Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Diferenciabilidade dos Autovalores de Operadores Uniformemente Elípticos de Segunda Ordem em Domínios Regulares e Não-regulares.

Vinícius Pereira Bandeira

Manaus- 2017

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Diferenciabilidade dos Autovalores de Operadores Uniformemente Elípticos de Segunda Ordem em Domínios Regulares e Não-regulares.

Vinícius Pereira Bandeira

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração GEOMETRIA DIFERENCIAL.

Orientador:Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Manaus- 2017

Vinícius Pereira Bandeira

Diferenciabilidade dos Autovalores de Operadores Uniformemente Elípticos de Segunda Ordem em Domínios Regulares e Não-regulares.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAM como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática na área de concentração GEOMETRIA DIFERENCIAL.

Manaus, 04 de setembro de 2017

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos, Presidente
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes, Membro
Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros, Membro
Universidade Federal do Ceará

Agradecimentos

Aos meus pais, que sempre me apoiaram durante toda a minha vida. Também por terem me ensinado o quão importante são os estudos, e que esse é um dos poucos bens que temos que ninguém pode nos tirar. Obrigado por terem permitido que eu escolhesse o meu caminho.

Ao Professor Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos, que me acompanhou e apoiou deste o início da minha vida acadêmica, não só como professor, mas como conselheiro e amigo. E também por ter aceito me orientar neste trabalho e proposto tal tema, que sem a sua paciência e dedicação não teria se realizado. Não tenho dúvidas que muito do meu enriquecimento profissional e pessoal se deve a ele. Obrigado também pelas diversas conversas de motivação, pois os momentos difíceis não foram poucos.

Ao Professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes, por todo apoio e ajuda, não apenas como coordenador do Programa de Pós-Graduação, mas como professor, amigo e conselheiro. Obrigado por todos os conselhos, na maioria das vezes, durante as conversas pós almoço.

Ao Professor Dr. Abdênago Alves de Barros, por ter aceito o convite para participar da banca examinadora, e pelas diversas correções e sugestões para melhorar o texto aqui presente.

Aos meus familiares, pelo apoio e compreensão.

À Cíndel Cavalcante, pelo apoio e companheirismo incomparável durante esse período, estou certo que este trabalho se tornou muito mais prazeroso ao seu lado.

Aos meus amigos do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Ufam, por toda ajuda que me deram e momentos descontraídos que tivemos ao longo desse período.

Aos amigos que fiz em São Paulo, por todo suporte e ajuda numa cidade que eu não conhecia.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Ufam, que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

A todas as pessoas que de alguma forma, direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o cálculo diferencial de domínios, desenvolvido por Daniel Henry em 2005, aplicado em problemas de pertubação de fronteira de domínio regular. Ultilizaremos essa técnica para calcular a primeira derivada do autovalor simples do Laplaciano com respeito ao domínio. Em seguida, exibimos a técnica desenvolvida por Marcos Montenegro e Julian Haddad em 2015 para calcular a derivada de autovalores simples de operadores uniformemente elípticos de segunda ordem em domínios não-regulares, com respeito aos coeficientes do operador e ao domínio, onde são tomadas perturbações não regulares do domínio de definição do problema. Por fim, destacamos algumas diferenças e semelhanças entre ambas as técnicas.

Palavras-chaves: Perturbação de Fronteira, Operador Elíptico, Autovalores, Diferenciabilidade, Operador Laplaciano

Abstract

In this work we present the differential calculus of domain, developed by Daniel Henry in 2005, applied to problems of boundary pertubation of the regular domain. We will use this technique to calculate the first derivative of the simple eigenvalue of Laplace operator with respect to the domain. Then we show the technique developed by Marcos Montenegro and Julian Haddad in 2015 to calculate the derivative of simple eigenvalues of uniformly elliptical operators of second order in non-regular domains, with respect to the coefficients of the operator and the domain, where they are taken Non-regular disturbances of the problem definition domain. Finally, we highlight some differences and similarities between both techniques.

Keywords: Boundary Perturbation, Elliptic Operator, Eigenvalues, Differentiability, Laplace Operator.

Sumário

Introdução

Perturbação de contorno de problemas com valores de fronteira em EDP's elípticas é um assunto que tem recebido atenção de diversos autores sobre vários pontos de vista. Desde a publicação do famoso livro de Rayleigh [21] em 1877(primeira edição) o assunto vem atraindo atenção da comunidade científica principalmente por conta de sua vasta aplicabilidade. Entre outros, citamos alguns trabalhos feitos no século 20: Hadamard [9] em 1908, Courant e Hilbert [3] em 1937, Polya e Szëgo [20] em 1951, Garabedian e Schiffer [8, 7] em 1952–1953, Polya e Schiffer [19] em 1953, Schiffer [22] em 1954 e os importantes trabalhos de A.M. Micheletti, [14, 15] em 1972 e [16] em 1973. Também citamos os reconhecidos trabalhos de K. Uhlenbeck [24, 25], Saut e Teman [23] e A. L. Pereira [17], nos quais propriedades genéricas das soluções do referido problema são estudadas.

A razão para o grande interesse neste tema é a sua aplicabilidade. A fim de estudar, entre outras coisas, problemas de perturbação de fronteira para EDP's, D. Henry desenvolveu em [11] uma espécie de cálculo diferencial em que a variável independente é o domínio de definição do problema de valor de contorno a ser estudado. Essa teoria nos permite fazer uso de teoremas clássicos como o Teorema das Funções Implícitas.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentamos algumas definições e resultados preliminares a respeito de derivadas, definimos domínio regular e alguns espaços de funções, e dedicamos uma seção para introduzir alguns conceitos e resultados sobre derivada de aplicações entre espaços de Banach.

Já no segundo capítulo, iniciamos com uma seção voltada a teoria desenvolvida em [11] para tratar problemas de deformação de fronteira em EDP's. Mais precisamente, seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ de classe C^m. Uma C^m-perturbação de Ω é dada por $\Omega_h = h(\Omega)$ onde

$$h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega) = \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n) : h \text{ é injetiva e } |\det h_x|^{-1} \text{ é limitado em } \Omega\}.$$

Considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Nosso objetivo é estudar o comportamento das soluções desse problema quando a região Ω é submetida à uma C^m-perturbação. O domínio de definição do operador de Laplace Δ é um espaço de funções u que estão definidas em Ω. Surge uma dificuldade: quando submetemos a região Ω à uma perturbação, o espaço de funções u também varia. Uma maneira de evitar isto, é fazer com que o problema retorne à região inicial. Para isso, se $h \in \text{Diff}^m(\Omega)$ é um mergulho e u é uma função definida em $h(\Omega)$, definimos a composição (ou o *pull-back*) h^* de h por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)) \quad x \in \Omega.$$

Assim, podemos considerar o operador $h^*\Delta h^{*-1}$ agindo em funções definidas em Ω.

Essa estratégia nos permite trabalhar em espaços de funções que não variam quando a região Ω é perturbada. Porém, é necessário provar a suavidade dessa aplicação com respeito a h e além disso, calcular sua derivada. Supondo que seja diferenciável, se tentarmos uma abordagem direta no cálculo da derivada podemos ter várias dificuldades.

Suponha que estamos interessados em calcular a derivada dessa aplicação em relação a t, ao longo de uma curva $t \mapsto (h(t,\cdot), u(t,\cdot)) \in \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega)$ com $m \geq 2$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\Delta u(t, h^{-1}(t,\cdot))(h(t,\cdot)).$$

Ao tentarmos aplicar a regra da cadeia (diversas vezes), em geral, isso nos levará à uma longa sequência de cálculos. Podemos facilitar essa tarefa se calcularmos num ponto fixo y pertencente à região perturbada $h(t,\Omega)$, entretanto, teríamos que permitir que as regiões e espaços variem.

D. Henry desenvolve uma técnica para superar esta dificuldade e facilitar os cálculos enquanto a região Ω permanence fixada. Isso é feito basicamente definindo a *derivada anticonvectiva* D_t

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad U(x,t) = -\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial h}{\partial t},$$

que quando aplicada ao operador $h(t,\cdot)^*\Delta h(t,\cdot)^{*-1}$ numa região fixada, corresponde num certo sentido à derivada em relação a t aplicada ao operador Δ numa região deformada.

Após isso, usando uma aplicação conveniente, conseguimos provar utilizando o Teorema das Funções Implícitas a diferenciabilidade dos autovalores e das autofunções em relação à perturbação h, do problema de Dirichlet para o Laplaciano, e calculamos sua primeira derivada.

Rigorosomente falando, a teoria desenvolvida por D. Henry trata de operadores qualquer, não específicamente o laplaciano, isto é, se L é um operador diferencial linear com coeficientes constantes de ordem m, e f é uma função contínua, define-se o operador F_Ω em $C^m(\Omega)$ dado por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)), \quad x \in \Omega,$$

e em seguida as formas Euleriana e Lagrangiana, $F_{h(\Omega)}$, $h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}$ respectivamente. Feito isso, Henry prova o teorema 2.2.1 que nos diz como derivar o operador acima na forma lagrangiana.

Há um grande número de trabalhos em que a hipótese de regularidade pelo menos de classe C^2 é exigida. Contudo, em [10] M. Montenegro e J. Haddad desenvolvem uma técnica para provar a diferenciabilidade dos autovalores e autofunções do problema de Dirichlet quando o operador em questão é um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem e o domínio de definição do problema não necessariamente é regular. O capítulo 3 é dedicado à essa técnica.

Na primeira seção do terceiro capítulo, assim como na primeira seção do capítulo 2, preparamos o terreno para o estudo proposto. Definimos alguns operadores e provamos resultados essenciais. O objetivo principal nesta seção é provar uma versão generalizada de um lema de tipo Omega, a fim de usá-lo para provar a diferenciabilidade de aplicações e operadores entre espaços de funções.

Para ser mais específico, enunciamos aqui uma versão padrão do Omega lema, que pode ser encontrada em [1].

Seja M um espaço topológico compacto, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ espaços de Banach. $C^0(M, \mathbf{E})$ é o espaço de Banach das funções contínuas de M em $\mathbf{E}$, equipado com a norma usual

$$\|f\| = \sup_{m \in M} \|f(m)\|.$$

Se A é um subconjunto aberto de $\mathbf{E}$, definimos $C^0(M, A)$ como sendo o aberto de aplicações $f \in C^0(M, \mathbf{E})$ tais que $f(M) \subset A$.

Lema 0.0.1. *(Omega Lema) Seja $g : A \to \mathbf{F}$ uma aplicação de classe C^r, $r > 0$. Então, a aplicação*

$$\Omega_g : C^0(M, A) \to C^0(M, \mathbf{F}) \quad \textit{definida por } \Omega_g(f) = g \circ f$$

é também de classe C^r.

Note que no enunciado acima a função g está fixada. Em [10] os autores apresentam uma versão generalizada do Omega Lema, onde é permitido que a função g de classe C^r também varie. Mais precisamente, a função composta

$$c_{r,\mathbf{E}} : C^r(\overline{U}, \mathbf{E}) \times C^0(\overline{\Omega}, U) \to C^0(\overline{\Omega}, \mathbf{E})$$

definida por $c_{r,\mathbf{E}}(g, f)(x) = g(f(x))$ é de classe C^r, onde $\overline{U}$ é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Omega} \subset U$. Este é um resultado de interesse independente, e que certamente pode ser aplicado em outros contextos.

Após a construção da estrutura mencionada, ultilizamos o teorema das funções implícitas para provar a diferenciabilidade dos autovalores e autofunções como funções dos coeficientes e do domínio. Feito isso, calculamos a primeira derivada do autovalor. Em particular, obtemos o mesmo resultado do capítulo 2 no caso em que a região perturbada é de classe C^2.

Concluímos o trabalho fazendo uma comparação entre as técnicas apresentadas, destacando algumas semelhanças e diferenças entre elas.

1 Preliminares

1.1 Definições, notações e teoremas

Apresentaremos nesta sessão uma série de definições e resultados que usaremos ao longo de todo o trabalho.

Como de costume, denotaremos o espaço euclidiano n dimensional por $\mathbb{R}^n$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função que possua derivadas parciais de primeira ordem. Denotaremos a i-ésima derivada parcial de u por $\partial_i u$, ou por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, ou ainda por $\mathbf{D}_i u$.

Definição 1.1.1. *Seja $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos inteiros não-negativos. Dizemos que um elemento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{N}_0$ é um multi-índice e sua ordem é o número inteiro $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, e definimos a derivada de ordem α por*

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Exemplo 1.1.1. *Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $\alpha = (2, 2, 2)$, então*

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial f}{\partial^2 x \partial^2 y \partial^2 z}(x) = 6.$$

Um polinômio $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é *homogêneo* de grau k se $p(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Se f é uma aplicação que assume valores reais definida em $x \in \mathbb{R}^n$, m-vezes diferenciável, a m-ésima derivada de f em x pode ser considerada como um polinômio homogêneo de grau $m(h \longmapsto \mathbf{D}^m f(x) h^m)$ em $\mathbb{R}^n$(onde h^m denota o elemento $(h, \ldots, h)$ de $\overbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{m}$, ou como uma forma simétrica m-linear, ou como a coleção de derivadas parciais

$$\mathbf{D}^m f(x) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) : |\alpha| = m \right\},$$

dependendo da conveniência. Então a norma $|\mathbf{D}^m f(x)|$ pode ser denotada por

$$\max_{|\alpha|=m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \right| \text{ ou } \max_{|h|\leq 1} \mid \mathbf{D}^m f(x) h^m \mid .$$

A última versão tem a vantagem de ser independente da rotação de coordenadas em $\mathbb{R}^n$, mas as normas são equivalentes.

Com efeito, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica em $\mathbb{R}^n$. Visto que a derivada $\mathbf{D}f : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é uma aplicação que associa a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma trasformação linear $\mathbf{D}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{D}f(x)(e_i) = \partial_i f(x)$, dado $h \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{D}f(x)(h) &= \mathbf{D}f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{D}f(x)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(x). \end{aligned}$$

Então, $h \mapsto \mathbf{D}f(x)(h)$ é um polinômio homogêneo de grau 1, cujos coeficientes são as derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto x. Já a segunda derivada $\mathbf{D}^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é uma aplicação bilinear para cada $x \in \mathbb{R}^n$, além disso tem-se $\mathbf{D}^2 f(x)(e_i, e_j) = \partial_{ij} f(x)$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 f(x)(h, h) &= \mathbf{D}^2 f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i, \sum_{j=1}^{n} h_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \mathbf{D}^2 f(x)(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \partial_{ij} f(x). \end{aligned}$$

Donde segue que $\mathbf{D}^2 f(x)(th, th) = t^2 \mathbf{D}^2 f(x)$, portanto $h \mapsto \mathbf{D}^2 f(x)(h, h)$ é um polinômio homogêneo de grau 2. Prosseguindo dessa forma, verificamos que $h \mapsto \mathbf{D}^m f(x) h^m$ é um polinômio homogêneo de grau m.

Sabendo que, o que determina um polinômio são os seus coeficientes, podemos identificar $\mathbf{D}^m f(x) h^m$ com o conjunto $\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) : |\alpha| = m\}$. Basta observar que cada coeficiente que aparece em $\mathbf{D}^m f(x) h^m$, é da forma $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x)$ com α sendo um multi-índice de ordem m.

Quanto às normas, observe que se trata da norma de um vetor num espaço de dimensão finita, portanto são equivalentes.

Definição 1.1.2. *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pode ser estendida continuamente até $\overline{\Omega}$, se existir $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $\Omega \Subset \tilde{\Omega}$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$.*

Definição 1.1.3. *Se Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $m \geq 0$ um número natural, $C^m(\Omega, \mathbf{E})$ é o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbf{E}$, m vezes continuamente diferenciáveis e limitadas em Ω cujas derivadas podem ser estendidas continuamente até o fecho $\overline{\Omega}$,* *com a norma usual*

$$\|\phi\|_{C^m(\Omega,\mathbf{E})} = \max_{0\leq j\leq m} \sup_{x\in\Omega} |\mathbf{D}^j\phi(x)|.$$

O espaço de valores será algum espaço vetorial normado $\mathbf{E}$. Quando $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, escreveremos apenas $C^m(\Omega)$.

Definição 1.1.4. *Diremos que um subconjunto aberto Ω' está compactamente contido em Ω, e escrevemos $\Omega' \Subset \Omega$, se $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ for compacto.*

Se $\Omega' \Subset \Omega$, então

$$\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) = \inf\{|x-y|; x \in \Omega' \quad \text{e} \quad y \in \partial\Omega\} > 0.$$

O *suporte* de uma função contínua $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\text{supp}u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Denotamos por $C_0^m(\Omega)$ o subconjunto de $C^m(\Omega)$ formado pelas funções cujo suporte está compactamente contido em Ω, e de modo análogo, $C_0^\infty(\Omega)$ denotará o subconjunto de $C^\infty(\Omega)$ consistindo de todas funções com suporte compacto em Ω. Nos referimos a tais funções como funções teste.

$C^m_{unif}(\Omega, \mathbf{E})$ é o subespaço de $C^m(\Omega, \mathbf{E})$ constituido por todas as funções cuja m-ésima derivada é uniformemente contínua.

Definição 1.1.5. *Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é $C^m - regular$, ou simplesmente de classe C^m, se existir $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que é pelo menos $C^1_{unif}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) > 0\}$ e $\phi(x) = 0$ implica $|\nabla\phi(x)| \geq 1$.*

Onde $\nabla u(x)$ denota o gradiente de uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $x \in \Omega$, definido por

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right).$$

O *divergente* de um campo vetorial $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ num ponto $x \in \Omega$ é

$$\text{div}\varphi(x) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x).$$

Segue diretamente da definição que, se u é uma função definida em Ω a valores reais, e φ é um campo vetorial em Ω, então

$$\text{div}(u(x)\varphi(x)) = u(x)\text{div}(\varphi(x)) + \nabla u(x) \cdot \varphi(x).$$

Um campo vetorial φ é de classe C^k se cada uma de suas componentes φ_i for uma função de classe C^k.

Definição 1.1.6. *Se $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função que possui todas as derivadas parciais de segunda ordem no ponto $x \in \Omega$, definimos o operador Laplaciano de u em x, como sendo*

$$\Delta u(x) = div(\nabla u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Definição 1.1.7. *Seja $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ consiste de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis a Lebesgue tais que*

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty,$$

e $L^\infty(\Omega)$ é formado por todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ essencialmente limitadas, onde o supremo essencial de u, denotado por $\sup_\Omega u$, é definido como

$$\sup_\Omega u = \inf\{M \in \mathbb{R}; u \leq M \ \text{quase sempre em } \Omega\}.$$

Dizemos que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é essencialmente limitada, se existe uma constante $M > 0$ tal que o conjunto $\{x \in \Omega : |u(x)| > M\}$ tem medida nula. Estes espaços se tornam espaços de Banach quando munidos com as seguintes normas, respectivamente

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_{L^\infty} = \sup_\Omega |u|.$$

Definimos também o espaço $L^p_{loc}(\Omega)$, formado pelas funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u \in L^p(\Omega_0)$ para cada $\Omega_0 \Subset \Omega$. Tais funções são ditas localmente integráveis.

Rigorosamente falando, elementos do espaço $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência de funções que coincidem em quase todo ponto, isto é, são idênticas a menos de um conjunto de medida nula. Porém, identificamos uma função com a sua classe de equivalência.

Seja $\alpha \in \mathbb{N}_0$ um multi-índice. Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui *derivada fraca* $\partial^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se

$$\int_\Omega (\partial^\alpha u)\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(\partial^\alpha \phi) dx \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Outro espaço que será bastante utilizado aqui, é o *espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$, que consiste de todas as funções localmente integráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que a derivada fraca $\partial^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $0 < |\alpha| \leq m$. No caso especial $p = 2$, escrevemos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Definimos a norma em $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_\Omega |\partial^\alpha u|$$

caso $p = \infty$. Vamos considerar essas normas como padrão em $W^{m,p}(\Omega)$, e equipado com essas, tal espaço torna-se um espaço de Banach. Mas existem outras normas equivalentes que podemos considerar caso seja conveniente. Além disso, podemos definir um produto interno em $H^m(\Omega)$ de modo a torná-lo um espaço de Hilbert, a saber,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v) dx.$$

Friedman prova em [6] que se $\partial\Omega$ é de classe C^m então $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ na norma acima. Em [5] há um capítulo inteiro dedicado à propriedades das derivadas fracas e dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$, ou ainda o leitor pode consultar [2].

Finalizamos esta seção com o seguinte teorema, que será extremamente útil em alguns cálculos que faremos para demonstrar resultados principais em nosso trabalho. A prova do seguinte teorema pode ser encontrada em [12].

Teorema 1.1.1. *(Teorema da Divergência) Seja $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1, e Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então*

$$\int_\Omega div\varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot N dS,$$

onde N denota o campo normal unitário em $\partial\Omega$ apontando para fora de Ω.

Em particular, se $u, v \in C^1(\Omega)$, então uma aplicação direta do teorema acima ao campo $\varphi = (0, 0, \ldots, uv, \ldots, 0)$ cuja i-ésima componente é uv, nos dá a fórmula de integração por partes

$$\int_\Omega u(\partial_i v) dx = -\int_\Omega (\partial_i u) v dx + \int_{\partial\Omega} uvN_i dS.$$

Outras consequências do Teorema da Divergência, são as conhecidas identidades de Green.

Corolário 1.1.1. *Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $u, v \in C^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega u\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial N} dS,$$

$$\int_\Omega u\Delta v dx = \int_\Omega v\Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N}\right) dS.$$

1.2 Cálculo Diferencial em Espaços Normados

Na discussão acima comentamos a respeito da derivada de aplicações entre espaços euclidianos. O que faremos nesta seção é dar uma definição um pouco mais geral de derivada, isto é, quando a aplicação a ser derivada estiver definida entre espaços normados. Faremos isso com o intuito de esclarecer as notações e as técnicas de derivação que serão usadas no texto, bem como o enuciado do Teorema (padrão) da Função Implícita. Resaltamos ainda que se trata apenas de uma breve esplanação sobre o assunto. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [1] ou [4].

Assim como na seção anterior, denotaremos por $\mathbf{E}$ um espaço vetorial normado $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Se $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são dois espaços normados, denotamos por $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ o espaço vetorial normado composto por todas as aplicações lineares contínuas de $\mathbf{E}$ em $\mathbf{F}$.

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ espaços vetoriais normados, $f : U \subset \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ uma aplicação definida no aberto U de $\mathbf{E}$ e $x_0 \in U$. Dizemos que f é diferenciável em x_0 quando existe uma aplicação linear limitada $\mathbf{D}f(x_0) : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que sempre que $0 < \|x - x_0\| < \delta$ tem-se*

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathbf{D}f(x_0) \cdot (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \varepsilon.$$

Observe que estamos usando a mesma noatação para as normas de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$. A definição acima pode ser reescrita como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \mathbf{D}f(x_0) \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Definição 1.2.2. *Se f é diferenciável em cada ponto $x_0 \in U$, a aplicação $\mathbf{D}f : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$; $x \mapsto \mathbf{D}f(x)$ é chamada de derivada de f. Além disso, se $\mathbf{D}f$ é uma aplicação contínua, dizemos que f é de classe C^1 (ou continuamente diferenciável).*

Prosseguindo de maneira indutiva, definimos

$$\mathbf{D}^r f = \mathbf{D}(\mathbf{D}^{r-1} f) : U \subset \mathbf{E} \to L^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

se existir, e aqui estamos identificando $L(\mathbf{E}, L^{r-1}(\mathbf{E}, \mathbf{F}))$ com $L^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Se $\mathbf{D}^r f$ existir e for contínua, dizemos que f é de classe C^r. Também usamos a notação $f'(x)$ para indicar a derivada de f em x, e $f^k(x)$ para a k-ésima derivada de f em x. Esta é a definição clássica para aplicação de classe C^r encontrada nos livros de cálculo, mas vamos usar a definição dada na seção anterior.

Não daremos todas as propriedades da derivada, vamos apenas escrever aquelas necessárias para enunciar os resultados de nosso interesse. Mas vale observar que se os espaços normados $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente, obtemos os mesmos resultados para derivada vistos no cálculo diferencial nos espaços euclidianos.

Se $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbf{F}$ é diferenciável, então $\mathbf{D}f(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbf{F})$. Portanto, o espaço $L(\mathbb{R}, \mathbf{F})$ é isomorfo a $\mathbf{F}$ via o isomorfismo $T \mapsto T(1)$. Note que $\|T\| = \|T(1)\|$, ou seja, esse isomorfismo preserva a norma. Denotamos

$$\begin{aligned} f' &= \frac{df}{dt} = \mathbf{D}f(t) \cdot 1, \quad 1 \in \mathbb{R} \\ f'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \end{aligned}$$

e f é diferenciável se f' existe.

Teorema 1.2.1. *(Teorema Fundamental do Cálculo).*

(i) Se $g : [a, b] \to \mathbf{F}$ é contínua, onde $\mathbf{F}$ é um espaço vetorial normado, então a aplicação $f : (a, b) \to F$ definida por

$$f(t) = \int_a^t g(s)ds$$

é diferenciável e $f' = g$.

(ii) Se $f : [a, b] \to \mathbf{F}$ for contínua, e diferenciável no aberto (a, b) e f' puder ser estendida à uma aplicação contínua em $[a, b]$, então

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds.$$

Definição 1.2.3. *Suponha que $f : U \subset \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ seja de classe C^1. Definimos a tangente de f como sendo a aplicação $Tf : U \times \mathbf{E} \to \mathbf{F} \times \mathbf{F}$ dada por*

$$Tf(x, e) = (f(x), \mathbf{D}f(x) \cdot e).$$

Se f é de classe C^r definimos $T^r f = T(T^{r-1} f)$ indutivamente. E $\mathbf{D}f(x) \cdot e$ denota $\mathbf{D}f(x)$ aplicada ao vetor e como aplicação linear.

Teorema 1.2.2. *(Composição de aplicações C^r).Sejam* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ *e* $\mathbf{G}$ *três espaços de Banach. Suponha que* $f; U \subset \mathbf{E} \to V \subset \mathbf{F}$ *e* $g : V \subset \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ *sejam diferenciáveis (resp.* C^r*). Então a composição* $g \circ f : U \to \mathbf{G}$ *é também diferenciável (resp.* C^r*) e*

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf,$$

(resp., $T^r(g \circ f) = T^r g \circ T^r f$*). A fórmula* $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ *é equivalente à regra da cadeia em termos da derivada ususal* $\mathbf{D}$*:*

$$\mathbf{D}(g \circ f)(x) = \mathbf{D}g(f(x)) \circ \mathbf{D}f(x).$$

Uma das consequências da regra da cadeia é a derivada direcional.

Definição 1.2.4. *Seja* $f : U \subset \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *e* $x \in U$*. Dizemos que* f *possui uma derivada na direção do vetor* $e \in \mathbf{E}$ *no ponto* x *se existir*

$$\frac{d}{dt} f(x + te)\Big|_{t=0}.$$

A este elemento de $\mathbf{F}$ *damos o nome de derivada direcional de* f *na direção* e *em* x*.*

Teorema 1.2.3. *Se* f *é diferenciável em* x*, então existe a derivada direcional de* f *em* x *em qualquer direção* $e \in \mathbf{E}$*, e é dada por*

$$\frac{d}{dt} f(x + te)\Big|_{t=0} = \mathbf{D}f(x) \cdot e.$$

Demonstração. Um caminho em $\mathbf{E}$ é uma aplicação $c : I \to \mathbf{E}$ onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Assim, se c é diferenciável, para $t \in I$ temos que $\mathbf{D}c(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbf{E})$, por definição. Lembrando que estamos identificando $L(\mathbb{R}, \mathbf{E})$ com $\mathbf{E}$, pela associação $\mathbf{D}c(t)$ com $\mathbf{D}c(t) \cdot 1$. Seja $\frac{dc}{dt}(t) = \mathbf{D}c(t) \cdot 1$. Vamos considerar $f \circ c$, onde $c : I \to U$. Segue da regra da cadeia que

$$\frac{d}{dt}(f(c(t))) = \mathbf{D}(f \circ c)(t) \cdot 1 = \mathbf{D}f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}.$$

A proposição segue pela escolha do caminho $c(t) = x + te$, onde $x, e \in \mathbf{E}$ e $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. □

Fizemos questão de dar essa demonstração pois, a ideia usada será repetida diversas vezes sempre que for necessário calcular derivada de aplicações entre espaços de Banach. Algumas vezes uma função f que possui todas as derivadas direcionais é chamada de *Gâteaux diferenciável*, enquanto que uma função que é diferenciável no sentido que definimos é chamada de *Fréchet diferenciável*.

Se f é Gâteaux diferenciável e a derivada de Gâteaux pertence a $L(\mathbf{E},\mathbf{F})$; isto é, para cada $x \in U$ existe $\mathbf{G}_x \in L(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tal que

$$\frac{d}{dt}f(x+te)\Big|_{t=0} = G_x e,$$

e se $x \mapsto G_x$ é contínua, dizemos que f é $C^1 - G\hat{a}teaux$. É possivel mostrar que, se f é $C^1 - G\hat{a}teaux$, então f é C^1 e as derivadas coincidem.

O seginte resultado é um exemplo de cáculo de derivada de uma aplicação entre espaços normados.

Lema 1.2.1. *Sejam $M(\mathbb{R}, n)$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f_{ij} : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável para cada $1 \leq i, j \leq n$. Definimos a aplicação $t \mapsto A(t) : I \to M(\mathbb{R}, n)$ onde $A(t) = [F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)]$ é uma matriz tal que*

$$F_j(t) = \begin{pmatrix} f_{1j}(t) \\ f_{2j}(t) \\ \vdots \\ f_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

denota a j-ésima coluna de $A(t)$. Então, escrevendo

$$F'_j(t) = \begin{pmatrix} f'_{1j}(t) \\ f'_{2j}(t) \\ \vdots \\ f'_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det A(t) &= \det[F'_1(f), F_2(t), \ldots, F_n(t)] \\ &+ \det[F_1(f), F'_2(t), \ldots, F_n(t)] \\ &\vdots \\ &+ \det[F_1(f), F_2(t), \ldots, F'_n(t)]. \end{aligned}$$

Demonstração. Por definição,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det A(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\det A(t+h) - \det A(t)}{h} \qquad (1.1) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\det[F_1(t+h), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)]}{h} \right. \\ &\quad \left. \frac{-\det[F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)]}{h} \right). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\det[F_1(t), F_2(t+h), F_3(t+h), \ldots, F_n(t+h)]$ ao denominador do segundo membro na igualdade (1.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det A(t) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\det[F_1(t+h), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)]}{h}\right. \\
&\quad \left.\frac{-\det[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)]}{h}\right) \\
&+ \lim_{h\to 0}\left(\frac{\det[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)] - \det[F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)]}{h}\right).
\end{aligned}$$

Visto que a função det é multilinear e contínua, a primeira parcela do lado direito da última igualdade é

$$\begin{aligned}
&\det\left(\lim_{h\to 0}\frac{F_1(t+h) - F_1(t)}{h}, \lim_{h\to 0} F_2(f+h), \ldots, \lim_{h\to 0} F_n(t+h)\right) \\
&= \det[F_1'(f), F_2(t), \ldots, F_n(t)].
\end{aligned}$$

Agora, somando e subtraindo $\det[F_1(t), F_2(t), F_3(t+h), \ldots, F_n(t+h)]$ ao denominador da segunda parcela, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det A(t) &= \det[F_1'(f), F_2(t), \ldots, F_n(t)] \\
&\quad + \det[F_1(f), F_2'(t), \ldots, F_n(t)] \\
&\quad + \lim_{h\to 0}\left(\frac{\det[F_1(t), F_2(t), F_3(t+h) \ldots, F_n(t+h)]}{h}\right. \\
&\quad \left.\frac{-\det[F_1(t), F_2(t), F_3(t), \ldots, F_n(t)]}{h}\right).
\end{aligned}$$

Prosseguindo dessa maneira obtemos o resultado desejado. □

Nossa discussão até o momento tratou apenas de aplicações de uma variável. Suponha que o espaço $\mathbf{E}$ onde mora o domínio U da aplicação f, possa ser escrito como $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$, ou que a aplicação esteja definida num produto cartesiano $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ de espaços normados. Vamos definir as derivadas parciais de f para o caso de duas variáveis. O caso de n variáveis é feito de modo análogo.

Definição 1.2.5. *Seja $x = (x_1, x_2) \in U \subset \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$. A derivada das aplicações $y_1 \mapsto f(y_1, x_2)$ e $y_2 \mapsto f(x_1, y_2)$, onde $y_1 \in \mathbf{E}_1$ e $y_2 \in \mathbf{E}_2$, se existem, são chamadas de derivadas parciais de f em x e são denotadas por $\mathbf{D}_1 f(x) \in L(\mathbf{E}_1, \mathbf{F})$, $\mathbf{D}_2 f(x) \in L(\mathbf{E}_2, \mathbf{F})$.*

Teorema 1.2.4. *Seja $U \subset \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ um aberto e $f : U \to \mathbf{F}$.*

(i) Se f é diferenciável, então as derivadas parciais existem e são dadas por

$$\mathbf{D}_1 f(x) \cdot e_1 = \mathbf{D}f(x) \cdot (e_1, 0) \quad e \quad \mathbf{D}_2 f(x) \cdot e_2 = \mathbf{D}f(x) \cdot (0, e_2).$$

(ii) Se f é diferenciável então

$$\mathbf{D}f(x) \cdot (e_1, e_2) = \mathbf{D}_1 f(x) \cdot e_1 + \mathbf{D}_2 f(x) \cdot e_2.$$

(iii) f é de classe C^r se $\mathbf{D}_i : U \to L(\mathbf{E}_i, \mathbf{F})$, $i = 1, 2$ existem e são de classe C^{r-1}.

Teorema 1.2.5. *(Fórmula de Taylor) Seja U um subconjunto aberto e convexo de $\mathbf{E}$ e $f : U \subset \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ de classe C^r. Então para quaisquer dois pontos $x, x+h \in U$, tem-se*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f^2(x)}{2!}h^2 + \frac{f^3(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{r-1}(x)}{(r-1)!}h^{r-1} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^{r-1}}{(r-1)!} f^r(x+sh)ds \right) h^r \end{aligned}$$

onde h^k denota $(h, h, \ldots, h) \in \mathbf{E}^k$.

Encerramos esta seção com o enunciado do Teorema das Funções Implícitas para espaços de Banach, resultado que será usado nos dois próximos capítulos.

Teorema 1.2.6. *(Teorema das Funções Implícitas) Sejam $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ três espaços de Banach, $U \subset \mathbf{E}$ e $V \subset \mathbf{F}$ subconjuntos abertos, e $f : U \times V \subset \mathbf{E} \times \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ uma aplicação de classe C^r, $r \geq 1$. Seja (x_0, y_0) um ponto de $U \times V$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e a derivada segunda parcial $\mathbf{D}_2 f(x_0, y_0)$ seja um isomorfismo. Então existem vizinhanças $U_0 \subset U$ de x_0, $V_0 \subset V$ de y_0 e uma aplicação $u : U_0 \to V_0$ de classe C^r, de modo que $u(x_0) = y_0$, $(x, u(x)) \in U \times V$ e $f(x, u(x)) = 0$ para todo $x \in U_0$. Além disso,*

$$u'(x) = -\left(\mathbf{D}_2 f(x, u(x))\right)^{-1} \circ \left(\mathbf{D}_1 f(x, u(x))\right).$$

2 Cálculo Diferencial de Perturbação de Fronteira Regular

Neste capítulo iremos apresentar parte da teoria desenvolvida por D. Henry em [11], onde o referido autor desenvolve uma espécie de cálculo diferencial cuja variável é o domínio de definição do problema de fronteira. A ideia para fazer o domínio variar (digamos com o tempo t), será identificar a variável Ω_t como a imagem $h_t(\Omega)$ de uma curva $t \mapsto h_t(\cdot)$ diferenciável (ou de classe C^k) de mergulhos $h_t(\cdot) \in \mathrm{Diff}^m(\Omega)$, e assim, estudar o comportamento das soluções de um problema de valor de fronteira ao longo da curva $t \mapsto h_t(\cdot)$. Para isso, vamos precisar introduzir uma nova ferramenta, chamada derivada anticonvectiva, e estudar suas propriedades. Isso ficará mais claro a seguir.

2.1 Perturbação de Fronteira

Consideremos o operador linear diferencial matricial formal

$$Lu(x) = \left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \dots \right), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

com a quantidade de termos que se fizer necessário. Dada uma função f de várias variáveis podemos definir um operador diferencial não linear por

$$v(x) = f(x, Lu(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mais precisamente, suponha que $Lu(\cdot)$ assume valores em $\mathbb{R}^p$ e $f(x,\lambda)$ está definida em algum conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Para subconjutos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos F_Ω por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)), \quad x \in \Omega.$$

para funções u suficientemente suaves sobre Ω de modo que $(x, Lu(x)) \in O$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Por exemplo, se f é contínua, Ω é limitado e L envolve derivadas de ordem $\leq m$, o domínio de F_Ω é um subconjunto aberto de $C^m(\Omega)$, (talvez vazio) e F_Ω assume valores em $C^0(\Omega)$.

Seja $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um mergulho, i.e., um difeomorfismo de classe C^m sobre sua imagem $h(\Omega)$. Definimos a aplicação de *composição* (ou o *pull-back*) h^* de h por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)), \quad x \in \Omega$$

onde u é uma função definida em $h(\Omega)$.

Proposição 2.1.1. *$h^* : C^m(h(\Omega)) \longrightarrow C^m(\Omega) : u \longmapsto u \circ h$ é um isomorfismo, com inversa $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$.*

Demonstração. Seja $h : h(\Omega) \longrightarrow \Omega$ um mergulho de ordem m. Pela Regra da Cadeia $h^*u \in C^m(\Omega)$ para todo $u \in C^m(h(\Omega))$, portanto h^* está bem definido. Note que $h^*(u+v) = h^*u + h^*v$, e que além disso, o pull-back h^* é injetivo e sobrejetivo. Observe também que $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$. Sendo assim, basta mostrar que h^* é limitado. De fato, $\| h^*u \|_{C^m(\Omega)} = \| u \circ h \|_{C^m(\Omega)} \leq M \| u \|_{C^m(h(\Omega))}$ para alguma constante $M > 0$, pois $h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Logo h^* é um isomorfismo. $\square$

Dado um mergulho h de um domínio limitado Ω podemos considerar o operador diferencial $F_{h(\Omega)}$ com domínio aberto $Dom_{F_{h(\Omega)}} \subset C^m(h(\Omega))$. A aplicação

$$F_{h(\Omega)} : Dom_{F_{h(\Omega)}} \subset C^m(h(\Omega)) \to C^0(h(\Omega))$$

definida por

$$F_{h(\Omega)}(v)(\cdot) = f(\cdot, Lv(\cdot))$$

é chamada a forma Euleriana do operador diferencial formal não linear $v \mapsto f(\cdot, Lv(\cdot))$ sobre $h(\Omega)$, enquanto

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} : h^* Dom_{F_{h(\Omega)}} \subset C^m(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$$

é chamada a Forma Lagrangiana do mesmo operador diferencial formal não linear. Usamos os mesmos termos para outros espaços de funções. A forma Euleriana é mais natural e simples para se fazer cálculos, enquanto a forma Lagrangiana é mais ultilizada para provar teoremas de existência. Perceba que na forma Euleriana os espaços de funções dependem de h, ou seja, variam de acordo com h. A grande vantagem da forma Lagrangiana é que ela age em espaços de funções que não dependem de h, facilitando o uso de teoremas como o Teorema da Função Implícita. Porém, precisamos mostrar que

$$(u, h) \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u$$

é diferenciável, e além disso, devemos calcular derivadas com respeito a h.

Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conexo, limitado, C^m-regular e f uma função de classe C^r ou analítica em O, temos que a aplicação

$$C^m(\Omega) \times \mathrm{Diff}^m(\Omega) \to C^0(\Omega) : (u, h) \to h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u = f(h(\cdot), h^* L h^{*-1} u)$$

é C^r ou analítica respectivamente em seu domínio de definição, onde

$$\text{Diff}^m(\Omega) = \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n) | h \text{ é injetiva e } 1/|\det h'(x)| \text{ é limitado em } \Omega\}$$

é um subconjunto aberto de $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. De fato, fazendo $v = h^{*-1}u$, $y = h(x)$, $x \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned} h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u(x) &= F_{h(\Omega)} v(h(x)) \\ &= f(y, Lv(y)) = f(h(x), h^* L h^{*-1} u(x)). \end{aligned}$$

Desse modo, vamos analisar $h^* L h^{*-1} u(x)$. Então, primeiro vejamos o que ocorre com $h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} u(x)$. Pela Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} u(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i} (u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} (h^{-1}(h(x))) \frac{\partial (h^{-1})_{ki}}{\partial y_i} (h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} (x) (h_y^{-1})_{ki} (h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n (h_x^{-1})_{ki} (x) \frac{\partial u}{\partial x_k} (x). \end{aligned}$$

Agora, sendo $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ um multi-índice, temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{\alpha_i},$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} h^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha h^{*-1} u(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha v(y) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (h_x^{-1})_{ki} (x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_i} u(x). \end{aligned}$$

Então, a aplicação

$$(h, u) \to (h^* L h^{*-1}) u : \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

é função racional dos coeficientes de (h_x^{-1}) e suas derivadas parciais de ordem menor do que ou igual a m, portanto é analítica no aberto $\text{Diff}^m(\Omega)$ em h. Se adicionalmente f é uma função classe C^r ou analítica em seu domínio O, então

$$(h, u) \to h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u = f(h(\cdot), (h^* L h^{*-1} u)) : \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

é também de classe C^r ou analítica respectivamente em seu domínio. Uma demonstração de que o conjunto $\text{Diff}^m(\Omega)$ é aberto pode ser vista em [18], a qual não faz uso da hipótese de regularidade sobre o domínio.

2.2 Cálculo da derivada na forma Lagrangiana

Sabendo que a aplicação

$$h \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}$$

é derivável, para calcular sua derivada, basta calcular a derivada de Gâteaux, isto é, a derivada com respeito ao parâmetro t ao longo de uma curva de mergulhos $t \to h(t, \cdot)$ de classe C^1. Desse modo, suponha que queremos calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\Omega(t)}(v)(y) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, Lv(y))$$

com $y = h(t, x)$ fixo em $\Omega(t) = h(t, \Omega)$. Para que y permaneça fixo, devemos ter $x = x(t)$, $y = h(t, x(t))$. Desse modo, temos

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} x'(t) \Rightarrow x'(t) = -\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t},$$

ou seja, se $U(x, t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}$, então $x(t)$ deve ser solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -U(x, t)$. Assim, a derivada com relação a t na forma Euleriana com $y = h(t, x)$ fixado, corresponde à *Derivada anticonvectiva* D_t da forma Lagrangiana na região de referência Ω definida por

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x, t) \frac{\partial}{\partial x}, \quad U(x, t) = -\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2.1}$$

A seguir apresentaremos alguns resultados a respeito da derivada anticonvectiva que nos permitem realizar os cálculos de derivação.

Lema 2.2.1. *Suponha que $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são de classe C^1 e para cada t, $h(\cdot, t)$ é um difeomorfismo de classe C^1 sobre sua imagem $\Omega(t)$. Então*

$$D_t(h^*(t)\psi(\cdot, t)) = h^*(t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot, t)$$

onde $h^*(t)$ é o pull-back por $h(\cdot, t)$.

Demonstração. Para cada $1 \leq k, j \leq n$, sejam

$$U = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t} = (U_1, \ldots, U_n),$$

onde

$$U_k = \sum_{j=1}^{n} (h_x)^{-1}_{kj} \partial_t h_j$$

e

$$U\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} U_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Se $y = h(x,t)$, pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
D_t(h^*(t)\psi(\cdot,t))(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - U(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(h(x,t),t) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} U_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\psi(h(x,t),t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\psi(y,t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\frac{\partial h_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\left(\sum_{j=1}^{n} U_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\psi(y,t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\frac{\partial h_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\frac{\partial h_k}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial t}(y,t) = h^*(t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot,t)
\end{aligned}$$

□

Observação 2.2.1. *Seja L um operador diferencial linear com coeficientes constantes. Como consequência imediata do lema acima, vemos que a derivada anticonvectiva D_t comuta com a forma lagrangiana do operador L. De fato, defina $v = h^{*-1}u$, isto é, $u(t,x) = v(t,h(t,x))$.*

$$\begin{aligned}
D_t(h^*Lh^{*-1}u) = D_t(h^*Lv) = h^*L\frac{\partial v}{\partial t} &= (h^*Lh^{*-1})(h^*\frac{\partial v}{\partial t}) \\
&= (h^*Lh^{*-1})D_t(h^*v) \\
&= (h^*Lh^{*-1})D_t(h^*h^{*-1}u) \\
&= (h^*Lh^{*-1})D_t(u).
\end{aligned}$$

O lema acima será de suma importância na demonstração do seguinte:

Teorema 2.2.1. *Suponha que $f(t,y,\lambda)$ seja de classe C^1 em um aberto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, L um operador diferencial com coeficientes constantes de ordem $\le m$ e $Lv(y) \in \mathbb{R}^p$ (no seu domínio) e para conjuntos abertos $Q \subset \mathbb{R}^n$ e funções $v \in C^m(Q)$, seja $F_Q(t)v$ a função*

$$y \longmapsto f(t,y,Lv(y)), \quad y \in Q.$$

Suponha que $t \mapsto h(t,\cdot)$ é uma curva de mergulhos de um conjunto aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, $\Omega(t) = h(t,\Omega)$ e para $|j| \le m$, $|k| \le m+1$, $(t,x) \mapsto \partial_t\partial_x^j h(t,x)$, $\partial_x^k h(t,x)$, $\partial_t\partial_x^j u(t,x)$, $\partial_x^k u(t,x)$ são contínuas em $\mathbb{R}\times\Omega$ próximo de $t=0$, e $h(t,\cdot)^{*-1}u(t,\cdot)$ está no domínio de $F_{\Omega(t)}(t)$. Então nos pontos de Ω,

$$D_t(h^*F_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) = (h^*\dot{F}_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) + (h^*F'_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u)\cdot D_t u$$

onde D_t é a derivada anticonvectiva,

$$\dot{F}_Q v(y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y, Lv(y))$$

e

$$F'_Q(t)v.w(y) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y, Lv(y))Lw(y), \quad y \in Q$$

é a linearização de $v \longmapsto F_Q(t)v$.

Demonstração. Da observação 2.2.1. sabemos que $D_t(h^*Lh^{*-1})(u) = (h^*Lh^{*-1})D_t(u)$. Assim,

$$\begin{aligned} D_t(h^*F_{\Omega(t)}h^{*-1}u) &= D_t(h^*f(t, \cdot .Lv)) \\ &= h^*\frac{\partial}{\partial t}f(t, \cdot, Lv) \\ &= h^*\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot, Lv) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \cdot, Lv)L\frac{\partial v}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

A igualdade em (2.2) se dá devido:

$$\begin{aligned} (h^*F_{\Omega(t)}h^{*-1}u)(x) &= F_{\Omega(t)}(t)v(y) \\ &= f(t, y, Lv(y)) \\ &= h^*f(t, \cdot, Lv(\cdot)). \end{aligned}$$

Daí segue o resultado, pois

$$\begin{aligned} h^*\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot, Lv) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \cdot, Lv)L\frac{\partial v}{\partial t}\right) &= h^*\left(\dot{F}_{\Omega(t)}(t)v + F'_{\Omega(t)}(t)v.\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &= \left(h^*\dot{F}_{\Omega(t)}(t)h^{*-1}(u)\right) + \left(h^*F'_{\Omega(t)}(t)h^{*-1}(u)\right)D_t u. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.1. *Suponha que $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha$ seja um operador diferencial linear que não depende explicitamente de t e $h(t, x) = x + tV(x) + o(x)$ numa vizinhança de $t = 0$ e $x \in \Omega$. Então, pelo Teorema anterior temos*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h^*Ah^{*-1}u)\Big|_{t=0} &= D_t(h^*Ah^{*-1}u)\Big|_{t=0} + h_x^{-1}h_t\nabla(h^*Ah^{*-1}u)\Big|_{t=0} \\ &= A(\frac{\partial u}{\partial t} - V.\nabla u) + V.\nabla(Au) \\ &= A\frac{\partial u}{\partial t} + [V.\nabla, A]u \end{aligned}$$

visto que $\frac{\partial}{\partial t}A = 0$. $[V.\nabla, A](\cdot)$ é chamado comutador e ainda é um operador de ordem m embora $V.\nabla A$ e $AV.\nabla$ sejam operadores de ordem $m+1$. Portanto, pode ser calculado em funções de classe C^m.

2.2.1 Autovalores simples do Problema de Dirichlet para o Laplaciano

Faremos uso da teoria apresentada anteriormente para mostrar a dependência contínua dos autovalores e autofunções do problema de Dirichlet para o operador de Laplace definido numa região de classe C^2, e também iremos calcular a primeira derivada do autovalor, para o caso em que o autovalor λ_0 é simples. Para isso, iremos usar o Teorema das Funções Implícitas. Em [11] D. Henry dedica um capítulo inteiro para tratar problemas similares usando o teorema supracitado.

Definição 2.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^2. Dizemos que λ_0 é um autovalor do Problema de Dirichlet para o operador de Laplace*

$$u \mapsto \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

se existe solução não nula u_0 de

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ \ em \ \Omega, \quad u = 0 \ \ em \ \partial\Omega.$$

Definição 2.2.2. *Chamamos λ_0 de autovalor simples do problema de Dirichlet acima se $dimker(\Delta + \lambda_0) = 1$.*

Estamos olhando para $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ com a norma de $L^2(\Omega)$.

Seja u_0 a autofunção correspondente a λ_0 com $\int_\Omega u_0^2 = 1$. Vamos provar que para todo $h \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ em alguma vizinhança de classe C^2 de i_Ω em Diff^2, $h(\Omega)$ também é uma região de classe C^2 e existe um único autovalor simples λ próximo de λ_0, além disso, $h \mapsto \lambda(h(\Omega))$ é analítica, e sua derivada em i_Ω é

$$\dot{h} \mapsto -\int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N_\Omega \left(\frac{\partial u_0}{\partial N_\Omega} \right)^2 .$$

Vamos trabalhar nos espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. Também é importante dizer que usaremos o fato do operador laplaciano Δ ser (densamente) autoadjunto, sobre tal afirmação há uma demonstração em [13].

Defina $F : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ por

$$F(u, \lambda, h) = \left(h^*(\Delta + \lambda) h^{*-1} u, \int_\Omega u^2 \det h' \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(u_0, \lambda_0, i_\Omega) &= \left(i_\Omega^*(\Delta + \lambda_0) i_\Omega^{*-1} u_0, \int_\Omega u_0^2 \det i'_\Omega \right) \\ &= \left((\Delta + \lambda_0) u_0, \int_\Omega u_0^2 \right) = (0, 1) \end{aligned}$$

e sempre que $F(u,\lambda,h)=(0,1)$, a função $v=h^{*-1}u:h(\Omega)\to\mathbb{R}$ satisfaz

$$\Delta v+\lambda v=0 \text{ em } h(\Omega), \quad v=0 \text{ em } \partial h(\Omega), \quad \text{e} \int_{h(\Omega)} v^2=1.$$

Note que F é analítica já que cada uma de suas coordenadas é analítica. Vamos calcular a derivada

$$\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega):(\dot{u},\dot{\lambda})\mapsto\left((\Delta+\lambda_0)\dot{u}+\dot{\lambda}u_0, 2\int_\Omega u_0\dot{u}\right)$$

de F e mostrar q é um isomorfismo.

Para calcular a derivada $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega)$, tomemos uma curva $t\mapsto(u(t,\cdot),\lambda(t),i_\Omega)$ de classe C^1 no domínio de F passando por (u_0,λ_0,i_Ω) no instante $t=0$. Daí temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(F(u(t,\cdot),\lambda(t),i_\Omega)\right)\Big|_{t=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left((\Delta+\lambda(t))u(t,\cdot),\int_\Omega u^2(t,\cdot)\det i'_\Omega\right)\Big|_{t=0}\\
&= \left(\Delta\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)+\frac{\partial\lambda}{\partial t}(t)u(t,\cdot)+\lambda(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot),\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}u^2(t,\cdot)\right)\Big|_{t=0}\\
&= \left(\Delta\dot{u}+\dot{\lambda}u_0+\lambda_0\dot{u},2\int_\Omega u_0\dot{u}\right)\\
&= \left((\Delta+\lambda_0)\dot{u}+\dot{\lambda}u_0,2\int_\Omega u_0\dot{u}\right),
\end{aligned}$$

onde $\dot{u}=\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)\Big|_{t=0}$ e $\dot{\lambda}=\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t)\Big|_{t=0}$. Agora, vamos mostrar que a derivada $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega)$ é um isomorfismo. Primeiramente vejamos que $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega)$ é injetiva. Com efeito,

$$\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda})=(0,0)\iff(\Delta+\lambda_0)\dot{u}+\dot{\lambda}u_0=0 \text{ e } 2\int_\Omega u_0\dot{u}=0,$$

daí temos $u_0(\Delta+\lambda_0)\dot{u}+\dot{\lambda}u_0^2=0$ que implica

$$\dot{\lambda}=\dot{\lambda}\int_\Omega u_0^2=-\int_\Omega u_0(\Delta+\lambda_0)\dot{u}=-\int_\Omega\dot{u}(\Delta+\lambda_0)u_0=0.$$

Segue que $(\Delta+\lambda_0)\dot{u}=0$ com $\int_\Omega u_0\dot{u}=0$, ou seja, $(\Delta+\lambda_0)\dot{u}=0$ e $\dot{u}\perp u_0$. Como λ_0 é autovalor simples associado a u_0, temos que $\dot{u}\equiv 0$.

Agora vamos verificar a sobrejetividade de $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega)$. Visto que $\Delta: H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ é autoadjunto e λ_0 é um autovalor simples de Δ, temos que dado qualquer $(f,\alpha)\in L^2(\Omega)\times\mathbb{R}$, existe solução $(\dot{u},\dot{\lambda})$ de

$$\begin{aligned}
(\Delta+\lambda_0)\dot{u}+\dot{\lambda}u_0=f &\iff (\Delta+\lambda_0)\dot{u}=f-\dot{\lambda}u_0\\
&\iff (f-\dot{\lambda}u_0)\perp u_0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$0 = \int_\Omega u_0(f - \dot\lambda u_0) = \int_\Omega u_0 f - \dot\lambda \int_\Omega u_0^2 = \int_\Omega u_0 f - \dot\lambda,$$

ou seja, se

$$\dot\lambda = \int_\Omega u_0 f.$$

Nesse caso, as soluções são dadas por

$$\dot u = \beta u_0 + w,$$

onde $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é a única solução de $(\Delta + \lambda_0)w = f - \dot\lambda u_0$ satisfazendo $w \perp u_0$. Como queremos

$$\alpha = 2\int_\Omega u_0 \dot u = 2\int_\Omega u_0(\beta u_0 + w) = 2\beta,$$

temos $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Portanto,

$$(\dot u, \dot\lambda) = (\frac{\alpha}{2}u_0 + w, \int_\Omega u_0 f)$$

é a única solução de

$$(\Delta + \lambda_0)\dot u + \dot\lambda u_0 = f \text{ e } 2\int_\Omega u_0 f = \alpha.$$

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0, \lambda_0, i_\Omega)(\dot u, \dot\lambda) = (f, \alpha).$$

Isto é, $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$ é uma bijeção contínua entre espaços de Banach, e pelo Teorema da Aplicação Aberta, é um isomorfismo. Então, pelo Teorema das Funções Implícitas existe uma vizinhança aberta U de i_Ω em $\mathrm{Diff}^2(\Omega)$ e funções analíticas $h \mapsto u(h)$, $h \mapsto \lambda(h)$ de U em $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ e $\mathbb{R}$ respectivamente, tais que $F(u(h), \lambda(h), h) = (0, 1)$ para todo $h \in U$.

Desse modo, tomemos uma curva analítica $t \mapsto h(t) = h_t$ em $\mathrm{Diff}^2(\Omega)$ passando por i_Ω em $t = 0$, e com isso obtemos funções analíticas $t \mapsto \lambda(h_t) = \lambda(t)$, $t \mapsto u(h_t) = u(t)$ numa vizinhança I de $0 \in \mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ e $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ respectivamente, tais que $\lambda(0) = \lambda_0$ e $u(0) = u_0$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} h_t^*(\Delta + \lambda(t))h_t^{*-1}u(t) &= 0 \text{ em } \Omega \\ u(t) &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

e

$$\int_\Omega u(t)^2 \det(h_t)_x = 1$$

para todo $t \in I$. Sendo assim, podemos calcular a derivada $\frac{d\lambda}{dt}(0)$ da função analítica $\lambda(t)$. Para isto, aplicamos a derivada anticonvectiva à igualdade 2.3 e obtemos,

$$\begin{aligned}
0 &= D_t(h_t^*(\Delta + \lambda(t))h_t^{*-1}u(t))|_{t=0} \\
&= D_t(h_t^*\Delta h_t^{*-1}u(t) + h_t^*\lambda(t)h_t^{*-1}u(t))|_{t=0} \\
&= D_t(h_t^*\Delta h_t^{*-1}u(t))|_{t=0} + D_t(h_t^*\lambda(t)h_t^{*-1}u(t))|_{t=0} \\
&= \Delta D_t(u(t))|_{t=0} + D_t(\lambda(t)u(t))|_{t=0} \\
&= \Delta(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0) + (\dot{\lambda}u_0 + \lambda_0\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0\lambda_0) \\
&= (\Delta + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0) + \dot{\lambda}u_0 \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

onde $\dot{u} = \frac{d}{dt}u(t)|_{t=0}$, $\dot{\lambda} = \frac{d}{dt}\lambda(t)|_{t=0}$ e $\dot{h} = \frac{d}{dt}h(t)|_{t=0}$.

Multiplicando (2.4) por u_0 e integrando sobre Ω em ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \int_\Omega \dot{\lambda}u_0^2 \\
&= \int_\Omega -u_0(\Delta + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0) \\
&= \int_\Omega \Big[(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0)(\Delta + \lambda_0)u_0 - u_0(\Delta + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0)\Big] \\
&= \int_\Omega (\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0)\Delta(u_0) - u_0\Delta(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\dot{u} - \dot{h}\cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N})\frac{\partial u_0}{\partial N} - u_0\frac{\partial}{\partial N}(\dot{u} - \dot{h}\cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\dot{u}\frac{\partial u_0}{\partial N} - u_0\frac{\partial \dot{u}}{\partial N}) - \dot{h}\cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N} + u_0\frac{\partial}{\partial N}(-\dot{h}\cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\dot{u}\frac{\partial u_0}{\partial N} - u_0\frac{\partial \dot{u}}{\partial N}) + \frac{\partial}{\partial N}(-u_0\dot{h}\cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\dot{u}\frac{\partial u_0}{\partial N} - u_0\frac{\partial \dot{u}}{\partial N}) \\
&= -\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot\nabla u_0\frac{\partial u_0}{\partial N} \\
&= -\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N} \\
&= -\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\left(\frac{\partial u_0}{\partial N}\right)^2.
\end{aligned}$$

Daí resulta que numa vizinhança de 0 em $\mathbb{R}$

$$\lambda(t) = \lambda_0 - t\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\left(\frac{\partial u_0}{\partial N}\right)^2 + \sigma(t^2).$$

3 Perturbação de Fronteira Não-regular

Este capítulo é dividido em duas partes, onde a primiera é voltada à estrutura a ser desenvolvida para o estudo mencionado na introdução, que basicamente consiste em obter uma generalização do Omega lema, e a segunda é dedicada ao uso da primeira parte para provar os principais resultados deste capítulo a respeito da diferenciabilidade dos autovalores e autofunções como funções do domínio e dos coeficientes do operador elíptico $\mathcal{L}$.

3.1 Uma estrutura adequada e um Lema do tipo Omega

Nesta seção, desenvolve-se uma estrutura para o estudo da diferenciabilidade de autovalores e autofunções de operadores elípticos com respeito a perturbações de domínios não-suaves e coeficientes de classe C^r, e também apresentamos uma ferramenta essencial bem como sua demonstração, denominada Omega Lema Generalizado. Com essa ferramenta seremos capazes de provar que determinadas aplicações são de classe C^r, e consequentemente poderemos calcular suas derivadas.

Seja Ω_0 um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Denote por X o espaço de Banach formado pelas aplicações $\varphi : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 que podem ser estendidas continuamente até o bordo de Ω_0 bem como suas derivadas de primeira ordem, munido com a norma usual

$$\|\varphi\| = \max_{x \in \overline{\Omega}_0} \{\|\varphi(x)\|, \|\mathbf{D}\varphi(x)\|\}.$$

Considere o seguinte problema linear de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\Omega,\mathcal{C}} u &= \lambda u \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $L_{\Omega,C}$ representa um operador diferecial linear elíptico na forma 3.2, com coeficientes a_{ij}, b_i e c em $C^r(\overline{U})$, onde $r \geq 1$ e U é um subconjunto fixado, aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, tal que $\overline{\Omega} \subset U$. O símbolo $\mathcal{C}$ representa a N-upla de coeficientes $\mathcal{C} = (a_{ij}, b_i, c)$ com $N = n^2 + n + 1$.

Definição 3.1.1. *Dizemos que um operador diferencial da forma*

$$\mathcal{L}_{\Omega,\mathcal{C}} = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i - c(x) \tag{3.2}$$

é uniformemente elíptico se existir uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

para quase todo ponto $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Seja $E_0(\overline{\Omega}_0)$ a coleção de todas as aplicações $\varphi \in X$ tais que $\varphi(\overline{\Omega}_0) \subset U$ e $\mathbf{D}\varphi(x) \in Gl_n$ para cada $x \in \overline{\Omega}_0$. Onde Gl_n denota o espaço das matrizes invertíveis de ordem n. Note que $E_0(\overline{\Omega}_0)$ é um subconjunto aberto de X e a inclusão 1_{Ω_0} pertence a $E_0(\overline{\Omega}_0)$. Para um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, satisfazendo $\overline{\Omega} \subset U$ e coeficientes $\mathcal{C} \in C^r(\overline{U})^N$ de $\mathcal{L}_{\Omega,\mathcal{C}}$, denotamos por $\Lambda(\mathcal{L}_{\Omega,\mathcal{C}}) \subset \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ o conjunto dos pares ordenados (λ, u) satisfazendo 3.1 com $u \neq 0$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $\mathcal{L}_{\Omega,\mathcal{C}}$ como acima. Considere agora a forma bilinear $B_{\Omega,C} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$B_{\Omega,\mathcal{C}}(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j v) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i uv + c(x)uvdx. \tag{3.3}$$

Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, podemos definir um funcional linear $B_{\Omega,\mathcal{C}}(u,\cdot) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dessa forma, definimos o operador linear canônico $T_{\Omega,\mathcal{C}} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, induzido por $B_{\Omega,\mathcal{C}}$, tal que $T_{\Omega,\mathcal{C}}(u)(v) = B_{\Omega,\mathcal{C}}(u,v)$. Está claro que $B_{\Omega,\mathcal{C}}$ e $T_{\Omega,\mathcal{C}}$ estão bem definidos e são contínuos.

Para $\varphi \in E(\overline{\Omega}_0)$, vamos considear a seguinte forma bilinear $B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u,v) = \int_{\Omega_0} \sum_{k,l=1}^{n} (a^{\varphi}_{kl}(x)\partial_k u \partial_l v) + \sum_{k=1}^{n} b^{\varphi}_k(x)\partial_k uv + c^{\varphi}(x)uvdx \tag{3.4}$$

onde

$$a^{\varphi}_{kl}(x) = J\varphi(x) \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(\varphi(x))\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi(x))\mathrm{inv}_{lj}(\mathbf{D}\varphi(x))\right),$$

$$b^{\varphi}_k(x) = J\varphi(x) \sum_{i=1}^{n} b_i(\varphi(x))\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi(x)),$$

$$c^{\varphi}(x) = J\varphi(x)c(\varphi(x)),$$

$J\varphi(x)$ denota o determinante da matriz Jacobiana da aplicação φ no ponto x e $\mathrm{inv}_{ij}(M)$ é a entrada (i,j) da matriz inversa de M.

Note que a forma bilinear $B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}$ é contínua e sua definição não exige que a aplicação φ seja injetiva. Também vamos denotar por $T^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}} : H^1_0(\Omega_0) \to H^{-1}(\Omega_0)$ o operador linear contínuo $T^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u)(v) = B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u,v)$.

Para uma aplicação injetiva φ, vamos denotar por $\varphi^* u : \varphi(\Omega_0) \to \mathbb{R}$ a função $\varphi^* u(y) = (u \circ \varphi^{-1})(y) = u(\varphi^{-1}(y))$. Nossa motivação para a definição da forma bilinear acima, se dá devido a seguinte igualdade

$$B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u,v) = B_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}}(u \circ \varphi^{-1}, v \circ \varphi^{-1}),$$

que é válida para qualquer função injetiva φ e $u, v \in H^1_0(\Omega)$, graças ao seguinte resultado:

Lema 3.1.1. *Suponha que $\varphi \in E(\overline{\Omega}_0)$ seja injetiva. Então o operador linear φ^* agindo sobre funções suaves estende-se por densidade para um isomorfismo $\varphi^* : H^1_0(\Omega_0) \to H^1_0(\varphi(\Omega_0))$.*

Demonstração. Para uma função $u \in C^\infty_0(\Omega_0)$, temos $\varphi^* u \in C^1_0(\varphi(\Omega_0)) \subset H^1_0(\varphi(\Omega_0))$. Então, podemos estimar

$$\|\varphi^* u\|^2_{L^2(\varphi(\Omega_0))} = \int_{\varphi(\Omega_0)} u(\varphi^{-1}(y))^2 dy = \int_{\Omega_0} u(x)^2 J\varphi(x) dx \leq \max_{\overline{\Omega}_0} |J\varphi| \|u\|^2_{L^2(\Omega_0)}.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla(\varphi^* u)(y) &= \nabla(u \circ \varphi^{-1})(y) \\
&= \nabla u(\varphi^{-1}(y)) \cdot \mathbf{D}\varphi^{-1}(y) \\
&= \varphi^*(\nabla u)(y) \cdot \mathbf{D}\varphi^{-1}(y)
\end{aligned}$$

que nos dá

$$\begin{aligned}
\|\varphi^* u\|^2_{H^1(\varphi(\Omega_0))} &= \|\varphi^* u\|^2_{L^2(\varphi(\Omega_0))} + \|\varphi^*(\nabla u) \cdot \mathbf{D}\varphi^{-1}\|^2_{L^2(\varphi(\Omega_0))} \\
&\leq \max_{\overline{\Omega}_0} |J\varphi| \|u\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \max_{\overline{\Omega}_0} |J\varphi| \max_{\varphi(\Omega_0)} \|\mathbf{D}\varphi^{-1}\| \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_0)} \\
&\leq M_\varphi \|u\|^2_{H^1(\Omega_0)}
\end{aligned}$$

onde $M_\varphi \geq \max_{\overline{\Omega}_0} |J\varphi|, \max_{\overline{\Omega}_0} |J\varphi| \max_{\varphi(\Omega_0)} \|\mathbf{D}\varphi^{-1}\|$.

Visto que $C^\infty_0(\Omega_0)$ é denso em $H^1_0(\Omega_0)$, φ^* estende-se por densidade a um operador linear definido em $H^1_0(\Omega_0)$ para $H^1_0(\varphi(\Omega_0))$, com inversa $(\varphi^{-1})^*$ já que $\varphi^{-1} \in E(\varphi(\Omega_0))$. Um cálculo análogo ao anterior mostra que $(\varphi^{-1})^* : H^1_0(\varphi(\Omega_0)) \to H^1_0(\Omega_0)$ também é contínuo. $\square$

De forma semelhante, vamos considerar $J^{\varphi}_{\Omega_0} : H^1_0(\Omega_0) \times H^1_0(\Omega_0) \to \mathbb{R}$, a forma bilinear, dada por

$$J^{\varphi}_{\Omega_0}(u,v) = \int_{\Omega_0} J\varphi(x)u(x)v(x)dx$$

que induz o operador linear $I^{\varphi}_{\Omega_0} : H^1_0(\Omega_0) \to H^{-1}(\Omega_0)$ definido por $I^{\varphi}_{\Omega_0}(u)(v) = J^{\varphi}_{\Omega_0}(u,v)$.

Agora, voltamos nossa atenção para as funções a^{φ}_{kl}, b^{φ}_k e c^{φ} introduzidas na definição de $B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}$. Note que essas funções podem ser vistas como

$$a^{\varphi}_{kl}(x) = A_{kl}(a_{ij}, \varphi(x), \mathbf{D}\varphi(x)) \quad b^{\varphi}_k(x) = B_k(b_i, \varphi(x), \mathbf{D}\varphi(x)), \quad c^{\varphi} = C(c, \varphi(x), \mathbf{D}\varphi(x)),$$

onde cada uma das funções está definida em $C^r(\overline{U})^N \times U \times Gln$. A proposição abaixo é essencial no que se segue. Conforme referido na introdução, a sua prova baseia-se num Omega Lema generalizado, que é uma versão mais forte do Omega Lema clássico 0.0.1.

Proposição 3.1.1. *As funções compostas* $(A_{kl})_*$, $(B_k)_*$, $(C)_* : C^r(\overline{U})^N \times C^0(\overline{\Omega}_0, U \times Gln) \to C^0(\overline{\Omega}_0)$ *definidas por*

$$(A_{kl})_*(\mathcal{C},\psi)(x) = A_{kl}(a_{ij}, \psi(x)) = J\varphi(x) \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(\varphi(x)) inv_{ki}(\mathbf{D}\varphi(x)) inv_{lj}(\mathbf{D}\varphi(x)) \right),$$

$$(B_k)_*(\mathcal{C},\psi)(x) = B_k(b_i, \psi(x)) = J\varphi(x) \sum_{i=1}^{n} b_i(\varphi(x)) inv_{ki}(\mathbf{D}\varphi(x))$$

e

$$(C)_*(\mathcal{C},\psi)(x) = C(c, \psi(x)) = J\varphi(x)c(\varphi(x))$$

são de classe C^r.

Na afirmação do nosso lema principal, usamos a notação $C^0(\overline{\Omega}, U)$ referente ao aberto de aplicações $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tais que $\varphi(\overline{\Omega}) \subset U$.

A fim de tornar mais clara a prova por indução do Omega Lema Generalizado, primeiro provamos o seguinte:

Lema 3.1.2. *Seja* $\mathbf{E}$ *um espaço de Banach real. A função*

$$g_{r,\mathbf{E}} : C^0(\overline{\Omega}, U) \to L(C^r(U, \mathbf{E}), C^0(\overline{\Omega}, \mathbf{E})) := Z_{r,\mathbf{E}}$$

definida por $g_{r,\mathbf{E}}(\varphi)(a)(x) = a(\varphi(x))$ *é de classe* C^{r-1}.

Demonstração. A prova segue por indução em r. Para $r = 1$ fixamos $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}, U)$ e consideramos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $B(\varphi(x), \epsilon) \subset U$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Para qualquer $\overline{\varphi} \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ com $\|\overline{\varphi}\|_{C^0} < \epsilon$ e $a \in C^r(\overline{U}, \mathbf{E})$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$
\begin{aligned}
(g_{1,\mathbf{E}}(\varphi + \overline{\varphi}) - g_{1,\mathbf{E}}(\varphi))(a)(x) &= a(\varphi(x) + \overline{\varphi}(x)) - a(\varphi(x)) \\
&= \left(\int_0^1 \mathbf{D}a(\varphi(x) + t\overline{\varphi}(x))dt \right)(\overline{\varphi}(x))
\end{aligned}
$$

Então,

$$\|(g_{1,\mathbf{E}}(\varphi + \overline{\varphi}) - g_{1,\mathbf{E}}(\varphi))(a)\|_{C^0} \leq \|a\|_{C^1} \|\overline{\varphi}\|_{C^0},$$

de modo que

$$\|(g_{1,\mathbf{E}}(\varphi + \overline{\varphi}) - g_{1,\mathbf{E}}(\varphi))\|_Z \leq \|\overline{\varphi}\|_{C^0},$$

e assim $g_{1,\mathbf{E}}$ é lipschtiziana, portanto de classe C^0.

Para $r = 2$, denote $h(\varphi)(\overline{\varphi})(a)(x) := \mathbf{D}a(\varphi(x))(\overline{\varphi}(x))$ e

$$r(\varphi, \overline{\varphi})(a)(x) := \left(\int_0^1 \int_0^t \mathbf{D}^2 a(\varphi(x) + s\overline{\varphi}(x))dsdt \right)(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x)).$$

Como $a \in C^2(\overline{U}, V)$, pelo Teorema de Taylor podemos escrever

$$
\begin{aligned}
a(\varphi(x) + \overline{\varphi}(x)) &= a(\varphi(x)) + \mathbf{D}a(\varphi(x))(\overline{\varphi}(x)) + \\
&+ \left(\int_0^1 (1-s)\mathbf{D}^2 a(\varphi(x) + s\overline{\varphi}(x))ds \right)(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x)),
\end{aligned}
$$

de onde obtemos

$$g_{2,\mathbf{E}}(\varphi + \overline{\varphi})(a)(x) = g_{2,\mathbf{E}}(\varphi)(a)(x) + h(\varphi)(\overline{\varphi})(a)(x) + r(\varphi, \overline{\varphi})(a)(x).$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
r(\varphi, \overline{\varphi})(a)(x) &= \left(\int_0^1 \int_0^t \mathbf{D}^2 a(\varphi(x) + s\overline{\varphi}(x))dsdt \right)(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x)) \\
&= \left(\int_0^1 \int_s^1 \mathbf{D}^2 a(\varphi(x) + s\overline{\varphi}(x))dtds \right)(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x)) \\
&= \left(\int_0^1 (1-s)\mathbf{D}^2 a(\varphi(x) + s\overline{\varphi}(x))ds \right)(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x)).
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
\|r(\varphi,\overline{\varphi})(a)\| &= \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|r(\varphi,\overline{\varphi})(a)(x)\| \\
&= \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left\| \left(\int_0^1\int_0^t \mathbf{D}^2 a(\varphi(x)+s\overline{\varphi}(x))dsdt\right)(\overline{\varphi}(x),\overline{\varphi}(x))\right\| \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left(\int_0^1\int_0^t \|\mathbf{D}^2 a(\varphi(x)+s\overline{\varphi}(x))\|dsdt\right)\|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2 \\
&\leq \sup_{x\in\overline{U}} \left(\int_0^1\int_0^t \|\mathbf{D}^2 a(x)\|dsdt\right)\|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2 \\
&= \sup_{x\in\overline{U}} \left(\int_0^1 t\|\mathbf{D}^2 a(x)\|dt\right)\|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\mathbf{D}^2 a\|_{C^0}\|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2 \leq \|a\|_{C^2}\|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2.
\end{aligned}
$$

Observe também que, $h(\varphi)(\overline{\varphi})(a) \in C^0(\overline{\Omega},\mathbf{E})$ e $h(\varphi)(\overline{\varphi}) \in Z_{2,\mathbf{E}}$ é linear em $\overline{\varphi}$ e a parte restante é limitada por

$$\|r(\varphi,\overline{\varphi})(a)\| \leq \|a\|_{C^2}\|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2,$$

visto que $r(\varphi,\overline{\varphi}) \in Z_{2,\mathbf{E}}$ e $\|r(\varphi,\overline{\varphi})\|_Z \leq \|\overline{\varphi}\|_{C^0}^2$.

O passo indutivo mostrará que $h(\varphi)$ é um operador linear limitado, e que h é contínuo. Para $r \geq 2$, suponha que $g_{r,\mathbf{E}}$ possui derivada $h(\varphi) : C^0(\overline{\Omega},U) \to Z_{r,\mathbf{E}}$ em φ (não necessariamente limitada como operador). Denote por $W := L(\mathbb{R}^n,\mathbf{E})$ e considere os seguintes operadores lineares limitados

$$d : C^r(\overline{U},\mathbf{E}) \to C^{r-1}(\overline{U},W),$$

$$e : C^0(\overline{\Omega},W) \to L(C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n),C^0(\overline{\Omega},\mathbf{E}))$$

definidos por $d(a)(x) = \mathbf{D}a(x)$ e $e(\psi)(\varphi)(x) = \psi(x)(\varphi(x))$. A partir destes operadores, definimos o *pull-back* e o *push-forward*

$$d^* : L(C^{r-1}(\overline{U},W),C^0(\overline{\Omega},W)) \to L(C^r(\overline{U},\mathbf{E}),C^0(\overline{\Omega},W)),$$

$$e_* : L(C^r(\overline{U},\mathbf{E}),C^0(\overline{\Omega},W)) \to L(C^r(\overline{U},\mathbf{E}),L(C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n),C^0(\overline{\Omega},\mathbf{E})))$$

onde, $d^*T = T\circ d$ e $e_*S = e\circ S$.

Considere também o isomorfismo canônico $\eta : L(X,L(Y,Z)) \to L(Y,L(X,Z))$ definido por $\eta(P)(y)(x) = P(x)(y)$. Tomando $X = C^r(\overline{U},\mathbf{E})$, $Y = C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e $Z = C^0(\overline{\Omega},\mathbf{E})$ na definição acima, vamos verificar que $h(\varphi) = \mathbf{D}g_{r,\mathbf{E}}(\varphi) = \eta(e_*(d^*(g_{r-1,W}(\varphi))))$.

De fato, seja $\alpha(t) = \alpha_t$ uma curva analítica definida de uma vizinhança aberta de 0 em $C^0(\overline{\Omega}, U)$ tal que $\alpha(0) = \varphi$ e $\alpha'(0) = \overline{\varphi}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}g_{r,\mathbf{E}}(\varphi)(\overline{\varphi})(a)(x) &= \frac{d}{dt}(g_{r,\mathbf{E}}(\alpha_t(a)(x))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(a(\alpha_t(x))\right)|_{t=0} \\
&= \mathbf{D}a(\varphi(x))(\overline{\varphi}(x)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\eta(e_*(d^*(g_{r-1,W}(\varphi))))(\overline{\varphi})(a)(x) &= e_*(d^*(g_{r-1,W}(\varphi))))(a)(\overline{\varphi})(x) \\
&= e_*(g_{r,\mathbf{E}}(\varphi) \circ d)(a)(\overline{\varphi})(x) \\
&= e(g_{r,\mathbf{E}}(\varphi)(\mathbf{D}a)(\overline{\varphi})(x) \\
&= e(\mathbf{D}a(\varphi))(\overline{\varphi})(x) \\
&= \mathbf{D}a(\varphi(x))(\overline{\varphi}(x)) \\
&= \mathbf{D}g_{r,\mathbf{E}}(\varphi)(\overline{\varphi})(a)(x).
\end{aligned}$$

Como d^*, e_* e η são operadores lineares limitados, segue que $h(\varphi)$ é limitado, h é contínuo, e assim $g_{r,\mathbf{E}}$ é de classe C^{r-1}. □

Proposição 3.1.2. *(Omega Lema Generalizado) Seja* $\mathbf{E}$ *um espaço de Banach real. A função composta*

$$c_{r,\mathbf{E}} : C^r(\overline{U}, \mathbf{E}) \times C^0(\overline{\Omega}, U) \to C^0(\overline{\Omega}, \mathbf{E})$$

definida por $c_{r,\mathbf{E}}(a, \varphi)(x) = a(\varphi(x))$ *é de classe* C^r.

Demonstração. Procedendo novamente por indução, devemos mostrar que para $r = 0$, a função $c_{r,\mathbf{E}}$ é contínua. Com efeito, fixe $(a, \varphi) \in C^r(\overline{U}, \mathbf{E}) \times C^0(\overline{\Omega}, U)$ e observe que tais funções são ambas uniformemente contínuas, devido serem funções contínuas definidas em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Desse modo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $u, v \in \overline{U}$ com $\|u - v\| < \delta$, então $\|a(u) - a(v)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Assim,

$$\|a(\varphi(x) + \overline{\varphi}(x)) - a(\varphi(x))\| < \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $\|\varphi(x) + \overline{\varphi}(x) - \varphi(x)\| = \|\overline{\varphi}(x)\| < \delta$ e $\overline{\varphi}(x) \in \overline{U}$.

Tome $\overline{\varphi} \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ de modo que $\|\overline{\varphi}\|_{C^0}$ seja suficientemente pequeno, tal que $\varphi(x) + \overline{\varphi}(x) \in \overline{U}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\|\overline{\varphi}\|_{C^0} < \delta$, e $\overline{a} \in C^r(\overline{U}, \mathbf{E})$ com $\|\overline{a}\|_{C^r} < \frac{\epsilon}{2}$.

Escolha $\delta' = \frac{\epsilon}{2} + \delta$. Assim,

$$\|(a+\overline{a}, \varphi+\overline{\varphi}) - (a,\varphi)\| = \|\overline{a}\| + \|\overline{\varphi}\| < \delta',$$

implica que

$$\begin{aligned}
\|c_{r,\mathbf{E}}(a+\overline{a}, \varphi+\overline{\varphi}) - c_{r,\mathbf{E}}(a,\varphi)\|_{C^0} &= \|a_*(\varphi+\overline{\varphi}) - a_*(\varphi) + \overline{a}_*(\varphi+\overline{\varphi})\| \\
&\leq \|a_*(\varphi+\overline{\varphi}) - a_*(\varphi)\| + \|\overline{a}_*(\varphi+\overline{\varphi})\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $c_{r,\mathbf{E}}$ é uniformemente contínua.

Para $r \geq 1$, o Omega Lema clássico afirma que $c_{r,\mathbf{E}}$ é diferenciável com respeito a φ. Mas como $c_{r,\mathbf{E}}$ é linear e contínua em a, então é também diferenciável com respeito a a. Além disso, suas derivadas parciais são

$$\mathbf{D}_a c_{r,\mathbf{E}}(a,\varphi)(\overline{a})(x) = g_{r,\mathbf{E}}(\varphi)(\overline{a})(x),$$

$$\mathbf{D}_\varphi c_{r,\mathbf{E}}(a,\varphi)(\overline{\varphi}(x) = e(c_{r-1,W}(d(a),\varphi))(\overline{\varphi}(x),$$

onde d, e e $g_{r,\mathbf{E}}$ são como no Lema anterior. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_a c_{r,\mathbf{E}}(a,\varphi)(\overline{a})(x) &= \frac{d}{dt}\left(c_{r,\mathbf{E}}(\alpha_t,\varphi)(x)\right)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\alpha_t(\varphi(x)\right)|_{t=0} \\
&= \overline{a}(\varphi(x)) = g_{r,\mathbf{E}}(\varphi)(\overline{a})(x),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_\varphi c_{r,\mathbf{E}}(a,\varphi)(\overline{\varphi}(x) &= \frac{d}{dt}\left(c_{r,\mathbf{E}}(a,\gamma_t)(x)\right)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(a(\gamma_t(x))\right)|_{t=0} \\
&= \mathbf{D}a(\varphi(x))(\overline{\varphi}(x)) \\
&= e(c_{r-1,W}(d(a),\varphi))(\overline{\varphi}(x),
\end{aligned}$$

onde α_t, e γ_t são curvas analíticas em $C^r(\overline{U},\mathbf{E})$ e $C^0(\overline{\Omega},U)$ respectivamente, tais que $\alpha'(0) = \overline{a}$, $\alpha(0) = a$, $\gamma'(0) = \overline{\varphi}$ e $\gamma(0) = \varphi$. Então, com a hipótese de indução e o fato de que $g_{r,\mathbf{E}}$ é de classe C^{r-1}, temos que as derivadas parciais de $c_{r,\mathbf{E}}$ são de classe C^{r-1}. Portanto, $c_{r,\mathbf{E}}$ é de classe C^r. □

Finalizamos esta seção com a prova da Proposição 3.1.1.

Demonstração. É suficiente provar para $(A_{kl})_*$. Primeiramente note que a composição de funções $(\text{inv}_{ij})_*, (\det)_* : C^0(\overline{\Omega}_0, Gln) \to C^0(\overline{\Omega}_0)$ e o produto de funções $\times : C^0(\overline{\Omega}_0) \times C^0(\overline{\Omega}_0) \to C^0(\overline{\Omega}_0)$ são de classe C^∞. Além disso, graças à Proposição 3.1.2 com $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, segue que a composição de funções $c_{r,\mathbf{E}} : C^r(\overline{U}) \times C^0(\overline{\Omega}_0, U) \to C^0(\overline{\Omega}_0)$ que associa a cada par (a_{ij}, φ) a função $a_{ij} \circ \varphi$ é de classe C^r. Como a definição de $(A_{kl})_*$ envolve somente composições dessas quatro funções, segue que $(A_{kl})_*$ é de classe C^r. □

3.2 Diferenciabilidade de autovalores e autofunções

Proposição 3.2.1. *A função $T : E(\overline{\Omega}_0) \times C^r(\overline{U})^N \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega_0) \to H^{-1}(\Omega_0)$ definida por*

$$T(\varphi, \mathcal{C}, \lambda, u) = -T^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u) + \lambda I^{\varphi}_{\Omega_0}(u)$$

é de classe C^r.

Demonstração. Considere a função $Q : C^1(\overline{\Omega}_0, \mathbb{R}^r) \to C^0(\overline{\Omega}_0, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2})$ dada por $Q(\varphi)(x) = (\varphi(x), \mathbf{D}\varphi(x))$. É claro que

$$Q(E(\overline{\Omega}_0) \subset C^0(\overline{\Omega}_0, U \times Gln) \subset C^0(\overline{\Omega}_0, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}).$$

A partir da expressão 3.4, temos

$$T^{\varphi}_{\Omega_0}(u) = -\sum_{k,l=1}^{n} \partial_k((A_{kl})_*(\mathcal{C}, Q(\varphi))\partial_l u) + \sum_{k=1}^{n} (B_k)_*(\mathcal{C}, Q(\varphi))\partial_k u + C_*(\mathcal{C}, Q(\varphi))u.$$

Em outras palavras, $T^{\varphi}_{\Omega_0}$ pode ser escrito como uma soma de composições das seguintes funções:

$$(A_{kl})_*, (B_k)_*, C_*,$$

que são de classe C^r pela Proposição 3.1.1, e

$$\begin{aligned}
&Q : C^1(\overline{\Omega}_0, \mathbb{R}^r) \to C^0(\overline{\Omega}_0, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}),\\
&\partial_k : v \in H_0^1(\Omega_0) \mapsto \partial_k v \in L^2(\Omega_0),\\
&\partial_k : v \in L^2(\Omega_0) \mapsto \partial_k v \in H^{-1}(\Omega_0),\\
&(v, w) \in L^2(\Omega_0) \times C^0(\overline{\Omega}_0) \to L^2(\Omega_0),
\end{aligned}$$

que são operadores lineares ou bilineares limitados, e assim de classe C^∞. Portanto, $T^{\varphi}_{\Omega_0}$ é de classe C^r. Um cálculo semelhante funciona para o segundo termo $\lambda I^{\varphi}_{\Omega_0}(u)$. □

Para $(\varphi, \mathcal{C}) \in E(\overline{\Omega}_0) \times C^r(\overline{U})^N$ com φ injetiva, $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$T(\varphi, \mathcal{C}, \lambda_0, u_0) = 0$$

se, e somente se $u := \varphi^* u_0$ pertence a $H_0^1(\varphi(\Omega_0))$ e

$$-\mathcal{L}_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}} u = \lambda_0 u \quad \text{em} \quad \varphi(\Omega_0).$$

Com efeito, a primeira condição é equivalente a

$$-T^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u_0) + \lambda_0 I^{\varphi}_{\Omega_0}(u_0) = 0,$$

mas isto significa que

$$B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u_0, v_0) = \lambda_0 \int_{\Omega_0} J\varphi(x) u_0 v_0 dx$$

para todo $v_0 \in H_0^1(\Omega_0)$. Ou seja,

$$B_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}}(\varphi^* u_0, \varphi^* v_0) = \lambda_0 \int_{\varphi(\Omega_0)} (\varphi^* u_0)(\varphi^* v_0) dy.$$

Assim,

$$B_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}}(u, v) = \lambda_0 \int_{\varphi(\Omega_0)} uvdy$$

para todo $v := \varphi^* v_0$ com $v_0 \in H_0^1(\Omega_0)$. Como φ^* é sobrejetiva, a equação acima é equivalente a

$$-\mathcal{L}_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}} u = \lambda_0 u \quad \text{em} \quad \varphi(\Omega_0).$$

Como consequência direta da Proposição 3.2.1, temos:

Corolário 3.2.1. *A função $F : E(\overline{\Omega}_0) \times C^r(\overline{U})^N \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega_0) \to \mathbb{R} \times H^{-1}(\Omega_0)$ definida por*

$$F(\varphi, C, \lambda, u) = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)}, T(\varphi, C, \lambda, u) \right)$$

é de classe C^r. Além disso, $F(\varphi, \mathcal{C}, \lambda_0, u_0) = (\frac{1}{2}, 0)$ se, e somente se, $(\lambda_0, \varphi^* u_0) \in \Lambda(L_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}})$ e $\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)} = 1$.

Vamos agora calcular a diferencial de F em $(\varphi, \mathcal{C}, \lambda, u)$ com respeito a (λ, u). Para isso, seja $t \mapsto (\lambda(t), u(t))$ uma curva analítica em $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega_0)$ tal que $\lambda(0) = \lambda$, $u(0) = u$, e $\frac{d}{dt}\lambda(0) = \mu$, $\frac{d}{dt}u(0) = v$. Por simplicidade, iremos escrever $\lambda(t) = \lambda_t$ e $u(t) = u_t$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega_0)}F(\varphi,\mathcal{C},\lambda,u)(\mu,v) &= \frac{d}{dt}F(\varphi,\mathcal{C},\lambda_t,u_t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t^2\|_{L^2}^2, -T_{\Omega_0,\mathcal{C}}^{\varphi}(u_t)+\lambda_t I_{\Omega_0}^{\varphi}(u_t)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}u_t^2dx\right), \frac{d}{dt}\left(-T_{\Omega_0,\mathcal{C}}^{\varphi}(u_t)+\lambda_t I_{\Omega_0}^{\varphi}(u_t)\right)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\frac{d}{dt}u_t^2dx, \frac{d}{dt}-T_{\Omega_0,\mathcal{C}}^{\varphi}(u_t)+\frac{d}{dt}\lambda_t I_{\Omega_0}^{\varphi}(u_t)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}2u_tu_t'dx, -T_{\Omega_0,\mathcal{C}}^{\varphi}(u_t')+\lambda_t' I_{\Omega_0}^{\varphi}(u_t)+\lambda_t I_{\Omega_0}^{\varphi}(u_t')\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left(\int_{\Omega_0}uvdx, -T_{\Omega_0,\mathcal{C}}^{\varphi}(v)+\lambda I_{\Omega_0}^{\varphi}(v)+\mu I_{\Omega_0}^{\varphi}(u)\right).
\end{aligned}$$

Nossa construção de espaços e operadores nos permite agora, enunciar e demonstrar nossos principais resultados. O primeiro deles, será demonstrado com o uso do teorema padrão da função implícita em espaços de Banach.

Teorema 3.2.1. *Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado tal que $\overline{\Omega}_0 \subset U$ e $\mathcal{C}_0 = (a_{ij}^0, b_i^0, c^0) \subset C^r(\overline{U})^N$ são os coeficientes do operador uniformemente elíptico $\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}$. Seja $(\lambda_0, u_0) \in \Lambda(\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0})$ e assuma que λ_0 seja algebricamente simples. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset E(\overline{\Omega}_0) \times C^r(\overline{U})^N$ de $(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)$ e funções de classe C^r, $\lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $u : \mathcal{U} \to H_0^1(\Omega_0)$ tais que:*

(i) $\lambda(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0) = \lambda_0$ *e* $u(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0) = u_0$;

(ii) $(\lambda(\varphi,\mathcal{C}), u(\varphi,\mathcal{C})) \in \Lambda(\mathcal{L}_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}})$ *para todo* $(\varphi,\mathcal{C}) \in \mathcal{U}$ *com* φ *injetiva.*

Demonstração. Seja $(\lambda_0, u_0) \in \Lambda(\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0})$ tal que $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e suponha que λ_0 possua multiplicidade algébrica igual a 1.

Por uma ligeira modificação de $T(\varphi,\mathcal{C},\lambda,u)$, adicionando $\sigma I_{\Omega_0}^{\varphi}$ com $\sigma > 0$ grande o suficiente, se necessário, podemos supor que $T_{\Omega_0,\mathcal{C}_0} = T_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}^{i_{\Omega_0}}$ é um isomorfismo pelo Teorema de Lax-Milgram.

Afirmamos que $\mathbf{D}_{\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega_0)}F(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0,\lambda_0,u_0)$ é um isomorfismo.

A diferencial de F com respeito a (λ, u) é dada por

$$\mathbf{D}_{\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega_0)}F(\varphi,\mathcal{C},\lambda,u)(\mu,v) = \left(\int_{\Omega_0}uvdx, -T_{\Omega_0,\mathcal{C}}^{\varphi}(v)+\lambda I_{\Omega_0}^{\varphi}(v)+\mu I_{\Omega_0}^{\varphi}(u)\right).$$

A fim de simplificar a notação, vamos escrever

$$\mathbf{D}_{\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega_0)}F(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0,\lambda_0,u_0)(\mu,v)=\Big(\mathbf{D}F^1(\mu,v),\mathbf{D}F^2(\mu,v)\Big)$$

e $R_0=-T_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}+\lambda_0 I_{\Omega_0}$.

Note que R_0 é um operador de Fredholm de índice 0, visto que $T_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}$ é um isomorfismo e o operador I_{Ω_0} é compacto. Além disso, temos que $Ker(R_0)=\langle u_0\rangle$ e assim $codim(Im(R_0))=1$.

Usando agora o fato de λ_0 não possuir autofunções generalizadas, temos que $u_0\notin Im(R_0)$ e assim $\mathbf{D}F^2$ é sobrejetiva, e seu núcleo é gerado por $(0,u_0)$.

Finalmente, a restrição $\mathbf{D}F^1: Ker(R_0)\to\mathbb{R}$ é claramente um isomorfismo e então nós concluímos que $\mathbf{D}_{\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega_0)}F(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0,\lambda_0,u_0)$ é também um isomorfismo.

Pelo Teorema das Funções Implícitas, existe uma vizinhança $\mathcal{U}\subset E(\overline{\Omega_0})\times C^r(\overline{U})^N$ de $(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)$, e funções $\lambda:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $u:\mathcal{U}\to H_0^1(\Omega_0)$ de classe C^r, tais que $\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)=\lambda_0$, $u(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)=u_0$, $(\lambda(\varphi,C),u(\varphi,\mathcal{C})\circ\varphi^{-1})\in\Lambda(\mathcal{L}_{\varphi(\Omega_0),\mathcal{C}})$ e $\|u(\varphi,\mathcal{C})\|_{L^2(\Omega_0)}=1$ para todo $(\varphi,\mathcal{C})\in\mathcal{U}$. $\square$

Antes de enunciar e demonstrar o próximo teorema, vamos calcular as derivadas dos coeficientes do operador $\mathcal{L}_{\varphi(\Omega_0)}$ com respeito a φ. Para isso, é necessário que saibamos calcular a derivada das funções $J\varphi(x)$ e $\mathrm{inv}_{ij}(\mathbf{D}\varphi)$ em relação a φ.

Seja $t\mapsto\varphi(t)=\varphi_t$ uma curva em X diferenciável numa vizinhança de $t=0$ de modo que $\varphi(0)=i_{\Omega_0}$, e $\varphi'(0)=\overline{\varphi}$. Assim, pelo Lema 1.2.1 vale

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\varphi(J\varphi)(\overline{\varphi})(x) &= \frac{d}{dt}(\det\mathbf{D}\varphi_t(x))\Big|_{t=0}\\ &= \det[\mathbf{D}_1\overline{\varphi}(x)\quad \mathbf{D}_2 i_{\Omega_0}(x)\cdots\mathbf{D}_n i_{\Omega_0}(x)]+\cdots\\ &\quad+\det[\mathbf{D}_1 i_{\Omega_0}(x)\quad \mathbf{D}_2 i_{\Omega_0}(x)\cdots\mathbf{D}_n\overline{\varphi}(x)]\end{aligned}$$

onde $\mathbf{D}_j\varphi(x)$ é a j-ésima coluna da matriz $\mathbf{D}\varphi(x)$. Portanto,

$$\mathbf{D}_\varphi(J\varphi)(\overline{\varphi})(x)=\frac{d}{dt}(\det\mathbf{D}\varphi_t(x))\Big|_{t=0}=\frac{\partial\overline{\varphi}_1}{\partial x_1}(x)+\cdots+\frac{\partial\overline{\varphi}_n}{\partial x_n}(x)=\mathrm{div}(\overline{\varphi}(x)).$$

Agora suponha que $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)\mapsto A(t)\in Gln$ com $\varepsilon>0$, seja uma curva diferenciável tal que $A(0)=I_d$, onde I_d denota a matriz identidade. Desse modo, para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ tem-se $A(t)A(t)^{-1}=I_d$, isto é,

$$\delta_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)\mathrm{inv}_{kj}(A(t))$$

onde δ_{ij} vale 1 se $i = j$ e 0 caso contrário, e $a_{ij}(t)$ é o elemento ij da matriz $A(t)$. Derivando em $t = 0$ a igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}(a_{ik}(t))\mathrm{inv}_{kj}(A(t)) + a_{ik}(t)\frac{d}{dt}(\mathrm{inv}_{kj}(A(t))) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}a_{ij}(t)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\mathrm{inv}_{ij}(A(t))\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{inv}_{ij}(A(t))\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\Big|_{t=0}.$$

Finalmente, vamos calcular as deirvadas dos coeficientes $a^{\varphi}_{kl}(x)$, $b^{\varphi}_{k}(x)$ e $c^{\varphi}(x)$ com respeito a φ e depois com respeito a $\mathcal{C}$. Continuamos com a curva φ_t tomada anteriormente. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a^{\varphi_t}_{kl}(x))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(J\varphi_t(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{ki}(D\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{lj}(D\varphi_t(x)) \right)\Big|_{t=0} \\ &= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x)) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\mathrm{inv}_{ki}(Di_{\Omega_0}(x))\mathrm{inv}_{lj}(Di_{\Omega_0}(x)) \\ &\quad + Ji_{\Omega_0}(x)\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{ki}(D\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{lj}(D\varphi_t(x)) \right)\Big|_{t=0} \\ &= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x))a_{kl}(x) + \nabla a_{kl}(x)\cdot\overline{\varphi}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} -a_{il}(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x) - a_{ki}(x)\partial_i\overline{\varphi}_l(x) \\ &= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x)a_{kl}(x)) - \sum_{i=1}^{n} a_{il}(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x) + a_{ki}(x)\partial_i\overline{\varphi}_l(x). \end{aligned}$$

Pois,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{ki}(D\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{lj}(D\varphi_t(x)) \right)\Big|_{t=0}$$

é igual a

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dt}(a_{ij}(\varphi_t(x)))\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{lj}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\Big|_{t=0} \\ &+ a_{ij}(\varphi_t(x))\frac{d}{dt}(\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{lj}(\mathbf{D}\varphi_t(x)))\Big|_{t=0} \\ =&\sum_{i,j=1}^{n} \nabla a_{ij}(x)\cdot\overline{\varphi}(x)\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}i_{\Omega_0}(x))\mathrm{inv}_{lj}(\mathbf{D}i_{\Omega_0}(x)) \\ &+ a_{ij}(x)\left(-\partial_i\overline{\varphi}_k(x)\mathrm{inv}_{lj}(\mathbf{D}i_{\Omega_0}(x)) - \partial_j\overline{\varphi}_l(x)\mathrm{inv}_{ki}(Di_{\Omega_0}(x))\right) \\ =&\nabla a_{kl}(x)\cdot\overline{\varphi}(x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{il}(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x) + a_{kj}(x)\partial_j\overline{\varphi}_l(x). \end{aligned}$$

Vejamos agora como fica a derivada de $b_k^{\varphi_t}(x)$ em $t=0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(b_k^{\varphi_t}(x))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(J\varphi_t(x))\sum_{i=1}^n bi(\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{ki}(D\varphi_t(x))\right)\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x))\sum_{i=1}^n bi(x)\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}i_{\Omega_0}(x)) \\
&\quad + Ji_{\Omega_0}(x)\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n bi(\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\right)\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x))b_k(x) + \nabla b_k(x)\cdot\overline{\varphi}(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x) \\
&= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x)b_k(x)) - \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x).
\end{aligned}$$

Já que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n b_i(\varphi_t(x))\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\right)\Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}b_i(\varphi_t(x))\cdot\frac{d}{dt}\varphi_t(x)\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\Big|_{t=0} \\
&\quad + b_i(\varphi_t(x))\frac{d}{dt}\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi_t(x))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla b_i(x)\cdot\overline{\varphi}(x)\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}i_{\Omega_0}(x)) - b_i(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x) \\
&= \nabla b_k(x)\cdot\overline{\varphi}(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i\overline{\varphi}_k(x).
\end{aligned}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(c^{\varphi_t}(x))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(J\varphi_t(x)c(\varphi_t(x)))\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x))c(x) + Ji_{\Omega_0}(x)\frac{d}{dt}c(\varphi_t(x))\cdot\frac{d}{dt}\varphi_t(x)\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x))c(x) + \nabla c(x)\cdot\overline{\varphi}(x) \\
&= \mathrm{div}(\overline{\varphi}(x)c(x)).
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular a derivada dos coeficientes com respeito a $\mathcal{C}$. Seja $t\mapsto \mathcal{C}_t=(a_{ij}^t, b_i^t, c^t)$ uma curva diferenciável em $C^r(\overline{U})^N$, tal que $\frac{d}{dt}\mathcal{C}_t\Big|_{t=0}=\overline{\mathcal{C}}=(\overline{a}_{ij},\overline{b}_i,\overline{c})$ e $\mathcal{C}(0)=\mathcal{C}_0$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(a_{kl}^{\varphi}(x))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(J\varphi(x)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^t(\varphi(x))\mathrm{inv}_{ki}(D\varphi(x))\mathrm{inv}_{lj}(D\varphi(x))\right)\Big|_{t=0} \\
&= J\varphi(x)\sum_{i,j=1}^n \overline{a}_{ij}(\varphi(x))\mathrm{inv}_{ki}(\mathbf{D}\varphi(x))\mathrm{inv}_{lj}(\mathbf{D}\varphi(x)) \\
&= \overline{a}_{kl}^{\varphi}(x).
\end{aligned}$$

De modo análogo, concluímos que $\frac{d}{dt}(b_k^{\varphi}(x))\Big|_{t=0} = \overline{b}_k^{\varphi}(x)$ e $\frac{d}{dt}(c^{\varphi}(x))\Big|_{t=0} = \overline{c}^{\varphi}(x)$.

Teorema 3.2.2. *Sob as condições e notações indroduzidas no Teorema 3.2.1, a primeira derivada de λ com respeito a $(\varphi, \mathcal{C})$ em $(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)$ é dada pelo campo integral de vetores*

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}\lambda(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}}) &= \int_{\Omega} \nabla^T u_0 \left(\mathbf{A}(x,\overline{\varphi}) + \overline{\mathbf{A}}(x) + \tilde{\mathbf{A}}(x,\overline{\varphi})\right) \nabla v_0 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla^T u_0 \left(\mathbf{B}(x,\overline{\varphi}) + \overline{\mathbf{B}}(x) + \tilde{\mathbf{B}}(x,\overline{\varphi})\right) v_0 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_0 \left(\mathbf{C}(x,\overline{\varphi}) + \overline{\mathbf{C}}(x) - \lambda_0 div(\overline{\varphi})\right) v_0 dx\end{aligned}$$

para todo $(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}}) \in X \times C^r(\overline{U})^N$, onde $\overline{\mathbf{A}}(x)$, $\overline{\mathbf{B}}(x)$, $\overline{\mathbf{C}}(x)$, $\mathbf{A}(x,\overline{\varphi})$, $\mathbf{B}(x,\overline{\varphi})$ e $\mathbf{C}(x,\overline{\varphi})$ denotam as matrizes cujas entradas são, respectivamente $\overline{a}_{ij}(x)$, $\overline{b}_i(x)$, $\overline{c}(x)$, $div(\overline{\varphi}(x)a_{ij}^0(x))$, $div(\overline{\varphi}(x)b_i^0(x))$ e $div(\overline{\varphi}(x)c^0(x))$. Além disso, $\tilde{\mathbf{A}}(x,\overline{\varphi})$ e $\tilde{\mathbf{B}}(x,\overline{\varphi})$ denotam as matrizes

$$\tilde{\mathbf{A}}(x,\overline{\varphi}) = \mathbf{A}_0(x)\mathbf{D}\overline{\varphi}(x)^T + \mathbf{D}\overline{\varphi}(x)\mathbf{A}_0(x) \quad e \quad \tilde{\mathbf{B}}(x,\overline{\varphi}) = \mathbf{D}\overline{\varphi}(x)\mathbf{B}_0(x),$$

onde as matrizes $\mathbf{A}_0(x)$ e $\mathbf{B}_0(x)$ são análogas a $\overline{\mathbf{A}}(x)$ e $\overline{\mathbf{B}}(x)$, exceto que elas são formadas a partir de $\mathcal{C}_0$ em vez de $\overline{\mathcal{C}}$, M^T denota a matriz transposta de M, e v_0 é a autofunção do operador adjunto de $\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}$ correspondente ao autovalor λ_0, que é escolhida de modo que $\langle u_0, v_0\rangle_{L^2(\Omega_0)} = 1$.

Demonstração. Para simplificar a notação, vamos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{E(\overline{\Omega}_0)\times C^r(\overline{U})^N}(\lambda \times u)(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}}) &= \mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}(\lambda \times u)(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}}) \\ &= \left(\mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}\lambda(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}}), \mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}u(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0)(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}})\right) \\ &= (\mu, v).\end{aligned}$$

Como consequência do Teorema anterior, temos $F(\varphi, \mathcal{C}, \lambda(\varphi, \mathcal{C}), u(\varphi, \mathcal{C})) = (\frac{1}{2}, 0)$ para todo par $(\varphi, \mathcal{C}) \in \mathcal{U}$. Então,

$$\mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}T(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0, \lambda_0, u_0)(\overline{\varphi}, \overline{\mathcal{C}}) + \mathbf{D}_{(\lambda,u)}T(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0, \lambda_0, u_0)(\mu, v) = 0.$$

Seja v_0 uma autofunção do operador adjunto de $\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}$ correspondente ao autovalor λ_0. Assim,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{D}_{(\lambda,u)}T(i_{\Omega_0}, \mathcal{C}_0, \lambda_0, u_0)(\mu, v), v_0\rangle_{L^2} &= -B_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}(v, v_0) + \lambda_0 J_{\Omega_0}(v, v_0) + \mu J_{\Omega_0}(u_0, v_0) \\ &= -\langle -\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0} v, v_0\rangle_{L^2} + \lambda_0\langle v, v_0\rangle_{L^2} + \mu\langle u_0, v_0\rangle_{L^2} \\ &= -\langle v, -\mathcal{L}^*_{\Omega_0,\mathcal{C}_0} v_0\rangle_{L^2} + \lambda_0\langle v, v_0\rangle_{L^2} + \mu \\ &= -\langle v, \lambda_0 v_0\rangle_{L^2} + \lambda_0\langle v, v_0\rangle_{L^2} + \mu \\ &= \mu.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}) &= -\langle \mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}T(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0,\lambda_0,u_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}),v_0\rangle\\ &= -\frac{\partial}{\partial(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}})}T(\varphi,\mathcal{C},\lambda_0,u_0)(v_0)\Big|_{(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)}\\ &= \frac{\partial}{\partial(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}})}\left(-B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u_0,v_0)+\lambda_0 J^{\varphi}_{\Omega_0}(u_0,v_0)\right)\Big|_{(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)}.\end{aligned}$$

Este último termo é igual a

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}\left(-B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u_0,v_0)+\lambda_0 J^{\varphi}_{\Omega_0}(u_0,v_0)\right)\Big|_{i_{\Omega_0}}+\frac{\partial}{\partial\overline{\mathcal{C}}}\left(-B^{\varphi}_{\Omega_0,\mathcal{C}}(u_0,v_0)\right)\Big|_{\mathcal{C}_0},$$

devido o termo $\lambda_0 J^{\varphi}_{\Omega_0}(u_0,v_0)$ não depender de $\mathcal{C}$. Em virtude dos cálculos feitos acima para encontrar as derivadas dos coeficientes $a^{\varphi}_{kl}(x)$, $b^{\varphi}_{k}(x)$ e $c^{\varphi}(x)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{(\varphi,\mathcal{C})}\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}) &= -\Bigg(\int_\Omega\sum_{k,l=1}^{n}\operatorname{div}(\overline{\varphi}a_{kl}(x))\partial_k u_0\partial_l v_0+\\ &\sum_{k=1}^{n}\operatorname{div}(\overline{\varphi}b_k(x))\partial_k u_0 v_0+\\ &+(\operatorname{div}(\overline{\varphi}c(x))-\lambda_0\operatorname{div}(\overline{\varphi}))u_0v_0+\\ &\sum_{k,l=1}^{n}(-\sum_{i=1}^{n}a_{il}(x)\partial_i\overline{\varphi}_k+a_{ki}(x)\overline{\varphi}_l)\partial_k u_0\partial_l v_0+\\ &+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\partial_i\overline{\varphi}_k\right)\partial_k u_0 v_0 dx+\\ &\int_\Omega\sum_{k,l=1}^{n}\overline{a}_{kl}(x)\partial_k u_0\partial_l v_0+\sum_{k=1}^{n}\overline{b}_k(x)\partial_k u_0 v_0+\overline{c}(x)u_0v_0dx\Bigg).\end{aligned}$$

□

Observe que não exigiu-se nenhuma hipótese de suavidade sobre o domínio Ω, assim, o resultado acima é válido para domínios poliedrais, domínios com "quinas", domínios obtidos através da retirada de uma quantidade finita de pontos de uma região simplesmente conexa, entre outros. Outro fato importante é que o cálculo da derivada acima foi feito para uma direção $\overline{\varphi}\in X$ arbitrária, sem precisar considerar a hipótese adicional de que exista uma vizinhança de i_{Ω_0} em X de aplicações injetivas. Se supusermos que Ω_0 possui uma certa suavidade, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.2.2. *Sob as mesmas condições e notações dos Teoremas acima, suponha que Ω_0 seja de classe C^2. Então*

$$\begin{aligned}D_{(\varphi,\mathcal{C})}\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}) &= -\int_{\partial\Omega_0}a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial v_0}{\partial N}\overline{\varphi}\cdot NdS\\ &+B_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

para todo $(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}) \in X \times C^r(\overline{U})^N$, *onde* N *é o campo normal unitário de vetores de* $\partial\Omega_0$ *orientado para fora de* Ω_0 *e* $a_0(x) = N^T A_0(x)N$. *Em particular, a fórmula de Hadamard para os operadores elípticos de segunda ordem é*

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi}) = -\int_{\partial\Omega_0} a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial v_0}{\partial N}\overline{\varphi}\cdot N dS.$$

Demonstração. Visto que Ω_0 é de classe C^2, temos que as funções u_0 e v_0 pertecem a $H_0^1(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0)$. Usando que $\mathrm{div}(\overline{\varphi}f(x)) = \mathrm{div}(\overline{\varphi})f(x) + \overline{\varphi}\cdot\nabla f(x)$, escrevemos $-D_{(\varphi,\mathcal{C})}\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}})$ como

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\overline{\varphi})\left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n b_k(x)\partial_k u_0 v_0 + (c(x)-\lambda_0)u_0v_0\right)dx$$

$$+\int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \overline{\varphi}\cdot\nabla a_{kl}(x)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n \overline{\varphi}\cdot\nabla b_k(x)\partial_k u_0 v_0 + \overline{\varphi}\cdot\nabla c(x)u_0v_0 dx \tag{3.5}$$

$$+\int_{\Omega_0}\sum_{k,l=1}^n\left(-\sum_{i=1}^n a_{il}(x)\partial_i\overline{\varphi}_k + a_{ki}(x)\partial_i\overline{\varphi}_l\right)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i\overline{\varphi}_k\right)\partial_k u_0 v_0 dx \tag{3.6}$$

$$+ B_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0).$$

Primeiramente vamos calcular

$$\int_{\Omega_0}\sum_{k,l=1}^n\left(-\sum_{i=1}^n a_{il}(x)\partial_i\overline{\varphi}_k + a_{ki}(x)\partial_i\overline{\varphi}_l\right)\partial_k u_0\partial_l v_0 dx$$

expandindo o somatório em i, e usando 1.1.1 para retirar as derivadas das componentes de $\overline{\varphi}$. Isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0}\sum_{k,l=1}^n(-a_{1l}\partial_1\overline{\varphi}_k)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \ldots + (-a_{nl}\partial_n\overline{\varphi}_k)\partial_k u_0\partial_l v_0\\
&+\sum_{k,l=1}^n(-a_{k1}\partial_1\overline{\varphi}_l)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \ldots + (-a_{kn}\partial_n\overline{\varphi}_l)\partial_k u_0\partial_l v_0 dx =\\
&\int_\Omega\left[\sum_{k,l=1}\overline{\varphi}_k\partial_1(a_{1l}\partial_k u_0\partial_l v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_k\partial_n(a_{nl}\partial_k u_0\partial_l v_0)\right]\\
&+\left[\sum_{k,l=1}\overline{\varphi}_l\partial_1(a_{k1}\partial_k u_0\partial_l v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_l\partial_n(a_{kn}\partial_k u_0\partial_l v_0)\right]dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a soma em k no primeiro colchete e em l no segundo, obtemos

$$\int_\Omega \sum_{l=1}^n \overline{\varphi}_1\partial_1(a_{1l}\partial_1 u_0\partial_l v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_1(a_{1l}\partial_n u_0\partial_l v_0) +$$
$$\vdots$$
$$\sum_{l=1}^n \overline{\varphi}_1\partial_n(a_{nl}\partial_1 u_0\partial_l v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_n(a_{nl}\partial_n u_0\partial_l v_0) +$$
$$\sum_{k=1}^n \overline{\varphi}_1\partial_1(a_{k1}\partial_k u_0\partial_1 v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_1(a_{k1}\partial_k u_0\partial_n v_0) +$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^n \overline{\varphi}_1\partial_n(a_{kn}\partial_k u_0\partial_1 v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_n(a_{kn}\partial_k u_0\partial_n v_0) dx.$$

Reordenando os termos, ficamos com

$$\int_\Omega \sum_{l=1}^n \overline{\varphi}_1\partial_1(a_{1l}\partial_1 u_0\partial_l v_0) + \overline{\varphi}_1\partial_2(a_{2l}\partial_1 u_0\partial_l v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_1\partial_n(a_{nl}\partial_1 u_0\partial_l v_0) +$$
$$\vdots$$
$$\sum_{l=1}^n \overline{\varphi}_n\partial_1(a_{1l}\partial_n u_0\partial_l v_0) + \overline{\varphi}_n\partial_2(a_{2l}\partial_n u_0\partial_l v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_n(a_{nl}\partial_n u_0\partial_l v_0) +$$
$$\sum_{k=1}^n \overline{\varphi}_1\partial_1(a_{k1}\partial_k u_0\partial_1 v_0) + \overline{\varphi}_1\partial_2(a_{k2}\partial_k u_0\partial_1 v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_1\partial_n(a_{kn}\partial_k u_0\partial_1 v_0) +$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^n \overline{\varphi}_n\partial_1(a_{k1}\partial_k u_0\partial_n v_0) + \overline{\varphi}_n\partial_2(a_{k2}\partial_k u_0\partial_n v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_n(a_{kn}\partial_k u_0\partial_n v_0) dx.$$

Calculando as derivadas dos produtos que aparecem multiplicando as componentes de

$\overline{\varphi}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{l=1}^{n} [\overline{\varphi}_1 \partial_1 (a_{1l}\partial_l v_0)\partial_1 u_0 + \overline{\varphi}_1 (a_{1l}\partial_l v_0)\partial_1\partial_1 u_0] + \\
&\qquad\vdots \\
&[\overline{\varphi}_1 \partial_n (a_{nl}\partial_l v_0)\partial_1 u_0 + \overline{\varphi}_1 (a_{nl}\partial_l v_0)\partial_n\partial_1 u_0] + \\
&\qquad\vdots \\
&\sum_{l=1}^{n} [\overline{\varphi}_n \partial_1 (a_{1l}\partial_l v_0)\partial_n u_0 + \overline{\varphi}_n (a_{1l}\partial_l v_0)\partial_1\partial_n u_0)] + \\
&\qquad\vdots \\
&[\overline{\varphi}_n \partial_n (a_{nl}\partial_l v_0)\partial_n u_0 + \overline{\varphi}_n (a_{nl}\partial_l v_0)\partial_n\partial_n u_0)] + \\
&\sum_{k=1}^{n} [\overline{\varphi}_1 \partial_1 (a_{k1}\partial_k u_0)\partial_1 v_0 + \overline{\varphi}_1 (a_{k1}\partial_k u_0)\partial_1\partial_1 v_0] + \\
&\qquad\vdots \\
&[\overline{\varphi}_1 \partial_n (a_{kn}\partial_k u_0)\partial_1 v_0 + \overline{\varphi}_1 (a_{kn}\partial_k u_0)\partial_n\partial_1 v_0] + \\
&\qquad\vdots \\
&\sum_{k=1}^{n} [\overline{\varphi}_n \partial_1 (a_{k1}\partial_k u_0)\partial_n v_0 + \overline{\varphi}_n (a_{k1}\partial_k u_0)\partial_1\partial_n v_0)] + \\
&\qquad\vdots \\
&[\overline{\varphi}_n \partial_n (a_{kn}\partial_k u_0)\partial_n v_0 + \overline{\varphi}_n (a_{kn}\partial_k u_0)\partial_n\partial_n v_0)]\, dx.
\end{aligned}$$

Finalmente, organizando de maneira conveniente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\overline{\varphi}_1 \partial_1 u_0 \left(\sum_{k,l=1}^{n} \partial_k (a_{kl}\partial_l v_0)\right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \partial_n u_0 \left(\sum_{k,l=1}^{n} \partial_k (a_{kl}\partial_l v_0)\right)\right] \\
&+ \left[\overline{\varphi}_1 \partial_1 v_0 \left(\sum_{k,l=1}^{n} \partial_l (a_{kl}\partial_k u_0)\right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \partial_n v_0 \left(\sum_{k,l=1}^{n} \partial_l (a_{kl}\partial_k u_0)\right)\right] \\
&+ \overline{\varphi}_1 \left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\partial_1 (\partial_k u_0 \partial_l v_0)\right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\partial_n (\partial_k u_0 \partial_l v_0)\right) dx.
\end{aligned}$$

Guardemos o resultado acima e vamos agora calcular

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left(-\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i \overline{\varphi}_k\right) \partial_k u_0 v_0 dx.$$

Novamente começamos fazendo a soma em i e depois usamos o Teorema 1.1.1.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{k=1}^n \left(-\sum_{i=1}^n b_i \partial_i \overline{\varphi}_k \right) \partial_k u_0 v_0 dx &= -\int_\Omega \sum_{k=1}^n \left(b_1 \partial_1 \overline{\varphi}_k + \ldots + b_n \partial_n \overline{\varphi}_k \right) \partial_k u_0 v_0 dx \\
&= \int_\Omega \left[\overline{\varphi}_1 \partial_1 (b_1 \partial_1 u_0 v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_1 \partial_n (b_n \partial_1 u_0 v_0) \right] \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left[\overline{\varphi}_n \partial_1 (b_1 \partial_n u_0 v_0) + \ldots + \overline{\varphi}_n \partial_n (b_n \partial_n u_0 v_0) \right] dx.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, calculando a derivada dos produtos que aparecem multiplicando as componentes de $\overline{\varphi}$, obtemos

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \left[\overline{\varphi}_1 \partial_1 (b_1 v_0) \partial_1 u_0 + \overline{\varphi}_1 (b_1 v_0) \partial_1 \partial_1 u_0 \right] + \ldots + \left[\overline{\varphi}_1 \partial_n (b_n v_0) \partial_1 u_0 + \overline{\varphi}_1 (b_n v_0) \partial_n \partial_1 u_0 \right] \\
\vdots \\
+ \left[\overline{\varphi}_n \partial_1 (b_1 v_0) \partial_n u_0 + \overline{\varphi}_n (b_1 v_0) \partial_1 \partial_n u_0 \right] + \ldots + \left[\overline{\varphi}_n \partial_n (b_n v_0) \partial_n u_0 + \overline{\varphi}_n (b_n v_0) \partial_n \partial_n u_0 \right] dx
\end{gathered}$$

Agora, agrupando os termos de forma conveniente, ficamos com

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \overline{\varphi}_1 \partial_1 u_0 \left(\sum_{k=1}^n \partial_k (b_k v_0) \right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \partial_n u_0 \left(\sum_{k=1}^n \partial_k (b_k v_0) \right) \\
&+ \left[\overline{\varphi}_1 (b_1 v_0) \partial_1 \partial_1 u_0 + \ldots + \overline{\varphi}_1 (b_n v_0) \partial_n \partial_1 u_0 \right] \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&+ \left[\overline{\varphi}_n (b_1 v_0) \partial_1 \partial_n u_0 + \ldots + \overline{\varphi}_n (b_n v_0) \partial_n \partial_n u_0 \right] dx.
\end{aligned}$$

Juntando os resultados obtidos, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} \sum_{k,l=1}^n \left(-\sum_{i=1}^n a_{il} \partial_i \overline{\varphi}_k + a_{ki} \partial_i \overline{\varphi}_l \right) \partial_k u_0 \partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n \left(-\sum_{i=1}^n b_i \partial_i \overline{\varphi}_k \right) \partial_k u_0 v_0 dx = \\
&\int_\Omega \overline{\varphi}_1 \partial_1 u_0 \left(\sum_{k,l}^n \partial_k (a_{kl} \partial_l v_0) + \sum_{k=1}^n \partial_k (b_k v_0) \right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \partial_n u_0 \left(\sum_{k,l=1}^n \partial_k (a_{kl} \partial_l v_0) + \sum_{k=1}^n \partial_k (b_k v_0) \right) \\
&+ \overline{\varphi}_1 \partial_1 v_0 \left(\sum_{k,l}^n \partial_l (a_{kl} \partial_k u_0) \right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \partial_n v_0 \left(\sum_{k,l}^n \partial_l (a_{kl} \partial_k u_0) \right) \\
&+ \overline{\varphi}_1 \left(\sum_{k,l}^n a_{kl} \partial_1 (\partial_k u_0 \partial_l v_0) \right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \left(\sum_{k,l}^n a_{kl} \partial_n (\partial_k u_0 \partial_l v_0) \right) \\
&+ \overline{\varphi}_1 \left(\sum_{k=1}^n b_k v_0 \partial_1 (\partial_k u_0) \right) + \ldots + \overline{\varphi}_n \left(\sum_{k=1}^n b_k v_0 \partial_n (\partial_k u_0) \right) dx.
\end{aligned}$$

Sabendo que o adjunto de $\mathcal{L}$ é dado por

$$\mathcal{L}^* v = \sum_{k,l=1}^n \partial_k (a_{kl}(x) \partial_l v) + \sum_{k=1}^n b_k(x) \partial_k v + \left(\sum_{k=1}^n \partial_k b_k(x) - c(x) \right) v,$$

ficamos com

$$\int_\Omega \overline{\varphi}_1\partial_1 u_0\left(\mathcal{L}^* v_0 + cv_0\right) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_n u_0\left(\mathcal{L}^* v_0 + cv_0\right)$$
$$+ \overline{\varphi}_1\partial_1 v_0\left(\mathcal{L}u_0 + \sum_{k=1}^n b_k\partial_k u_0 + cu_0\right) + \ldots + \overline{\varphi}_n\partial_n v_0\left(\mathcal{L}u_0 + \sum_{k=1}^n b_k\partial_k u_0 + cu_0\right)$$
$$+ \sum_{k,l=1}^n a_{kl}\overline{\varphi}\nabla(\partial_k u_0\partial_l v_0) + \sum_{k=1}^n b_k v_0\overline{\varphi}\nabla(\partial_k u_0)dx.$$

Como $\mathcal{L}u_0 = -\lambda_0 u_0$ e $\mathcal{L}^* v_0 = -\lambda_0 v_0$, obtemos

$$\int_\Omega (c-\lambda_0)v_0\overline{\varphi}\cdot\nabla u_0 + (c-\lambda_0)u_0\overline{\varphi}\cdot\nabla v_0 + \sum_{k,l=1}^n a_{kl}\overline{\varphi}\cdot\nabla(\partial_k u_0\partial_l v_0)$$
$$+ \sum_{k=1}^n b_k\partial_k u_0\overline{\varphi}\cdot\nabla v_0 + \sum_{k=1}^n b_k v_0\overline{\varphi}\cdot\nabla(\partial_k u_0)dx.$$

Assim, a soma das integrais em (3.5) e (3.6) resulta exatamente

$$\int_\Omega \overline{\varphi}\cdot\nabla\left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n b_k(x)\partial_k u_0 v_0 + (c(x)-\lambda_0)u_0 v_0\right)dx.$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned} D\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}) &= -\int_\Omega \operatorname{div}\left(\overline{\varphi}\left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n b_k(x)\partial_k u_0 v_0 + (c(x)-\lambda_0)u_0 v_0\right)\right)dx \\ &\quad + B_{\Omega,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial u}{\partial N} = \nabla\cdot N$ em $\partial\Omega_0$, temos

$$\begin{aligned} D\lambda(i_{\Omega_0},\mathcal{C}_0)(\overline{\varphi},\overline{\mathcal{C}}) &= -\int_\Omega \operatorname{div}\left(\overline{\varphi}\left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x)\partial_k u_0\partial_l v_0 + \sum_{k=1}^n b_k(x)\partial_k u_0 v_0 + (c(x)-\lambda_0)u_0 v_0\right)\right)dx \\ &\quad + B_{\Omega,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\ &= -\int_{\partial\Omega_0}\left(\nabla^T u_0 A_0(x)\nabla v_0 + \nabla^T u_0 B_0(x)v_0 + (c(x)-\lambda_0)u_0 v_0\right)\overline{\varphi}\cdot N dS \\ &\quad + B_{\Omega,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\ &= -\int_{\partial\Omega_0}(\frac{\partial u_0}{\partial N}N^T A_0(x)\frac{\partial v_0}{\partial N}N)\overline{\varphi}\cdot N dS + B_{\Omega,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\ &= -\int_{\partial\Omega_0} N^T A_0(x)N\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial v_0}{\partial N}\overline{\varphi}\cdot N dS + B_{\Omega,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\ &= -\int_{\partial\Omega_0} a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial v_0}{\partial N}\overline{\varphi}\cdot N dS + B_{\Omega,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(i_{\Omega_0},\mathcal{C})(\overline{\varphi}) = -\int_{\partial\Omega_0} a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial v_0}{\partial N}\overline{\varphi}\cdot N dS.$$

□

Conclusão

Foram dadas duas abordagens do mesmo problema neste trabalho. Na primeira parte do trabalho, estudamos a técnica desenvolvida em [11] por D. Henry. A estratégia inicial para tratar o problema de perturbação de contorno foi definir a deformação da região Ω como sendo a imagem $h(\Omega)$ de um difeomorfismo $h \in \text{Diff}^m(\Omega)$, onde Ω é um domínio regular de classe C^m. Desta forma, ao considerarmos um operador diferencial $F_{h(\Omega)}$ de ordem m agindo num espaço de funções $C^m(h(\Omega))$ chegando em $C^0(h(\Omega))$ percebemos que ao fazer a região Ω variar, nossos espaços de funções também variam. Para evitar esse transtorno, definimos o *pull-back* h^* e a forma Lagrangiana do operador $F_{h(\Omega)}$, dada por $h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}$ e para calcularmos a derivada é suficiente calcular a derivada de Gâteaux, isto é, considerar uma curva $h(t, \cdot)$ de mergulhos em $\text{Diff}^m(\Omega)$. Contudo, fazer o cálculo diretamente aplicando a regra da cadeia é extremamente trabalhoso, principalmente se o operador for de ordem alta. Essa dificuldade foi contornada pela Derivada anticonvectiva 2.1, uma vez que ela contém a derivada em t e comuta com o operador diferencial com coeficientes constantes, conforme a observação 2.2.1. Isto permite evitar o cálculo direto através da regra da cadeia. Portanto a derivada anticonvectiva D_t corresponde a $t-$derivada do operador F_{Ω_t}. Com isso, foi possível calcular a derivada com respeito a h da aplicação

$$\begin{array}{rcl} \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega) & \to & C^0(\Omega) \\ (h, u) & \mapsto & h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u \end{array}$$

conforme o teorema 2.2.1, o qual exige que a regularidade de h seja pelo menos igual a ordem do operador.

Já na técnica desenvolvida em [10], apresentada no capítulo 3, não é exigida nenhuma hipótese de regularidade sobre a região Ω a ser perturbada. Por conta disso, considerou-se o operador diferencial na sua forma fraca, ou seja, na forma integral 3.3. A forma bilinear do problema perturbado

$$B^{\varphi}_{\Omega,\mathcal{C}}(u, v) = B_{\varphi(\Omega),\mathcal{C}}(u \circ \varphi^{-1}, v \circ \varphi^{-1}),$$

é dada explícitamente por 3.4. Para mostrar que o operador $B^{\varphi}_{\Omega,\mathcal{C}}(u, v)$ é diferenciável com respeito a φ e aos coeficientes $\mathcal{C}$, do operador $\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}}$, usamos o importantíssimo Omega Lema Generalizado, conforme visto na proposiçao 3.1.1.

Depois de saber que nossos operadores são diferenciáveis fazendo uso do Omega Lema Generalizado, as técnicas coincidem, isto é, define-se um operador conveniente definido entre espaços de Banach, cujo domínio contém os autovalores e as autofunções do opearor, e além disso, esteja dentro das hipóteses do teorema das funções implícitas. Ou seja, uma de suas derivadas parciais deve ser um isomorfismo. Em ambas, usa-se a alternativa de Fredholm para verificar que a derivada é um isomorfismo. Nessa segunda parte obtemos uma expressão para a derivada do autovalor so caso em que o domínio seja não-regular, e no caso particular em que vale o teorema da divergência no domínio Ω, obtem-se os mesmos resultados.

Observe que no Corolário 3.2.2 a hipótese de regularidade C^2 sobre o domínio Ω_0 nos permite fazer uso da teoria de perturbação regular desenvolvida por Henry para calcular a derivada do autovalor do operador elíptico $\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}$. Com efeito, tomando uma curva de perturbações $h(t,\cdot) \in \mathrm{Diff}^2(\Omega_0)$ diferenciável, tem-se

$$h(t,\cdot)^*(\mathcal{L}_{\Omega(t),\mathcal{C}(t)} + \lambda(t))h(t,\cdot)^{*-1}u(t) = 0 \quad \text{em } \Omega_0.$$

Aplicando a Derivada anticonvectiva em $t = 0$ nessa igualdade, temos

$$(\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0} + \lambda_0)D_t u(t)\Big|_{t=0} + \mathcal{L}_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}u_0 + \dot{\lambda}u_0 = 0.$$

Visto que v_0 é autofunção do adjunto de $\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}$ escolhida de modo que $\langle u_0, v_0\rangle = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \dot{\lambda}\int_{\Omega_0} u_0 v_0 dx \\
&= -\int_{\Omega_0} v_0(\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0} + \lambda_0)w + v_0\mathcal{L}_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}u_0 dx \\
&= \int_{\Omega_0} w(\mathcal{L}^*_{\Omega_0,\mathcal{C}} + \lambda_0)v_0 - v_0(\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0} + \lambda_0)w + v_0\mathcal{L}_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}u_0 dx \\
&= \int_{\Omega_0} w\mathcal{L}^*_{\Omega_0,\mathcal{C}}v_0 - v_0\mathcal{L}_{\Omega_0,\mathcal{C}_0}w dx + B_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\
&= \int_{\partial\Omega_0}(wA(x)\nabla v_0)\cdot N dS - \int_{\partial\Omega_0}(v_0A(x)\nabla w)\cdot N dS + B_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\
&= -\int_{\partial\Omega_0}((\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u_0)A(x)\nabla v_0)\cdot N dS + B_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0) \\
&= -\int_{\partial\Omega_0} a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial N}\frac{\partial v_0}{\partial N}\dot{h}\cdot N dS + B_{\Omega_0,\overline{\mathcal{C}}}(u_0,v_0),
\end{aligned}$$

onde $D_t(u(t))|_{t=0} = w$.

É importante ressaltar que nas duas teorias usa-se uma hipótese fundamental que é a simplicidade (algébrica) do autovalor λ_0. Apesar das técnicas diferirem em alguns pontos, ambas têm sua aplicabilidade. A técnica desenvolvida por D. Henry em [11] foi desenvolvida básicamente para tratar problemas regulares e responder questões a respeito de genericidade. Em problemas de otimização de autovalor de operadores elípticos os pontos críticos do funcional de autovalor podem ocorrer em domínios não-regulares, e neste caso a técnica feita em [10] pode ser mais conveniente.

Referências

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Appl. Math. Sci., vol.75, Springer, 2007.

[2] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 2010.

[3] R. Courant, D. Hilbert,*Methods of Mathematical Physics*, vol. I, Interscience, New York, 1953.

[4] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London (1969).

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993

[6] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt Rinehart and Winston, 1969

[7] P. Garabedian, M. Schiffer, *Variational problems in the theory of elliptic partial differential equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 24 (1953) 137–171.

[8] P. Garabedian, M. Schiffer, *Convexity of domain functionals*, J. Anal. Math. 2 (1952–1953) 281–368.

[9] J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, Mem. Sa-vants Entrangers 33 (1908), Euvres 2 (1968) 515–631.

[10] J. Haddad and M. Montenegro - *On differentiability of eigenvalues of second order elliptic operators on non-smooth domains*, to appear in J. Differential Equations, 2015.

[11] D. Henry, *Perturbation of the Boundary in Boundary-Value Problems of Partial Differential Equations*,Cambridge University Press, New York, 2005.

[12] E.L. de Lima, *Curso de Análise vol.2*, Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[13] R. A. de Melo, *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais*, Dissertação de mestrado apresentada ao PPGM-UFCG, 2006.

[14] A.M. Micheletti, *Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace in relazione ad una variazione del campo*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 26 (1972) 151–169.

[15] A.M. Micheletti, *Metrica per famiglie di domini limitati e propriet'a generiche degli autovalori*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 26 (1972) 683–694.

[16] A.M. Micheletti, *Perturbazione dello spetro di un operatore ellitico di tipo variazionale in relazione ad una vari-azione del campo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 97 (1973) 267–281.

[17] A.L. Pereira, *Eigenvalues of the Laplacian on symmetric regions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 2 (1995) 63–109.

[18] M. C. Pereira, *Aplicações do teorema da transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elípticos*, Dissertação apresentada ao IME-USP, 2001.

[19] G. Polya, M. Schiffer, *Convexity of functionals by transplantation*, J. Anal. Math. 2 (1953) 246–344.

[20] G. Polya, G. Szëgo, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Ann. of Math. Stud., vol.27, Princeton University Press, 1951.

[21] J.W.S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, vol. I, second edition, Macmillan, London, 1894, Dover, 1945.

[22] M. Schiffer, *Variational of domain functional*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 60 (1954) 303–328.

[23] Saut and Teman, *Generic properties of nonlinear boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations, 4(1979) no. 3, 293-319.

[24] K. Uhlenbeck, *Generic Properties of Eigenfunctions*, American Journal Mathematics,vol. 98, No. 04 (1976), 1059-1078.

[25] K. Uhlenbeck, *Eigenfunctions of Laplace operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 78 (1972) 1073–1076.