UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES ATRAVÉS DO GEOPLANO E GEOGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

MIKE DE SOUZA MORAES

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

MIKE DE SOUZA MORAES

TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES ATRAVÉS DO GEOPLANO E GEOGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Moraes, Mike de Souza
M827t   Teorema de Pick: Uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples através do Geoplano e GeoGebra no ensino fundamental / Mike de Souza Moraes. 2018
31 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Teorema de Pick. 2. Polígonos Simples. 3. Geoplano. 4. GeoGebra. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

MIKE DE SOUZA MORAES

TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES ATRAVÉS DO GEOPLANO E GEOGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 20 de Junho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata
Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus que me concedeu a vida, me capacitou para superar desafios e dificuldades.

A minha esposa Renata pelo apoio, amor, amizade e companheirismo.

Aos meus pais Gecimar e Joana, por me proporcionarem a melhor criação que poderiam me dar.

Aos meus colegas do PROFMAT, em especial Francinaldo Bezerra e Jair Matos, certamente não chegaria até aqui sem vocês.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira pela paciência e compreensão durante as orientações para essa dissertação.

A CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

O foco deste trabalho é o Teorema de Pick. Esse teorema se refere ao cálculo de áreas de polígonos simples com vértices nos pontos de uma malha quadriculada no plano, o teorema permite calcular a área usando contagem, analisando os pontos do bordo e do interior do polígono em uma malha quadriculada. Apresentaremos um pouco da história de Georg Alexander Pick, além de observações necessárias para se compreender a demonstração do teorema e sua extensão. Finalmente mostramos atividades com o teorema de Pick no Geoplano e no software GeoGebra como recursos didáticos para a sala de aula.

Palavras-chave: Teorema de Pick, Polígonos Simples, Geoplano, GeoGebra.

ABSTRACT

The purpose of this project is Pick's Theorem, which is about of the calculation of simple polygons with vertices in the points of mesh grid at the plane. The theorem let us to calculate the area using counting, analyzing the points in the edge and the interior of the polygon at the mesh grid. We going to talk about a little bit of Georg Alexander Pick history, beyond the necessary observations to understand the theorem's demonstration and complexity. At last, we going to show you Pick's Theorem activities, in the Geoboard and on the GeoGebra software as didactic resources for classroom.

Keywords: Pick's Theorem, Simple Polygons, Geoboard, GeoGebra.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\Longrightarrow$	Implica em.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\equiv$	Congruente.
$\not\equiv$	Incongruente.
$\mid$	Divide.
$\nmid$	Não divide.
$\blacksquare$	Indica o fim de uma demonstração.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O cálculo de área de figuras planas desempenha um papel fundamental no ensino de Geometria e em diversas aplicações do cotidiano. Tais conceitos são introduzidos a partir das séries iniciais da educação básica.

Geralmente o cálculo de área é feito através da decomposição ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou ainda por meio de estimativas. Assim, pretende-se apresentar um método para o cálculo de área, a partir da contagem de pontos, ou seja uma contagem de grandezas discretas, o Teorema de Pick.

Neste trabalho será apresentado uma proposta para o ensino de áreas de polígonos simples, utilizando o do Teorema de Pick, através do Geoplano e o software GeoGebra como ferramentas auxiliares no processo de ensino-aprendizagem no ensino fundamental.

Serão abordados um breve histórico sobre o autor do teorema, as definições fundamentais para compreender a demonstração do teorema e sua extensão, além de atividades complementares com o teorema no Geoplano e no software GeoGebra como recursos didáticos para a sala de aula.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Teoria Van Hiele

A teoria de Dina e Peter van Hiele refere-se ao ensino e aprendizagem da Geometria. Esta teoria, desenvolvida nos anos 50, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico através de cinco níveis cada vez mais complexos. Esta progressão é determinada pelo ensino. Assim, o professor tem um papel fundamental ao definir as atividades adequadas para os alunos progredirem para níveis superiores de pensamento. Sem experiências adequadas, o seu progresso através dos níveis é fortemente limitado.

Níveis de aprendizagem da Geometria (van Hiele)

1: Visualização - Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência;

2: Análise - Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades;

3: Ordenação - Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras;

4: Dedução - Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo;

5: Rigor - Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria.

A teoria de van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução vão se articulando. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades. Desta forma, é importante que nas séries iniciais se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

Exemplo de ilustração das fases de aprendizagem para o conceito de retângulo

Fases de aprendizagem	Exemplo de atividade
Fase 1: *Informação*	O professor mostra aos alunos diversos retângulos e pergunta-lhes se são ou não retângulos. Os alunos são capazes de dizer se uma dada figura é ou não retângulo, mas as razões apresentadas serão apenas de percepção visual.
Fase 2: *Orientação guiada*	Realizam-se outras atividades sobre retângulos. Por exemplo, dobrar um retângulo segundo os seus eixos de simetria; desenhar um retângulo no Geoplano que tenha as diagonais iguais, construir um maior e um menor.
Fase 3: *Explicitação*	As atividades anteriores são seguidas por uma discussão entre alunos sobre o que descobriram.
Fase 4: *Orientação livre*	O professor coloca o problema de construir um retângulo a partir de dois triângulos.
Fase 5: *Integração*	Os alunos reveem e resumem o que aprenderam sobre as propriedades do retângulo. O professor ajuda a fazer a síntese.

Para ser adequado, isto é, para ter em conta o nível de pensamento dos alunos, o ensino da Geometria nas séries iniciais deve ter como preocupação ajudá-los a progredir do nível visual para o nível de análise. Assim, eles devem começar por identificar, manipular (construir, desenhar, pintar, etc.) e descrever figuras geométricas. Devem desenhar quadrados no geoplano e procurar retas paralelas ou retas perpendiculares. Atividades com o tangram, que permite a construção de figuras geométricas, enriquecem a capacidade de visualização e de identificação das propriedades das figuras, favorecendo o progresso na aprendizagem.

Capítulo 3

Teorema de Pick

3.1 Um Breve Histórico Sobre Georg Alexander Pick

Georg Alexander Pick nasceu em uma família judia em 1859, em Viena, Áustria e morreu em 1942 em Thereslenstadt, Bhoemia, atual República Tcheca. Sua mãe era Josefa Schleisinger e seu pai foi Adolf Josef Pick, diretor de uma instituição privada. Georg foi educado em casa por seu pai até os onze anos de idade, depois ele entrou na quarta classe do *Leopoldstaedter Communal Gymsasium*, ficando nesta escola até 1875, quando realizou exames de qualificação para universidade.

Entrou na Universidade de Viena em 1875. Publicou seu primeiro artigo matemático, no ano seguinte, com apenas dezessete anos de idade. Estudou Matemática e Física, graduando-se em 1879 com uma qualificação que lhe permitiria ensinar ambas as disciplinas.

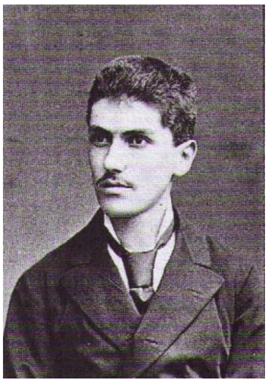


Figura 3.1: Georg Alexander Pick

Seu trabalho foi extremamente amplo no campo da matemática, em sua gama de 67 artigos foram abordados muitos tópicos, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. No entanto mais da metade de seus artigos estavam em funções de uma variável complexa, equações diferenciais e geometria diferencial. Termos como Matrizes Pick, Interpolação Pick-Nevanlinna e o Lema Schwarz-Pick são usados até hoje.

O seu artigo mais lembrado, no entanto, é o Teorema de Pick - Pick's Theorem que apareceu no seu artigo de oito páginas *Geometrisches zur Zahlenlehre* publicado em Praga em 1899. O resultado de seu trabalho não recebeu muita atenção inicialmente. Todavia, após a sua citação em 1969 pelo matemático H. Steinhaus, que o incluiu em um de seus livros, este resultado atraiu muita atenção e admiração por ser simples e elegante. Eleito como membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca, mas após os nazistas assumirem, ele foi excluído da academia e enviado para Theresienstadt em 13 de Julho de 1942, morrendo duas semanas mais tarde aos 82 anos. [2]

3.2 Teorema de Pick

O Teorema de Pick é interessante pois permite calcular a área de um polígono simples a partir de contagem de pontos de uma malha quadriculada. Serão introduzidas algumas definições necessárias para o entendimento das demonstrações que estão adiante.

Definição 1. Uma rede no plano ou (malha quadriculada) é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem em um ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m,n) são números inteiros (positivos, negativos ou zero). [1]

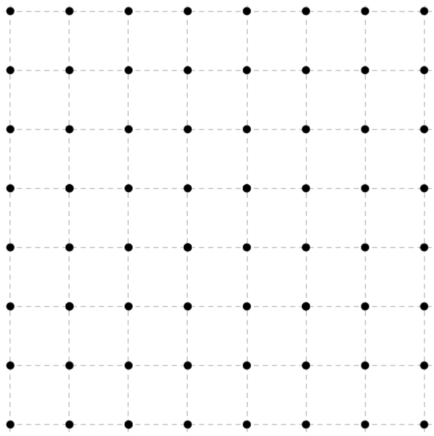


Figura 3.2: Malha quadriculada

Definição 2. Um polígono é dito simples quando não possui “buracos”e a intersecção de um par de arestas não consecutivas do polígono for sempre vazia. Em outras palavras, um polígono é simples se suas arestas não consecutivas, não se intersectam.

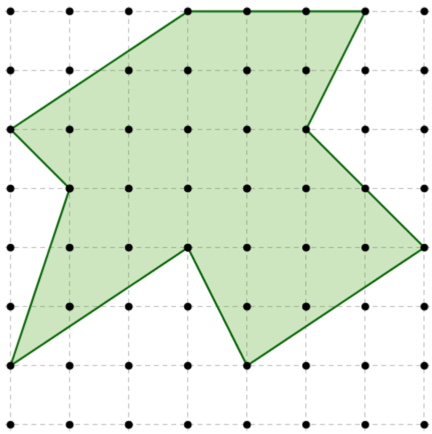


Figura 3.3: Polígono simples

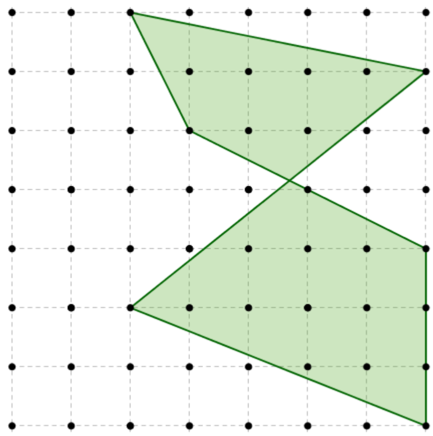


Figura 3.4: Polígono não simples

Teorema 3.1 (Teorema de Pick). *A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela expressão*

$$A = \frac{B}{2} + I - 1,$$

onde B é o número de pontos da malha situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da malha existentes no interior do polígono.

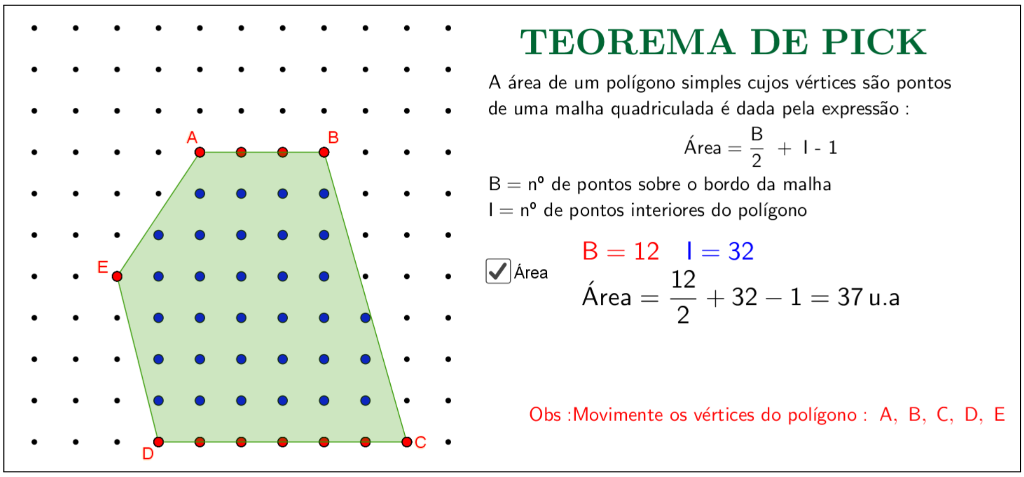


Figura 3.5: Área de um polígono simples no GeoGebra web

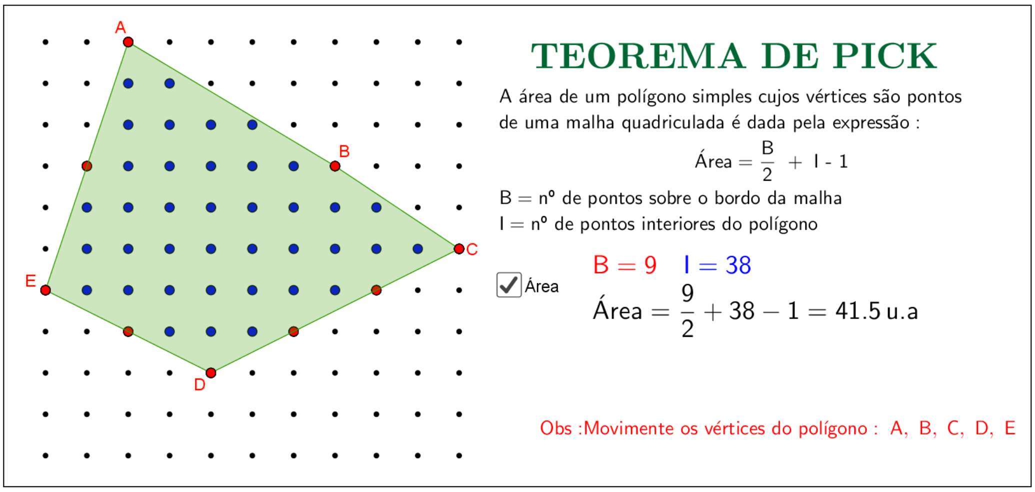


Figura 3.6: Área de um polígono simples no GeoGebra web

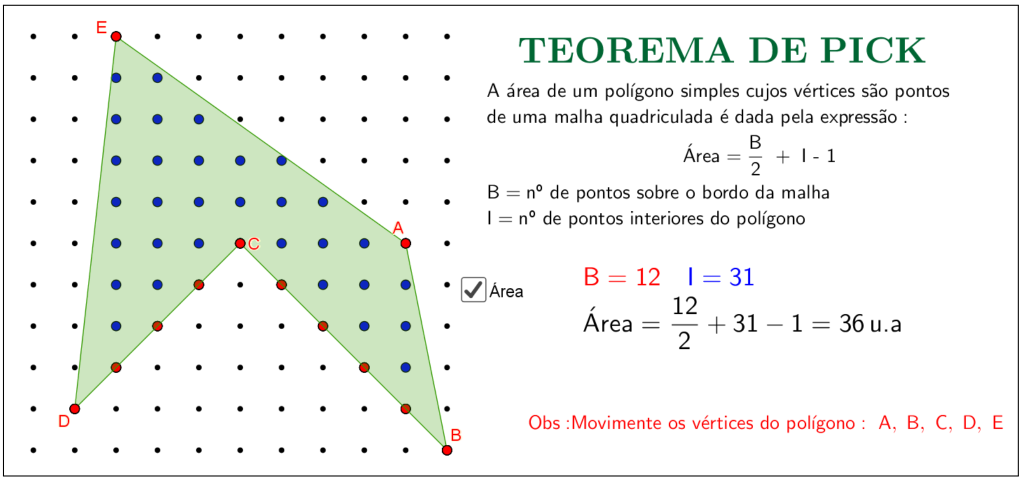


Figura 3.7: Área de um polígono simples no GeoGebra web

3.3 Triângulos fundamentais

Definição 3. Um triângulo é fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou interior) sobre a malha de pontos.

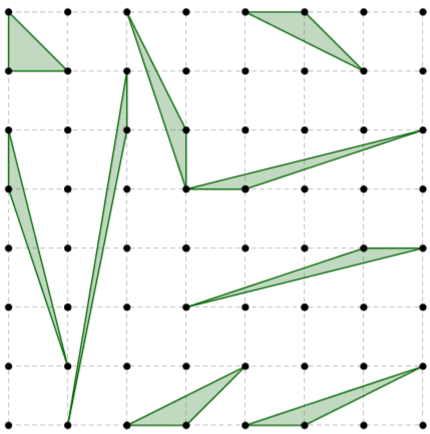


Figura 3.8: Triângulos fundamentais

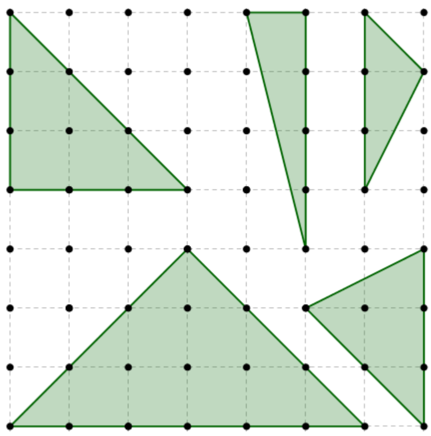


Figura 3.9: Triângulos não fundamentais

Teorema 3.2. *A área de um triângulo fundamental é igual a* $\frac{1}{2}$.

Demonstração: Sejam $A(0,0)$ e $B(m,n)$ as coordenadas (inteiras) dos dois vértices do triângulo fundamental ABC. Mostremos, inicialmente, que m e n são primos entre si. Com efeito, se $d > 1$ fosse um divisor comum de m e n, o ponto $P(m/d, n/d)$ estaria na malha e no interior do segmento de reta AB(Veja Figura3.10), logo ABC não seria fundamental.

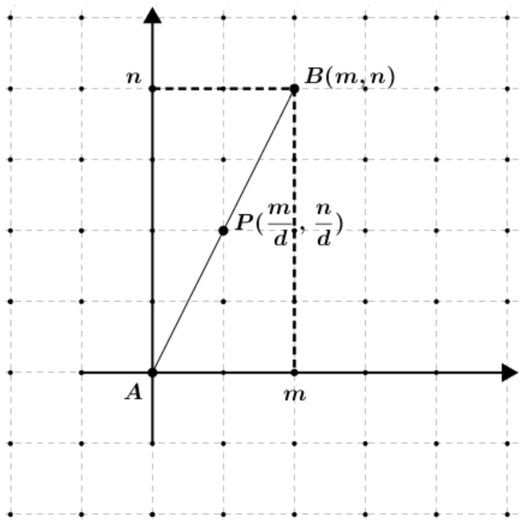


Figura 3.10: Ponto P na malha.

Suponhamos $m \neq 0$. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB é $y = (n/m)x + b$, onde b é a ordenada do ponto $D(0, b)$ no qual a reta corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm AB como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta tem a mesma área que ABC. Em particular área ABC = área ABD = $|bm|/2$, pois $|b|$ é a medida da base e $|m|$ da altura de ABC. Resta-nos então provar que $|b| = 1/|m|$.

Para isto consideremos, mais geralmente, a equação $y = (n/m)x + \beta$ de qualquer reta paralela a AB. Sabemos que β é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo vertical. Se a reta passa por algum ponto da malha com coordenadas (s, t) então $t = (n/m)s + \beta$, donde

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sn}{m}$$

Dentre estas retas, nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C, para a qual temos $\beta = b$. Logo $|b|$ é o menor valor positivo que β pode assumir. Por outro lado, como m e n são primos entre si, o lema abaixo nos assegura que existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$. Portanto $1/|m|$ é o menor valor positivo de β, donde $|b| = 1/|m|$.

Para completar a demonstração, falta considerar o caso $m = 0$. Mas $m = 0$ obriga $n = \pm 1$ e ABC é um triângulo retângulo, metade de um dos quadrados da malha, logo sua área é $1/2$. ■

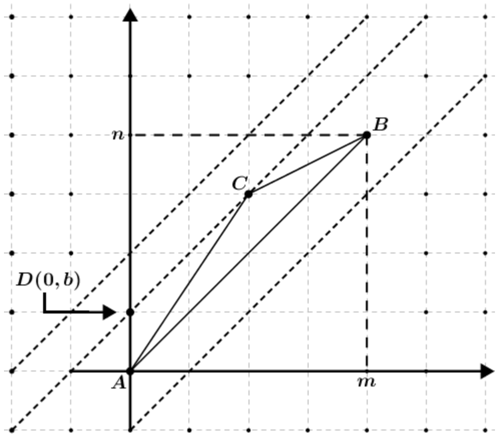


Figura 3.11: Triângulo ABC

3.4 Decomposição de Polígonos

Teorema 3.3 (Decomposição de um polígono)**.** *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de* $n-2$ *triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração: Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P, com n lados, o qual não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abscissa no bordo do polígono P. Como nenhum lado de P é vertical. A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A. Há duas possibilidades.

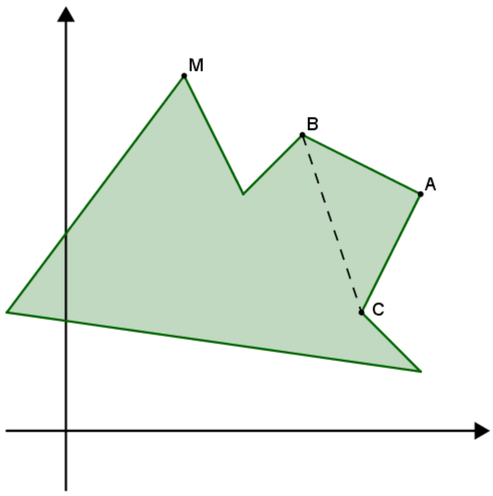


Figura 3.12: 1ª Possibilidade

1ª Possibilidade: O triângulo ABC não contém outros vértices de P, além de A, B e C. Nesse caso, o polígono P', obtido de P quando se substituem os lados AB e AC por BC, tem $n-1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, P' pode ser decomposto em $n-3$ triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para P, o que é uma contradição.

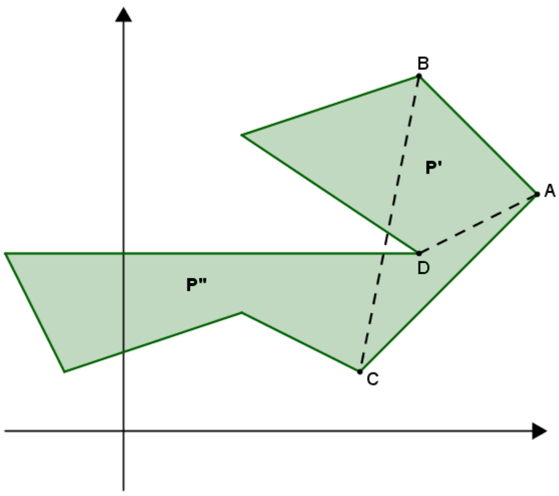


Figura 3.13: 2ª Possibilidade

2ª Possibilidade: O triângulo ABC contém, além de A, B e C, algum outro vértice do ponto P. Dentre esses, seja D o mais distante do lado BC. Então o segmento de reta AD decompõe P em dois polígonos P' e P'', o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo $n' + n'' = n + 2$. Como $n' \geqslant 3$ e $n'' \geqslant 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores do que n. O teorema então vale para P' e P'', que podem ser decompostos, respectivamente, em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições ao londo de AD, obtemos uma decomposição de P em $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$ triângulos, o que é uma contradição. ■

Corolário 1. *A soma dos ângulos internos de um polígono de* n *lados é igual a* $(n-2)\cdot\pi$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.3, um polígono de n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos justapostos com vértices nos vértices do polígono, tendo em cada triângulo π como soma dos ângulos internos. Logo, soma dos ângulos internos é dada por $(n - 2) \cdot \pi$. ■

Teorema 3.4. *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma malha pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração: Conforme o Teorema 3.3, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC que contém n pontos da malha no interior ou no bordo. Se existir realmente algum ponto P da malha no interior do triângulo, traçamos segmentos da reta ligando esse ponto aos vértices A, B e C e deste modo decompomos ABC em três triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da malha. Se houver pontos da malha sobre os lados de ABC, escolhemos um deles, digamos sobre AB, e o ligamos ao vértice C. Assim decompomos ABC em dois triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da malha. Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais. ■

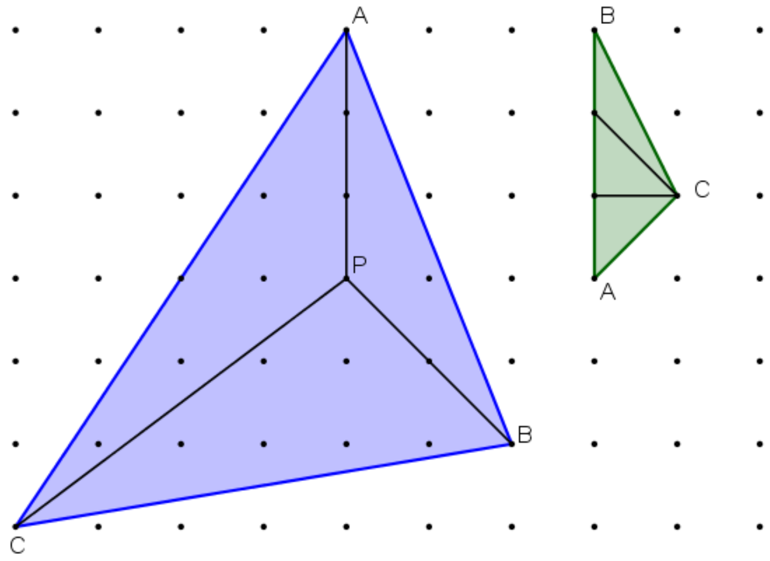


Figura 3.14: Triângulo ABC decomposto em triângulos fundamentais.

Exemplo 1. *Vamos calcular a área do polígono ABCBEFGHI, usando o Teorema 3.4.*

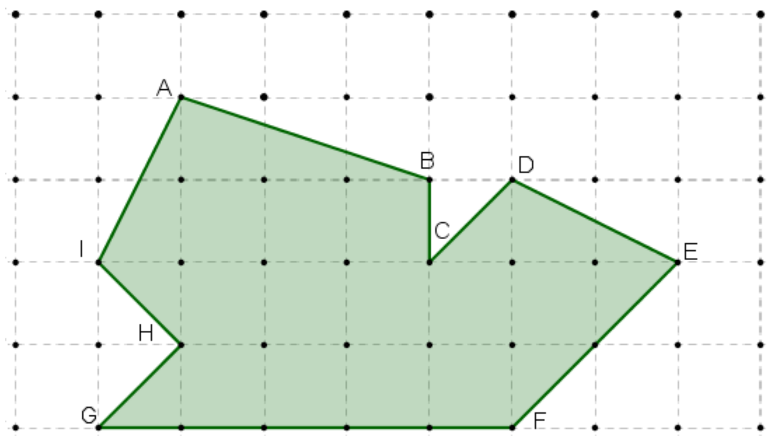


Figura 3.15: Polígono ABCDEFGHI

Solução: O polígono foi decomposto em 36 triângulo fundamentais, portanto sua área é,

$$A = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18\,ua$$

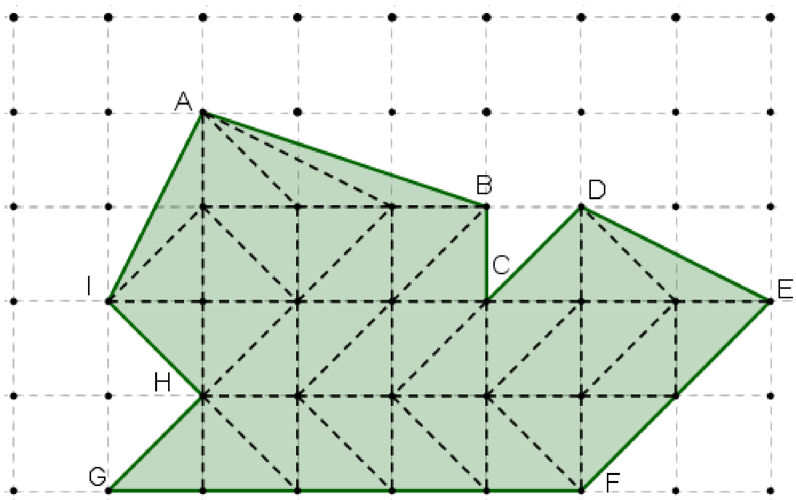


Figura 3.16: Polígono ABCDEFGHI decomposto em triângulos fundamentais.

3.5 Demonstração do Teorema de Pick

Teorema 3.5. *Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma malha de pontos. Indiquemos com B e I, respectivamente, o número de pontos da malha situados sobre o bordo e no interior de P, então $A = \frac{B}{2} + I - 1$.*

Demonstração: Para provar que $\frac{B}{2} + I - 1$ é a área do polígono P, basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P, conforme o Teorema 3.4 é igual a $B + 2 \cdot I - 2$, pois a área de P é igual $T/2$, em virtude do Teorema 3.2.

Para isso, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono$P$. Podemos chegar a essa soma por dois caminhos.

O primeiro, se há T triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $T \cdot \pi$.

O segundo consiste em calcular separadamente a soma S_b dos ângulos que tem vértice no bordo e a soma S_i dos ângulos cujos vértices estão no interior de P. Sejam B' o número de vértices de P e B'' o número de pontos da malha que que estão sobre o bordo de P mas não são vértices. Então $B = B' + B''$. Evidentemente, S_b é igual à soma $(B' - 2) \cdot \pi$ dos ângulos internos de P mais $B'' \cdot \pi$, pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com vértice em cada um dos B'' pontos do bordo de P que não são vértices de P, somam um ângulo raso, ou seja, π. Logo $S_b = (B' - 2) \cdot \pi + B'' \cdot \pi = (B - 2) \cdot \pi$. Por outro lado, em cada ponto da malha interior a P, os ângulos que tem como vértice somam quatro retos, logo $S_i = 2 \cdot I \cdot \pi$. Portanto $S_b + S_i = (B - 2 + 2 \cdot I) \cdot \pi$.

Comparando as duas contagens, vem: $T \cdot \pi = (B + 2 \cdot I - 2) \cdot \pi$, ou seja, $T = B + 2 \cdot I - 2$. ∎

Exemplo 2. *Vamos calcular a área dos seguintes polígonos usando o teorema de Pick.*

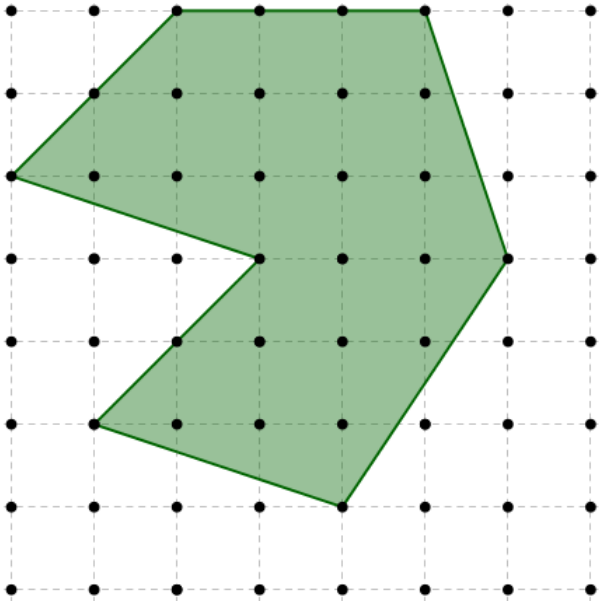


Figura 3.17: Polígono simples

Solução: O número de pontos sobre o bordo é 11, o número de pontos no interior do polígono é 17. Aplicando o teorema de Pick , temos:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$A = \frac{11}{2} + 17 - 1 + 2 = 5,5 + 17 - 1 = 21,5\, u.a.$$

3.6 Extensão do Teorema de Pick

Temos usado o Teorema de Pick apenas para o cálculo de áreas de polígonos simples. Vamos generalizar para o cálculo de área de uma região poligonal com buracos. Para isso vamos nos basear na demonstração de [4] e [5]. Porém, primeiro definiremos com mais clareza o que vem a ser região poligonal com buracos.

Definição 4. Uma região do plano delimitada por um polígono simples se chama uma região poligonal. Um buraco P_i de uma região poligonal P é uma região poligonal delimitada por um polígono simples contido em P.

Definição 5. Uma região poligonal P tem n buracos se existirem n buracos, $P_1, P_2, \cdots, P_n$, em P tais que para cada par P_i, P_j, com $i \neq j$, os polígonos que delimitam P_i e P_j são disjuntos e para todo índice i o buraco P_i não é nenhum buraco de nenhum P_j para todo $i \neq j$.

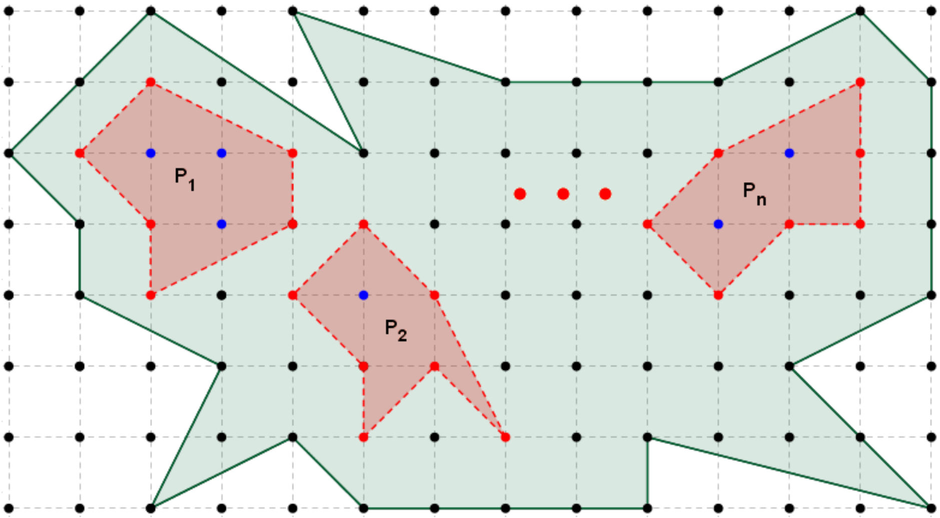


Figura 3.18: Região n buracos.

Teorema 3.6 (Teorema de Pick com buracos)**.** *Seja P uma região poligonal cujos vértices pertencem a uma malha de pontos. Então a área do polígono P é dada pelo Teorema Pick generalizado $A = \frac{B}{2} + I - 1 + n$, onde B, I e n, respectivamente, são o número de pontos da malha situados sobre o bordo, o número de pontos no interior e o número de buracos de P.*

Demonstração: Seja P região poligonal com vértices na malha pontos e n buracos, conforme a Figura 3.18. Vamos chamar A_0 a área da região poligonal sem os n buracos, com B_0 e I_0 (pontos do bordo e interior de P_0). E A_i as áreas dos n buracos, com $1 \leqslant i \leqslant n$, onde B_i e I_i (pontos do bordo e interior de P_i).

A área A da região poligonal, com B e I pontos do bordo e interior de P. É dada por:

$$A = A_0 - \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Aplicando o Teorema de Pick no polígono P_0, temos $A_0 = B_0/2 + I_0 - 1$, de modo análogo aplica-se em cada polígono P_i, então, temos, $A_i = B_i/2 + I_i - 1,$. Assim:

$$A = B_0/2 + I_0 - 1 - \sum_{i=1}^{n}(B_i/2 + I_i - 1)$$

$$= B_0/2 + I_0 - 1 + n - \sum_{i=1}^{n}(B_i/2 + I_i).$$

Observe que $B_0, B_1, \cdots, B_n$ representam todos os pontos do bordo do polígono P, tendo assim:

$$B = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i.$$

Por outro lado, $(I_0 - I_1 - \ldots - I_n) - (B_1 - B_2 - \ldots - B_n)$, são os pontos internos do polígono P, pois já retiramos do I_0 os pontos internos dos buracos e agora os pontos dos bordos dos buracos, restando os pontos internos do polígono P. Logo:

$$I = I_0 - \sum_{i=1}^{n}(B_i + I_i).$$

Portanto,

$$= B/2 + I - 1 + n = I_0 + B_0/2 - \sum_{i=1}^{n}(B_i/2 + I_i) - 1 + n = A$$

$\blacksquare$

Exemplo 3. *Vamos calcular a área do polígono abaixo.*

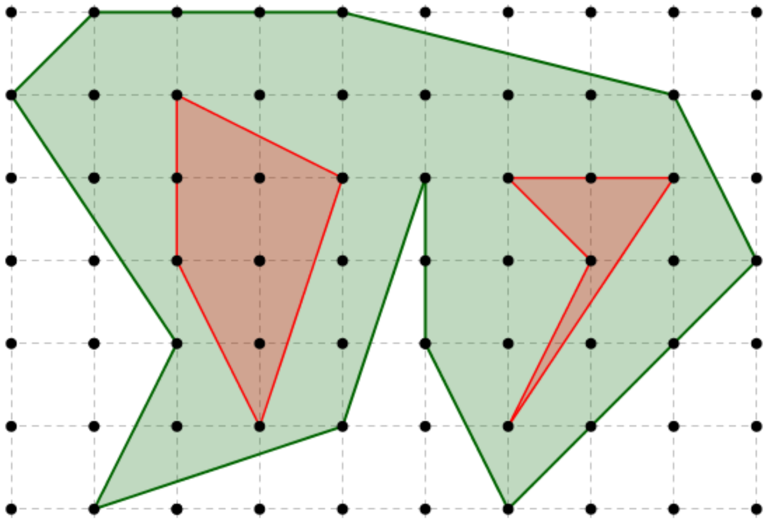


Figura 3.19: Polígono com dois buracos

Solução: Observemos que o número de pontos sobre o bordo é 26 (pontos no bordo do polígono mais os pontos no bordo dos buracos), 14 pontos no interior do polígono e 2 buracos. Aplicando o teorema de Pick com buracos, temos:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1 + n$$

$$A = \frac{26}{2} + 14 - 1 + 2 = 13 + 14 - 1 + 2 = 28\,u.a.$$

Capítulo 4

Geoplano e Geogebra

4.1 Geoplano

O Geoplano é um instrumento educacional simples, composto por uma base em formato geométrico com supinos, normalmente composto por uma base de madeira e com pregos formando sua malha.

É um recurso didático que pode ser explorado no ensino de matemática, recomendado em situações envolvendo o cálculo de perímetro, área, figuras simétricas, arestas, vértices, construção de polígonos entre outras situações envolvendo Geometria Plana. O Geoplano tem por objetivo principal levar os alunos a explorar figuras poligonais através da construção e visualização, facilitando o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial.

Um dos primeiros trabalhos sobre o Geoplano foi do Dr. Caleb Gattegno em 1961. A partir deste, muitos outros pesquisadores em Educação Matemática utilizam o geoplano como uma forte ferramenta para o ensino de geometria plana elementar, para o ensino de frações, dentre outros.

De acordo com [6] "o Geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas. "É fato que os chamados materiais concretos são alternativas interessantes para que alunos formulem hipóteses, troquem ideias, façam descobertas, ou seja, enriqueçam o momento de aprendizagem.

Ainda segundo Sabbatielo [6] indica que "em um sentido mais extenso o geoplano constitui um suporte concreto da representação mental, um recurso que leva à realidade a ideias abstratas. "

Para utilizá-lo, são necessários elásticos, de preferência coloridos, que servirão para a construção dos polígonos. Na apresentação do material para o aluno, é importante deixar que eles primeiramente manipulem livremente o material, para depois dar início às atividades específicas. Isso pode ser feito através de um desenho livre, no qual o aluno pode criar as figuras que quiser, explorando a sua criatividade.

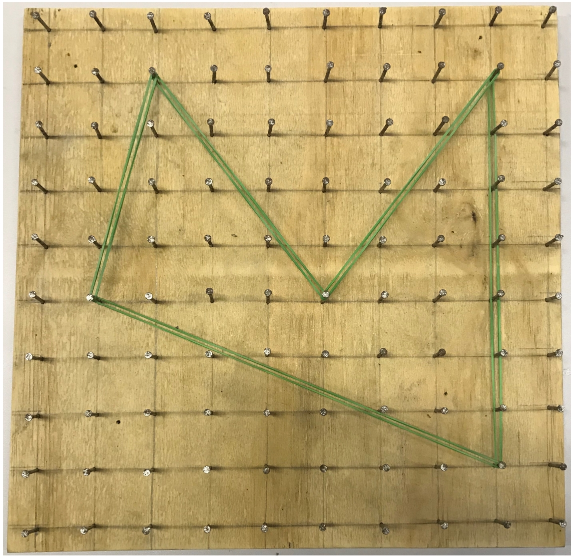


Figura 4.1: Geoplano 30 cm x 30 cm

4.2 Geogebra

O GeoGebra é um software de Matemática desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, para Educação Matemática nas escolas, [7]. Este software é um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas e secções cônicas como com funções. Além disso, as equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. Este software relaciona variáveis com números, vetores e pontos e oferece comandos como raízes de equações e extremos de funções. O software, portanto, permite associar uma expressão em Álgebra à uma representação de um objeto da Geometria e vice-versa.

É um software livre para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. Se tornou líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia e Matemática.

O GeoGebra pode ser adquirido a partir da Internet, sendo distribuído livremente de acordo com a GNU (General Public License). Em *www.geogebra.org* encontra-se o código fonte Java do GeoGebra e informações sobre sua tradução. Qualquer usuário pode fazer a instalação individual do programa é fácil e rápido.

A Interface deste software é constituída de uma janela gráfica (Ver Figura 4.2) que se divide em uma janela de visualização , uma janela de álgebra e um campo de entrada de comandos.

A janela de visualização possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário faz as construções geométricas com o mouse. Ao mesmo tempo as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela de álgebra.

O campo de entrada de comandos é usado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções diretamente, e estes são mostrados na área de desenho imediatamente após pressionar a tecla Enter .

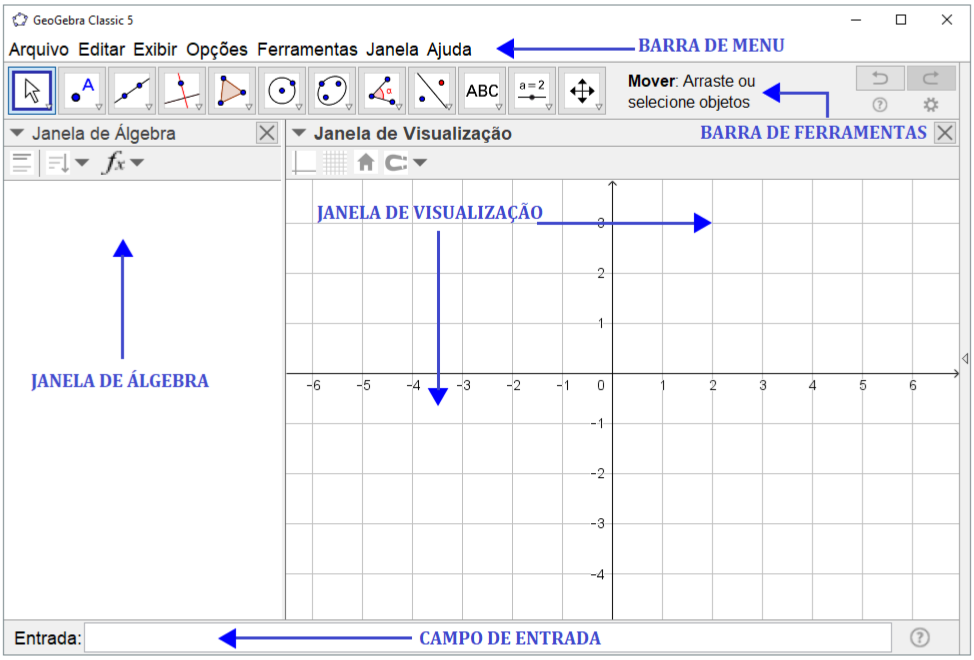


Figura 4.2: Interface do Geogebra

4.2.1 O Teorema de Pick no Geogebra

Foi desenvolvido um applet no geogebra sobre o teorema de Pick, em uma malha quadriculada os vértices de um polígono podem ser movimentados de modo a formar novos polígonos simples e determinar suas respectivas áreas. O applet está disponível em $www.geogebra.org/m/QC4s3HB7$. Ver a Figura 4.3 .

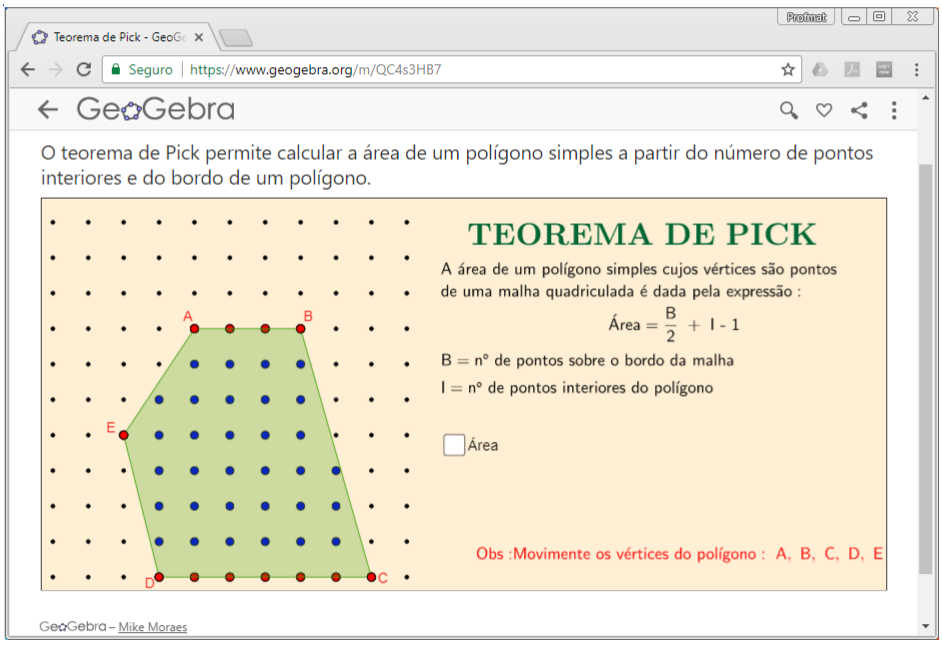


Figura 4.3: Geogebra web

Capítulo 5

Atividades

As atividades são direcionadas aos professores como forma de norteá-los na execução em sala de aula com os alunos do ensino fundamental II, afim de que haja aprendizagem sobre áreas de polígonos simples através do teorema de Pick. O aluno é levado ao manuseio do Geoplano, GeoGebra e preenchimento de tabelas. E com a ajuda do professor chegar na fórmula do teorema e suas aplicações.

5.1 Atividade: Construção polígonos simples no Geoplano.

Público alvo: alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II.
Objetivo: construir polígonos simples.
Pré-requisitos: definição de polígonos simples.
Material: geoplano e elásticos.
Tempo previsto: 1 aula.
Procedimentos: Nesta atividade, com os geoplanos em mãos os alunos ficam livres para criar os polígonos simples.

1. Utilizando a definição, crie polígonos simples no geoplano.

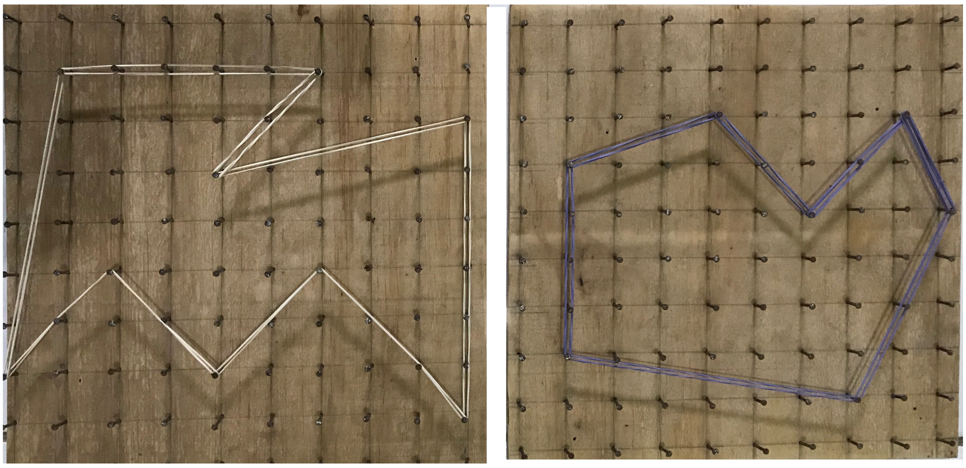


Figura 5.1: Dois geoplanos 30 cm x 30 cm

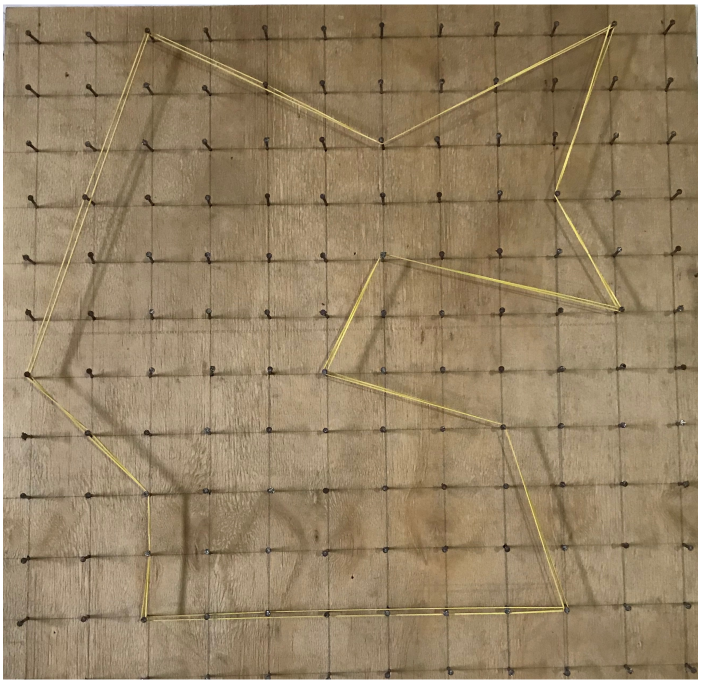


Figura 5.2: Um geoplano 50 cm x 50 cm

5.1.1 Atividade: Construção polígonos simples na malha quadriculada.

Público alvo: alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II.

Objetivo: construir polígonos simples.

Pré-requisitos: definição de polígonos simples.

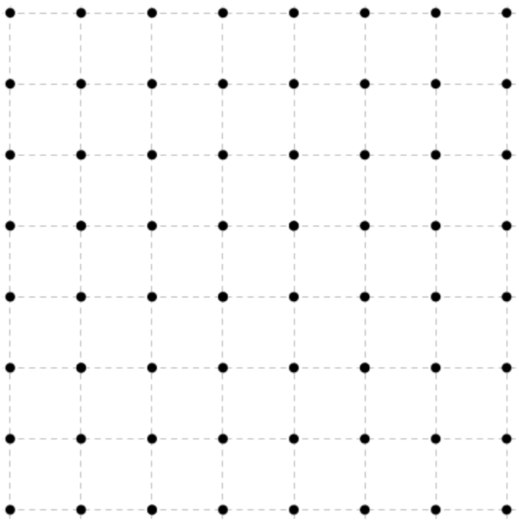
Material: malhas quadriculadas impressas.

Tempo previsto: 1 aula.

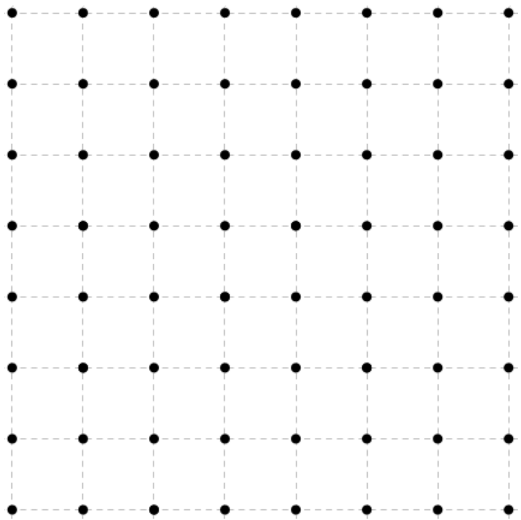
Procedimentos: Imprimir as malhas a seguir e entregar para os alunos.

1. Utilizando a definição crie polígonos simples na malha quadriculada.

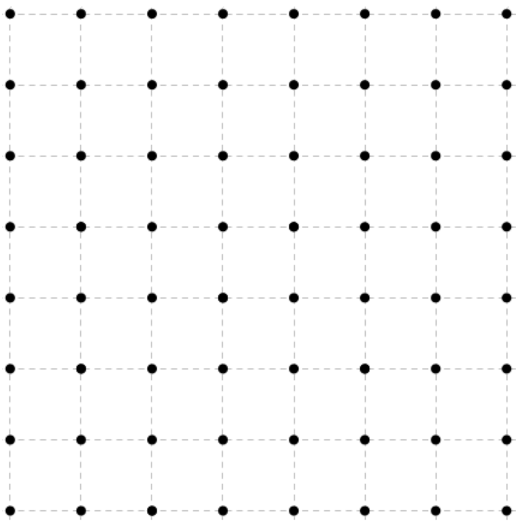
(a)



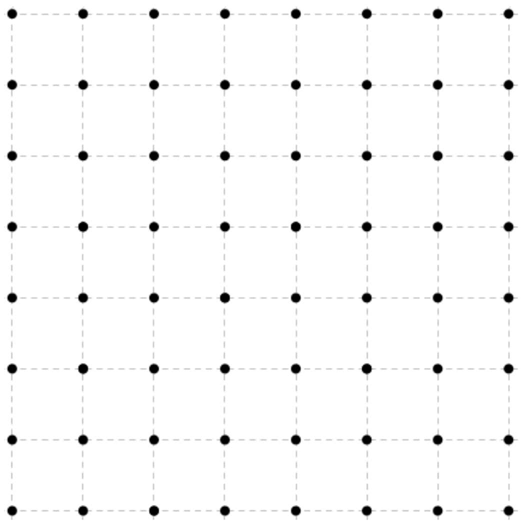
(b)



(c)



(d)



5.2 Atividade: Triângulos fundamentais nos polígonos simples.

Público alvo: alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II.

Objetivo: construir triângulos fundamentais nos polígonos simples.

Pré-requisitos: definição de polígonos simples.

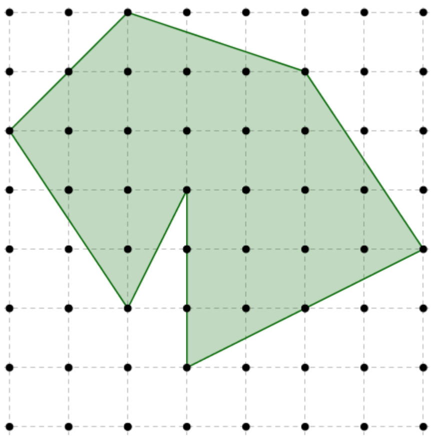
Material: malhas quadriculadas impressas.

Tempo previsto: 1 aula.

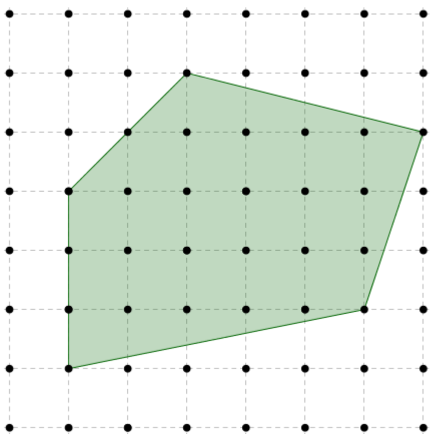
Procedimentos: Imprimir as malhas a seguir e entregar para os alunos.

1. Determinar quantos triângulos fundamentais existem nos seguintes polígonos simples.

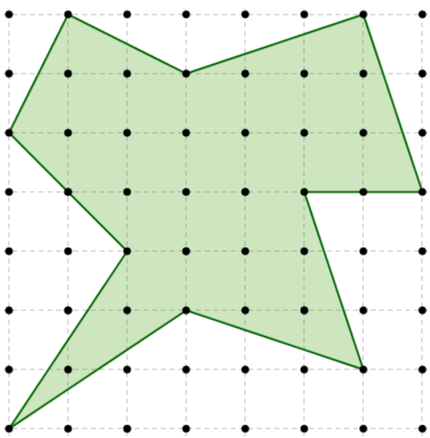
(a)



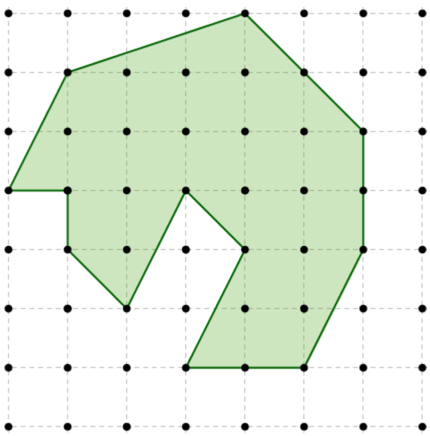
(b)



(c)



(d)



5.3 Atividade: Área de polígonos simples.

Público alvo: alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II.

Objetivo: calcular a área nos polígonos simples.

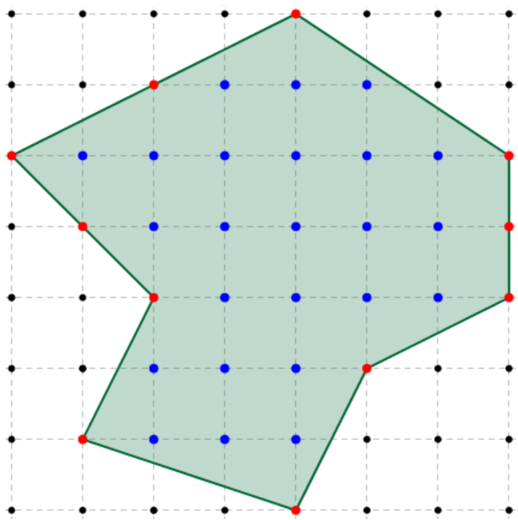
Pré-requisitos: Teorema de Pick.

Material: malhas quadriculadas impressas.

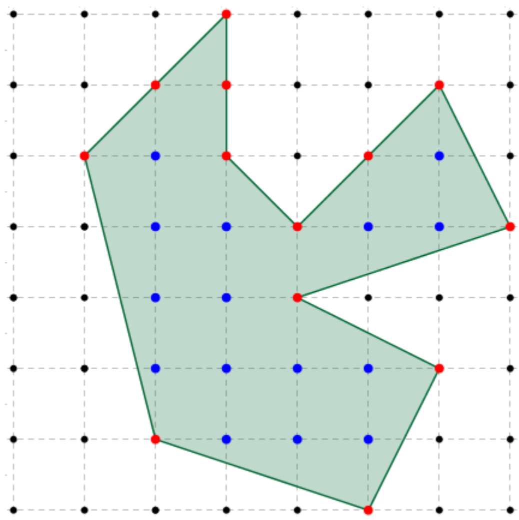
Tempo previsto: 1 aula.

Procedimentos: Imprimir as malhas a seguir e entregar para os alunos.

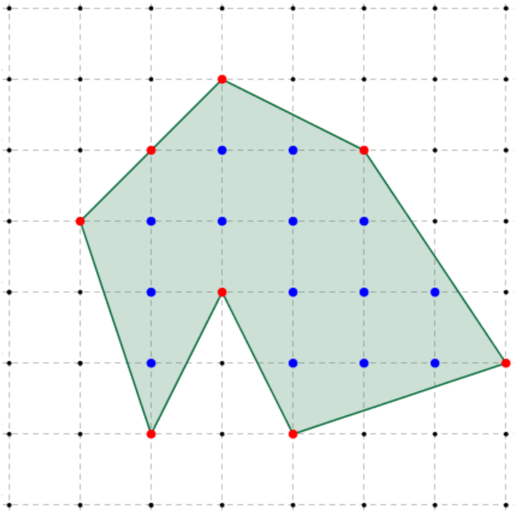
1. Calcular a área dos seguintes polígonos simples usando o Teorema de Pick:



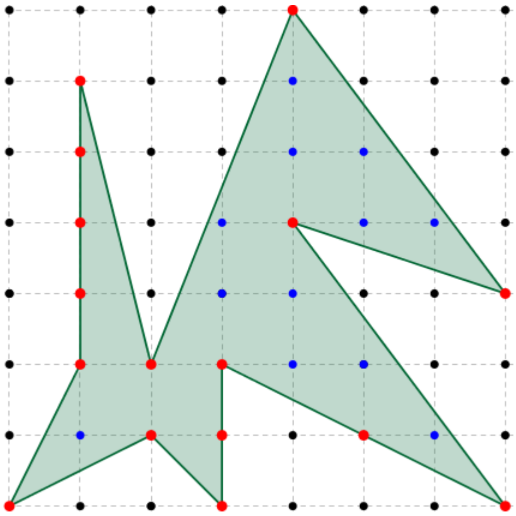
<table>
<tr><td>Nº de pontos do bordo</td><td>Nº de pontos interiores</td></tr>
<tr><td>$B =$</td><td>$I =$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do polígono
$A = \frac{B}{2} + I - 1$</td></tr>
</table>



<table>
<tr><td>Nº de pontos do bordo</td><td>Nº de pontos interiores</td></tr>
<tr><td>$B =$</td><td>$I =$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do polígono
$A = \frac{B}{2} + I - 1$</td></tr>
</table>



Nº de pontos do bordo	Nº de pontos interiores
$B =$	$I =$
Área do polígono $A = \frac{B}{2} + I - 1$	



Nº de pontos do bordo	Nº de pontos interiores
$B =$	$I =$
Área do polígono $A = \frac{B}{2} + I - 1$	

5.4 Atividade: Área de polígonos simples com buracos

Público alvo: alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II.

Objetivo: calcular a área nos polígonos simples.

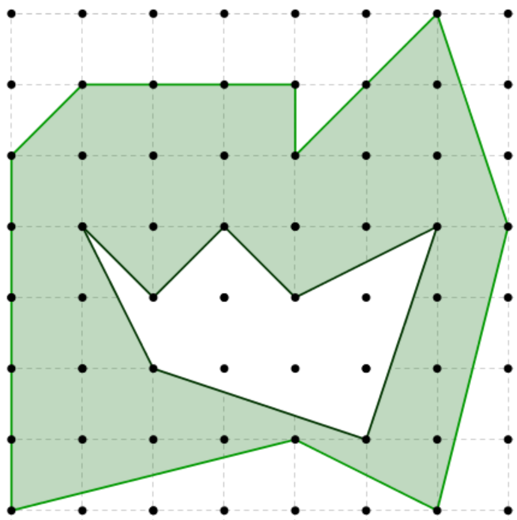
Pré-requisitos: Extensão do Teorema de Pick.

Material: malhas quadriculadas impressas.

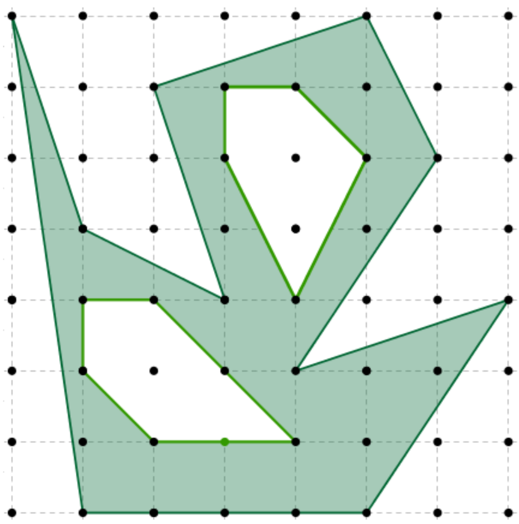
Tempo previsto: 1 aula.

Procedimentos: Imprimir as malhas a seguir e entregar para os alunos.

1. Calcular a área dos seguintes polígonos simples com buracos usando o Teorema de Pick:



N° de pontos do bordo	N° de pontos interiores	N° de buracos
$B =$	$I =$	$n =$
Área do polígono $A = \frac{B}{2} + I - 1 + n$		



N° de pontos do bordo	N° de pontos interiores	N° de buracos
$B =$	$I =$	$n =$
Área do polígono $A = \frac{B}{2} + I - 1 + n$		

Capítulo 6

Considerações Finais

Desta forma, o Teorema de Pick, possui uma grande utilidade para o estudo de áreas de polígonos simples e pode ser explorado de várias formas e níveis de profundidade. Pois percebe-se que ao mesmo tempo em que o teorema apresenta uma série de relações com outros conteúdos da Matemática a sua simplicidade também permite que o tema seja trabalhado de forma lúdica, até mesmo nas séries iniciais.

A utilização de recursos pedagógicos e ambientes computacionais também tem grande contribuição na construção dos conhecimentos matemáticos, especialmente os geométricos. Cabe, portanto, ao professor buscar na medida do possível a implementação de novas abordagens que saiam um pouco do tradicional, para que tragam o ensino de matemática para mais próximo da realidade dos alunos.

Espera-se que as atividades possam servir de subsídios aos profissionais da área, preocupados com as práticas cotidianas no ensino da Geometria, permitindo-lhes apresentação de outras abordagens no processo educativo.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias . Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[2] CONNOR, JJ O' e EF, Robertson. Georg Alexander Pick. Disponível em <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Pick.html>.

[3] Gaskell, R. W., et al. Triangulations and Pick's Theorem. Mathematics Magazine, vol. 49, no. 1, 1976, pp. 35 a 37. JSTOR, JSTOR, www.jstor.org/stable/2689882.

[4] DAVIS, T. Pick's Theorem, Math-Circle, 2003. Disponível em <http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf>.

[5] TAVARES,J.N. Teorema de Pick. Disponível em <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html>

[6] SABBATIELLO, E.E.. El Geoplano: Um recurso didáctico para la enseñança dinámica de la geometria plana elemental- Su aplicación e utilizacioón en la escuela primária. Edicciones G.ªD.Y.P., Buenos Aires, 1967.

[7] HOHENWARTER, M. e HOHENWARTER, J., Manual Oficial do GeoGebra, Universidade de Salzburgo, Austria, 2001.

[8] RODRIGUES, Ivana do Monte – Área de Figuras Planas e Teorema de Pick: Uma Abordagem Diferenciada para Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Manaus, 2014. Dissertação de Mestrado – UFAM.

[9] PONTE, J. P. SERRAZINA, L. Didática da Matemática do 1º Ciclo. Lisboa: Universidade Aberta.(2000).