

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TEORIA CLÁSSICA DE PONTOS FIXOS - RECENTES
PROGRESSOS E APLICAÇÕES

Valdenildo Alves de Araújo

MANAUS - 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Valdenildo Alves de Araújo

TEORIA CLÁSSICA DE PONTOS FIXOS - RECENTES PROGRESSOS E
APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Análise Funcional.

Orientador: Prof^o. Dr. Cleon da Silva Barroso

MANAUS - 2012

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A663t Araujo, Valdenildo Alves de
Teoria Clássica de Pontos Fixos – Recentes Progressos e
Aplicações / Valdenildo Alves de Araujo. 2012
35 f.: 31 cm.

Orientador: Cleon da Silva Barroso
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Pontos Fixos. 2. Análise Funcional. 3. Geometria Diferencial. 4.
Matemática. I. Barroso, Cleon da Silva II. Universidade Federal do
Amazonas III. Título

Valdenildo Alves de Araújo

TEORIA CLÁSSICA DE PONTOS FIXOS - RECENTES PROGRESSOS E
APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal do Amazonas, como
requisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Matemática, na área de
concentração em Análise Funcional.

Manaus, 04 de Dezembro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Cleon S. Barroso

Prof^o Dr. Cleon da Silva Barroso, Presidente
Universidade Federal do Ceará -
Universidade Federal do Amazonas

Marcus Antonio

Prof^o Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos, Membro
Universidade Federal do Amazonas

Cícero Mota

Prof^o Dr. Cícero Augusto Mota Cavalcante, Suplente
Universidade Federal do Amazonas

AGRADECIMENTOS

A Deus pela dádiva desta vida e por me proporcionar esse momento.

Aos meus pais, Antonia Mourão e Ivan Araújo, por me apoiarem e incentivar nos momentos mais críticos e por toda a educação prestada para que me tornasse uma pessoa mais digna.

A todos meus amigos do mestrado, em particular, Adrian, Clebes, Jefferson, Lauriano, Marcos e Rafael pelo apoio, companheirismo e solidariedade prestada no período em que estive cursando o Mestrado.

A todos os amigos e familiares, em particular, Cleiton, Cristiane, Efraim, José Maurício e Samuel pelo o apoio psico-espiritual.

A todos os professores do departamento de Matemática da UFAM por contribuírem na construção do conhecimento matemático obtido.

Aos professores Marcus Antonio Marrocos e Cícero Augusto Mota Cavalcante por aceitarem o convite para serem membros desta banca.

A Igreja Batista Ágape pelo apoio espiritual.

A minha amada namorada Neriane Rodrigues de Souza pelo apoio e incentivo durante esse período em que estive cursando o Mestrado e compreender minha ausência em diversos momentos ao seu lado.

E em especial ao professor Cleon da Siva Barroso pela paciência, esforço, dedicação e toda orientação prestada neste trabalho, pois sem sua contribuição esse trabalho não seria possível.

RESUMO

TEORIA CLÁSSICA DE PONTOS FIXOS - RECENTES PROGRESSOS E APLICAÇÕES

Este trabalho tem por objetivo demonstrar dois resultados da Teoria dos Pontos Fixos, a saber os teoremas de Brouwer e Schauder-Tychonoff, apresentar alguns recentes progressos na linha de pesquisa bem como explorar algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Teoria dos Pontos Fixos; Teorema de Brouwer; Teorema de Schauder-Tochonoff; Lema de Sperner; Epidemias de doenças infecciosas; Maximização de Pareto com respeito a cones; Espaços de Dimensão infinita.

ABSTRACT

CLASSICAL FIXED POINTS THEORY - RECENT PROGRESS AND APPLICATIONS

Abstract. This work has as aim to demonstrate two classical results from the Fixed Point Theory, namely the theorems of Brouwer and Schauder-Tychonoff; to present some recent progresses in this research line, as well as to explore some of its applications.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	3
1.1 Noções de Topologia	3
1.1.1 Convergência	4
1.2 Aplicações Contínuas	4
1.3 Topologia Vetorial	5
1.4 Base de Vizinhanças de um Ponto	5
1.5 Base para uma Topologia	6
1.6 Compacidade	7
1.6.1 Cobertura	7
1.6.2 Subcobertura	7
1.6.3 Compacidade	8
1.7 Seminorma	8
1.8 Topologia Gerada por Seminormas	9
1.9 Convexidade	11
1.10 Espaços de Funções Contínuas Vetoriais	11
2 Uma prova Combinatória do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	12
2.1 Introdução	12
2.2 Lema de Sperner	12
2.2.1 Simplexo	13
2.2.2 Subdivisão Simplicial	13
2.2.3 Subdivisão Baricêntrica	14
2.2.4 Coloração Própria de uma Subdivisão Simplicial	15
2.2.5 Lema de Sperner	15
2.3 Redução do Teorema de Brouwer à n-simplexos	18
2.4 Prova do Teorema de Brouwer	19
3 Teorema de Schauder-Tychonoff	21
3.1 Introdução	21
3.2 A Propriedade do Ponto Fixo	21
3.3 Prova do Teorema 3.2	22
4 Aplicações	26
4.1 Um Problema de Epidemia de Doenças Infecciosas	26
4.1.1 Um modelo a partir de uma equação integral não-linear	26
4.1.2 Resultado de Existência de Soluções de Equilíbrio	28
4.2 Um Problema de Otimização em Economia	30
4.2.1 Otimização de Pareto com respeito a cones em dimensão infinita	30

4.2.2	Uma Interpretação do Problema de Pareto via Pontos Fixos	31
4.2.3	Um Teorema de Ponto Fixo para Aplicações Multi-Valuadas	32
4.2.4	Uma Solução para o Problema de Pareto Abstrato	34
	Referências Bibliográficas	35
	Referências Bibliográficas.	35

Introdução

Um ponto fixo de uma função $f: X \rightarrow X$ definida num espaço topológico X é um elemento $x \in X$ que satisfaz a igualdade

$$f(x) = x.$$

A Teoria de Pontos Fixos investiga condições sobre f e X , bem como técnicas que garantam a existência de pontos fixos. Diz-se então que o espaço X possui a propriedade do ponto fixo se toda aplicação contínua $f: X \rightarrow X$ possui ao menos um ponto fixo. Por exemplo, não é difícil mostrar que o intervalo $X = [0, 1]$ goza dessa propriedade.

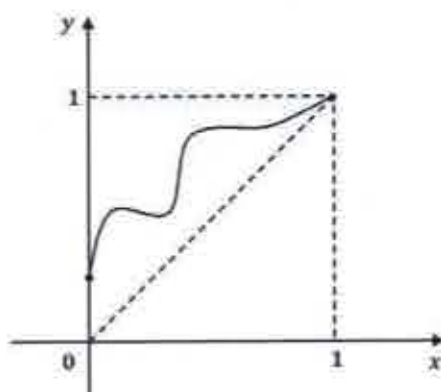


Figura 1

Em geral, não existe uma caracterização dos espaços X que possuem a propriedade do ponto fixo (**PPF**). Sabe-se, todavia, que compacidade é uma hipótese razoável muito embora ela não seja suficiente. Por exemplo, o conjunto $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ não possui a **PPF** pois a função $f: [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x - 1}{2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

não possui pontos fixos.

O Teorema de Brouwer [2] é um dos clássicos teoremas da teoria e sua importância se deve ao fato de ser um resultado com inúmeras aplicações em várias áreas do conhecimento. Em linhas gerais, ele garante que compacidade e convexidade em \mathbb{R}^n , juntas, são condições

suficientes para assegurar a existência de pontos fixos. Mais precisamente, todo subconjunto compacto convexo do \mathbb{R}^n possui a **PPF**. Alguns comentários são meritórios. Em primeiro lugar, sabe-se que o referido teorema deixa de ser válido se alguma dessas hipóteses é suprimida. Observe que $X = [0, 1]$ é compacto convexo. Entretanto, $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ é compacto mas não-convexo. Entretanto, existem conjuntos não-convexos que possuem a **PPF**. Um tal exemplo é o conjunto

$$X = \left\{ (x, y) : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \right\} \cup \left\{ \text{Arco ligando os pontos } (0, 1) \text{ e } \left(\frac{1}{\pi}, 0\right) \right\}.$$

Hoje em dia, existem várias demonstrações do resultado desse resultado (cf. [2, 8, 9, 12]). A demonstração original de Brouwer usa técnicas de topologia algébrica. Em 1978, J. Milnor [8] publicou uma demonstração inteiramente analítica do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

O primeiro objetivo desta dissertação é apresentar uma demonstração combinatória desse resultado, baseada na referência [12]. Um casamento entre duas áreas da matemática: Topologia e Combinatória. A prova baseia-se no tão conhecido Lema de Sperner que tem como enunciado: Toda coloração própria de uma subdivisão simplicial de um n -simplexo S possui um número ímpar de células com cores diferentes em todos os vértices. Os requisitos embutidos neste enunciado, bem como a demonstração do lema serão apresentados no Capítulo 2.

Nosso segundo objetivo vai na direção de demonstrarmos uma das mais relevantes generalizações desse resultado em espaços de dimensão infinita. A saber, o Teorema de Schauder-Tychonoff. Em linhas gerais, o resultado garante que todo subconjunto compacto e convexo de um espaço localmente convexo de Hausdorff possui a **PPF**. Em verdade, a primeira vez que esse resultado surgiu foi em 1930 num trabalho de autoria do alemão Juliusz Pawel Schauder ([10]). Schauder, como é popularmente conhecido, idealizou uma técnica de projeção e reduziu o problema de achar pontos fixos no ambiente dos espaços de Banach ao correspondente problema em espaços de dimensão finita. Em 1935, o russo Andrey Nicolae-vich Tychonoff ([13]) provou a versão geral do teorema de Schauder para espaços localmente convexos. O Capítulo 3 desta dissertação é todo dedicado a exposição e demonstração do Teorema de Schauder-Tychonoff.

O terceiro objetivo desta dissertação tem como finalidade ilustrar o uso de teoremas de pontos fixos como ferramentas para solução de problemas reais. Mais precisamente, estudaremos dois problemas um relacionado ao controle de epidemias de doenças infecciosas e o outro relacionado a um problema de otimização em Economia, o chamado Problema de Pareto. Faremos isso no capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma apresentação dos pré-requisitos necessários ao desenvolvimento do tema em estudo. O foco principal incide sobre os espaços localmente convexos, que são espaços vetoriais topológicos cuja a topologia é gerada por uma família de seminormas.

1.1 Noções de Topologia

Definição 1.1. *Dado um conjunto não-vazio X , uma topologia em X é uma família \mathcal{T} de subconjuntos de X gozando das seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Dada uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ de elementos de \mathcal{T} , tem-se $\bigcup_{\alpha} A_\alpha \in \mathcal{T}$.
3. Dada uma quantidade finita de elementos A_1, \dots, A_k em \mathcal{T} , tem-se $\bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{T}$.

O par (X, \mathcal{T}) é então dito ser um espaço topológico e os membros da família \mathcal{T} são chamados de abertos do espaço.

Definição 1.2. *Uma topologia é dita ser de Hausdorff quando dados $x \neq y$ em X , existem abertos disjuntos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$ e $y \in B$.*

Definição 1.3. *Um subconjunto F de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é dito ser fechado quando o seu complementar $X \setminus F$ é aberto.*

Definição 1.4. *Dado um subconjunto B de um espaço topológico X , definimos o interior de B como a união de todos os conjuntos abertos contidos em B .*

Notação 1.1. *Usaremos $\text{int}B$ para representar o interior de B .*

1.1.1 Convergência

Definição 1.5. *Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. Uma sequência (x_n) de pontos em X é dita ser convergente para um ponto $p \in X$, se para todo aberto $A \subset X$ contendo p , existe um índice r de maneira que:*

$$x_n \in A, \quad \forall n \geq r.$$

O ponto p é dito ser o limite da sequência (x_n) , e usaremos indistintamente $\lim x_n = p$ ou $x_n \rightarrow p$ para indicar tal evento.

1.2 Aplicações Contínuas

Definição 1.6. *Dados (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função de X em Y , dizemos que f é:*

- *contínua se $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1, \forall A \in \mathcal{T}_2$.*
- *sequencialmente contínua se $f(x_n) \rightarrow f(x)$ em Y , sempre que $x_n \rightarrow x$ em X .*

Convém observar, o fato bem conhecido, que o conjunto das funções contínuas de X em Y define um espaço vetorial.

Proposição 1.1. *Sejam (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) espaços topológicos. Suponha que (X, \mathcal{T}_1) seja metrizável. Então uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, f é sequencialmente contínua.*

Demonstração. (\implies) Seja V um aberto em Y contendo $f(p)$. Da continuidade de f vem que existe um $\delta > 0$ de maneira que:

$$f(B(p, \delta)) \subset V$$

em que $B(p, \delta)$ indica a bola centrada em p , de raio δ , relativo a uma métrica que define a topologia de X . Suponha que $x_n \rightarrow p$ em X . Então existe um índice r tal que para todo $n \geq r$ tem-se $x_n \in B(p, \delta)$. Daí segue-se que $f(x_n) \in f(B(p, \delta))$ e portanto $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq r$, o que prova que $f(x_n) \rightarrow f(p)$.

(\impliedby) Se f não fosse contínua em p existiria um aberto V em Y , contendo $f(p)$, tal que:

$$f(B(p, \delta)) \not\subset V, \quad \forall \delta > 0,$$

em que $B(p, \delta)$ indica a bola centrada em p , de raio δ , relativo a uma métrica que define a topologia de X . Em particular,

$$f(B(p, 1)) \not\subset V, \quad f\left(B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) \not\subset V, \quad f\left(B\left(p, \frac{1}{3}\right)\right) \not\subset V, \dots$$

e portanto, para cada $n \geq 1 \exists x_n \in X$ tal que $x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ e $f(x_n) \notin V \forall n$. Donde a sequência $x_n \rightarrow p$ em X , ao passo que $f(x_n) \not\rightarrow f(p)$ em Y . Isso contradiz a hipótese de continuidade sequencial sobre f . ■

Definição 1.7. Uma função real $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *semicontínua inferiormente* se sempre que $x_n \rightarrow x$ em A , tem-se que

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Uma função real $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *semicontínua superiormente* se sempre que $x_n \rightarrow x$ em A , tem-se que

$$f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

1.3 Topologia Vetorial

Seja X um espaço vetorial (sobre \mathbb{R}). Uma topologia \mathcal{T} em X é dita ser uma topologia vetorial, se as operações básicas de adição de vetores e multiplicação por escalar forem contínuas. O par (X, \mathcal{T}) é chamado de Espaço Vetorial Topológico.

Exemplo 1.1. Considere em \mathbb{R}^N a topologia usual dada pela norma euclidiana. Então as funções $S: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $P: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definidas, respectivamente, por $S(x, y) = x + y$ e $P(\lambda, x) = \lambda x$ são contínuas.

Basta mostrar que ambas funções são sequencialmente contínuas, pois \mathbb{R}^N é um espaço topológico metrizável. Suponha que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Então,

$$|x_n + y_n - x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \rightarrow 0,$$

pois $|x_n - x| \rightarrow 0$ e $|y_n - y| \rightarrow 0$. Isso implica que $S(x_n, y_n) \rightarrow S(x, y)$. De modo análogo, mostra-se que P é sequencialmente contínua, através da desigualdade triangular.

1.4 Base de Vizinhanças de um Ponto

Dados um espaço topológico (X, \mathcal{T}) e um ponto $p \in X$, uma família de abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é dita ser uma base de vizinhanças de p em X se satisfaz a seguinte propriedade:

- Se A é um aberto em X contendo o ponto p , então existe algum $U_\alpha \in \{U_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ tal que $p \in U_\alpha \subset A$.

Proposição 1.2. Se (X, \mathcal{T}) é um espaço vetorial topológico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma base de vizinhança da origem, então $\{p + U_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ é uma base de vizinhança do ponto p , para todo $p \in X$.

Demonstração. Seja $p \in X$ um ponto qualquer e $A \subset X$ um aberto contendo p . Considere a função $\varphi: X \rightarrow X$ definida por $\varphi(x) = x + p$. Então φ é contínua, pois, $\varphi(x) = x$ e

$\vartheta(x) = p$ são funções contínuas e a soma de funções contínuas é um função contínua. Além disso, note que $\varphi(0) = p$. Por continuidade, existe um aberto B em X contendo a origem tal que $\varphi(x) \in A, \forall x \in B$. Por hipótese, existe um aberto U_α em $\{U_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ tal que $0 \in U_\alpha \subset B$. Portanto $\varphi(x) \in A, \forall x \in U_\alpha$. De outra forma temos $p + U_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset A$. ■

1.5 Base para uma Topologia

Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X é dita ser:

"uma base para uma topologia em X ,"

se as seguintes condições se verificam:

1. $\forall x \in X$ existe $A \in \mathcal{B}$ contendo x .
2. Se $x \in A \cap B$ com $A, B \in \mathcal{B}$, então existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

Exemplo 1.2. Se (M, d) é um espaço métrico, então o conjunto formado por todas as bolas de M (com raio positivo) é uma base para uma topologia em M .

Proposição 1.3. Se \mathcal{B} é uma base para uma topologia em X , então \mathcal{B} gera uma topologia. Mais precisamente, o conjunto

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists A \in \mathcal{B}; x \in A \subset U\}$$

define uma topologia em X .

Demonstração. (a) É claro que $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(b) $X \in \mathcal{T}$, isso decorre da 1ª propriedade de base.

(c) Se $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é uma família de elementos de \mathcal{T} , então $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \mathcal{T}$. De fato, se $x \in U \Rightarrow x \in U_{\alpha_0}$ para algum α_0 . Então, existe (por hipótese) $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = U$.

(d) Mostraremos por indução que se $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, então $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$. Para $n = 2$. Faça $U = U_1 \cap U_2$. Se $x \in U \Rightarrow x \in U_1$ e $x \in U_2$. Então existem $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ tais que $x \in A_1 \subset U_1$ e $x \in A_2 \subset U_2$. Donde conclui-se que $x \in A_1 \cap A_2 \subset U_1 \cap U_2$. Suponha por indução que o resultado vale para n . Sejam U_1, \dots, U_n, U_{n+1} elementos quaisquer em \mathcal{T} . Faça $U = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap U_{n+1}$. Pela hipótese de indução combinada com o caso $n = 2$, concluímos que $U \in \mathcal{T}$. ■

Proposição 1.4. A topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ dada na Proposição 1.3 coincide com o conjunto de todas as uniões de elementos de \mathcal{B} .

Demonstração. Seja Θ o conjunto designado acima. Seja $A \in \Theta$ qualquer. Então $A = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} A_\sigma$ com $A_\sigma \in \mathcal{B}$. Considere $A_\sigma \in \mathcal{T}_B$. Como \mathcal{T}_B é uma topologia (pela proposição anterior), segue-se que $A \in \mathcal{T}_B$, ou seja, $\Theta \subset \mathcal{T}_B$. Seja $U \in \mathcal{T}_B$ qualquer. Então para cada $x \in U$ existe $A_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A_x \subset U$. De outro modo temos que $\{x\} \subset A_x \subset U, \forall x \in U$. Assim,

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} A_x \subset \bigcup_{x \in U} U = U$$

e cada $A_x \in \mathcal{B}$. Portanto, $U = \bigcup_{x \in U} A_x$ e cada $A_x \in \mathcal{B}$. ■

Observação 1.1. Como um exemplo, vemos que se $(\|\cdot\|)$ for um espaço vetorial normado então a topologia métrica gerada pela norma é vetorial.

1.6 Compacidade

Nesta seção revisaremos um conceito fundamental em topologia que possui um grande impacto em várias áreas da Matemática, a saber, o conceito de compacidade.

1.6.1 Cobertura

Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e A um subconjunto de X . Uma família $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de abertos de X é dita ser cobertura de A em X se $A \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Exemplo 1.3. Sabemos que \mathbb{Q} é enumerável, então $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$. Considere $U_n = (r_n - 1, r_n + 1)$, isto é,

$$U_1 = (r_1 - 1, r_1 + 1), U_2 = (r_2 - 1, r_2 + 1), \dots$$

Assim temos que $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$. Portanto a família $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de \mathbb{Q} em \mathbb{R} .

1.6.2 Subcobertura

Dado uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de um conjunto A , uma subcobertura de A é uma subfamília $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma}$, com $\Gamma \subset \Lambda$, tal que:

$$A \subset \bigcup_{\sigma \in \Gamma} U_\sigma.$$

Exemplo 1.4. Considere a cobertura de \mathbb{Q} dada no Exemplo 1.3. Usando o fato de que \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , existem $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_k}, \dots$ em \mathbb{Q} tais que

$$r_{n_1} \in (r_1 - 1, r_1 + 1), r_{n_2} \in (r_2 - 1, r_2 + 1), \dots, r_{n_k} \in (r_n - 1, r_n + 1), \dots$$

Segue-se

$$r_1 \in (r_{n_1} - 1, r_{n_1} + 1), r_2 \in (r_{n_2} - 1, r_{n_2} + 1), \dots$$

Portanto,

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n_k \in \Gamma} U_{n_k},$$

com $\Gamma = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ou seja, $\{U_{n_k} : n_k \in \Gamma\}$ define uma subcobertura para \mathbb{Q} .

1.6.3 Compacidade

Uma subconjunto K de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é dito ser compacto em X se toda cobertura de K possui uma subcobertura finita.

Propriedade da Interseção Finita - (P.I.F)

Dizemos que um subconjunto C de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) possui a Propriedade da Interseção Finita se dada qualquer família $\{F_\sigma : \sigma \in L\}$ de subconjuntos fechados de C satisfaz a condição:

$$\text{Dado um subconjunto finito } \Lambda \subset L, \text{ tem-se } \bigcap_{\sigma \in \Lambda} F_\sigma \neq \emptyset.$$

1.7 Seminorma

Dado um espaço vetorial X , uma função $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dita ser uma semi-norma se as seguintes condições são verificadas:

1. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$;
2. $\rho(\lambda \cdot x) = |\lambda| \rho(x)$.

Se além disso ρ satisfaz $\rho(x) = 0 \implies x = 0$; então ρ é dita uma norma.

Exemplo 1.5. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, isto é:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Então, $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x) = |f(x)|$ define uma seminorma em X .

1.8 Topologia Gerada por Seminormas

Sejam X um espaço vetorial e $\mathcal{F} = \{\rho_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma família de seminormas em X . Considere o conjunto \mathcal{B} formado por todos os conjuntos da forma:

$$\begin{aligned} V(p, \rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_n}; \varepsilon) &= \{x \in X : \rho_{\alpha_i}(x - p) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{x : \rho_{\alpha_i}(x - p) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Proposição 1.5. *Então, \mathcal{B} é uma base para uma topologia em X .*

1. Dado $x \in X$ qualquer, escolha qualquer seminorma $\rho_\alpha \in \mathcal{F}$. Então,

$$x \in \{y \in X : \rho_\alpha(y - x) < 1\} = V(x, 1, \rho_\alpha).$$

2. Dados $V^1 = V^1(a, \rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_n}; r)$, $V^2 = V^2(b, q_{\sigma_1}, \dots, q_{\sigma_m}; s)$ e $x \in V^1 \cap V^2$, queremos mostrar que existe V^* tal que $x \in V^* \subset V^1 \cap V^2$. Seja

$$V^* = V(y_n, \rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_n}, q_{\sigma_1}, \dots, q_{\sigma_m}; R),$$

onde $y_n = \lambda z + x$ (com $\lambda > 0$ e $R > 0$ a serem escolhidos a posteriori). Queremos mostrar que:

(i) $x \in V^*$.

(ii) $V^* \subset V^1 \cap V^2$.

De fato,

$$(i) \quad x \in V^* \iff \begin{cases} \rho_{\alpha_i}(x - y_n) = \rho_{\alpha_i}(\lambda z) = |\lambda| \rho_{\alpha_i}(z) < R, \text{ e} \\ q_{\sigma_j}(x - y_n) = q_{\sigma_j}(\lambda z) = |\lambda| q_{\sigma_j}(z) < R, \end{cases}$$

com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

$$(ii) \quad \text{Se } w \in V^* \text{ então } w \in V^1 \cap V^2 \iff \begin{cases} \rho_{\alpha_i}(w - a) < r, \\ q_{\sigma_j}(w - b) < s. \end{cases}$$

Escolha agora r^* e s^* tais que

$$\max_i \{\rho_{\alpha_i}(x - a)\} < r^* < r$$

$$\max_j \{q_{\sigma_j}(x - b)\} < s^* < s.$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
 \rho_{\alpha_i}(w - a) &= \rho_{\alpha_i}(w - y_n + y_n - x + x - a) \\
 &\leq \rho_{\alpha_i}(w - y_n) + \rho_{\alpha_i}(y_n - x) + \rho_{\alpha_i}(x - a) \\
 &< R + \rho_{\alpha_i}(\lambda z) + r^* < R + |\lambda| \rho_{\alpha_i}(z) + r^* \\
 &< R + R + r^* \\
 &= 2R + r^*
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 q_{\sigma_j}(w - b) &= q_{\sigma_j}(w - y_n + y_n - x + x - b) \\
 &\leq q_{\sigma_j}(w - y_n) + q_{\sigma_j}(y_n - x) + q_{\sigma_j}(x - b) \\
 &< R + |\lambda| q_{\sigma_j}(z) + s^* \\
 &< R + R + s^* \\
 &= 2R + s^*
 \end{aligned}$$

Escolha $0 < R < \frac{\min\{r - r^*, s - s^*\}}{2}$. Então,

$$\begin{cases} \rho_{\alpha_i}(w - a) < 2R + r^* < r - r^* + r^* = r \\ q_{\sigma_j}(w - b) < 2R + s^* = s - s^* + s^* = s. \end{cases}$$

De sorte que,

$$\begin{cases} \rho_{\alpha_i}(w - a) < r \\ q_{\sigma_j}(w - b) < s \end{cases} \iff w \in V^1 \cap V^2.$$

Corolário 1.1. *Nas condições acima, a topologia é vetorial.*

O resultado acima será demonstrado com o uso das seguintes ferramentas:

Ferramenta 1:

Uma aplicação F de um espaço topológico A em um espaço topológico B é contínua se, e somente se, para todo $a \in A$ e toda sequência generalizada $(x_\sigma)_{\sigma \in \Lambda}$ tal que $x_\sigma \rightarrow a$, tem-se: $F(x_\sigma) \rightarrow F(a)$.

Ferramenta 2:

Se \mathcal{T} é uma topologia em X gerada por $\{\rho_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$, então $x_\sigma \rightarrow x \iff \forall \alpha \in \Lambda, \lim_{\sigma} z_\sigma = z$, $\lim_{\sigma} \rho_\alpha(z_\sigma - z) = 0$.

Prova do Corolário 1.1

Queremos mostrar que $(x, y) \mapsto x + y$, é contínua. Com efeito, a sequência generalizada $(x_\sigma, y_\sigma) \rightarrow (x, y)$, pela Ferramenta 1. Assim, de acordo com a Ferramenta 2, basta mostrar que $\rho_\alpha(x_\sigma + y_\sigma - x - y) \rightarrow 0, \forall \alpha \in \Lambda$. Mas,

$$\rho_\alpha(x_\sigma + y_\sigma - x - y) \leq \rho_\alpha(x_\sigma - x) + \rho_\alpha(y_\sigma - y).$$

Por hipótese sabemos que $x_\sigma \rightarrow x$ e $y_\sigma \rightarrow y$. Usando novamente a Ferramenta 2, concluímos que

$$\rho_\alpha(x_\sigma + y_\sigma - x - y) \rightarrow 0.$$

Portanto as operações básicas de adição de vetores e multiplicação por escalar são contínuas.

1.9 Convexidade

C é convexo se $\forall x, y \in C$, tem-se que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$.

1.10 Espaços de Funções Contínuas Vetoriais

Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e E um espaço de Banach

$$C(I, E) = \{U: I \rightarrow E; u \text{ é contínua}\}$$

$$\|u\|_\infty = \limsup_{t \in I} \|u(t)\|_E.$$

Capítulo 2

Uma prova Combinatória do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

2.1 Introdução

Entre as diversas contribuições do matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer, seu famoso teorema do ponto fixo ocupa um lugar de grande destaque. De fato, conhecido como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, este recebeu seu nome devido a sua relevância nos diversos campos da matemática. Além de ser uma das primeiras realizações da topologia algébrica, também é um importante artifício na análise funcional. Sua descoberta deu-se em 1912, e desde então, inaugurou uma linha de pesquisa conhecida como Teoria de Pontos Fixos.

Teorema 2.1. (*Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*). *Seja B^n uma bola fechada no espaço \mathbb{R}^N . Então toda aplicação contínua $f : B^n \rightarrow B^n$ possui um ponto fixo, ou seja, existe um ponto $p \in B^n$ tal que $f(p) = p$.*

2.2 Lema de Sperner

Em 1928, o matemático alemão Emanuel Sperner [11] provou um resultado clássico de combinatória, hoje conhecido como Lema de Sperner, tal ferramenta é muito eficaz na Teoria de Pontos Fixos, esse resultado desempenhará um papel primordial na prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Doravante, para melhor compreensão do lema é necessário alguns resultados preliminares.

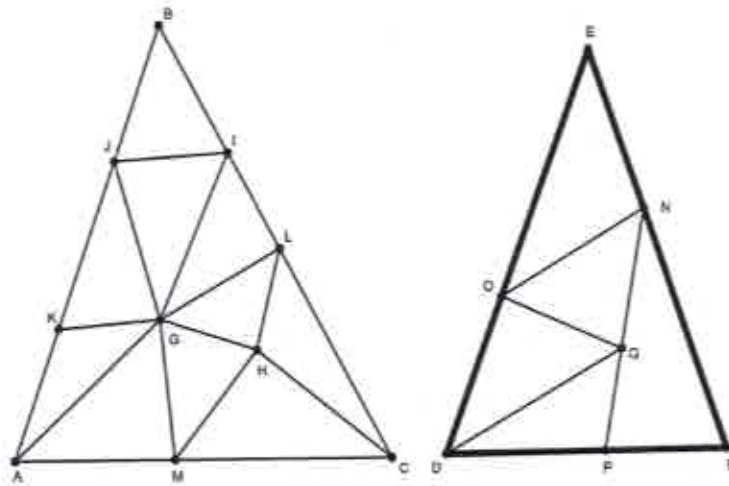


Figura 2.1

2.2.1 Simplexo

Um n -dimensional simplexo é a envoltória convexa S de $n+1$ pontos v_1, \dots, v_{n+1} (chamados vértices) e posições gerais. Formalmente, temos o seguinte:

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}$$

Exemplo 2.1. Um 2-simplexo é um triângulo. Um 3-simplexo é um tetraedro.

A envoltória convexa de qualquer subconjunto de $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ é chamada de uma face do simplexo S . Em particular, cada face é um m -simplexo com $m \leq n$ e denomina-se também m -face. Se S é um n -simplexo, então as $(n-1)$ -faces de S constituem o bordo de S .

2.2.2 Subdivisão Simplicial

Uma subdivisão simplicial de um n -dimensional simplexo S é uma partição de S em simplexos menores (ou subsimplexos) de mesma dimensão, também chamados de células da subdivisão, que cumpre a condição:

Quaisquer duas células são ou disjuntas, ou possuem em comum uma face de uma certa dimensão.

Exemplo 2.2. Na figura 2.1 temos que o triângulo ABC é uma subdivisão simplicial, enquanto no triângulo DEF a subdivisão não é simplicial, pois, as células PNF e OQD possuem uma face comum (\overline{NP} e Q), entretanto, as mesmas possuem dimensões direfrentes.

2.2.3 Subdivisão Baricêntrica

Seja S um n -simplezo de vértices v_1, \dots, v_{n+1} . Para $1 \leq k \leq n-1$, seja $F = \text{co}\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k+1}}\}$ uma k -dimensional face de S . O baricentro de F é o ponto M_F dado por

$$M_F = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{k+1} v_{i_m}.$$

Dada uma sequência estritamente crescente $(F_k)_{k=0}^{n-1}$ de faces de dimensão k de S , i.é.,

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset S, \quad (2.1)$$

obtemos a partir de cada baricentro de F_k o seguinte n -simplezo

$$\text{co}\{M_{F_0}, M_{F_1}, \dots, M_{F_{n-1}}, M_S\}.$$

Considerando todas as sequências possíveis de faces tais como (2.1), obtemos uma subdivisão simplicial chamada subdivisão baricêntrica de S . Convém observar que cada subdivisão baricêntrica de um n -simplezo é uma subdivisão simplicial que possui um total de $(n+1)!$ células de dimensão n . A seguir daremos um exemplo para melhor entendimento do mesmo.

Exemplo 2.3. Na figura 2.2 temos um 2-simplezo, onde o ponto M_F é o baricentro e o mesmo determina seis 2-simplezos.

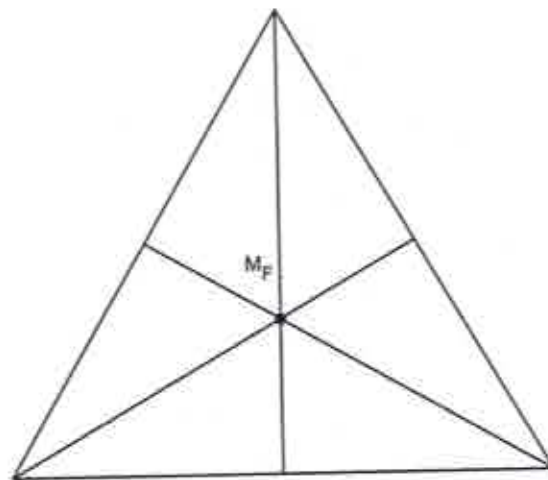


Figura 2.2

2.2.4 Coloração Própria de uma Subdivisão Simplicial

Uma coloração própria de uma subdivisão de um n -simplexo S é uma associação de $(n+1)$ -cores aos vértices da subdivisão, de modo que:

- Os vértices de S são coloridos com cores diferentes, de sorte que não pode haver vértices diferentes com cores iguais;
- Cada vértice da subdivisão sobre uma face de S é colorido somente com as cores dos vértices que definem a referida face;
- Os vértices interiores a S podem ser coloridos livremente.

Em geral, se n é um número natural, usa-se os números $1, 2, \dots, n, n+1$ para representar as cores usadas na coloração. caso S seja um 2-simplexo (i.é., um triângulo), por exemplo, então a tripla $(1, 2, 3)$ indica que três vértices foram coloridos com as cores 1, 2 e 3.

Exemplo 2.4. Caso S seja um 2-simplexo (i.é., um triângulo), então a tripla $(1, 2, 3)$ indica que três vértices foram coloridos com as cores 1, 2 e 3 como mostra a figura 2.3.

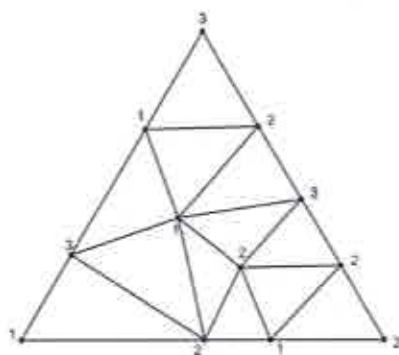


Figura 2.3

2.2.5 Lema de Sperner

Lema 2.1. Toda coloração própria de uma subdivisão simplicial de um n -simplexo S possui um número ímpar de células com cores diferentes em todos os vértices.

Demonstração. Analisaremos três casos distintos:

Caso 1-dimensional.

Temos um 1-simplexo (a, b) subdividido em subsimplexos de dimensão 1. Por definição, cada vértice da subdivisão deve ser colorido com 2 cores sendo os extremos a e b com cores diferentes. Sejam a_1, \dots, a_n os vértices das células interiores ao intervalo (a, b) . Doravante, usaremos as cores $\{1, 2\}$ para colorir os vértices e diremos que um subintervalo (a_i, a_{i+1}) é

do tipo $(1, 2)$ se a cor do vértice a_i é 1 e a cor do vértice a_{i+1} é 2. Defina de modo análogo subintervalos do tipo $(2, 1)$. Portanto, colorindo no sentido de a para b , concluímos a prova do lema se (a_n, b) for o único intervalo do tipo $(1, 2)$. Suponhamos que haja mais de uma mudança de cores. Designemos por $1^\circ, 2^\circ, \dots, m^\circ$ o primeiro, segundo, respectivamente, o m -ésimo subintervalo de extremos com cores diferentes. Note que o primeiro subintervalo é do tipo $(1, 2)$ e o último do tipo $(1, 2)$. Então, o segundo é do tipo $(2, 1)$ e assim por diante. Um argumento indutivo leva-nos a conclusão que se $1 < j < m$ é tal que o j -ésimo subintervalo é do tipo $(1, 2)$, então j é ímpar. Segue-se que m é ímpar. Isso conclui a prova do lema para o caso 1-dimensional.

Caso 2-dimensional.

Temos um 2-simplexo S , um triângulo, subdividido simplicialmente em 2-subsimplices (i.e. subtriângulos). Usaremos as cores $\{1, 2, 3\}$ para colorir os vértices das células de acordo com a hipótese do lema. Semelhante ao caso anterior, usaremos triplas tipo $(1, 2, 1)$ para designar uma célula com vértices de cores 1, 2 e 1. Observe que não há distinção entre os tipos $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$. Consideremos as seguintes definições:

- Seja R o número de células da subdivisão simplicial do tipo $(1, 2, 3)$;
- Seja Q o número de células do tipo $(1, 1, 2)$ ou $(1, 2, 2)$.

Agora designemos por $(1, 2)$ a aresta de uma célula com vértices coloridos com as cores 1 e 2. Podemos então considerar as seguintes definições (referente a subdivisão de S):

- Seja X o número de arestas no bordo de S coloridas da forma $(1, 2)$, e
- Y o número de arestas no interior de S coloridas da forma $(1, 2)$.

É fundamental observar que cada célula do tipo Q , digamos assim, possui duas arestas do tipo $(1, 2)$. E cada célula do tipo R possui apenas um aresta do mesmo tipo. Então, fazendo a contagem das arestas do tipo $(1, 2)$ a partir das células Q e R , e levando em conta a duplicidade gerada por aquelas do tipo Q , computamos um total de $2Q + R$ arestas do tipo $(1, 2)$. Contudo, o número exato de arestas do tipo $(1, 2)$ é $X + Y$. Como Y refere-se às células com arestas do tipo $(1, 2)$ no interior de S , segue-se que

$$2Q + R = X + 2Y.$$

Por outro lado, no bordo de S vemos uma aresta do tipo $(1, 2)$. Relativo à subdivisão de S , entre um extremo e outro dessa arestas estão todas as arestas do tipo $(1, 2)$. Assim, de acordo com o primeiro caso já demonstrado, vemos que o número de arestas da subdivisão do tipo $(1, 2)$ no bordo de S é ímpar. Portanto, X é ímpar e da igualdade acima conclui-se que R é ímpar. Isso completa a demonstração do lema para o caso 2-dimensional.

Caso geral n -dimensional.

Usaremos indução sobre n . Admita o resultado ser verdadeiro para $n - 1$ e mostremos sua validade para n . Por hipótese, S é um n -simplexo com uma subdivisão simplicial cujos vértices são coloridos com $n + 1$ cores, digamos $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$, obedecendo as condições preescritas do Lema 2.1. A exemplo do que foi feito anteriormente, indiquemos por R o número total de células cujos vértices foram coloridos com diferentes cores, ou seja, células do tipo $\{1, 2, \dots, n + 1\}$. Q é o número de células cujos vértices foram coloridos usando todas as cores com exceção da cor $n + 1$. Desse modo, exatamente uma dentre as cores $(1, 2, \dots, n)$ é usada duas vezes e as demais apenas uma. Lembre que todas as cores mencionadas foram usadas na coloração das células do tipo Q . Em analogia com as arestas no caso 2-dimensional, consideramos aqui as faces $(n - 1)$ -dimensionais do tipo $(1, 2, \dots, n)$, ou seja, aquelas cujos vértices foram coloridas exatamente com as cores $\{1, 2, \dots, n\}$. Sejam X e Y , respectivamente, o número de tais faces sobre o bordo e no interior de S . Como antes, faremos uma contagem do número de tais faces (ou "arestas") do tipo $(1, 2, \dots, n)$ de duas formas:

- A partir das células dos tipos Q e R .
- Dentre as que estão sobre o bordo de S .

Cada célula do tipo Q contribui exatamente com duas $(n - 1)$ -faces coloridas da forma $(1, 2, \dots, n)$. Células do tipo R contribuem somente com uma face do mesmo tipo. Entretanto, faces no interior de S aparecem em duas células enquanto que no bordo somente em uma. Portanto, a primeira contagem fornece a seguinte equação

$$2Q + R = X + 2Y.$$

Sobre o bordo de S temos a $(n - 1)$ -face original F do tipo $(1, 2, \dots, n)$. As $(n - 1)$ -faces da subdivisão de S que são do tipo $(1, 2, \dots, n)$ e estão sobre o bordo estão, de fato, sobre F . Por sua vez, os vértices dessas faces constituem, elas mesmas, uma subdivisão simplicial de F dotada de uma coloração própria. Lembremos que tais faces e os vértices de F são do tipo $(1, 2, \dots, n)$. Tendo em vista que F é um $(n - 1)$ -simplexo, a hipótese de indução nos diz que existem exatamente um número ímpar de células $(n - 1)$ -dimensionais em F que são do tipo $(1, 2, \dots, n)$. Tais células são exatamente as $(n - 1)$ -faces do tipo $(1, 2, \dots, n)$ provinda da subdivisão inicial de S que estão sobre F . Segue-se que X é ímpar. Com base na equação acima, isso implica que R é ímpar. A prova do lema está concluída. ■

2.3 Redução do Teorema de Brouwer à n-simplexos

Definição 2.1. Uma célula n-dimensional fechada é a imagem homeomórfica da bola n-dimensional $B^n \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 2.2. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um compacto convexo com interior não-vazio. Então C é uma célula n-dimensional fechada.

Demonstração. Inicialmente vamos construir uma função $h: B^n \rightarrow C$ e mostramos que ela é injetiva e sobrejetiva. A prova que h e h^{-1} são contínuas será omitida.

Seja $c \in \text{int}C$. Para $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ defina

$$\theta(d) = \max\{\theta \in \mathbb{R} \mid c + \theta d \in C\}.$$

Observe que o máximo é atingido, pois, C é compacto. Desde que

$$c \in \text{int}C, \theta(d) > 0, \text{ e } \theta(\lambda d) = \lambda^{-1}\theta(d) \text{ para } \lambda > 0.$$

Agora defina $h: B^n \rightarrow C$ pondo

$$h(d) = c + \|d\|_2 \theta(d) d \text{ se } d \neq 0 \text{ e } h(0) = c.$$

Claramente,

$$h(d) = c \text{ se } d = 0, \text{ de modo que } h(d) = h(d') = c \Rightarrow d = d'.$$

Agora suponha $h(d) = h(d') \neq c$. Então,

$$\|d\|_2 \theta(d) d = \|d'\|_2 \theta(d') d' \text{ de modo que } d' = \lambda d, \lambda > 0.$$

Segue-se que

$$\|d\|_2 \theta(d) d = \lambda \|d'\|_2 \lambda^{-1} \theta(d) \lambda d \text{ e } \lambda = 1.$$

Portanto, h é injetiva.

Mostraremos agora que h é sobrejetiva. Uma vez que $h(0) = c$, apenas precisamos encontrar um $d \in B^n$ de modo que $h(d) = x$ para $x \in C$, $x \neq c$. Seja $d = \frac{x - c}{\|x - c\|_2 \theta(x - c)}$. É fácil ver que $d \in B^n$ e $h(d) = x$. ■

Lema 2.3. S^n é uma célula n-dimensional.

Demonstração. Pela Lema 2.2 temos que

$$C^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$$

é uma célula n-dimensional fechada. Assim mostraremos que S^n e C^n são homeomorfos.

De fato, defina $h: C^n \rightarrow S^n$ e $h^{-1}: S^n \rightarrow C^n$ pondo $h(c) = v^0 + Qc$, e $h^{-1}(s) = Q's$ com Q sendo a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times n}$$

e Q' sendo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times (n+1)}.$$

Obviamente, que h é injetiva e sobrejetiva, e h e h^{-1} são contínuas. Portanto S^n é homeomorfo a C^n . ■

2.4 Prova do Teorema de Brouwer

Demonstração. Inicialmente, convém observar que é suficiente trabalharmos com o simplexo canônico Δ de dimensão n em \mathbb{R}^{N+1} gerado pelos vértices

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

De fato, um resultado de Topologia garante que Δ e B_n são homeomorfos. Temos então uma aplicação contínua $f: \Delta \rightarrow \Delta$ e devemos mostrar que ela possui um ponto fixo. Dado $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ indiquemos por x_i sua i -ésima coordenada. Note que $f(x) = x$ se, e somente se,

$$f_i(x) - x_i \geq 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (2.2)$$

Isso decorre do fato que ambos $f(x)$ e x possuem coordenadas com soma igual a 1. Suponha por contradição que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \Delta$. Então, em vista de (2.2), para cada $x \in \Delta$ existe $c(x) \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tal que

$$f^{c(x)}(x) < x^{c(x)}. \quad (2.3)$$

Note que $c(e_i) = i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n+1$ (i.é, vértices diferentes de Δ possuem cores diferentes). Faça $\Delta_0 := \Delta$. Sejam $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ uma sequência de subdivisões simpliciais de Δ tal que Δ_j é uma subdivisão baricêntrica de Δ_{j-1} , para todo $j \in \mathbb{N}$. Por construção temos que a sequência das subdivisões Δ_j tende a zero quando j tende a ∞ . Note que se x é um vértice de Δ_j sobre uma face de S , digamos $x \in \text{co}\{e_i; i \in J\}$ com $J \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$, então $c(x) \in J$. De fato, os únicos índices j cumprindo (2.3) são aqueles em que $j \in J$. Isso

mostra que a função c define uma coloração própria sobre os vértices de $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j$. Pelo Lema de Sperner, cada partição Δ_j admite uma célula com vértices $x^{(j,1)}, x^{(j,2)}, \dots, x^{(j,n+1)}$ tais que $c(x^{(j,k)}) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Em particular, $f^k(x^{(j,k)}) < x^{(j,k)}$ para todo $k = 1, 2, \dots, n+1$. Agora como Δ é compacto, e portanto limitado e fechado, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass cada sequência $\{x^{(j,k)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Podemos esquecer os demais termos da sequência e supor que ela mesma converge. Como (tamanhos) das (subdivisão) Δ_j tende a zero, os limites $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(j,k)}$ são os mesmos para todo $k \in \{1, \dots, n+1\}$. Então seja $x^* = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{(j,k)}$. Partimos do pressuposto de que f não (havia ponto fixo), i.é., $f(x) \neq x$. Isso significa que $(f_i(x^*)) > x_i^*$ para algumas coordenadas i . Mas sabemos que $f_i(x^{(j,k)}) < x^{(j,k)}$ para todos os j e $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(j,k)} = x^*$, o que implica $f_i(x^{(j,k)}) \leq x_i^{(j,k)}$ por continuidade. Isso contradiz a suposição de que f não possui ponto fixo. ■

Observação 2.1. A Definição 1.7 assim como a demonstração acima sugerem a seguinte noção de semicontinuidade inferior para aplicações vetoriais.

Definição 2.2. Uma função $f: \Delta \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^{N+1}$ é dita ser semicontínua inferiormente se cada função coordenada f_i de f , com $i \in \{1, \dots, n+1\}$, for semicontínua inferiormente.

Assim o Teorema 2.1 pode ser generalizado para aplicações semicontínuas inferiormente. Com efeito, basta observar que

$$f(x^*) \neq x^* \Rightarrow f_i(x^*) > x_i^* \text{ para algum } i,$$

e, portanto, fazendo uso dos argumentos finais da demonstração anterior vemos que

$$\begin{aligned} f_i(x^{(j,k)}) < x_i^{(j,k)} &\Rightarrow f_i(x^*) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f_i(x_i^{(j,k)}) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} x_i^{(j,k)} = x_i^*. \end{aligned}$$

O que contradiz o fato de $f_i(x^*) > x_i^*$.

Capítulo 3

Teorema de Schauder-Tychonoff

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é demonstrarmos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff, uma generalização natural do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A primeira versão desse resultado em espaços de dimensão infinita foi dada por Juliusz Schauder em 1930. Mais precisamente, ele provou que o Teorema do Ponto de Fixo de Brouwer é válido em espaços de Banach. Em 1934, o matemático russo Andrey Tychonoff generalizou o teorema de Schauder para os espaços localmente convexos. Naturalmente, surge a questão sobre a validade do Teorema de Schauder-Tychonoff em espaços não-necessariamente localmente convexos. De fato, essa é uma questão que permaneceu aberta por mais de 70 anos. Conhecida como conjectura de Schauder, em 2005 o Matemático Francês Robert Cauty finalmente deu uma resposta positiva para o questionamento demonstrando o seguinte teorema

Teorema 3.1 (Cauty, 2005). *Todo espaço vetorial topológico de Hausdorff possui a propriedade do ponto fixo.*

Portanto, a famosa conjectura de Schauder finalmente foi resolvida.

3.2 A Propriedade do Ponto Fixo

Seja (X, \mathcal{T}) um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Diremos que um conjunto limitado, fechado e convexo $C \subset X$ possui a propriedade do ponto fixo se toda aplicação contínua $f : C \rightarrow C$ possui um ponto fixo, ou seja, existe $p \in C$ tal que $f(p) = p$. Analogamente, diremos que X possui a propriedade do ponto fixo se todo subconjunto limitado, fechado e convexo goza dessa propriedade. O principal resultado desse capítulo é o seguinte teorema devido a Schauder-Tychonoff.

Teorema 3.2. *Todo subconjunto compacto e convexo de um espaço localmente convexo de Hausdorff possui a propriedade do ponto fixo.*

3.3 Prova do Teorema 3.2

Seja $\{\rho_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ uma família de seminormas gerando \mathcal{T} . Para cada $\alpha \in \Gamma$ defina

$$A_\alpha = \{x \in C : \rho_\alpha(f(x) - x) = 0\}.$$

Observe que $x \mapsto \rho_\alpha(f(x) - x)$ é uma função contínua, pois f é contínua, a função identidade é contínua e a diferença entre funções contínuas é uma função contínua. Portanto, cada A_α é fechado em C uma vez que $A_\alpha = [\rho_\alpha \circ (f(x) - x)]^{-1}(0)$ e a pré-imagem de um conjunto fechado é um conjunto fechado por funções contínuas. Suponha termos provado que $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ possui a Propriedade da Interseção Finita, isto é, dado qualquer subconjunto finito $\Lambda \subset \Gamma$, tem-se

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Como C é compacto, podemos concluir que

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Então

$$\exists p \in C \text{ tal que } \rho_\alpha(f(p) - p) = 0, \forall \alpha \in \Gamma.$$

Como \mathcal{T} é Hausdorff, $f(p) - p = 0 \Rightarrow f(p) = p$.

Afirmção: $\{A_\alpha\}$ possui a Propriedade da Interseção Finita. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ quaisquer em Γ , mostraremos que

$$\bigcap_{j=1}^n A_{\alpha_j} \neq \emptyset.$$

Com efeito, defina a função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ pondo $\|x\| = \sum \rho_{\alpha_j}(x)$. A partir daí concluem-se imediatamente as seguintes propriedades:

1. $\|\cdot\|$ é contínua, pois, cada $\rho_{\alpha_j}(x)$ é contínua e a soma de funções contínuas é contínua;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$;
4. $\|0\| = 0$.

Observe que se encontrarmos $p \in C$ tal que $\|f(p) - p\| = 0$, então teremos que

$$\rho_{\alpha_j}(f(p) - p) = 0, \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

o que implicará que

$$p \in \bigcap_{j=1}^n A_{\alpha_j}.$$

Agora, para cada $N \in \mathbb{N}$ considere os conjuntos abertos

$$B_{\frac{1}{N}} = \left\{ y \in C; \|y - x\| < \frac{1}{N} \right\}.$$

Observe que

$$C = \bigcup_{x \in C} B_{\frac{1}{N}}(x).$$

Como C é compacto, existem pontos $x_1^N, \dots, x_{k(N)}^N \in C$ tais que

$$C = B_{\frac{1}{N}}(x_1^N) \cup \dots \cup B_{\frac{1}{N}}(x_{k(N)}^N).$$

Podemos supor que $k(N) > N, \forall N \in \mathbb{N}$. Considere agora as seguintes funções em C :

1. $\theta_i^N(x) = \max\{0, \frac{1}{N} - \|x - x_i\|\}$,
2. $\lambda_i^N(x) = \frac{\theta_i^N(x)}{\sum_{j=1}^{k(N)} \theta_j^N(x)}$ com $i = 1, \dots, k(N)$.

Daí obtemos as seguintes propriedades:

- (a) θ_i^N e λ_i^N são contínuas em C ;
- (b) $\lambda_i^N(x) > 0, \forall x \in C$;
- (c) $\sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i^N(x) = 1, \forall x \in C$.

Considere em seguida a envoltória convexa fechada dos pontos $x_1^N, \dots, x_{k(N)}^N$, ou seja, o conjunto

$$M_N = \overline{\text{co}}(x_1^N, \dots, x_{k(N)}^N) = \left\{ \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Façamos

$$M_N = \overline{\text{co}}(x_1^N, \dots, x_{k(N)}^N).$$

Como C é convexo e fechado então $M_N \subset \overline{C} = C$. Assim M_N é compacto como sendo fechado dentro de um compacto, temos também que M_N é convexo. Seja

$$E_N = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\},$$

então $\dim E_N < k(N)$. Além disso, sabe-se que E_N é subespaço fechado de X . Portanto, como $\overline{\text{co}}(x_i^N) \subset E_N$ vemos que $M_N \subset E_N$. Considere agora a Projeção de Schauder $P_N : C \rightarrow M_N$ definida por

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i^N(x) \cdot x_i^N$$

Note que P_N é contínua, pois, $\lambda_i^N(x) \cdot x_i^N$ é o produto de duas funções contínuas e P_N é a soma dos $\lambda_i^N(x) \cdot x_i^N$ e a soma e produto de funções contínuas é uma função contínua. Considere agora a composição

$$M_N \xrightarrow{f|_{M_N}} C \xrightarrow{P_N} M_N.$$

Obtemos então a função

$$P_N \circ f : M_N \rightarrow M_N.$$

Pelo teorema de Brouwer, existe

$$q_N \in M_N \quad \text{tal que} \quad P_N(f(q_N)) = q_N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Assim temos que

$$q_N - f(q_N) = P_N(f(q_N)) - f(q_N).$$

Mostraremos que

$$\|q_N - f(q_N)\| < \frac{1}{N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} q_N - f(q_N) &= P_N(f(q_N)) - f(q_N) \\ &= \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i^N(f(q_N)) \cdot x_i^N - f(q_N) \\ &= \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i^N(f(q_N)) \{x_i^N - f(q_N)\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} \|q_N - f(q_N)\| &\leq \sum_{i=1}^{k(N)} \|\lambda_i^N(f(q_N))\{x_i^N - f(q_N)\}\| \\ &= \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i^N(f(q_N)) \|x_i^N - f(q_N)\| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k(N)} \lambda_i^N(f(q_N)) = \frac{1}{N} \quad \square. \end{aligned}$$

Como $M_N \subset C$ e $q_N \in M_N$, $\forall N$, segue-se $\{q_N\} \subset C$. Como C é compacto, existem uma subsequência generalizada $\{q_{N_\gamma} : \gamma \in \Lambda\}$ de $\{q_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ e um ponto $p \in C$ tais que $q_{N_\gamma} \xrightarrow{\gamma} p$ em C . Por hipótese, f é contínua. Então, $f(q_{N_\gamma}) \xrightarrow{\gamma} f(p)$. Assim aplicando o limite em

$$\|q_{N_\gamma} - f(q_{N_\gamma})\| < \frac{1}{N_\gamma}, \quad \forall \gamma \in \Lambda,$$

temos que

$$\|p - f(p)\| = 0 \Rightarrow p \in \bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i}$$

Assim, $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ possui a P.I.F, e de acordo com a primeira parte da demonstração segue-se o resultado.

Como consequência imediata, o seguinte resultado é válido:

Teorema 3.3. *Seja X um espaço localmente convexo de Hausdorff e $C \subset X$ subconjunto fechado e convexo. Então toda aplicação contínua $f : C \rightarrow C$ tal que $f(C)$ é relativamente compacta possui um ponto fixo.*

Demonstração. Basta observar que se $K = \overline{\text{co}}(f(C))$, então K é compacto convexo e $f(K) \subset K$. ■

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Um Problema de Epidemia de Doenças Infecciosas

Muitas doenças infecciosas são endêmicas em uma população, ou seja, são presentes por vários anos. Se não houver nenhuma entrada de novos suscetíveis na população e se a infecção confere imunidade permanente, então a doença infecciosa sempre "morre" (ou seja, finda). Entretanto, um fator que permite que muitas doenças permaneçam endêmicas é o nascimento de novos suscetíveis. Conseqüentemente, um modelo fiel para a descrição de uma doença infecciosa endêmica para um determinado período de tempo, superior a um ou dois anos, deve incluir a dinâmica da vida (nascimentos e mortes). Assim, um modelo sem uma tal dinâmica é somente adequado para descrever uma epidemia, ou seja, um surto de uma doença infecciosa cuja incidência tanto cresce rapidamente quanto decresce em um curto período de tempo (\leq um ano). Nessa perspectiva, a população considerada é dividida em classes disjuntas. Por exemplo,

- A classe suscetível S que contém aqueles que podem torna-se infectados;
- A classe exposta E que contém aqueles que estão expostos à infecção mas ainda não estão infectados;
- A classe infectada I que contém aqueles indivíduos infectados;
- A classe removidos R que contém aqueles que estão imunes seja devido a uma imunização ou devido a infecções passadas.

4.1.1 Um modelo a partir de uma equação integral não-linear

Em geral, equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais funcionais e equações integrais tem sido usadas para modelar epidemias infecciosas. Nesta subseção, usaremos equações integrais para deduzir um modelo simples porém não-linear. Modelos mais detalhados e robustos podem ser encontrados na referência [5].

Seja $x(t)$ o número de indivíduos de uma população, de tamanho constante, infectados por uma doença infecciosa no instante t . Suponha que a razão instantânea de indivíduos infectados por unidade de tempo seja modelada por $\mu f(t, x(t))$, onde f é uma função de duas variáveis e μ é uma constante. Em muitas situações, f carrega em seu bojo as seguintes interpretações:

- A taxa de transferência dos indivíduos $x(t)$ da classe $S(t, x(t))$ para a classe $I(t, x(t))$;
- A probabilidade $P_1(t, x(t))$ dos indivíduos $x(t)$ permanecerem infectados t unidades de tempo após a infecção;
- A probabilidade $P_2(t, x(t))$ dos indivíduos $x(t)$ estarem vivos no tempo $t_0 + t$ dado estarem vivos no tempo t_0 .

Além disso,

- A constante μ , chamada razão de contato, indica o número médio de contatos (suficientes para contaminação) de um infectado por unidade de tempo, que em muitos casos pode ser considerado suficientemente pequeno.

Feitas essas considerações, podemos concluir que no intervalo $t_0 \leq s \leq t$, a soma dos indivíduos infectados é dada por

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Suponha agora que $a(t)$ represente um fator de decrescimento envolvendo o número de pessoas infectadas inicialmente e o número de pessoas em processo de imunização, ou seja, indivíduos da classe R . Portanto, o número total de indivíduos infectados no instante t no período $[t_0, t]$ é dado pela seguinte equação integral

$$(Qx)(t) = a(t) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Esse modelo é frequentemente usado para estudar o seguinte problema:

Problema. Encontrar uma função $x(t)$ que seja uma solução de equilíbrio para a epidemia, ou seja,

$$x(t) = a(t) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Biologicamente, uma tal solução de equilíbrio ajuda a explicar se, uma vez a população atingida pela infecção, a doença persiste ou não.

4.1.2 Resultado de Existência de Soluções de Equilíbrio

Sejam E um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|_E$ e seja $f: [t_0, T] \times E \rightarrow E$ uma função de Caratheodory, ou seja, uma cumprindo as seguintes condições:

- (a) Para cada $x \in E$, a função $t \mapsto f(t, x)$ é mensurável;
- (b) Para cada $t \in I: = [t_0, T]$, a função $x \mapsto f(t, x)$ é fracamente sequencialmente contínua.
- (c) Existe uma função $\Psi(t, s)$ tal que para cada $t, s \mapsto f(t, x)$ é decrescente e

(c₁)

$$\|f(t, x)\|_E \leq \Psi(t, \|x\|_E), \quad \forall t, \forall x \in E;$$

(c₂) Para cada $R > 0$ tem-se

$$0 < \int_{t_0}^t \Psi(s, R) ds < \infty \quad \forall t$$

(d)

$$a \in C^1(t_0, T; E).$$

Observação. Um exemplo elementar de espaços reflexivos são os espaços euclidianos \mathbb{R}^n . A seguinte, suporemos a seguinte condição de crescimento sobre f :

$$\|f(t, x)\|_E \leq \Psi(t, \|x\|_E), \quad (4.1)$$

onde para cada $R > 0$ tem-se

$$0 < \int_{t_0}^t \Psi(s, R) ds < \infty.$$

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 4.1. Admitindo as condições acima e supondo que $a \in C(t_0, T; E)$, existe uma razão de contato μ suficientemente pequena tal qual a epidemia possui uma solução de equilíbrio.

Demonstração. Seja $R > \|a\|_\infty$. Se $u \in C(t_0, T; E)$ é tal que $\|u\|_\infty \leq R$, então

$$\begin{aligned} \|(Qu)(t)\|_E &\leq \|a(t)\|_E + \mu \int_{t_0}^t \Psi(s, \|u(s)\|_E) ds \\ &\leq \|a\|_\infty + \mu \int_{t_0}^T \Psi(s, R) ds \\ &\leq R \end{aligned}$$

desde que

$$0 < \mu < \frac{R - \|a\|_\infty}{\int_{t_0}^T \Psi(s, R) ds}.$$

Isso mostra que $Q(B_R) \subset B_R$, onde B_R é a bola unitária de raio R e centro na origem do espaço $C(t_0, T; E)$. Agora, um cálculo simples usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mostra que:

- Q é uma aplicação fracamente sequencialmente contínua de B_R em B_R .

Além disso, usando o Teorema Ascoli-Arzelá mostra-se também que:

- $Q(B_R)$ é fracamente relativamente compacto em $C(t_0, T; E)$.

Pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, concluímos que Q possui um ponto fixo $u \in B_R$. Segue-se portanto que u é uma solução de equilíbrio para a epidemia. ■

4.2 Um Problema de Otimização em Economia

Nesta seção estudaremos uma interação que há entre um problema de otimização comum em economia, conhecido como Otimização de Pareto, e resultados de pontos fixos. O problema da Otimização de Pareto (veja [3]) é um típico problema multi-objetivo de maximização. A forma padrão de um problema multi-objetivo de maximização em dimensão finita é encontrar um ponto $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, que maximiza uma dada função contínua

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

sujeito a condição que $x \in A$, onde A é um conjunto não-vazio. Ou seja, deseja-se resolver o seguinte problema

$$\max f(x) \quad \text{sujeito a } x \in A.$$

A partir de agora, X e Y serão espaços vetoriais topológicos de dimensão infinita. As funções f_i 's são chamadas funções objetivos. Um exemplo típico de um problema dessa natureza é o seguinte:

Definição 4.1. Um ponto $x \in A$ é chamado um Pareto Ótimo se não existe um ponto $y \in A$ tal que:

$$f_i(y) \geq f_i(x) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Exemplo 4.1.

$$\max (3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2) \quad \text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0$$

Na subseção seguinte, generalizaremos o problema da Otimização de Pareto para espaços de dimensão infinita.

4.2.1 Otimização de Pareto com respeito a cones em dimensão infinita

Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de dimensão infinita. Um conjunto $C \subset Y$ é dito ser um cone em Y se

$$\lambda y \in C \quad \forall y \in C \text{ e } \lambda \geq 0.$$

Um cone $C \subset Y$ é dito ser convexo se

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in C \quad \forall y_1, y_2 \in C \text{ e } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Um cone $C \subset Y$ é dito ser um cone pontudo se

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

Observe que em um cone pontudo $C \subset Y$ podemos considerar a seguinte relação:

$$y_1 \preceq_C y_2 \text{ em } Y \iff y_2 - y_1 \in C.$$

Notação. Indicaremos por $y_1 \prec_C y_2$ se $y_2 - y_1 \in C \setminus \{0\}$.

Definição 4.2. Seja $B \subset Y$ um conjunto não-vazio e seja $C \subset Y$ um cone pontudo em Y . Dizemos que um ponto $u_0 \in B$ é um elemento maximal de B com relação a C , se não existe $y \in B$ tal que

$$u_0 \prec_C y.$$

Notação. Doravante, usaremos a notação

$$u_0 \in \max\{B; C\}$$

para indicar que $u_0 \in B$ é um elemento maximal de B com respeito ao cone C .

Após os preliminares acima, vamos ao nosso

Problema de Otimização. (Otimização de Pareto em Dimensão Infinita) Dados um cone pontudo $C \subset Y$ e uma função $f: X \rightarrow Y$, o problema da Otimização de Pareto é o problema

$$\max f(x) \text{ sujeito a } x \in A, \tag{4.2}$$

que consiste em determinar todos os pontos $u_0 \in A$ para os quais têm-se

$$f(u_0) \in \max\{f(A); C\}.$$

Observação. Por definição, diremos que u_0 é um ponto maximal, ou um Pareto Ótimo, para o problema (4.2).

4.2.2 Uma Interpretação do Problema de Pareto via Pontos Fixos

O resultado a seguir mostra que o problema de otimização abstrato enunciado acima é equivalente a um problema de pontos fixos.

Proposição 4.1. Considere $F: Y \rightarrow 2^Y$ uma função multi-valuada definida por

$$F(y) = \{f(x) : x \in A, f(x) \in C + y\}.$$

Então u_0 é um Pareto Ótimo para (4.2) se, e somente se, $F(f(u_0)) = \{f(u_0)\}$.

Demonstração. Primeiramente, observe que se $u_0 \in A$ é um Pareto Ótimo para (4.2) então

$$f(a) \preceq_C f(u_0) \quad \forall a \in A,$$

o que implica que $f(u_0) - f(a) \in C$ e, portanto, $f(u_0) \in C + f(a)$ para todo $a \in A$. Segue-se daí que

$$f(u_0) \in F(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

Em particular, têm-se que $f(u_0) \in F(f(u_0))$. Agora, suponhamos por contradição que exista outro $f(u_1) \in F(f(u_0))$ com $u_1 \in A \setminus \{u_0\}$. Isso implica que $f(u_1) - f(u_0) \in C$ donde conclui-se que

$$f(u_0) \succ_C f(u_1),$$

o que é uma contradição. ■

4.2.3 Um Teorema de Ponto Fixo para Aplicações Multi-Valuadas

Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção, necessitamos das seguintes definições.

Definição 4.3. Uma aplicação multi-valuada $F: B \rightarrow 2^B$ é dita ser fechada em $B \subset Y$ se $F(y) \subset B$ é um conjunto fechado em Y .

Definição 4.4. O conjunto B é dito ser F -compacto se para cada cobertura aberta da forma $\{F^\circ(y_\alpha) : y_\alpha \in B, \alpha \in \Lambda\}$ existe uma subcobertura finita. Claramente, se B é compacto então B é F -compacto.

Definição 4.5. F é dita ser:

1. Reflexiva em B se $y \in F(y) \quad \forall y \in B$.
2. Antissimétrica em B se $y_1 = y_2$ sempre que

$$y_2 \in F(y_1) \quad \text{e} \quad y_1 \in F(y_2).$$

3. Transitiva em B se $y_3 \in F(y_1)$ sempre que

$$y_2 \in F(y_1) \quad \text{e} \quad y_3 \in F(y_2).$$

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema de pontos fixos (cf. []).

Teorema 4.2. *Seja $F: B \rightarrow 2^B$ uma aplicação multi-valorada, fechada, reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Suponha que B é um espaço F -compacto. Então existe $u \in B$ tal que $F(u) = \{u\}$.*

Demonstração. Conforme veremos, a prova é uma consequência do Lema de Zorn. Por hipótese, F induz uma ordem natural em B pondo:

$$y_1 \preceq y_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 \in F(y_1).$$

Afirmamos que (B, \preceq) é um conjunto indutivamente ordenado, ou seja, goza da propriedade que todo subconjunto totalmente ordenado de B possui uma cota superior em B . De fato, suponha o contrário que exista um conjunto totalmente ordenado $T = \{y_\alpha: \alpha \in \Lambda\} \subset B$ com nenhuma cota superior em B . Segue-se que

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F(y_\alpha) = \emptyset,$$

pois do contrário qualquer elemento dessa interseção seria uma cota superior para T em B . Portanto, para todo $y \in B$ existe $y_\alpha \in T$ tal que $y \notin F(y_\alpha)$, ou seja, $y \in F^c(y_\alpha)$. Isso implica que $\{F^c(y_\alpha): \alpha \in \Lambda\}$ define uma cobertura aberta para B . Da hipótese de F -compacidade de B , podemos extrair uma subcobertura finita $\{F^c(y_i): i = 1, 2, \dots, n\}$. Como T é totalmente ordenado, podemos supor s.p.g. que $y_1 \preceq y_2 \preceq \dots \preceq y_n$. Da propriedade transitiva de F , vemos então que

$$F(y_i) \subset F(y_{i-1}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Segue-se daí que $B \subset F^c(y_n)$, o que implica dizer que $F(y_n) \subset B$. Mas isso é uma contradição já que $y_n \in F(y_n)$ e $B \subset F^c(y_n)$. Isso demonstra a afirmação.

Pelo Lema de Zorn, (B, \preceq) possui um elemento maximal $z \in B$. Agora afirmamos que

$$F(z) = \{z\}.$$

De fato, como $y \preceq z$ para todo $y \in B$, temos $z \in F(y)$ para todo $y \in B$. Em particular, $z \in F(z)$ e, portanto, $\{z\} \subset F(z)$. Como z é maximal, segue-se que $F(z) = \{z\}$. C.Q.D. ■

4.2.4 Uma Solução para o Problema de Pareto Abstrato

Consideremos agora o seguinte problema de Pareto abstrato

$$\max f(x) \quad \text{sujeito a } x \in A, \quad (4.3)$$

onde $f: X \rightarrow Y$ é contínua, $A \subset X$ é um conjunto compacto e $C \subset Y$ é um cone fechado, convexo e pontudo em Y .

Como uma aplicação do Teorema 4.2, o seguinte resultado é válido:

Teorema 4.3. *Sob as condições descritas acima, o problema (4.3) admite um Pareto Ótimo.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 4.2 para $B = f(A)$, que é um espaço compacto, e para $F: B \rightarrow 2^B$ dada por

$$F(y) = B \cap [C + y].$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2010.
- [2] L. E. J. Brouwer, Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 71 (1912) pp. 161-165. 1, 2
- [3] H. W. Corley, Some hybrid fixed point theorems related to optimization, *J. Math. Anal. Appl.* 120 (1986), n° 2, 528-532. 30
- [4] H. H. Domingues, Espaços Métricos e Introdução a Topologia, São Paulo:Atual, 1982.
- [5] H. W. Hethcote, D. W. Tudor, Integral equation models for endemic infectious diseases, *J. Math. Biol.* 9 (1980), n° 1, 37-47. 26
- [6] E. L. Lima, Curso de Análise, Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), vol.2, 2011.
- [7] E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Rio de Janeiro: SBM (Textos Universitários), 2009.
- [8] J. Milnor, Analytic proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem, *Amer. Math. Monthly* 85 (1978), 521-524. 2
- [9] C. R. Roger, A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), n° 7, 525 - 527. 2
- [10] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.* 2 (1930), 171-180. 2
- [11] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* 27 (1928). 12
- [12] M. J. Todd, The Computation of Points and Applications, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, n°. 124, Springer-Verlag: Berlin, 1976. 2
- [13] A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, *Mathematische Annalen* 11 (1935), 767-776. 2

Referências Bibliográficas

- [1] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2010.
- [2] L. E. J. Brouwer, Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 71 (1912) pp. 161-165. 1, 2
- [3] H. W. Corley, Some hybrid fixed point theorems related to optimization, *J. Math. Anal. Appl.* 120 (1986), nº 2, 528-532. 30
- [4] H. H. Domingues, Espaços Métricos e Introdução a Topologia, São Paulo:Atual, 1982.
- [5] H. W. Hethcote, D. W. Tudor, Integral equation models for endemic infectious diseases, *J. Math. Biol.* 9 (1980), nº 1, 37-47. 26
- [6] E. L. Lima, Curso de Análise, Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), vol.2, 2011.
- [7] E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Rio de Janeiro: SBM (Textos Universitários), 2009.
- [8] J. Milnor, Analytic proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem, *Amer. Math. Monthly* 85 (1978), 521-524. 2
- [9] C. R. Roger, A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), nº 7, 525 - 527. 2
- [10] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.* 2 (1930), 171-180. 2
- [11] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* 27 (1928). 12
- [12] M. J. Todd, The Computation of Points and Applications, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, nº. 124, Springer-Verlag: Berlin, 1976. 2
- [13] A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, *Mathematische Annalen* 11 (1935), 767-776. 2