um aprofundamento e aplicação da teoria fuzzy através da base de regras. Para isso, é necessário realizar atividades com etapas mais definidas para cada situação-problema e introduzir mais elementos de uma aplicação fuzzy.

Uma aplicação mais aprofundada da lógica fuzzy seria utilizar o MATLAB®. Para isso, é necessário que os alunos tenham acesso ao laboratório de informática para a construção da base de regras.

A proposta é fazer essa aplicação em escolas que oferecem o acesso ao software. Geralmente em escolas técnicas ou até mesmo em universidades.

No trabalho de Gayer [8], a autora aplicou conceitos da teoria fuzzy no ensino médio através de uma aplicação prática. Os passos seguidos por ela foram:

i. Realizar uma abordagem comparativa da teoria clássica dos conjuntos, introduzindo os conjuntos fuzzy;

ii. Exemplificar situações problema em que a teoria clássica dos conjuntos não se enquadraria, mas sim os conjuntos fuzzy;

iii. Propor um problema com algumas etapas da lógica fuzzy com a construção dos conjuntos fuzzy (fuzzificação) e base de regras;

iv. Apresentar uma noção do método de inferência de Mamdani para relacionar os conjuntos fuzzy;

v. Debater o resultado do problema com os alunos;

vi. Propor que os alunos se reúnam em grupo e realizem atividades pertinentes ao tema abordado.

Para realizar esses passos é necessário verificar o conhecimento que os alunos já possuem da teoria clássica dos conjuntos. Isso pode ser feito seguindo as orientações iniciais do capítulo 3, onde são apresentadas as propriedades dos conjuntos clássicos (crisp).

Gayer [8] detectou que alunos do 1º ano do ensino médio apresentaram baixo conhecimento da teoria clássica dos conjuntos ao responder seu questionário, pois houve apenas 13% de acertos; já os alunos do 2º ano do ensino médio apresentaram 57% de acertos e os alunos do 3º ano do ensino médio apresentaram 62% de acertos. Isso sugere que a aplicação seja feita preferencialmente com alunos do 2º e 3º ano do ensino médio, porém não exclui-se a possibilidade de que também seja feita com alunos do 1º ano do ensino médio, principalmente se a aplicação for feita logo depois de eles aprenderem a teoria clássica dos conjuntos de acordo com o seu calendário escolar.

Um cronograma sugerido para a aplicação é começar com duas aulas de 45 minutos com exercícios preliminares a fim de identificar os conhecimentos dos estudantes quanto à teoria clássica dos conjuntos; depois disso, realizar uma aula de 45 minutos com a introdução à teoria dos conjuntos fuzzy. Por fim, duas aulas de 45 minutos de atividades com conjuntos fuzzy e discussão. Esse tempo pode ser ajustado de acordo com o que o professor decida trabalhar ou mesmo de acordo com o desenvolvimento das atividades por parte dos alunos.

Abaixo estão descritas orientações para a realização dessas aulas.

Durante as primeiras aulas, pede-se que os alunos preencham os seguintes itens:

i. Conjunto A: conjunto das vogais.

ii. Conjunto B: conjunto dos nomes dos meses com 31 dias.

iii. Conjunto C: conjunto dos números ímpares positivos.

Após os alunos definirem os elementos dos conjuntos A, B e C, sugere-se a criação de mais três conjuntos que possibilitem aos alunos a percepção da incerteza como:

i. Conjunto D: conjunto dos alunos tímidos da sala.

ii. Conjunto E: conjunto dos alunos com cabelos escuros da sala.

iii. Conjunto F: conjunto dos alunos que assistem televisão com muita frequência.

Nesse momento os alunos podem encontrar um pouco de dificuldade na hora de quem incluir nos conjuntos D, E e F, o que confirmará a questão da incerteza ao tentar definir os elementos que pertencem a tais conjuntos. Isso certamente irá gerar várias discussões, o que pode levar o aluno a sugerir ideias de conjuntos com esse grau de incerteza.Pois eles irão verificar que nem todos os alunos pertencem por completo a determinado conjunto, mas também que não há como classificar alguns alunos fora desses três conjuntos.

Nesse momento pede-se aos alunos que sugiram uma solução de como incluir todos os alunos da turma (ou de determinado grupo) nesses conjuntos e que seja aberta uma discussão de como solucionar os casos de alunos que não se encaixam fora ou dentro do conjunto.

Na aula seguinte deve ser feita a introdução aos conjuntos para alunos do 1º ano ou a retomada dos conhecimentos da teoria clássica dos conjuntos para as turmas de 2º e 3º ano, seguida da introdução à teoria de conjuntos fuzzy. Pode-se usar os exemplo 2.1 referente aos números próximos de 3 ou algo mais dinâmico como utilizar a altura, peso ou idade dos alunos e montar uma relação de pertinência para cada um desses conjuntos.

Em seguida sugere-se a comparação entre as operações de união, intersecção e complementar tanto de conjuntos crisp quanto conjuntos fuzzy. Nas duas últimas aulas insere-se o problema de aplicação para a realização da atividade seguida de discussões sobre o que foi realizado.

O problema sugerido e suas etapas de aplicação estão descritos a seguir.

## 4.1 O problema

Após a análise e sugestões de soluções para os conjuntos presentes no questionário inicial, insere-se o seguinte problema: Como avaliar a qualidade de um smartphone a ser comprado, levando em conta características como: memória do dispositivo, duração da bateria e qualidade da câmera?

Com o objetivo de incentivar a participação e assim obter um maior entendimento por parte dos alunos, é necessário introduzir o problema que se aplica à realidade dos mesmos. Diante disso, deve-se introduzir a proposta para que sejam definidas as variáveis linguísticas "ruim", "regular"ou "bom"através da relação entre as três variáveis escolhidas.

Por exemplo, um aluno que escolhe um smartphone com memória e bateria médias e uma câmera boa, pode ser comparado a outro que escolhe um smartphone com muita memória e bateria e câmera médias? Nesse momento, é importante que haja uma discussão de qual solução sugerir para o problema. Isso irá fazer com que eles procurem aprender um método que vai solucionar cada caso.

Então, a partir da definição dos alunos do que seria um bom smartphone levando em consideração essas três características, pode-se introduzir o conceito da base de regras, associando as três variáveis apresentadas para a escolha do smartphone. Isso deve ser feito através de uma linguagem acessível aos alunos do ensino médio, como mostra a tabela 4.1.

A tabela pode ser apresentada aos alunos ou pode-se pedir que eles a construam ou a completem a partir de algumas células preenchidas. O problema também pode ser aplicado com os alunos que já possuam um smartphone e encaixe suas características na base de regras para identificar a qualidade de seu aparelho.

Em seguida, para evitar entrar em detalhes com definições e cálculos matemáticos que possam confundir o aluno, pode-se apresentar o software MATLAB® e sua ferramenta matemática de Lógica Fuzzy, o Fuzzy Logic Toolbox™.

| Se | memória | bateria | câmera | então | qualidade |
|---|---|---|---|---|---|
| R1 | pouca | fraca | ruim | então | ruim |
| R2 | pouca | média | ruim | então | ruim |
| R3 | pouca | forte | ruim | então | ruim |
| R4 | pouca | fraca | regular | então | ruim |
| R5 | pouca | média | regular | então | regular |
| R6 | pouca | forte | regular | então | regular |
| R7 | pouca | fraca | boa | então | ruim |
| R8 | pouca | média | boa | então | regular |
| R9 | pouca | forte | boa | então | bom |
| R10 | média | fraca | ruim | então | ruim |
| R11 | média | média | ruim | então | regular |
| R12 | média | forte | ruim | então | regular |
| R13 | média | fraca | regular | então | regular |
| R14 | média | media | regular | então | regular |
| R15 | média | forte | regular | então | regular |
| R16 | média | fraca | boa | então | regular |
| R17 | média | média | boa | então | bom |
| R18 | média | forte | boa | então | bom |
| R19 | muita | fraca | ruim | então | ruim |
| R20 | muita | média | ruim | então | regular |
| R21 | muita | forte | ruim | então | bom |
| R22 | muita | fraca | regular | então | regular |
| R23 | muita | média | regular | então | regular |
| R24 | muita | forte | regular | então | bom |
| R25 | muita | fraca | boa | então | bom |
| R26 | muita | média | boa | então | bom |
| R27 | muita | forte | boa | então | bom |

Tabela 4.1: Base de regras

O objetivo do uso dessa ferramenta é somente a resolução do problema, para uma saída clara, sem detalhar o modo de utilização do software e os passos a serem seguidos. Portanto, o software deve ser mostrado já com as variáveis de entrada, saída e base de regras já implementadas conforme as figuras a seguir.

Na Figura 4.1 é apresentada aos alunos uma visão geral da estrutura da lógica fuzzy com as variáveis de entrada: memória, bateria e câmera.

Após relembrar a diferença entre conjuntos clássicos e conjuntos fuzzy, cria-se, juntamente com os alunos, os conjuntos fuzzy de memória do dispositivo, duração da bateria e qualidade da câmera, considerando um mínimo de zero e máximo de 1 para cada variável. Onde o zero significa uma baixa classificação e 1 significa a melhor classificação de cada uma das variáveis.

Essas variáveis de entrada estão mostradas detalhadamente nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4.

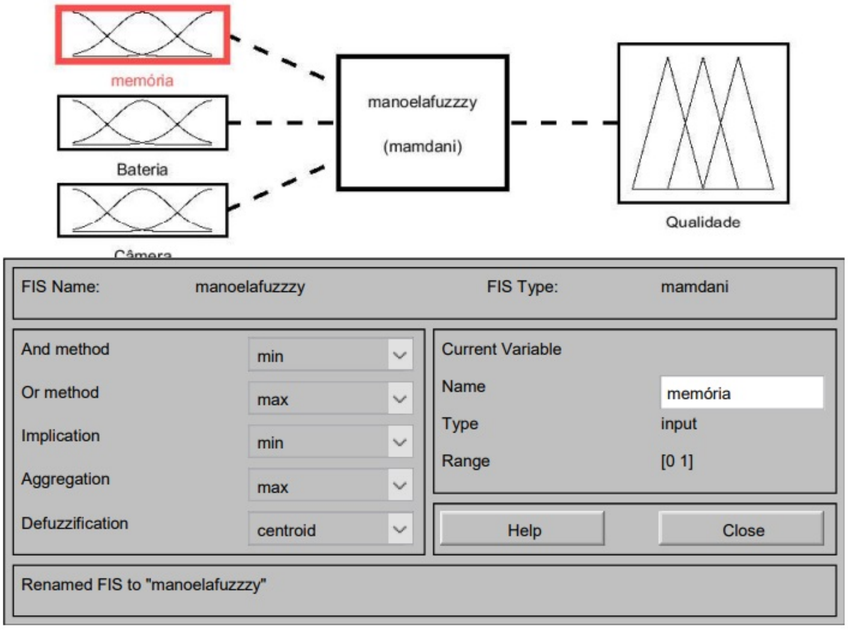



Figura 4.1: Estrutura da lógica fuzzy com as variáveis de entrada: memória, bateria e câmera (Figura elaborada no MATLAB®)

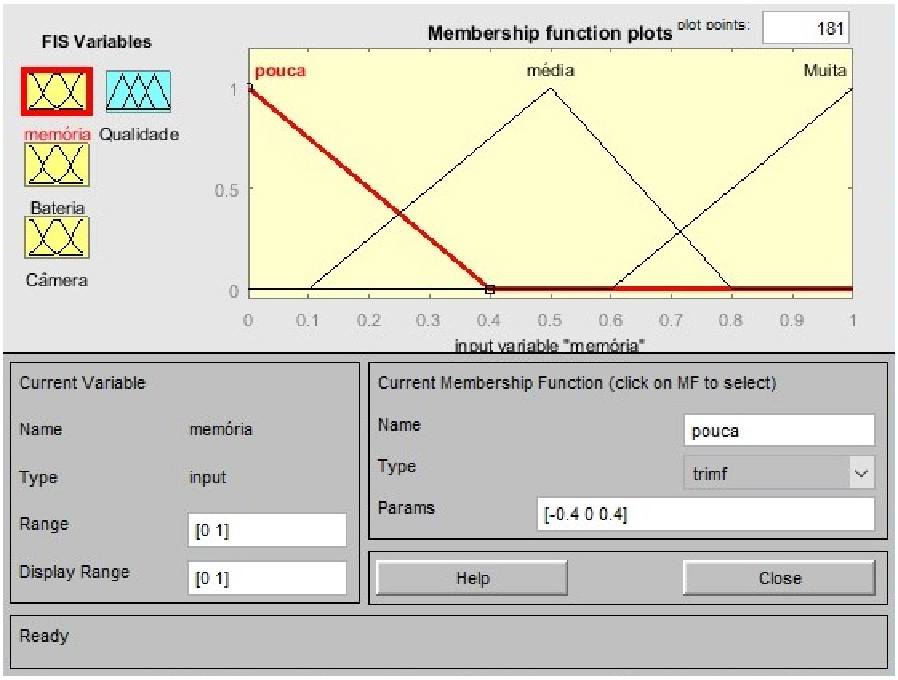



Figura 4.2: Variável memória do dispositivo (Figura elaborada no MATLAB®)

Como saída é mostrado o conjunto fuzzy de qualificação do aparelho, que deve ser criada juntamente com os alunos e está apresentado na Figura 4.5.

O conjunto fuzzy de saída dada pela qualificação do aparelho considera que varia de 0 (pior qualificação do aparelho possível, "ruim") a 1 (melhor qualificação do aparelho possível, "bom").

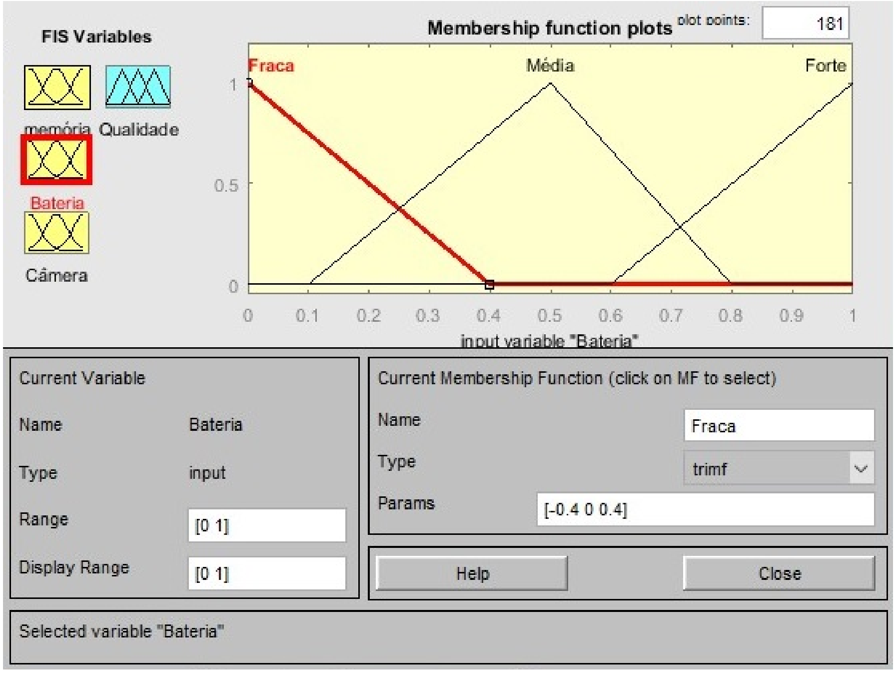



Figura 4.3: Variável duração da bateria (Figura elaborada no MATLAB®)

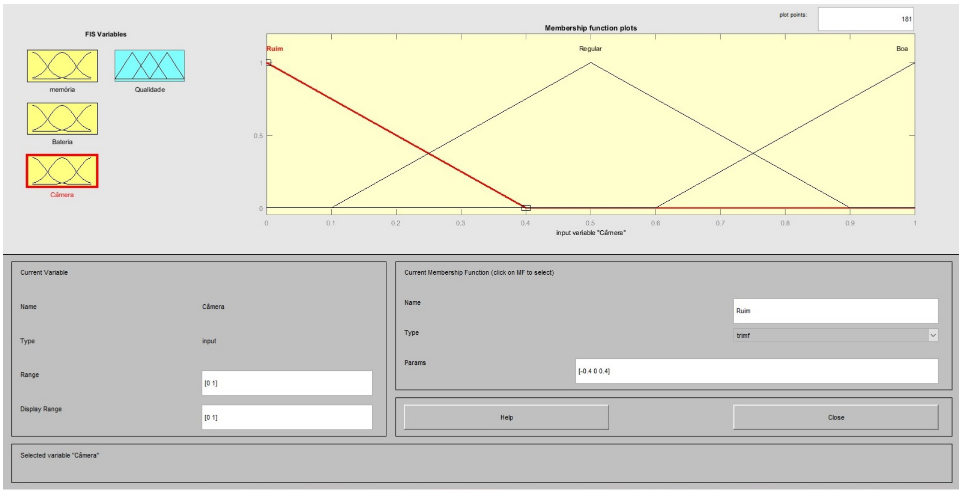



Figura 4.4: Variável qualidade da câmera (Figura elaborada no MATLAB®)

Entre a entrada e a saída é citada a existência de um algoritmo baseado nas regras criadas e analisadas em conjunto, sem grande aprofundamento, apresentando os detalhes das regras nas figuras 4.6 e 4.7.

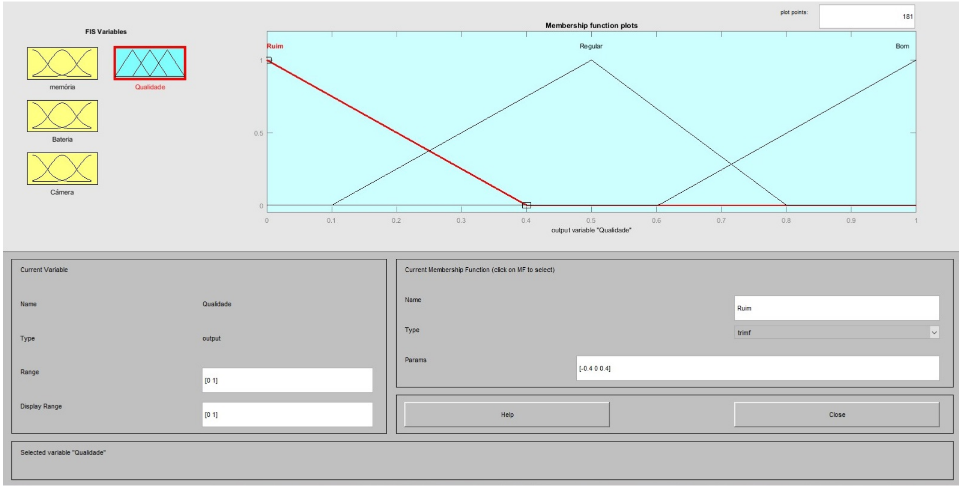



Figura 4.5: Qualificação do smartphone (Figura elaborada no MATLAB®)

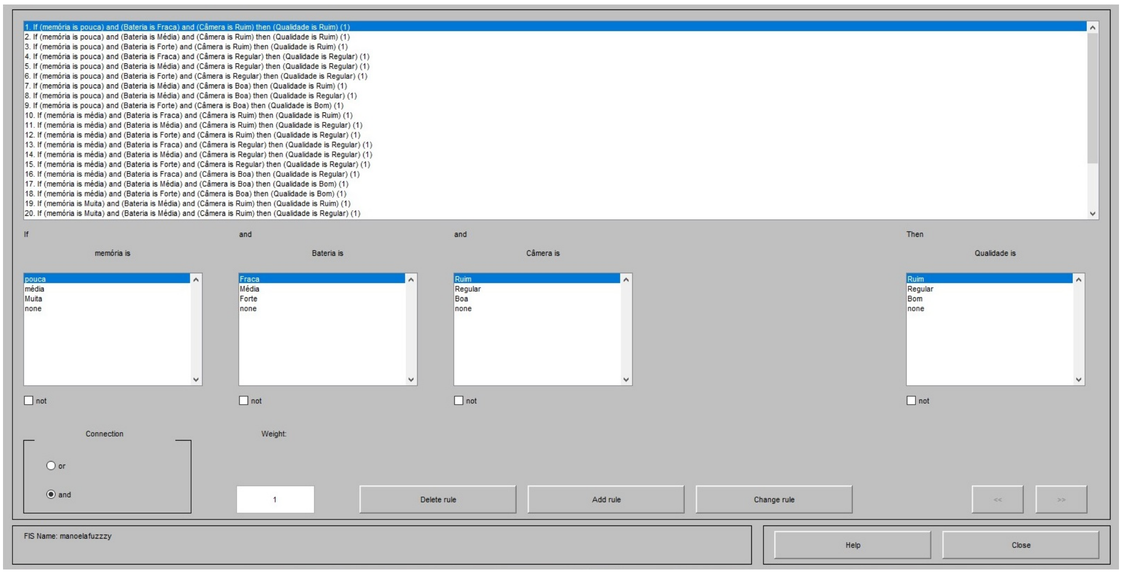



Figura 4.6: Base de regras (Figura elaborada no MATLAB®)

Utilizando a Figura 4.1, é apresentada aos alunos uma visão geral da estrutura da lógica fuzzy, tendo como entradas os conjuntos fuzzy de memória do dispositivo, duração da bateria e qualidade da câmera, apresentadas em detalhes nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4.

Como saída, é mostrado o conjunto fuzzy de qualificação do smartphone, que está apresentado na figura 4.5. Entre as entradas e saída, é citada a existência de um algoritmo baseado nas regras que foram criadas e analisadas em conjunto, sem muito aprofundamento, apresentando os detalhes das regras nas figuras 4.6 e 4.7.

Após todos os dados serem adicionados ao software (tanto os conjuntos fuzzy de entrada e saída como a base de regras criada), é feita a inclusão dos dados da simulação ou dados reais dos smartphones dos alunos, caso ocorra, com as quantidades equivalentes de cada variável. Com esta inserção de dados feita, é possível qualificar o aparelho de acordo com os dados que

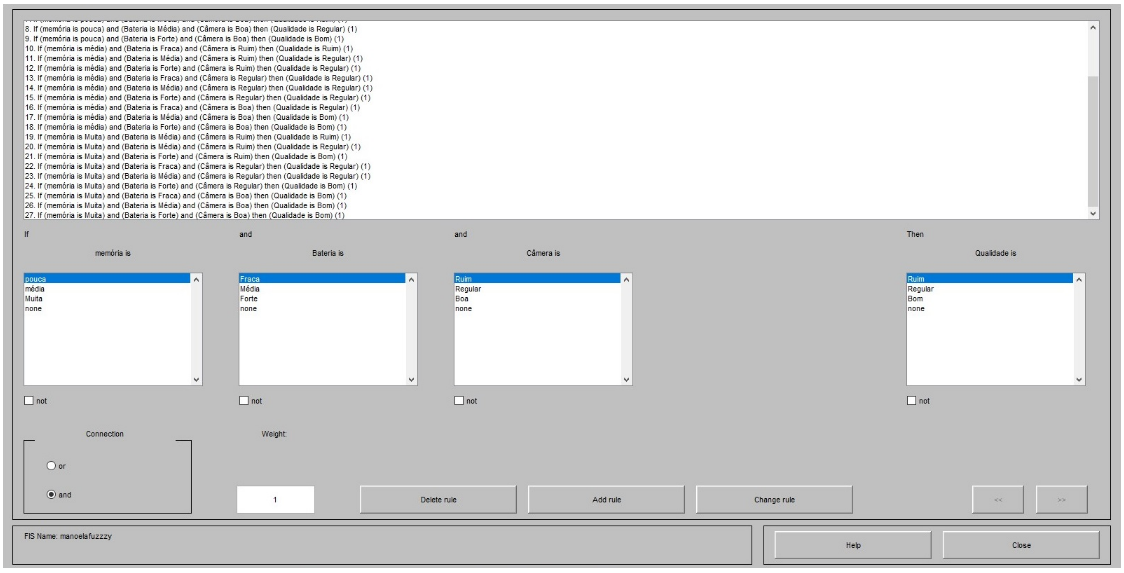



Figura 4.7: Base de regras (Figura elaborada no MATLAB®)

se tenha para as três variáveis.

No trabalho de Gayer [8], a partir da análise através dos gráfico produzidos no MATLAB®, os alunos conseguiram compreender a possibilidade de transformar dados linguísticos em números, sendo convidados a realizar atividades em grupo para exercitar os conhecimentos adquiridos.

Uma vez que todos os dados foram adicionados ao software (tanto os conjuntos fuzzy de entrada e saída como a base de regras criada), foi feita a simulação com as variáveis. Observe na Figura 4.8 a regra R1 da tabela da base de regras.

Veja que o cursor em vermelho mostra pouca memória, bateria fraca e câmera ruim. Logo, a qualidade do aparelho é ruim, com valor correspondente a 0,312.

Semelhantemente acontece quando atribuímos valores correspondentes à uma memória média, duração média da bateria e uma câmera regular, ou seja, valores médios (regra 14). Veja na figura 4.9.

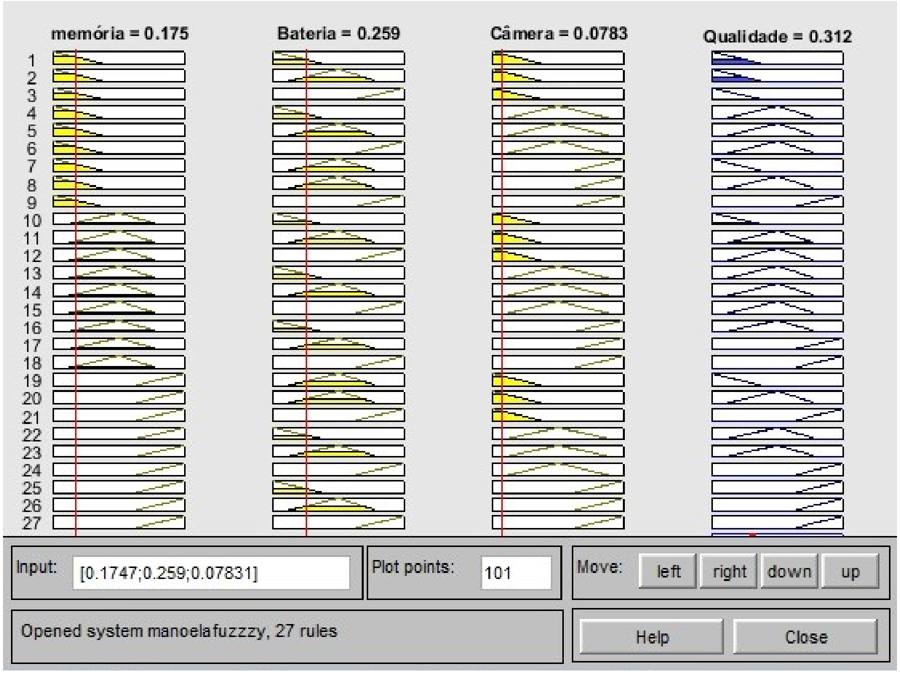



Figura 4.8: Regra 1 (Figura elaborada no MATLAB®)

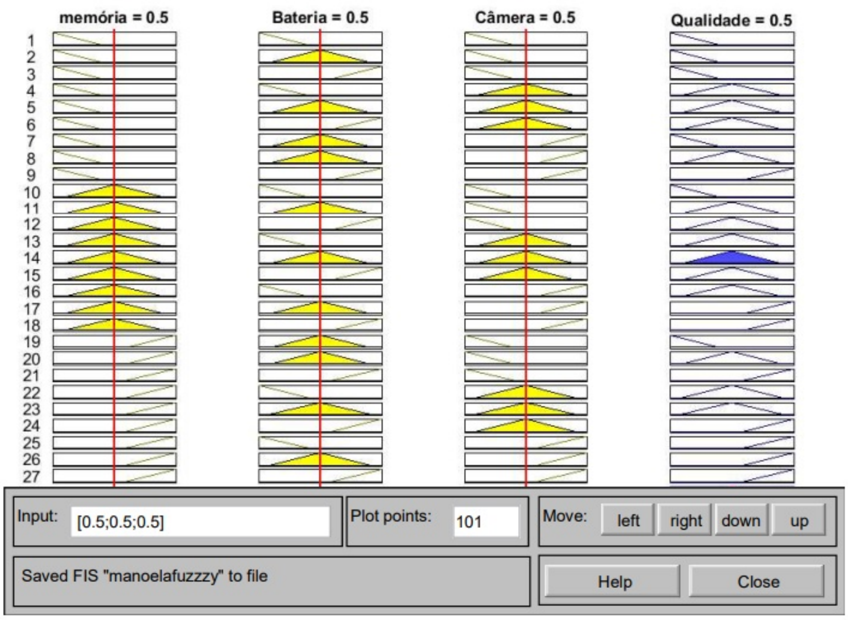



Figura 4.9: Regra 14 (Figura elaborada no MATLAB®)

Agora veja como fica o resultado para a regra 9 na figura 4.10: pouca memória, duração forte da bateria e câmera boa. A qualidade do aparelho ficou um pouco acima de 0,7, mesmo com um valor baixo para a memória do dispositivo.

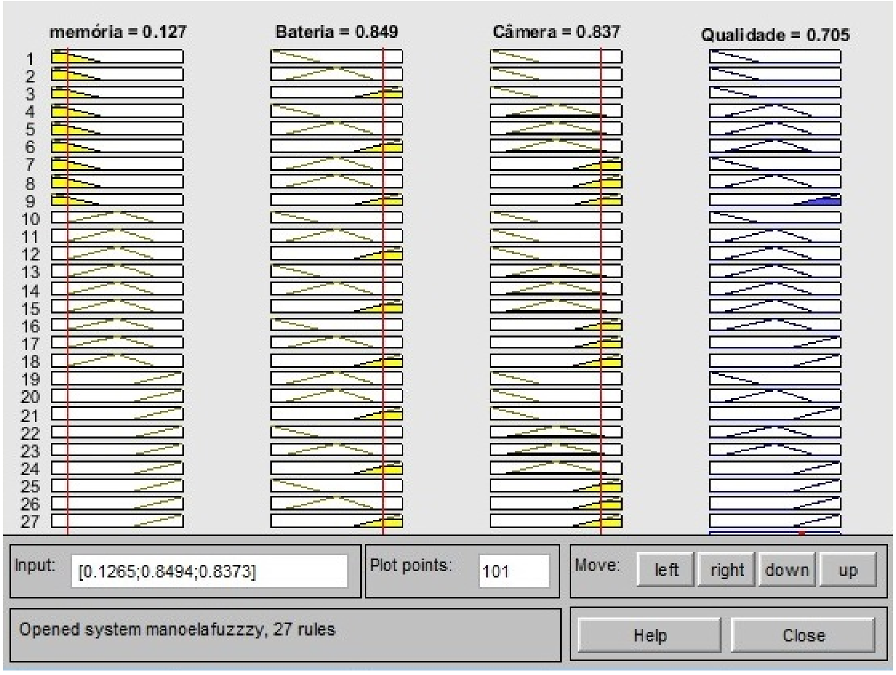



Figura 4.10: Regra 9 (Figura elaborada no MATLAB®)

Observe a análise das regras 17, 21 e 25:

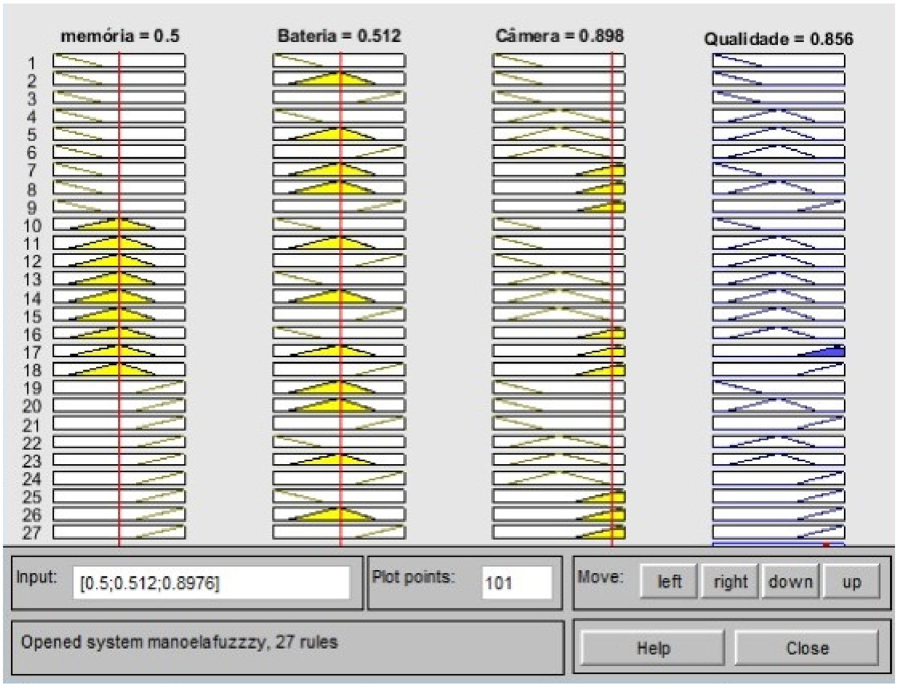



Figura 4.11: Regra 17 (Figura elaborada no MATLAB®)

A regra 17, na figura 4.11, apresenta memória média, duração média da bateria e qualidade boa da câmera. Com essas combinações a qualidade do aparelho passa a ser maior que 0,85.

Na figura 4.12 a regra 21 indica muita memória e duração forte da bateria, com a qualidade da câmera ruim. Mesmo assim, o qualidade do aparelho passa de 0,8.

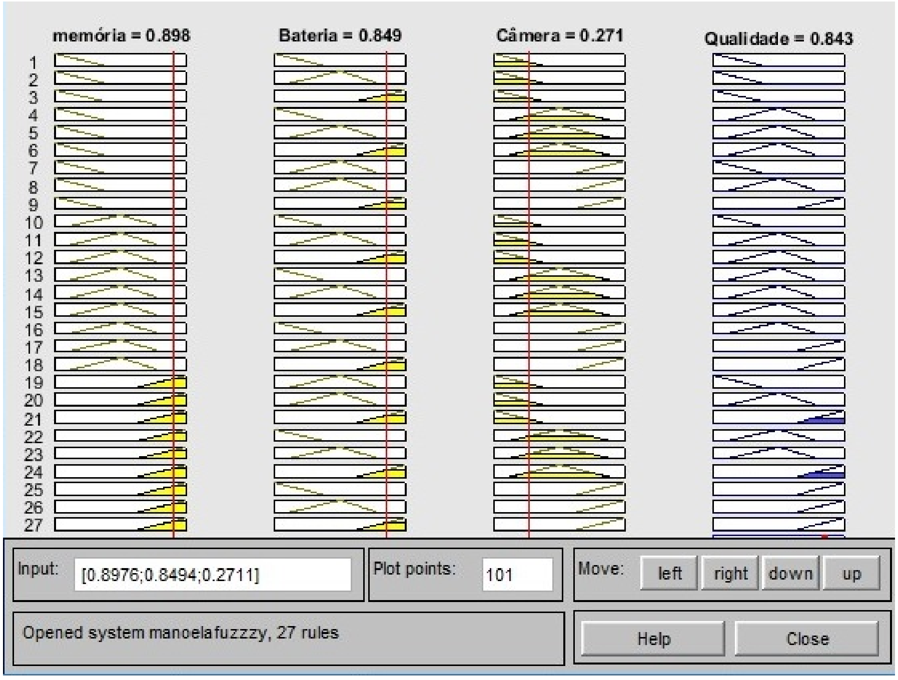



Figura 4.12: Regra 21 (Figura elaborada no MATLAB®)

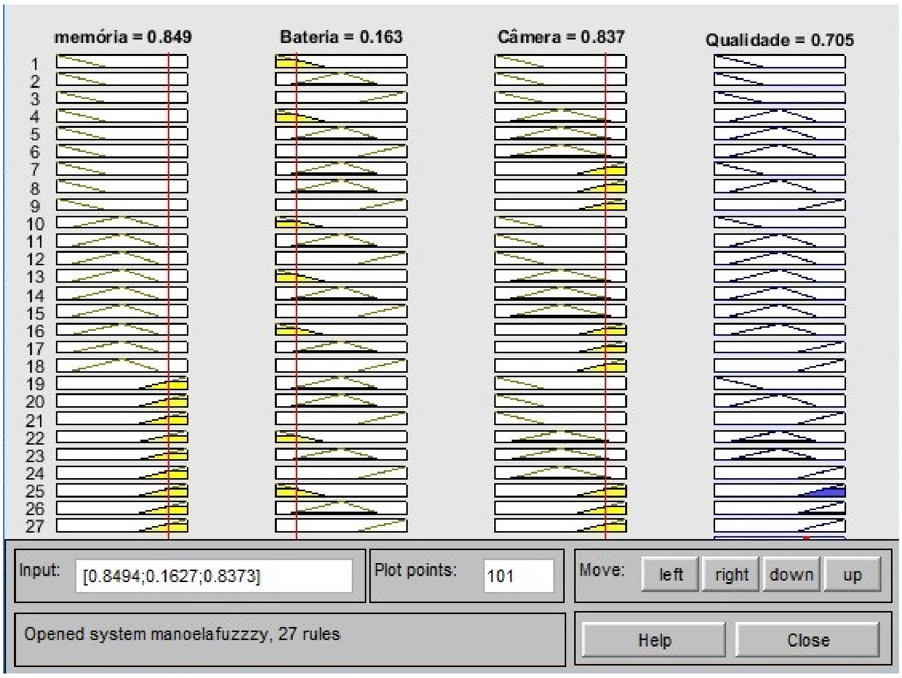



Figura 4.13: Regra 25 (Figura elaborada no MATLAB®)

Veja agora a figura 4.13 que apresenta muita memória, bateria fraca e boa qualidade da câmera. A qualidade do aparelho fica um pouco acima de 0,7.

Com essas análises, pode-se concluir que se duas variáveis apresentam um grau de pertinência maior de duas características, isso é suficiente para que se tenha um smartphone de boa qualidade.

A partir dessas análises, os alunos conseguem compreender a possibilidade de transformar dados linguísticos em números. Com isso, sugere-se que eles realizem atividades em grupo para exercitar os conhecimentos adquiridos. As sugestões de atividades estão apresentadas a seguir.

## 4.2 Atividades sugeridas

Após a aplicação do problema do smartphone, sugere-se aplicar uma lista com três exercícios e dividir os alunos em grupos, de maneira a tornar o aprendizado descontraído e propício a discussões envolvendo os temas em questão.

É previsto que alguns tenham mais dificuldades que outros, porém acredita-se que todos irão demonstrar capacidade de assimilar a percepção da incerteza e da possibilidade de transformar essa incerteza em números, de acordo com o trabalho de Gayer [8].

Os exercícios sugeridos são:

- Elaborar um problema semelhante ao da compra do smartphone, com duas ou três variáveis e definir a base de regras e analisar três regras distintas.
- Criar uma base de regras para classificar um time de futebol como ruim, razoável ou bom. Em seguida definir três variáveis que possam ser utilizadas para criar a base de regras.
- De acordo com a rotina dos alunos, escolher uma situação em que possa ser utilizada a lógica fuzzy para classificá-la, utilizando variáveis com critérios definidos. Criar os conjuntos fuzzy das variáveis e a base de regra. De acordo com o ponto de vista, verificar se essa situação pode ser aplicada no dia a dia dos alunos.

# Considerações Finais

Nos trabalhos realizados envolvendo modelagem matemática e lógica fuzzy observa-se que a realização de atividades desse tipo foram realizadas de forma positiva, de modo que o aluno se mostra interessado, pois desperta dúvidas e questionamentos e ele pode sugerir uma variedade de respostas que levam a discussões que o fazem chegar à conclusão desejada.

No trabalho de Corcoll-Spina [6], na elaboração de soluções, eles usaram a lógica clássica e fuzzy ao mesmo tempo, fizeram cálculos para atribuir valores aos graus de pertinência (divisibilidade e média aritmética) e intervalos, além de gráficos/desenhos para melhor explicar suas soluções. Os alunos se mobilizaram frente aos problemas propostos, com entusiasmo, reflexão, intuição, fazendo relações, pesquisando mais sobre determinado tema e também gerando dúvidas em relação a necessidade de mais dados de um determinado problema.

O trabalho de Gayer [8] mostrou que é possível trabalhar a lógica fuzzy não apenas no ensino superior, visto que os alunos do ensino médio conseguiram assimilar a teoria fuzzy e até mesmo criar uma base de regras para determinado problema.

Isso nos leva a crer que a metodologia a ser aplicada poderá levar os alunos do ensino médio a aprender a pesquisar, elaborar conceitos matemáticos, aproximar o professor e aluno de forma a possibilitar uma aprendizagem significativa, além de proporcionar ao aluno fazer uma análise crítica, através de problemas da realidade.

Espera-se que as atividades sugeridas tenham boa aceitação, apesar de possíveis resistências por parte do aluno. Mas é possível perceber que a realização de atividades como essa pode proporcionar um melhor rendimento do aluno em matemática, além de promover a cooperação entre os colegas. Desse modo, consegue-se modelar fenômenos através da subjetividade, mostrando que o próprio aluno pode desenvolver conceitos matemáticos e melhorar sua aprendizagem.

# Referências Bibliográficas


[1] AZEVEDO, F. O. *Lógica fuzzy aliada na aprendizagem da modelagem matemática*. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal do Amazoans - Instituto de Ciências Exatas. Manaus, 2017.

[2] BARROS L.C., BASSANEZI R.C., LODWICK W.A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol 347. Springer, Berlin, Heidelberg, 2017.

[3] BASSANEZI, R. C. *Temas & Modelos*. São Paulo: Editora Unicamp, 2012.

[4] BIEMBENGUT, M. S. *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira*: das propostas primeiras às propostas atuais. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis. v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939/28967>. Acesso em: 11 jan. 2018.

[5] BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem Matemática na Educação Brasileira*: um mapa do contexto do ensino médio. Anais do VI Congresso Internacional de ensino da Matemática. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1081/437>. Acesso em: 09 jan. 2018.

[6] CORCOLL-SPINA, C. O. *Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático*. Tese (Doutorado) - Programa de Pós Graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 165 p., 2010. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-21012011-104236/pt-br.php>. Acesso em: 07 out. 2017.

[7] GARCIA, E. A. C. *Biofísica*. São Paulo: Sarvier, 2002.

[8] GAYER, F. A. M. *A Matemática está em tudo: modelagem fuzzy para um problema da indústria e uma proposta de aplicação no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2017. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?pag=13>. Acesso em: 25 mar. 2018.

[9] HECHT, E. *Optics*. 4th Ed. San Francisco. Editora Addison Wesley, 2002.

[10] LAGHETTO, B. K. *Um modelo matemático para estimar o risco de desenvolver câncer de pulmão por meio de sistemas fuzzy*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba. São Paulo, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8040/DissBKL.pdf?sequence=1isAllowed=y>. Acesso em: 14 ago. 2017.

[11] MENDES, I. A. *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*. 1ª ed. Rio de janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

[12] MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. 2ª ed rev. e ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[13] SANTOS, G. R. *Lógica Fuzzy: Uma aplicação para a área da saúde*. Fundação Educacional do Município de Assis - FEMA - Assis, 2014. Disponível em: <https://cepein.femanet.com.br/BDigital/arqTccs/1111330201.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2017.

[14] YAZBEK, P. *Como manter seu carro por 10 anos ou até os 200 mil km*. Disponível em: <https://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/como-manter-seu-carro-por-10-anos-ou-ate-os-200-mil-km/>. Acesso em 10 jun. 2018.