Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais

João Batista Marques dos Santos

Manaus - AM
Agosto de 2018

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais

por

João Batista Marques dos Santos

sob a orientação da

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Rosilene Barroso dos Santos
Orientadora

Manaus - AM
Agosto de 2018

Superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais

por

João Batista Marques dos Santos [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 17 de Agosto de 2018.

Banca Examinadora:

Maria Rosilene B. dos Santos

Profª. Drª. Maria Rosilene Barroso dos Santos - (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes - (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. João Paulo dos Santos - (Membro Externo)
Universidade de Brasília - UnB

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Santos, Joao Batista Marques dos

S237s Superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais / Joao Batista Marques dos Santos. 2018

69 f.: il. color; 31 cm.

Orientadora: Maria Rosilene Barroso dos Santos

Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Variedades homogêneas tridimensionais. 2. superfícies totalmente umbílicas. 3. grupos de Lie unimodulares. 4. grupos de Lie não-unimodulares. I. Santos, Maria Rosilene Barroso dos II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedico este trabalho a minha mãe Ivanilde Marques dos Santos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por mais essa etapa alcançada em minha vida.

À minha mãe Ivanilde Marques dos Santos, por sempre me apoiar e incentivar nos meus estudos.

À minha orientadora, Profª. Drª. Maria Rosilene Barroso dos Santos, pela paciência na orientação e por todo o conhecimento que adquiri durante este trabalho.

À todos os professores que contribuiram com minha formação.

Aos professores José Nazareno Vieira Gomes e João Paulo dos Santos, por aceitarem avaliar esse trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro que foi fundamental para se concretizar esta importante conquista.

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuiram para que eu pudesse ter mais essa conquista.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a classificação completa das superfícies totalmente umbílicas imersas em variedades homogêneas tridimensionais, obtida no artigo intitulado "*The classification of totally umbilical surfaces in homogeneous 3-manifolds*" por Manzano e Souam [Math. Z. 279 (2015) 557-576]. Nos grupos de Lie unimodulares foi mostrado que, exceto para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, a esfera unitária $\mathbb{S}^3$, o grupo solúvel Sol_3 e os exemplos totalmente geodésicos que aparecem em alguns casos especiais dados por Tsukada [Kodai Math. J. 19 (3) (1996) 395-437], não existem superfícies totalmente umbílicas. Além disso, foi obtido extensões de alguns resultados de Inoguchi e Van der Veken [Geom. Dedicata. 131 (2008) 159-172], Souam e Toubiana [Math. Helv. 84 (3) (2009) 673-704] e Tsukada [Kodai Math. J. 19 (3) (1996) 395-437], dando provas alternativas para cada caso. Nos grupos de Lie não-unimodulares, as superfícies totalmente umbílicas existem nos casos em que o grupo de Lie é isométrico ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ e ao espaço produto $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$. Além disso, em alguns casos especiais de grupos de Lie não-unimodulares foi mostrado, a menos de uma isometria do espaço ambiente, a existência de superfícies completas totalmente geodésicas e superfícies completas totalmente umbílicas que não são totalmente geodésicas.

Palavras-chave: Variedades homogêneas tridimensionais; superfícies totalmente umbílicas; grupos de Lie unimodulares; grupos de Lie não-unimodulares.

Abstract

In this dissertation, we studied the complete classification of totally umbilical surfaces immersed in homogeneous 3-manifolds, as obtained in the article entitled "*The classification of totally umbilical surfaces in homogeneous 3-manifolds*" by Manzano and Soaum [Math. Z. 279 (2015) 557-576]. In the case of unimodular Lie groups it was shown that, except for the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, unit sphere $\mathbb{S}^3$, soluble group Sol_3 and the totally geodesics examples that appear in some special cases given by Tsukada [Kodai Math. J. 19 (3) (1996) 395-437], there are no fully umbilical surfaces. Moreover, there were obtained herein extensions of some results of Inoguchi and Van der Veken [Geom. Dedicata. 131 (2008) 159-172], Souam and Toubiana [Math. Helv. 84 (3) (2009) 673-704] and Tsukada [Kodai Math. J. 19 (3) (1996) 395-437], giving alternative proves for each case. In the case of non-unimodular Lie groups, the totally umbilical surfaces exist when the Lie group is isometric to the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ and to the product space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Futhermore, in some special cases of non-unimodular Lie groups it was shown, up to ambient isometries, the existence of complete totally geodesics surfaces and complete totally umbilical one which are not totally geodesics.

Keywords: Homogeneous 3-manifolds; totally umbilical surfaces; unimodular Lie groups; non-unimodular Lie groups.

Sumário

Introdução

Uma variedade Riemanniana homogênea M é caracterizada pela seguinte propriedade: para cada par de pontos $p, q \in M$ existe uma isometria $\varphi : M \to M$ tal que $\varphi(p) = q$. As variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três estão completamente classificados conforme a dimensão do seu grupo de isometrias, que pode ser 3, 4 ou 6, ver Thurston [18].

Nos últimos anos, muitos geômetras se dedicaram a estudar a geometria das subvariedades imersas em variedades homogêneas [2, 3, 5, 9, 13]. Um interessante tópico é o estudo de superfícies totalmente umbílicas imersas em variedades homogêneas tridimensionais. Grosso modo, uma subvariedade de uma variedade Riemanniana é totalmente umbílica se a segunda forma fundamental é proporcional a métrica induzida.

Nos espaços formas, que são as variedades Riemannianas homogêneas, simplesmente conexas e de curvatura seccional constante cujo grupo de isometria possui dimensão 6, as superfícies totalmente umbílicas já foram classificadas, ver por exemplo [16, 17]. Em 1997, Sanini [12] provou um resultado de não existência de superfícies totalmente umbílicas no espaço de Heisenberg Nil_3. Em 2009, Souam e Toubiana [14] classificaram as superfícies totalmente umbílicas nos espaços homogêneos $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e no grupo de Lie Sol_3, além de estenderem o resultado de Sanini. Conforme [18], o grupo de isometrias de Nil_3, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ tem dimensão 4 e o grupo de Lie Sol_3 tem o grupo de isometria de dimensão 3.

Naturalmente, todo grupo de Lie com métrica invariante à esquerda é uma variedade homogênea. Meeks e Pérez [9], provaram que no caso de dimensão três, qualquer variedade Riemanniana homogênea e simplesmente conexa é isométrica a um grupo de Lie tridimensional com uma métrica invariante à esquerda, exceto a variedade produto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, em que $\mathbb{S}^2(\kappa)$ representa a 2-esfera de curvatura constante $\kappa > 0$.

Nesta dissertação, baseada no artigo "*The classification of totally umbilical surfaces in homogeneous 3-manifolds*" dos autores Manzano e Souam [8], estudamos a classificação completa das superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais. No primeiro capítulo, apresentamos uma breve descrição dos produtos semidiretos e também os principais entes geométricos dos grupos de Lie unimodulares e não-unimodulares. Vale ressaltar que os grupos mencionados anteriormente podem ser representados por um produto semidireto. No segundo e terceiro capítulos, apresentamos e demonstramos os teoremas de classificação das superfícies totalmente umbílicas nesses grupos. Um ponto crucial na prova dos resultados principais é relacionar os argumentos geométricos e algébricos envolvendo as funções ângulo e a função de umbilicidade. Grosso modo, as funções ângulo de uma superfície são definidas como sendo as componentes do normal unitário à superfície em um referencial ortonormal do espaço ambiente. Como consequência do resultado de classificação das superfícies totalmente umbílicas em grupos de Lie unimodulares é apresentado uma outra prova de generalização do resultado de Sanini.

Em todo o trabalho, admitimos que os grupos de Lie serão conexos, simplesmente conexos, de dimensão três e munidos com uma métrica invariante à esquerda. Além disso, admitimos como pré-requisito os conceitos básicos de grupos de Lie e variedades Riemannianas [1, 20].

Capítulo 1

Variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos utilizados no restante do trabalho. Primeiro, introduzimos de modo geral o conceito de produto semidireto, determinamos sua métrica Riemanniana bem como sua Conexão de Levi-Civita. Em seguida, quanto a estrutura de grupo, desenvolvemos a geometria dos grupos de Lie unimodulares e não-unimodulares. Por simplicidade, usaremos ao longo do texto (quando necessário), a convenção de Einstein.

O texto base para este capítulo é o artigo "*Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*" de Meeks e Peréz [9].

1.1 Produto semidireto

Um produto semidireto, que denotamos por $H \rtimes_\varphi V$, é um grupo tal que H e V são subgrupos de $H \rtimes_\varphi V$ com H normal. Aqui, $\varphi : V \longrightarrow Aut(H)$ é um homomorfismo de grupos definido por

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \varphi_z : & H \longrightarrow H \\ & p \longrightarrow \varphi_z(p) \end{aligned}$$

para cada $z \in \mathbb{R}$, onde $Aut(H)$ representa o grupo dos automorfismos de H. Em termos de conjunto, um produto semidireto é um produto cartesiano munido de uma operação diferente da usual. Tal operação será descrita a seguir.

A operação $*$ do produto semidireto $H \rtimes_\varphi V$ é dada por

$$(p_1, z_1) * (p_2, z_2) = (p_1 \star \varphi_{z_1}(p_2), z_1 + z_2),$$

em que $\star$ é a operação em H.

No nosso caso, o subgrupo normal H será de dimensão 2 e isomorfo a $\mathbb{R}^2$ ou a $\mathbb{H}^2$, e o outro fator V será isomorfo a $\mathbb{R}$.

No que segue, nos concentraremos no caso em que $H = \mathbb{R}^2$ e o homomorfismo φ é dado pela exponencial de uma matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$, ou seja, $\varphi_z(p) = e^{zB}p$. Dessa forma, o grupo correspondente será denotado por $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ com a operação

$$(p_1, z_1) * (p_2, z_2) = (p_1 + e^{z_1 B} p_2, z_1 + z_2). \tag{1.1}$$

Com essa construção, é possível obter todos os grupos de Lie simplesmente conexos de dimensão três, exceto $SU(2)$ (que não é difeomorfo a $\mathbb{R}^3$) e $SL(2,\mathbb{R})$ (que não possui subgrupo normal de dimensão dois), ver [9].

Veremos agora, alguns exemplos dependendo da escolha da matriz B. Para tanto, denote $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$.

Exemplo 1.1.

1. Quando $B = 0$ é a matriz nula de $M_2(\mathbb{R})$, temos o produto direto usual de grupos, ou seja, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Analogamente, se $H \equiv \mathbb{H}^2$ e tomando $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow Aut(H)$ como sendo $\varphi(z) = 1_H$, temos $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

2. Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $e^{zB} = e^z B$ e $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R} = \mathbb{H}^3$, chamado grupo das similaridades de $\mathbb{R}^2$, munido da operação

$$\begin{aligned}(p_1, z_1) * (p_2, z_2) &= ((x_1, y_1) + e^{z_1 B}(x_2, y_2), z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + e^{z_1 B} x_2, y_1 + e^{z_1 B} y_2, z_1 + z_2).\end{aligned}$$

   Existe também uma construção para $\mathbb{H}^2$, basta considerar a matriz B sendo a matriz identidade 1×1, $B = (1)$, e a operação $*$ em $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^2 \rtimes_{(1)} \mathbb{R}$ é dada por

$$(x, y) * (x', y') = (x + e^y x', y + y').$$

3. Uma consequência simples do modelo de produto semidireto para $\mathbb{H}^2$ é que $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ pode ser visto como o produto $(\mathbb{R} \rtimes_{(1)} \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. No entanto, também podemos construir $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ pelo produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$, onde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então $e^{zB} = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z \\ \sin z & \cos z \end{pmatrix}$. Assim, $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R} = \tilde{E}(2)$ é o recobrimento universal do grupo de movimentos rígidos do plano Euclidiano que

preservam a orientação e sua estrutura é dada por

$$(p_1, z_1) * (p_2, z_2) = (x_1 + x_2 \cos z_1 - y_2 \sin z_1, y_1 + x_2 \sin z_1 + y_2 \cos z_1, z_1 + z_2).$$

5. Quando $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $e^{zB} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ 0 & e^{z} \end{pmatrix}$. Portanto, $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R} = Sol_3$ é o grupo solúvel, também conhecido como o grupo $E(1,1)$ de movimentos rígidos do plano de Lorentz-Minkowski que preservam a orientação. A estrutura de Sol_3 é dada por

$$(p_1, z_1) * (p_2, z_2) = (x_1 + x_2 e^{z_1 B}, y_1 + y_2 e^{z_1 B}, z_1 + z_2).$$

6. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $e^{zB} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dessa forma, $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R} = Nil_3$ é o grupo de Heisenberg das matrizes da forma $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, com a seguinte estrutura

$$(p_1, z_1) * (p_2, z_2) = (x_1 + x_2 + z_1 y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

As translações à esquerda e à direita em $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ são dadas, respectivamente, por

$$L_{(p_1,z_1)}(p_2, z_2) = R_{(p_2,z_2)}(p_1, z_1) = (p_1, z_1) * (p_2, z_2).$$

O objetivo agora é determinar uma base de campos invariantes à esquerda (respectivamente à direita) em um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ para toda matriz da forma

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Tome coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ e considere os campos coordenados ∂_x, ∂_y, ∂_z. Considere ainda, as curvas

$$\alpha_1(t) = (t, 0, 0), \quad \alpha_2(t) = (0, t, 0), \quad \alpha_1(t) = (0, 0, t),$$

tais que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = (0, 0, 0)$ e $\alpha_1'(0) = \partial_x$, $\alpha_2'(0) = \partial_y$, $\alpha_3'(0) = \partial_z$. Assim, os campos invariantes à esquerda E_1, E_2, E_3, são determinados da seguinte forma

$$\begin{aligned}
E_1 = dL_{(x,y,z)}(\partial_x) &= \frac{d}{dt}(L_{(x,y,z)} \circ \alpha_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(L_{(x,y,z)}(t,0,0))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((x,y) + e^{zB}(t,0), z)\Big|_{t=0} = (e^{zB}(1,0), 0) \\
&= (a_{11}(z), a_{21}(z), 0) = a_{11}(z)\partial_x + a_{21}(z)\partial_y
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
E_2 &= a_{12}(z)\partial_x + a_{22}(z)\partial_y \\
E_3 &= \partial_z,
\end{aligned}$$

em que as funções $a_{ij}(z)$, $1 \leq i, j \leq 2$, denotam as entradas da matriz e^{zB}. Do mesmo modo, vamos calcular os campos invariantes à direita.

$$\begin{aligned}
F_1 = dR_{(x,y,z)}(\partial_x) &= \frac{d}{dt}(R_{(x,y,z)} \circ \alpha_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(R_{(x,y,z)}(t,0,0))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((t,0) + e^{0B}(x,y), z)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(t+x, y, z)\Big|_{t=0} \\
&= (1,0,0) = \partial_x.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
F_2 &= \partial_y \\
F_3 &= (ax + by)\partial_x + (cx + dy)\partial_y + \partial_z.
\end{aligned}$$

É importante lembrar que os campos invariantes à direita em um grupo de Lie são campos de Killing, ver Ochiai e Takahashi [11]. Verificamos facilmente que $[E_1, E_2] = 0$ e

$$\begin{aligned}
[E_3, E_1] &= [\partial_z, a_{11}(z)\partial_x + a_{21}(z)\partial_y] \\
&= a_{11}(z)[\partial_z, \partial_x] + \partial_z(a_{11}(z))\partial_x - a_{11}(z)\partial_x(1)\partial_z \\
&\quad + a_{21}(z)[\partial_z, \partial_y] + \partial_z(a_{21}(z))\partial_y - a_{21}(z)\partial_y(1)\partial_z \\
&= a'_{11}(z)\partial_x + a'_{21}(z)\partial_y,
\end{aligned}$$

onde $'$ indica a derivada com respeito a variável z. De forma semelhante, encontramos $[E_3, E_2] = a'_{12}(z)\partial_x + a'_{22}(z)\partial_y$. Como

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{21}(z) \\ a_{12}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix},$$

então tomando a transposta em ambos lados, temos

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix} e^{zB}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(-z) & a_{12}(-z) \\ a_{21}(-z) & a_{22}(-z) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(-z) & a_{21}(-z) \\ a_{12}(-z) & a_{22}(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
[E_3, E_1] &= a'_{11}(z)(a_{11}(-z)E_1 + a_{21}(-z)E_2) + a'_{21}(z)(a_{12}(-z)E_1 + a_{22}(-z)E_2) \\
&= (a'_{11}(z)a_{11}(-z) + a'_{21}(z)a_{12}(-z))E_1 + (a'_{11}(z)a_{21}(-z) + a'_{21}(z)a_{22}(-z))E_2, \\
[E_3, E_2] &= a'_{12}(z)(a_{11}(-z)E_1 + a_{21}(-z)E_2) + a'_{22}(z)(a_{12}(-z)E_1 + a_{22}(-z)E_2) \\
&= (a'_{12}(z)a_{11}(-z) + a'_{22}(z)a_{12}(-z))E_1 + (a'_{12}(z)a_{21}(-z) + a'_{22}(z)a_{22}(-z))E_2.
\end{aligned}$$

Note que

$$e^{zB}B = Be^{zB} = (e^{zB})' = \begin{pmatrix} a'_{11}(z) & a'_{12}(z) \\ a'_{21}(z) & a'_{22}(z) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} a_{11}(-z) & a_{12}(-z) \\ a_{21}(-z) & a_{22}(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11}(z) & a'_{12}(z) \\ a'_{21}(z) & a'_{22}(z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(-z)a'_{11}(z) + a_{12}(-z)a'_{21}(z) & a_{11}(-z)a'_{12}(z) + a_{12}(-z)a'_{22}(z) \\ a_{21}(-z)a'_{11}(z) + a_{22}(-z)a'_{21}(z) & a_{21}(-z)a'_{12}(z) + a_{22}(-z)a'_{22}(z) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[E_3, E_1] = aE_1 + cE_2. \tag{1.3}$$

$$[E_3, E_2] = bE_1 + dE_2. \tag{1.4}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
(e^{zB})^{-1} = e^{-zB} = \begin{pmatrix} a_{11}(-z) & a_{12}(-z) \\ a_{21}(-z) & a_{22}(-z) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det(e^{zB})} \begin{pmatrix} a_{22}(z) & -a_{12}(z) \\ -a_{21}(z) & a_{11}(z) \end{pmatrix} \\
&= e^{-tr(B)z} \begin{pmatrix} a_{22}(z) & -a_{12}(z) \\ -a_{21}(z) & a_{11}(z) \end{pmatrix}, \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

em que $tr(B)$ denota o traço da matriz B. Assim, de (1.2) e (1.5) temos

$$
\begin{aligned}
\partial_x &= e^{-tr(B)z}(a_{22}(z)E_1 - a_{21}(z)E_2) \\
\partial_y &= e^{-tr(B)z}(a_{11}(z)E_2 - a_{12}(z)E_1) \\
\partial_z &= E_3.
\end{aligned}
$$

Portanto, a métrica invariante à esquerda em $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ tal que E_1, E_2, E_3 são ortonormais é da forma

$$
\begin{aligned}
ds^2 = e^{-2tr(B)z} &\left[(a_{22}(z)^2 + a_{21}(z)^2)dx^2 + (a_{11}(z)^2 + a_{12}(z)^2)dy^2\right] + dz^2 \\
&- e^{-2tr(B)z}\left[a_{11}(z)a_{21}(z) + a_{22}(z)a_{12}(z)\right](dxdy + dydx).
\end{aligned}
$$

Agora, denotando por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$, temos que

$$\overline{\nabla}_{E_i}E_j = \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_j, E_1\rangle E_1 + \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_j, E_2\rangle E_2 + \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_j, E_3\rangle E_3.$$

Usando as equações (1.3), (1.4) e a fórmula de Koszul (Carmo,[1]), obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_{E_1}E_1, E_1\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_1}E_1, E_2\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \overline{\nabla}_{E_1}E_1, E_3\rangle = a.$$

Prosseguindo, a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ com respeito a métrica invariante à esquerda de $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ satisfaz

$$
\begin{array}{lll}
\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = aE_3, & \overline{\nabla}_{E_1}E_2 = \frac{b+c}{2}E_3, & \overline{\nabla}_{E_1}E_3 = -aE_1 - \frac{b+c}{2}E_2, \\
\overline{\nabla}_{E_2}E_1 = \frac{b+c}{2}E_3, & \overline{\nabla}_{E_2}E_2 = dE_3, & \overline{\nabla}_{E_2}E_3 = -\frac{b+c}{2}E_1 - dE_2, \\
\overline{\nabla}_{E_3}E_1 = \frac{c-b}{2}E_2, & \overline{\nabla}_{E_3}E_2 = \frac{b-c}{2}E_1, & \overline{\nabla}_{E_3}E_3 = 0.
\end{array} \qquad (1.6)
$$

1.2 Grupo de Lie unimodular

Definição 1.1. Um grupo de Lie G é dito unimodular se a medida de Haar invariante à esquerda é também invariante à direita.

Para os nossos propósitos, usaremos uma definição equivalente à Definição 1.1 que pode ser encontrada em Helgason [6].

Definição 1.2. Um grupo de Lie G é dito unimodular se, e somente se, a transformação linear $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ tem determinante ± 1.

Na Definição 1.2, a transformação $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ é a chamada representação adjunta de G, onde $\mathfrak{g}$ representa a álgebra de Lie de G. O lema a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um grupo de Lie G seja unimodular.

Lema 1.1. *Um grupo de Lie conexo G é unimodular se e somente se para qualquer $X \in \mathfrak{g}$, a transformação linear $ad_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por*

$$ad_X(Y) = [X, Y],$$

tem traço nulo.

Demonstração. Por [9], temos $Ad \circ \exp = \exp \circ ad$, ou seja,

$$Ad(\exp(X)) = \exp(ad(X)) = e^{ad(X)}, \forall\ X \in \mathfrak{g}.$$

Como G é unimodular temos $|\det(Ad(g))| = 1, \forall g \in G$. Assim,

$$1 = |\det(Ad(\exp(X)))| = e^{tr(ad(X))}.$$

Portanto, $tr(ad(X)) = 0$. Reciprocamente, se $tr(ad(X)) = 0$, temos que $\det Ad(g) = 1, \forall\ g \in Im(\exp)$. Note que a diferencial da aplicação exponencial na identidade do grupo, denotado por e, é isomorfismo e do teorema da função inversa, segue que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um difeomorfimo local, ou seja, existe uma vizinhança $V \subset \mathfrak{g}$ de e tal que $\exp : V \to \exp(V)$ é um difeomorfismo. Sendo G conexo, de Warner [20], segue que G é gerado por qualquer vizinhança da identidade. Portanto, $\det Ad(g) = 1, \forall g \in G$, ou seja, G é unimodular. ■

O próximo lema nos garante que existe um único operador linear $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X, Y] = L(X \wedge Y), \tag{1.7}$$

onde $\wedge$ é o produto cruzado. Além disso, G é unimodular se, e somente se, L é auto-adjunto.

Lema 1.2. *Para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, Y] = L(X \wedge Y),$$

onde $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um endomorfismo linear. O grupo de Lie G é unimodular se, e somente se, L é auto-adjunto.

Demonstração. Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua algebra de Lie tridimensional com uma métrica definida positiva e com uma orientação fixada. Escolha uma base ortonormal orientada $\{e_1, e_2, e_3\}$, e defina o operador linear $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por

$$L(e_1) = [e_2, e_3]\ , L(e_2) = [e_3, e_1]\ , L(e_3) = [e_1, e_2].$$

Note que a identidade $L(e_i \wedge e_j) = [e_i, e_j]$ é verdadeira para todos os elementos da base e, consequentemente, $L(X \wedge Y) = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Definindo $L(e_i) = \alpha_{ij} e_j$, temos

$$\begin{aligned} tr(ad(e_1)) &= \langle ad(e_1)e_1, e_1\rangle + \langle ad(e_1)e_2, e_2\rangle + \langle ad(e_1)e_3, e_3\rangle \\ &= \langle [e_1, e_1], e_1\rangle + \langle [e_1, e_2], e_2\rangle + \langle [e_1, e_3], e_3\rangle \\ &= \langle L(e_3), e_2\rangle + \langle -L(e_2), e_3\rangle \\ &= \langle \alpha_{3j} e_j, e_2\rangle + \langle -\alpha_{2j} e_j, e_3\rangle \\ &= \alpha_{32} - \alpha_{23}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} tr(ad(e_2)) &= \alpha_{13} - \alpha_{31}, \\ tr(ad(e_3)) &= \alpha_{21} - \alpha_{12}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1, G é unimodular se, e somente se, a matriz $(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ é simétrica. Em outras palavras, a transformação linear L é auto-adjunta. ■

Segue do Lema 1.2 que, se G é um grupo de Lie unimodular munido de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então sempre é possível encontrar um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$ tais que

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= L(E_1 \wedge E_2) = L(E_3) = c_3 E_3, \\ [E_2, E_3] &= L(E_2 \wedge E_3) = L(E_1) = c_1 E_1, \\ [E_3, E_1] &= L(E_3 \wedge E_1) = L(E_2) = c_2 E_2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

para certas constantes c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Os números reais c_1, c_2, c_3 são chamados de constantes de estrututa do Grupo de Lie G e são bastante úteis para a descrição da geometria dos grupos de Lie unimodulares. É interessante observar que, se mudarmos o sinal de todos os c_i, a geometria de G é preservada, mas a orientação é invertida, portanto a estrutura de G é invariante, a menos da mudança do sinal de todos os c_i. Dependendo dos sinais das constantes de estruturas c_i, os grupos de Lie unimodulares são dados pela seguinte tabela:

Sinais de c_1, c_2, c_3	Grupos de Lie correspondentes
$+, +, +$	$SU(2)$
$+, +, -$	$\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$
$+, +, 0$	$\widetilde{E}(2)$
$+, -, 0$	Sol_3
$+, 0, 0$	Nil_3
$0, 0, 0$	$\mathbb{R}^3$

Tabela 1.1: Grupos de Lie unimodulares

Vamos agora, com o auxílio da fómula de Koszul, calcular a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de G. Como

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E_1 \rangle E_1 + \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E_2 \rangle E_2 + \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E_3 \rangle E_3, \tag{1.9}$$

temos, usando (1.8) e a fórmula de Koszul, que

$$\langle \overline{\nabla}_{E_1} E_1, E_1 \rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_1} E_1, E_2 \rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_1} E_1, E_3 \rangle = 0.$$

Portanto, $\overline{\nabla}_{E_1} E_1 = 0$. De forma análoga, podemos verificar que a conexão de Levi-Civita em um grupo de Lie unimodular, satisfaz

$$\begin{array}{lll} \overline{\nabla}_{E_1} E_1 = 0, & \overline{\nabla}_{E_1} E_2 = \mu_1 E_3, & \overline{\nabla}_{E_1} E_3 = -\mu_1 E_2, \\ \overline{\nabla}_{E_2} E_1 = -\mu_2 E_3, & \overline{\nabla}_{E_2} E_2 = 0, & \overline{\nabla}_{E_2} E_3 = \mu_2 E_1, \\ \overline{\nabla}_{E_3} E_1 = \mu_3 E_2, & \overline{\nabla}_{E_3} E_2 = -\mu_3 E_1, & \overline{\nabla}_{E_3} E_3 = 0, \end{array} \tag{1.10}$$

em que $\mu_1 = \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3)$, $\mu_2 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3)$, $\mu_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3)$.

Observação 1.1. O sistema de equações lineares μ_i definido em termos de c_i é inversível, ou seja, podemos também expressar os c_i em termos dos μ_i. Conforme a Tabela 1.1, a descrição desses grupos de Lie é melhor compreendida por c_i. Um cálculo simples, mostra para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e supondo $c_i \leq c_j$, que vale $\mu_j \leq \mu_i$.

Uma vez calculada a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ nos campos invariantes à esquerda E_1, E_2, E_3 de G, fica fácil determinar o tensor curvatura R nos respectivos campos. Levando em consideração que

$$R(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$, temos

$$R(E_1, E_2)E_1 = \overline{\nabla}_{E_1} \overline{\nabla}_{E_2} E_1 - \overline{\nabla}_{E_2} \overline{\nabla}_{E_1} E_1 - \overline{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\nabla}_{E_1}(-\mu_2 E_3) - \overline{\nabla}_{c_3 E_3} E_1 \\
&= -\mu_2 \overline{\nabla}_{E_1} E_3 - c_3 \overline{\nabla}_{E_3} E_1 \\
&= (\mu_2\mu_1 - c_3\mu_3) E_2.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, verificamos que o tensor curvatura R de G satisfaz

$$
\begin{aligned}
R(E_1, E_2)E_1 &= (\mu_2\mu_1 - c_3\mu_3)E_2, \\
R(E_1, E_2)E_2 &= -(\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)E_1, \\
R(E_1, E_2)E_3 &= 0, \\
R(E_1, E_3)E_1 &= (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)E_3, \\
R(E_1, E_3)E_2 &= 0, \\
R(E_1, E_3)E_3 &= -(\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)E_1, \\
R(E_2, E_3)E_1 &= 0, \\
R(E_2, E_3)E_2 &= (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)E_3, \\
R(E_2, E_3)E_3 &= -(\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)E_2.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

A expressão geral para o tensor curvatura R de G é dada pelo seguinte lema.

Lema 1.3. *Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$,*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z = (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)R_1(X,Y)Z &+ (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)R_2(X,Y)Z \\
&+ (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)R_3(X,Y)Z,
\end{aligned}
$$

onde o tensor R_i, $i \in \{1,2,3\}$, é definido por

$$
\begin{aligned}
R_i(X,Y)Z = \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X &- \langle Z, E_i\rangle\langle X, E_i\rangle Y + \langle Z, E_i\rangle\langle Y, E_i\rangle X \\
&- \langle Y, E_i\rangle\langle X, Z\rangle E_i + \langle X, E_i\rangle\langle Y, Z\rangle E_i.
\end{aligned}
$$

Demonstração. De fato, dados quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$, temos

$$
X = \sum_{i=1}^{3}\langle X, E_i\rangle E_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{3}\langle Y, E_j\rangle E_j, \quad Z = \sum_{k=1}^{3}\langle Z, E_k\rangle E_k.
$$

Por simplicidade, vamos omitir o somatório. Assim,

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\langle Z, E_k\rangle E_k &= \overline{\nabla}_X(Y\langle Z, E_k\rangle E_k + \langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_Y E_k) \\
X(Y\langle Z, E_k\rangle)E_k &+ Y\langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_X E_k + X\langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_Y E_k + \langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y E_k.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, temos

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = Y(X\langle Z, E_k\rangle)E_k + X\langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_Y E_k + Y\langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_X E_k + \langle Z, E_k\rangle\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X E_k.$$

Portanto,

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = (XY - YX)(\langle Z, E_k\rangle)E_k + \langle Z, E_k\rangle(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y E_k - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X E_k),$$

em que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y E_k &= X\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{E_j}E_k + \langle Y, E_j\rangle\langle X, E_i\rangle\overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_j}E_k,\\ \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X E_k &= Y\langle X, E_i\rangle\overline{\nabla}_{E_i}E_k + \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{E_j}\overline{\nabla}_{E_i}E_k,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = [X, Y](\langle Z, E_k\rangle)E_k + \langle Z, E_k\rangle\big(&X\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{E_j}E_k - Y\langle X, E_i\rangle\overline{\nabla}_{E_i}E_k\\ &+ \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle(\overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_j}E_k - \overline{\nabla}_{E_j}\overline{\nabla}_{E_j}E_k)\big).\end{aligned}$$

Sendo $R(E_i, E_j)E_k = \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_j}E_k - \overline{\nabla}_{E_j}\overline{\nabla}_{E_j}E_k - \overline{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_k$, segue que

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z = [X, Y](\langle Z, E_k\rangle)E_k + \langle Z, E_k\rangle\big(&X\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{E_j}E_k - Y\langle X, E_i\rangle\overline{\nabla}_{E_i}E_k\\ &+ \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle R(E_i, E_j)E_k + \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_k\big).\end{aligned}$$

Por outro lado, sabendo que

$$\begin{aligned}[X, Y] &= \big[\langle X, E_i\rangle E_i, \langle Y, E_j\rangle E_j\big]\\ &= \langle X, E_i\rangle E_i\langle Y, E_j\rangle E_j - \langle Y, E_j\rangle E_j\langle X, E_i\rangle E_i + \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle[E_i, E_j],\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \overline{\nabla}_{[X,Y]}\langle Z, E_k\rangle E_k &= [X, Y]\langle Z, E_k\rangle E_k + \langle Z, E_k\rangle E_k\overline{\nabla}_{[X,Y]}E_k\\ &= [X, Y]\langle Z, E_k\rangle E_k + \langle Z, E_k\rangle(\langle X, E_i\rangle E_i\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{E_j}E_k - \langle Y, E_j\rangle E_j\langle X, E_i\rangle\overline{\nabla}_{E_i}E_k\\ &\quad + \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle\overline{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_k).\end{aligned}$$

Logo,

$$R(X, Y)Z = \langle X, E_i\rangle\langle Y, E_j\rangle\langle Z, E_k\rangle R(E_i, E_j)E_k.$$

Fazendo a soma em $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ obtemos

$$R(X, Y)Z = (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)R_1(X, Y)Z + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)R_2(X, Y)Z$$

$$+ (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)R_3(X,Y)Z,$$

$$\begin{aligned}
R_1(X,Y)Z &= \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,E_1\rangle\langle X,E_1\rangle Y + \langle Z,E_1\rangle\langle Y,E_1\rangle X \\
&\quad - \langle Y,E_1\rangle\langle X,Z\rangle E_1 + \langle X,E_1\rangle\langle Y,Z\rangle E_1, \\
R_2(X,Y)Z &= \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,E_2\rangle\langle X,E_2\rangle Y + \langle Z,E_2\rangle\langle Y,E_2\rangle X \\
&\quad - \langle Y,E_2\rangle\langle X,Z\rangle E_2 + \langle X,E_2\rangle\langle Y,Z\rangle E_2, \\
R_3(X,Y)Z &= \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,E_3\rangle\langle X,E_3\rangle Y + \langle Z,E_3\rangle\langle Y,E_3\rangle X \\
&\quad - \langle Y,E_3\rangle\langle X,Z\rangle E_3 + \langle X,E_3\rangle\langle Y,Z\rangle E_3.
\end{aligned}$$

■

Denotando a curvatura escalar de G por ρ, então

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{i,j=1}^{3}\langle R(E_i,E_j)E_j,E_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{3}\langle R(E_1,E_j)E_j,E_1\rangle + \sum_{j=1}^{3}\langle R(E_2,E_j)E_j,E_2\rangle + \sum_{j=1}^{3}\langle R(E_3,E_j)E_j,E_3\rangle \\
&= \langle R(E_1,E_2)E_2,E_1\rangle + \langle R(E_1,E_3)E_3,E_1\rangle + \langle R(E_2,E_1)E_1,E_2\rangle \\
&\quad + \langle R(E_2,E_3)E_3,E_2\rangle + \langle R(E_3,E_1)E_1,E_3\rangle + \langle R(E_3,E_2)E_2,E_3\rangle \\
&= -\mu_1\mu_2 + c_3\mu_3 - \mu_1\mu_3 + c_2\mu_2 - \mu_1\mu_2 + c_3\mu_3 - \mu_2\mu_3 + c_1\mu_1 \\
&\quad - \mu_1\mu_3 + c_2\mu_2 - \mu_2\mu_3 + c_1\mu_1 \\
&= 2(-\mu_1\mu_2 + c_3\mu_3 - \mu_2\mu_3 + c_1\mu_1 - \mu_1\mu_3 + c_2\mu_2).
\end{aligned}$$

Como

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-c_1+c_2+c_3), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(c_1-c_2+c_3), \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(c_1+c_2-c_3),$$

então

$$c_1 = \mu_2+\mu_3, \quad c_2 = \mu_1+\mu_3, \quad c_3 = \mu_1+\mu_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho &= 2(-\mu_1\mu_2 + (\mu_1+\mu_2)\mu_3 - \mu_2\mu_3 + (\mu_2+\mu_3)\mu_1 - \mu_1\mu_3 + (\mu_1+\mu_3)\mu_2) \\
&= 2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3). \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

1.3 Grupo de Lie não-unimodular

Veremos a seguir que os grupos de Lie métricos não-unimodulares são dados pelos produtos semidiretos $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ com $tr(B) \neq 0$, e a estrutura dada por (1.1).

Lema 1.4. *Um grupo de Lie G é não-unimodular se, e somente se, ele é isomorfo a um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ com $tr(B) \neq 0$.*

Demonstração. Seja G um grupo de Lie não-unimodular e $\langle , \rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G. Considere $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G e seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \varphi(x) = tr(ad_x), \end{aligned}$$

uma aplicação linear. Note que o núcleo $\mathfrak{u}$ da aplicação φ tem dimensão 2. Podemos encontrar uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{u} = \text{span}\{E_1, E_2\}$. Pela identidade de Jacobi, a transformação adjunta ad, satisfaz

$$ad_{[x,y]} = ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Tomando o traço na identidade acima, segue que $[x, y] \in \mathfrak{u} = ker(\varphi), \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Em particular, $[E_3, E_1]$, $[E_3, E_2] \in \mathfrak{u}$, e portanto, são ortogonais a E_3. Como $0 = tr(ad_{E_1}) = \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle$ e $0 = tr(ad_{E_1}) = \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle$, pois $E_1, E_2 \in \mathfrak{u}$, então $[E_1, E_2] = 0$. Além disso, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= aE_1 + cE_2, \\ [E_3, E_2] &= bE_1 + dE_2, \end{aligned}$$

com $tr(ad_{E_3}) = a + d \neq 0$, pois $E_3 \notin \mathfrak{u}$. Agora, tomando a matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obtemos, pela construção feita na Seção 1.1, que as algebras de Lie de G e $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ são isomorfas. Como os grupos G e $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ são simplesmente conexos, então por [20], existe um isomorfismo entre eles. A recíproca é imediata. ∎

Quando G é um grupo de Lie não-unimodular, após uma homotetia da métrica, podemos considerar $tr(B) = 2$. Essa normalização será assumida até o final desta dissertação. Além disso, após uma mudança ortogonal da base invariante à esquerda podemos escrever a matriz B de maneira única por

$$B = B(a, b) = \begin{pmatrix} 1 + a & -(1 - a)b \\ (1 + a)b & 1 - a \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

em que a, $b \geq 0$ (ver [9] para mais detalhes).

Da Seção 1.1, temos que

$$E_1 = a_{11}(z)\partial_x + a_{21}(z)\partial_y, \quad E_2 = a_{12}(z)\partial_x + a_{22}(z)\partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$

define um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda, em que $a_{ij}(z)$ denota as entradas da matriz e^{zB}.

De maneira análoga ao que foi feito na Seção 1.1, os colchetes dos campos E_1, E_2, E_3 são dados por

$$\begin{aligned} &[E_1, E_2] = 0, \\ &[E_2, E_3] = (1-a)bE_1 - (1-a)E_2, \\ &[E_3, E_1] = (1+a)E_1 + (1+a)bE_2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Daí, usando a fórmula de Koszul, obtemos as seguintes relações para a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de G.

$$\begin{array}{lll} \overline{\nabla}_{E_1}E_1 = (1+a)E_3, & \overline{\nabla}_{E_1}E_2 = abE_3, & \overline{\nabla}_{E_1}E_3 = -(1+a)E_1 - abE_2, \\ \overline{\nabla}_{E_2}E_1 = abE_3, & \overline{\nabla}_{E_2}E_2 = (1-a)E_3, & \overline{\nabla}_{E_2}E_3 = -abE_1 - (1-a)E_2, \\ \overline{\nabla}_{E_3}E_1 = bE_2, & \overline{\nabla}_{E_3}E_2 = -bE_1, & \overline{\nabla}_{E_3}E_3 = 0. \end{array} \tag{1.15}$$

Assim, de (1.15), o tensor curvatura R de G satisfaz

$$\begin{aligned} &R(E_1, E_2)E_1 = (1 - a^2(1+b^2))E_2, \\ &R(E_1, E_2)E_2 = -(1 - a^2(1+b^2))E_1, \\ &R(E_1, E_2)E_3 = 0, \\ &R(E_1, E_3)E_1 = (ab^2 + ab^2(1+a) + (1+a)^2)E_3, \\ &R(E_1, E_3)E_2 = 0, \\ &R(E_1, E_3)E_3 = -(ab^2 + ab^2(1+a) + (1+a)^2)E_1, \\ &R(E_2, E_3)E_1 = 0, \\ &R(E_2, E_3)E_2 = -(ab^2 + ab^2(1-a) - (1-a)^2)E_3, \\ &R(E_2, E_3)E_3 = (ab^2 + ab^2(1-a) - (1-a)^2)E_2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

De forma análoga ao Lema 1.3, obtemos a seguinte expressão geral para o tensor R.

Lema 1.5. *Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$,*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & [(1-a)^2(1+b)^2 - b^2]R_1(X,Y)Z + [(1+a)^2(1+b)^2 - b^2]R_2(X,Y)Z \\ & + [(1-a)^2(1+b)^2 - b^2]R_3(X,Y)Z, \end{aligned}$$

onde o tensor R_i, $i \in \{1,2,3\}$, é definido por

$$R_i(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,E_i\rangle\langle X,E_i\rangle Y + \langle Z,E_i\rangle\langle Y,E_i\rangle X \\ - \langle Y,E_i\rangle\langle X,Z\rangle E_i + \langle X,E_i\rangle\langle Y,Z\rangle E_i.$$

Demonstração. A prova é análoga a do Lema 1.3. ■

Usando (1.16), a curvatura escalar de G é

$$\begin{aligned}\rho &= \langle R(E_1,E_2)E_2,E_1\rangle + \langle R(E_1,E_3)E_3,E_1\rangle + \langle R(E_2,E_1)E_1,E_2\rangle \\ &\quad + \langle R(E_2,E_3)E_3,E_2\rangle + \langle R(E_3,E_1)E_1,E_3\rangle + \langle R(E_3,E_2)E_2,E_3\rangle \\ &= -2(1-a^2(1+b^2)) - 2(ab^2+ab^2(1+a)+(1+a)^2) \\ &\quad + 2(ab^2+ab^2(1-a)-(1-a)^2) \\ &= -2[3+a^2(1+b^2)]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Observação 1.2. De (1.16), segue que

$$\begin{aligned} K(E_1,E_2) &= \langle R(E_1,E_2)E_2,E_1\rangle = -(1-a^2(1+b^2)), \\ K(E_1,E_3) &= \langle R(E_1,E_3)E_3,E_1\rangle = -(ab^2+ab^2(1+a)+(1+a)^2), \\ K(E_2,E_3) &= \langle R(E_2,E_3)E_3,E_2\rangle = (ab^2+ab^2(1-a)-(1-a)^2), \end{aligned}$$

onde K representa a curvatura seccional de G. Daí, se $a = 0$, segue que $K = -1$ e portanto G é isométrico a $\mathbb{H}^3$. Se $a = 1$ e considerando E_2 um campo de Killing unitário, então para os espaços homogêneos $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$, onde os números reais κ e τ são a curvatura da base da fibração e a curvatura do fibrado, respectivamente, satisfazendo $\kappa \neq 4\tau^2$, temos $\tau = b$ e da fórmula

$$\kappa = K(E_1,E_3) + \frac{3}{4}\|[E_1,E_3]^V\|^2,$$

onde ^{V} indica a parte vertical de $[E_1,E_3]$ (ver Daniel [2]), $\kappa = -4$, ou seja, G é isométrico ao espaço $\mathbb{E}(-4,b)$.

Capítulo 2

Superfícies totalmente umbílicas em grupos de Lie unimodulares

Seja G um grupo de Lie unimodular. Denote por Σ uma superfície imersa isometricamente em G, $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de G e Σ, respectivamente. Por simplicidade, a métrica Riemanniana de G e a métrica induzida sobre Σ serão denotadas por $\langle , \rangle$. Além disso, dado um ponto $p \in \Sigma$, denote por $T_p\Sigma$ o espaço tangente a Σ em p, $C^\infty(\Sigma)$ o conjunto das funções suaves em Σ e $\mathfrak{X}(\Sigma)$ o conjunto dos campos de vetores em Σ.

O principal objetivo deste capítulo é mostrar a classificação das superfícies totalmente umbílicas de G provada em [8]. Para tanto iremos, inicialmente, entender os entes geométricos envolvidos. No que segue, Σ é uma superfície totalmente umbílica em G, isto é, existe uma função $\lambda \in C^\infty(\Sigma)$, chamada função de umbilicidade, tal que $AX = \lambda X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde A é o operador de Weingarten definido por $AX = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$, em que N é o campo normal unitário a Σ e $\top$ denota a componente tangente.

Considere $\{E_1, E_2, E_3\}$ um referencial ortonormal em G formado por campos invariantes à esquerda satisfazendo

$$[E_1, E_2] = c_3 E_3, \quad [E_2, E_3] = c_1 E_1, \quad [E_3, E_1] = c_2 E_2,$$

em que c_1, c_2, c_3 são as constantes de estrutura de G.

Nesse primeiro momento, vamos obter uma relação entre as derivadas da função λ e as constantes de estrutura. Para tanto, dado $p \in \Sigma$, seja $\phi : \Omega \longrightarrow \Sigma$ uma parametrização local de Σ em p, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, $\phi_u = \phi_*(\partial_u)$ e $\phi_v = \phi_*(\partial_v)$ são campos tangentes a Σ em p. Como $[\phi_u, \phi_v] = 0$, então

$$R(\phi_u, \phi_v)N = \overline{\nabla}_{\phi_u} \overline{\nabla}_{\phi_v} N - \overline{\nabla}_{\phi_v} \overline{\nabla}_{\phi_u} N,$$

em que R é o tensor curvatura de Riemann de G. Além disso, $\overline{\nabla}_{\phi_u} N = -\lambda \phi_u$ e $\overline{\nabla}_{\phi_v} N =$

$-\lambda\phi_v$. Portanto,

$$\begin{aligned}
R(\phi_u,\phi_v)N &= \overline{\nabla}_{\phi_u}(-\lambda\phi_v) - \overline{\nabla}_{\phi_v}(-\lambda\phi_u)\\
&= -\phi_u(\lambda)\phi_v - \lambda\overline{\nabla}_{\phi_u}\phi_v + \phi_v(\lambda)\phi_u + \lambda\overline{\nabla}_{\phi_v}\phi_u\\
&= \lambda(\overline{\nabla}_{\phi_v}\phi_u - \overline{\nabla}_{\phi_u}\phi_v) + \phi_*\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\Big)\phi_u - \phi_*\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\Big)\phi_v\\
&= \lambda[\phi_v,\phi_u] + \lambda_v\phi_u - \lambda_u\phi_v\\
&= \lambda_v\phi_u - \lambda_u\phi_v. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Observe que $N = \sum_{i=1}^{3}\nu_i E_i$, em que $\nu_i = \langle N, E_i\rangle$, com $\nu_i \in C^\infty(\Sigma)$. Cada função ν_i é chamada função ângulo da imersão e sendo N unitário, temos que $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1$. Em geral, identificamos o campo N com a aplicação normal de Gauss invariante à esquerda

$$N \equiv (\nu_1,\nu_2,\nu_3) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2_e \subset T_eG,$$

em que $\mathbb{S}^2_e$ é a esfera unitária da álgebra de Lie centrada em e.

Agora, reescreveremos o tensor curvatura R em termos das constantes de estrutura e das funções ν_i. Como, $\phi_u = \sum_{k=1}^{3} x_k E_k$ e $\phi_v = \sum_{k=1}^{3} y_k E_k$ e com os tensores R_i, $i = 1,2,3$, definidos pelo Lema 1.3, então

$$\begin{aligned}
R_i(\phi_u,\phi_v)N &= \langle\phi_u, N\rangle\phi_v - \langle\phi_v, N\rangle\phi_u - \langle N, E_i\rangle\langle\phi_u, E_i\rangle\phi_v\\
&\quad + \langle N, E_i\rangle\langle\phi_v, E_i\rangle\phi_u - \langle\phi_v, E_i\rangle\langle\phi_u, N\rangle E_i + \langle\phi_u, E_i\rangle\langle\phi_v, N\rangle E_i\\
&= -\langle N, E_i\rangle\langle\phi_u, E_i\rangle\phi_v + \langle N, E_i\rangle\langle\phi_v, E_i\rangle\phi_u\\
&= -\sum_{k=1}^{3}\big[\langle N, E_i\rangle\langle x_k E_k, E_i\rangle\phi_v - \langle N, E_i\rangle\langle y_k E_k, E_i\rangle\phi_u\big]\\
&= \langle N, E_i\rangle(y_i\phi_u - x_i\phi_v)\\
&= \nu_i(y_i\phi_u - x_i\phi_v),
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
R(\phi_u,\phi_v)N &= (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)R_1(\phi_u,\phi_v)N + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)R_2(\phi_u,\phi_v)N\\
&\quad + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)R_3(\phi_u,\phi_v)N\\
&= (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1(y_1\phi_u - x_1\phi_v) + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2(y_2\phi_u - x_2\phi_v)\\
&\quad + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3(y_3\phi_u - x_3\phi_v)\\
&= \big[(\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1 y_1 + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2 y_2 + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3 y_3\big]\phi_u\\
&\quad - \big[(\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1 x_1 + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2 x_2 + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3 x_3\big]\phi_v. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Lema 2.1. *As seguintes identidades são satisfeitas.*

$$\begin{aligned}\nabla\lambda &= 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2 E_2^\top,\\ \nabla\nu_1 &= -\lambda E_1^\top - \mu_2\nu_3 E_2^\top + \mu_3\nu_2 E_3^\top,\\ \nabla\nu_2 &= -\lambda E_2^\top + \mu_1\nu_3 E_1^\top - \mu_3\nu_1 E_3^\top,\\ \nabla\nu_3 &= -\lambda E_3^\top + \mu_2\nu_1 E_2^\top - \mu_1\nu_2 E_1^\top,\end{aligned}$$

em que ∇ indica o operador gradiente de uma função.

Demonstração. De (2.1) e (2.2) segue que

$$\begin{aligned}\lambda_u &= (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1 x_1 + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2 x_2 + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3 x_3,\\ \lambda_v &= (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1 y_1 + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2 y_2 + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3 y_3.\end{aligned}$$

Reescrevendo as expresões acima, onde $\beta_1 = (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1, \beta_2 = (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2, \beta_3 = (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3$ e $X^\top = X - \langle X, N\rangle N$, temos

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \sum_{k=1}^{3}\beta_k x_k = \sum_{k=1}^{3}\beta_k\langle\phi_u, E_k\rangle = \Big\langle \phi_u, \sum_{k=1}^{3}\beta_k E_k\Big\rangle = \Big\langle \phi_u, \sum_{k=1}^{3}\beta_k E_k^\top\Big\rangle,\\ \lambda_v &= \sum_{k=1}^{3}\beta_k y_k = \sum_{k=1}^{3}\beta_k\langle\phi_v, E_k\rangle = \Big\langle \phi_v, \sum_{k=1}^{3}\beta_k E_k\Big\rangle = \Big\langle \phi_v, \sum_{k=1}^{3}\beta_k E_k^\top\Big\rangle,\end{aligned}$$

Por outro lado, note que $\lambda_u = \langle\phi_u, \nabla\lambda\rangle$ e $\lambda_v = \langle\phi_v, \nabla\lambda\rangle$, em que $\nabla\lambda$ é o gradiente da função λ. Logo,

$$\nabla\lambda = (\mu_2\mu_3 - c_1\mu_1)\nu_1 E_1^\top + (\mu_1\mu_3 - c_2\mu_2)\nu_2 E_2^\top + (\mu_1\mu_2 - c_3\mu_3)\nu_3 E_3^\top.$$

Da observação 1.1, $c_1 = \mu_2 + \mu_3$, $c_2 = \mu_1 + \mu_3$, $c_3 = \mu_1 + \mu_2$, logo

$$\begin{aligned}\nabla\lambda &= (\mu_2\mu_3 - (\mu_2+\mu_3)\mu_1)\nu_1 E_1^\top + (\mu_1\mu_3 - (\mu_1+\mu_3)\mu_2)\nu_2 E_2^\top + (\mu_1\mu_2 - (\mu_1+\mu_2)\mu_3)\nu_3 E_3^\top\\ &= (\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3)(-\nu_2 E_2^\top - \nu_3 E_3^\top) + (\mu_1\mu_3 - \mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_3)(-\nu_1 E_1^\top - \nu_3 E_3^\top)\\ &\quad + (\mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_3)(-\nu_1 E_1^\top - \nu_2 E_2^\top)\\ &= 2\mu_2\mu_3\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1\mu_3\nu_2 E_2^\top + 2\mu_1\mu_2\nu_3 E_3^\top\\ &= 2\mu_2\mu_3\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1\mu_3\nu_2 E_2^\top + 2\mu_1\mu_2(-\nu_1 E_1^\top - \nu_2 E_2^\top)\\ &= 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2 E_2^\top.\end{aligned}$$

Agora, para as outras identidades, dado $X \in \mathfrak{X}(G)$ e $i = 1, 2, 3$,

$$\langle\nabla\nu_i, X\rangle = \langle\nabla\nu_i, X^\top\rangle = X^\top(\nu_i) = X^\top(\langle E_i, N\rangle) = \langle\overline{\nabla}_{X^\top}E_i, N\rangle + \langle E_i, \overline{\nabla}_{X^\top}N\rangle.$$

Como Σ é totalmente umbílica, então

$$\langle \nabla \nu_i, X^\top \rangle = \sum_{j=1}^{3} \langle X^\top, E_j^\top \rangle \langle \overline{\nabla}_{E_j} E_i, N \rangle - \lambda \langle E_i^\top, X^\top \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \nu_1, X^\top \rangle &= \sum_{j=1}^{3} \langle X^\top, E_j^\top \rangle \langle \overline{\nabla}_{E_j} E_1, N \rangle - \lambda \langle E_1^\top, X^\top \rangle \\
&= \langle X^\top, E_1^\top \rangle \langle \overline{\nabla}_{E_1} E_1, N \rangle + \langle X^\top, E_2^\top \rangle \langle \overline{\nabla}_{E_2} E_1, N \rangle \\
&\quad + \langle X^\top, E_3^\top \rangle \langle \overline{\nabla}_{E_3} E_1, N \rangle - \lambda \langle E_1^\top, X^\top \rangle \\
&= \langle X^\top, E_2^\top \rangle \langle -\mu_2 E_3, N \rangle + \langle X^\top, E_3^\top \rangle \langle \mu_3 E_2, N \rangle - \lambda \langle E_1^\top, X^\top \rangle \\
&= -\mu_2 \nu_3 \langle E_2^\top, X^\top \rangle + \mu_3 \nu_2 \langle E_3^\top, X^\top \rangle - \lambda \langle E_1^\top, X^\top \rangle \\
&= \langle -\lambda E_1^\top - \mu_2 \nu_3 E_2^\top + \mu_3 \nu_2 E_3^\top, X^\top \rangle.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \nu_2, X^\top \rangle &= \langle -\lambda E_2^\top + \mu_1 \nu_3 E_1^\top - \mu_3 \nu_1 E_3^\top, X^\top \rangle, \\
\langle \nabla \nu_3, X^\top \rangle &= \langle -\lambda E_3^\top + \mu_2 \nu_1 E_2^\top - \mu_1 \nu_2 E_1^\top, X^\top \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, as equações são satisfeitas. ■

Com as identidades do Lema 2.1, vamos calcular $\left[E_2^\top, E_3^\top\right](\lambda)$. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}
\langle E_k^\top, E_j^\top \rangle = \langle E_k, E_j^\top \rangle = \langle E_k, E_j - \langle E_j, N \rangle N \rangle &= \langle E_k, E_j \rangle - \langle E_k, N \rangle \langle E_k, N \rangle \\
&= \delta_{kj} - \nu_k \nu_j,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $\delta_{kj} = 1$ se $k = j$ e $\delta_{kj} = 0$ se $k \neq j$.

Note que, para cada i, j, segue que

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i^\top} E_j^\top &= \nabla_{E_i^\top} (E_j - \nu_j N) \\
&= (\overline{\nabla}_{E_i^\top} E_j - E_i^\top(\nu_j) N - \nu_j \nabla_{E_i^\top} N)^\top \\
&= \lambda \nu_j E_i^\top + \sum_{k=1}^{3} \langle E_i^\top, E_k \rangle (\overline{\nabla}_{E_k} E_j)^\top \\
&= \lambda \nu_j E_i^\top + \sum_{k=1}^{3} \langle E_i^\top, E_k^\top \rangle (\overline{\nabla}_{E_k} E_j)^\top.
\end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo $i = 2$ e $j = 3$ e usando (1.10) e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_2^\top} E_3^\top &= \lambda\nu_3 E_2^\top + \sum_{k=1}^{3} \langle E_2^\top, E_k^\top\rangle (\overline{\nabla}_{E_k} E_3)^\top \\
&= \lambda\nu_3 E_2^\top + \langle E_2^\top, E_1^\top\rangle (\overline{\nabla}_{E_1} E_3)^\top + \langle E_2^\top, E_2^\top\rangle (\overline{\nabla}_{E_2} E_3)^\top \\
&= \lambda\nu_3 E_2^\top + \mu_1\nu_1\nu_2 E_2^\top + (1-\nu_2^2)\mu_2 E_1^\top \\
&= \mu_2(1-\nu_2^2) E_1^\top + (\lambda\nu_3 + \mu_1\nu_1\nu_2) E_2^\top.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\nabla_{E_3^\top} E_2^\top = (\lambda\nu_2 - \mu_1\nu_1\nu_3) E_3^\top - \mu_3(1-\nu_3^2) E_1^\top.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[E_2^\top, E_3^\top] &= \nabla_{E_2^\top} E_3^\top - \nabla_{E_3^\top} E_2^\top \\
&= (\mu_2(1-\nu_2^2) + \mu_3(1-\nu_3^2)) E_1^\top + (\lambda\nu_3 + \mu_1\nu_1\nu_2) E_2^\top \\
&\quad + (-\lambda\nu_2 + \mu_1\nu_1\nu_3) E_3^\top. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.4) e o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
[E_2^\top, E_3^\top](\lambda) &= 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\mu_2(1-\nu_2^2) + \mu_3(1-\nu_3^2))\nu_1 \langle E_1^\top, E_1^\top\rangle \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2(\mu_2(1-\nu_2^2) + \mu_3(1-\nu_3^2))\langle E_1^\top, E_2^\top\rangle \\
&\quad + 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1(\lambda\nu_3 + \mu_1\nu_1\nu_2)\langle E_2^\top, E_1^\top\rangle \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2(\lambda\nu_3 + \mu_1\nu_1\nu_2)\langle E_2^\top, E_2^\top\rangle \\
&\quad + 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1(-\lambda\nu_2 + \mu_1\nu_1\nu_3)\langle E_3^\top, E_1^\top\rangle \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2(-\lambda\nu_2 + \mu_1\nu_1\nu_3)\langle E_3^\top, E_2^\top\rangle \\
&= 2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)\nu_1(1-\nu_1^2)(1-\nu_2^2) + 2\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)\nu_1(1-\nu_1^2)(1-\nu_3^2) \\
&\quad - 2\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_2^2(1-\nu_2^2) - 2\mu_1\mu_3(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_2^2(1-\nu_3^2) \\
&\quad - 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\lambda\nu_1^2\nu_2\nu_3 - 2\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^3\nu_2^2 + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\lambda\nu_2\nu_3(1-\nu_2^2) \\
&\quad + 2\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_2^2(1-\nu_2^2) + 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\lambda\nu_1^2\nu_2\nu_3 - 2\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^3\nu_3^2 \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\lambda\nu_2^3\nu_3 - 2\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_2^2\nu_3^2 \\
&= 2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)\nu_1(1-\nu_1^2)(1-\nu_2^2) + 2\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)\nu_1(1-\nu_1^2)(1-\nu_3^2) \\
&\quad - 2\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_2^2(1-\nu_2^2) - 2\mu_1\mu_3(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_2^2(1-\nu_3^2) \\
&\quad - 2\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^3(1-\nu_1^2) + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\lambda\nu_2\nu_3 \\
&\quad + 2\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\nu_1^3\nu_2^2. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$[E_2^\top, E_3^\top](\lambda) = E_2^\top(E_3^\top(\lambda)) - E_3^\top(E_2^\top(\lambda)).$$

Como

$$\begin{aligned}
E_2^\top(\lambda) = \langle E_2^\top, \nabla\lambda\rangle &= \langle E_2^\top, 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2 E_2^\top\rangle \\
&= 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\langle E_2^\top, E_1^\top\rangle + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2\langle E_2^\top, E_2^\top\rangle \\
&= -2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2\nu_2 + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2(1-\nu_2^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3^\top(\lambda) = \langle E_3^\top, \nabla\lambda\rangle &= \langle E_3^\top, 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2 E_2^\top\rangle \\
&= 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\langle E_3^\top, E_1^\top\rangle + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2\langle E_3^\top, E_2^\top\rangle \\
&= -2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2\nu_3 - 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2^2\nu_3,
\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}
E_3^\top(E_2^\top(\lambda)) &= E_3^\top(-2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2\nu_2 + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2(1-\nu_2^2)) \\
&= -2\mu_2(\mu_3-\mu_1)(2\nu_1\nu_2 E_3^\top(\nu_1) + \nu_1^2 E_3^\top(\nu_2)) \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)(1-3\nu_2^2)E_3^\top(\nu_2) \\
&= -4\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\nu_2\langle E_3^\top, \nabla\nu_1\rangle + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)(1-3\nu_2^2)\langle E_3^\top, \nabla\nu_2\rangle \\
&\quad - 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2\langle E_3^\top, \nabla\nu_2\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2^\top(E_3^\top(\lambda)) &= E_2^\top(-2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2\nu_3 - 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2^2\nu_3) \\
&= -2\mu_2(\mu_3-\mu_1)(2\nu_1\nu_3 E_2^\top(\nu_1) + \nu_1^2 E_2^\top(\nu_3)) \\
&\quad - 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)(2\nu_2\nu_3 E_2^\top(\nu_2) + \nu_2^2 E_2^\top(\nu_3)) \\
&= -4\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\nu_3\langle E_2^\top, \nabla\nu_1\rangle - 4\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2\nu_3\langle E_2^\top, \nabla\nu_2\rangle \\
&\quad - (2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2 + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\nu_2^2)\langle E_2^\top, \nabla\nu_3\rangle.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned}
E_3^\top(E_2^\top(\lambda)) &= -4\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\nu_2(\lambda\nu_1\nu_3 + \mu_2\nu_2\nu_3^2 + \mu_3\nu_2(1-\nu_3^2)) \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)(1-3\nu_2^2)(\lambda\nu_2\nu_3 - \mu_1\nu_1\nu_3^2 - \mu_3\nu_1(1-\nu_3^2)) \\
&\quad - 2\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1^2(\lambda\nu_2\nu_3 - \mu_1\nu_1\nu_3^2 - \mu_3\nu_1(1-\nu_3^2)) \\
&= -6\mu_2(\mu_3-\mu_1)\lambda\nu_1^2\nu_2\nu_3 - 4\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\nu_2^2\nu_3^2 \\
&\quad + 2\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)\big(-2\nu_2^2(1-\nu_3^2) + \nu_1^2(1-\nu_3^2)\big) \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\lambda\nu_2\nu_3(1-3\nu_2^2) - 2\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\nu_3^2(1-3\nu_2^2)
\end{aligned}$$

$$- 2\mu_1\mu_3(\mu_3 - \mu_2)\nu_1(1 - \nu_3^2)(1 - 3\nu_2^2) + 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1^3\nu_3^2,$$

$$\begin{aligned}
E_2^\top(E_3^\top(\lambda)) &= -4\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\nu_3(\lambda\nu_1\nu_2 - \mu_2\nu_3(1 - \nu_2^2) - \mu_3\nu_2^2\nu_3) \\
&\quad - 4\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\nu_2\nu_3(-\lambda(1 - \nu_2^2) - \mu_1\nu_1\nu_2\nu_3 + \mu_3\nu_1\nu_2\nu_3) \\
&\quad - 2\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1^2(\lambda\nu_2\nu_3 + \mu_2\nu_1(1 - \nu_2^2) + \mu_1\nu_1\nu_2^2) \\
&\quad - 2\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\nu_2^2(\lambda\nu_2\nu_3 + \mu_2\nu_1(1 - \nu_2^2) + \mu_1\nu_1\nu_2^2) \\
&= -6\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\lambda\nu_1^2\nu_2\nu_3 + 2\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(2\nu_3^2(1 - \nu_2^2) - \nu_1^2(1 - \nu_2^2)\big) \\
&\quad + 4\mu_2\mu_3(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\nu_2^2\nu_3^2 + 2\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\lambda\nu_2\nu_3(2 - 2\nu_2^2 - \nu_2^2) \\
&\quad + 2\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\big(2\nu_2^2\nu_3^2 - \nu_2^4\big) - 4\mu_1\mu_3(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\nu_2^2\nu_3^2 \\
&\quad - 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1^3\nu_2^2 - 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\nu_2^2(1 - \nu_2^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[E_2^\top, E_3^\top](\lambda) &= 2\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(2\nu_3^2(1 - \nu_2^2) - \nu_1^2(1 - \nu_2^2) + 2\nu_2^2\nu_3^2\big) \\
&\quad + 2\mu_2\mu_3(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(2\nu_2^2\nu_3^2 + 2\nu_2^2(1 - \nu_3^2) + \nu_1^2(1 - \nu_3^2)\big) \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\lambda\nu_2\nu_3 + 2\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\big(2\nu_2^2\nu_3^2 - \nu_2^4 + \nu_3^2(1 - 3\nu_2^2)\big) \\
&\quad + 2\mu_1\mu_3(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\big(- 2\nu_2^2\nu_3^2 + (1 - \nu_3^2)(1 - 3\nu_2^2)\big) \\
&\quad + 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(- \nu_1^2\nu_2^2 - \nu_1^2\nu_3^2\big) - 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\nu_2^2(1 - \nu_2^2) \\
&= 2\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(2\nu_3^2 - \nu_1^2(1 - \nu_2^2)\big) + 2\mu_2\mu_3(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(2\nu_2^2 + \nu_1^2(1 - \nu_3^2)\big) \\
&\quad + 2\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\lambda\nu_2\nu_3 + 2\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\big(\nu_3^2 - \nu_2^2(1 - \nu_1^2)\big) \\
&\quad + 2\mu_1\mu_3(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\big(\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_1^2\nu_2^2 - \nu_2^4\big) \\
&\quad + 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\big(- \nu_1^2 + \nu_1^4\big) - 2\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\nu_2^2(1 - \nu_2^2).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora, das equações (2.5) e (2.6), encontramos as seguintes relações envolvendo as funções ν_i.

Lema 2.2. *As funções ν_i de uma superfície totalmente umbílica em G satisfazem*

$$\begin{cases} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \beta_1\nu_1^2 + \beta_2\nu_2^2 + \beta_3\nu_3^2 = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde β_1, β_2, β_3 são números reais definidos por

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \mu_2^2(\mu_1 - \mu_3) + \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2), \\
\beta_2 &= \mu_1^2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3^2(\mu_2 - \mu_1), \\
\beta_3 &= \mu_1^2(\mu_3 - \mu_2) + \mu_2^2(\mu_3 - \mu_1),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

que dependem apenas das constantes de estrutura de G e satisfazem $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$.

Demonstração. Igualando (2.5) e (2.6) segue que

$$\begin{aligned}
0 &= 2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\big(2\nu_3^2-\nu_1^2(1-\nu_2^2)-(1-\nu_2^2)(1-\nu_2^2)\big)\\
&\quad + 2\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)\nu_1\big(2\nu_2^2-\nu_1^2(1-\nu_3^2)-(1-\nu_1^2)(1-\nu_3^2)\big)\\
&\quad + 2\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\big(\nu_3^2-\nu_2^2(1-\nu_1^2)-\nu_1^2\nu_2^2\big)\\
&\quad + 2\mu_1\mu_3(\mu_3-\mu_2)\nu_1\big(\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_1^2\nu_2^2-\nu_2^4+\nu_2^2(1-\nu_3^2)\big)\\
&\quad + 2\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\big(-\nu_1^2+\nu_1^4+\nu_1^2(1-\nu_1^2)\big)\\
&= 2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)\nu_1\big(\nu_3^2-\nu_1^2\big)+2\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)\nu_1\big(\nu_2^2-\nu_1^2\big)\\
&\quad + 2\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\nu_1\big(\nu_3^2-\nu_2^2\big)+2\mu_1\mu_3(\mu_3-\mu_2)\nu_1\big(\nu_1^2-\nu_2^2\big)\\
&= \nu_1\big[\big(\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)+\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\big)\nu_3^2+\big(\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)\big)\nu_1^2\\
&\quad + \big(\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)\big)\nu_2^2\big]\\
&= \nu_1\big(\beta_1\nu_1^2+\beta_2\nu_2^2+\beta_3\nu_3^2\big),
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \mu_2^2(\mu_1-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_1-\mu_2),\\
\beta_2 &= \mu_1^2(\mu_2-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1),\\
\beta_3 &= \mu_2^2(\mu_3-\mu_1)+\mu_1^2(\mu_3-\mu_2).
\end{aligned}$$

Analogamente, de $[E_1^\top, E_2^\top](\lambda)$ e $[E_1^\top, E_3^\top](\lambda)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_3\big(\beta_1\nu_1^2+\beta_2\nu_2^2+\beta_3\nu_3^2\big) &= 0,\\
\nu_2\big(\beta_1\nu_1^2+\beta_2\nu_2^2+\beta_3\nu_3^2\big) &= 0.
\end{aligned}$$

Como as funções ν_i não se anulam simultaneamente, segue que $\beta_1\nu_1^2+\beta_2\nu_2^2+\beta_3\nu_3^2=0$. ■

Como $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, então quaisquer $\nu_1,\nu_2,\nu_3\in\mathbb{R}$, tais que $\nu_1^2=\nu_2^2=\nu_3^2=\frac{1}{3}$, satisfaz as duas equações em (2.7), logo o conjunto solução é não vazio. Por outro lado, se $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\neq 0$, então o sistema (2.7) nas variáveis ν_1^2,ν_2^2,ν_3^2 possui posto 2. Daí, resulta que as soluções $(\nu_1^2,\nu_2^2,\nu_3^2)$ de (2.7) depedem de um mesmo parâmetro, o que significa que a imagem da aplicação de Gauss invariante à esquerda $(\nu_1,\nu_2,\nu_3):\Sigma\to\mathbb{S}^2$ tem dimensão no máximo 1.

Note que, de (2.8), podemos verificar que $\beta_i=0,\forall i=1,2,3$, se e somente se, $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ (equivalentemente $c_1=c_2=c_3$) ou dois dos μ_i são nulos (por exemplo, se $\mu_1=\mu_2=0$, então $c_1=c_2$ e $c_3=0$). Note ainda que, para $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ ou $\tilde{E}(2)$ com suas métricas usuais, temos $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=0$ (ver Tabela 1.1), ou seja, o sistema (2.7) possui posto 1. Como as superfícies totalmente umbílicas nesses espaços ambientes são bem conhecidas, vamos assumir, que $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 \neq 0$. Resolvendo o sistema (2.7) parametricamente, temos

$$\nu_1^2 = \frac{1}{3} + v_1\eta, \quad \nu_2^2 = \frac{1}{3} + v_2\eta, \quad \nu_3^2 = \frac{1}{3} + v_3\eta,$$

em que $\eta \in C^\infty(\Sigma)$. Como $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1$ e $\beta_1\nu_1^2+\beta_2\nu_2^2+\beta_3\nu_3^2 = 0$, segue que

$$\begin{aligned} &v_1+v_2+v_3 = 0,\\ &\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $v_1 = \beta_3 - \beta_2$, $v_2 = \beta_1 - \beta_3$ e $v_3 = \beta_2 - \beta_1$. Assim,

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{1}{3} + (\beta_3-\beta_2)\eta,\\ \nu_2^2 &= \frac{1}{3} + (\beta_1-\beta_3)\eta, \\ \nu_3^2 &= \frac{1}{3} + (\beta_2-\beta_1)\eta. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Lema 2.3. *Se $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 \neq 0$, então as funções $\nu_i : \Sigma \to \mathbb{R}$, satisfazem*

$$\lambda^2 + \mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2 = 0. \tag{2.10}$$

Demonstração. Como a imagem da aplicação de Gauss invariante à esquerda tem dimensão no máximo 1, segue do teorema do núcleo e da imagem, que dado $p \in \Sigma$, existe $u \in T_p\Sigma$ tal que $dN_p(u) = 0$. Como $dN_p(u) = \frac{d}{dt}N(t)\big|_{t=0}$, em que $N(t) = N \circ \gamma(t)$ para alguma curva diferenciável γ em Σ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = u$, então

$$dN_p(u) = \big(\nu_1'(0), \nu_2'(0), \nu_3'(0)\big) = \big(\langle u, \nabla\nu_1\rangle, \langle u, \nabla\nu_2\rangle, \langle u, \nabla\nu_3\rangle\big).$$

Portanto, $\langle u, \nabla\nu_i\rangle = 0$, $\forall\, i$. Escrevendo u em termos dos campos invariantes à esquerda, ou seja, $u = \sum_{i=1}^{3} b_i E_i$, obtemos

$$\overline{\nabla}_u N = \sum_{i=1}^{3} b_i \overline{\nabla}_{E_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\nu_j E_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3}\big(b_i\nu_j\overline{\nabla}_{E_i}E_j + \langle u, \nabla\nu_j\rangle E_j\big) = \sum_{i,j=1}^{3} b_i\nu_j\overline{\nabla}_{E_i}E_j.$$

Usando (1.10), segue que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_u N &= b_1\nu_2\mu_1E_3 - b_1\nu_3\mu_1E_2 - b_2\nu_1\mu_2E_3 + b_2\nu_3\mu_2E_1 + b_3\nu_1\mu_3E_2 - b_3\nu_2\mu_3E_1\\ &= (b_2\nu_3\mu_2 - b_3\nu_2\mu_3)E_1 + (b_3\nu_1\mu_3 - b_1\nu_3\mu_1)E_2 + (b_1\nu_2\mu_1 - b_2\nu_1\mu_2)E_3. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como Σ é totalmente umbílica, então

$$\overline{\nabla}_u N = -\lambda u = -\sum_{i=1}^{3} \lambda b_i E_i = -\lambda b_1 E_1 - \lambda b_2 E_2 - \lambda b_3 E_3. \tag{2.12}$$

Dessa forma, de (2.11) e (2.12), segue que

$$\begin{cases} \lambda b_1 & + & b_2\nu_3\mu_2 & - & b_3\nu_2\mu_3 & = & 0, \\ \lambda b_2 & + & b_3\nu_1\mu_3 & - & b_1\nu_3\mu_1 & = & 0, \\ \lambda b_3 & + & b_1\nu_2\mu_1 & - & b_2\nu_1\mu_2 & = & 0, \\ b_1\nu_1 & + & b_2\nu_2 & + & b_3\nu_3 & = & 0, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu_2\nu_3 & -\mu_3\nu_2 \\ -\mu_1\nu_3 & \lambda & \mu_3\nu_1 \\ \mu_1\nu_2 & -\mu_2\nu_1 & \lambda \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Como b_i para $i = 1, 2, 3$, não são simultaneamente nulos, então o sistema linear (2.13) possui uma solução não-trivial. Assim, os menores da matriz dos coeficientes devem se anular, resultando as seguintes equações

$$\begin{aligned} \nu_1(\lambda^2 + \mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2) = 0, \\ \nu_2(\lambda^2 + \mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2) = 0, \\ \nu_3(\lambda^2 + \mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2) = 0, \\ \lambda(\lambda^2 + \mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2) = 0, \end{aligned}$$

concluindo assim a prova. ∎

Observamos que, de (2.7) e (2.10), as funções ν_i satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \beta_1\nu_1^2 + \beta_2\nu_2^2 + \beta_3\nu_3^2 = 0, \\ \mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2 = -\lambda^2, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \mu_2\mu_3 & \mu_1\mu_3 & \mu_1\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^2 \\ \nu_2^2 \\ \nu_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear (2.14), que será denotado por

Δ, é dado por

$$\begin{aligned}\Delta &= (\mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_3)\beta_2 + (\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_3)\beta_3 + (\mu_1\mu_3 - \mu_1\mu_2)\beta_1\\ &= \mu_1(\mu_3 - \mu_2)(\mu_2^2(\mu_1 - \mu_3) + \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2)) + \mu_2(\mu_1 - \mu_3)(\mu_1^2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3^2(\mu_2 - \mu_1))\\ &\quad + \mu_3(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2) + \mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)).\end{aligned}$$

Distribuindo e agrupando, obtemos

$$\Delta = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3). \tag{2.15}$$

Observe que $\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$ nos diz se o sistema (2.14) é degenerado ou não degenerado. Vejamos a seguir que λ é constante se o sistema é degenerado.

Lema 2.4. *Se $\Delta = 0$ e $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$, então a função de umbilicidade λ é constante.*

Demonstração. Sabemos que $\Delta = 0$ se $\mu_i = \mu_j$, para algum $i \neq j$, ou $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 = 0$. No primeiro caso, suponha, sem perda de generalidade que, $\mu_1 = \mu_2$. Como $\nu_1^2 = \nu_2^2 = \nu_3^2 = \frac{1}{3}$ é solução de (2.7), então o sistema linear (2.14) é compatível, se e somente se, $\lambda^2 = -\frac{1}{3}\mu_1(\mu_1 + 2\mu_3)$. Portanto, λ é constante. Agora, se ocorre $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 = 0$ e $\mu_i \neq \mu_j, \forall i \neq j$, então o sistema linear (2.14) é compatível se, e somente se, $\lambda^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \mu_2^2(\mu_1 - \mu_3) + \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2) = \mu_2^2\mu_1 - \mu_2^2\mu_3 + \mu_3^2\mu_1 - \mu_3^2\mu_2\\ &= -\mu_2\mu_3(\mu_2 + \mu_3) + \mu_2\mu_1\mu_2 + \mu_3\mu_1\mu_3\\ &= -\mu_2\mu_3(\mu_2 + \mu_3) - \mu_2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3) - \mu_3(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3)\\ &= -2\mu_2\mu_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3),\\ \beta_2 &= \mu_1^2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3^2(\mu_2 - \mu_1) = \mu_1^2\mu_2 - \mu_1^2\mu_3 + \mu_3^2\mu_2 - \mu_3^2\mu_1\\ &= -\mu_1\mu_3(\mu_1 + \mu_3) + \mu_1\mu_2\mu_1 + \mu_3\mu_2\mu_3\\ &= -\mu_1\mu_3(\mu_1 + \mu_3) - \mu_1(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3) - \mu_3(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3)\\ &= -2\mu_1\mu_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3),\\ \beta_3 &= \mu_1^2(\mu_3 - \mu_2) + \mu_2^2(\mu_3 - \mu_1) = \mu_1^2\mu_3 - \mu_1^2\mu_2 + \mu_2^2\mu_3 - \mu_2^2\mu_1\\ &= -\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_3\mu_1 + \mu_2\mu_3\mu_2\\ &= -\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3) - \mu_2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3)\\ &= -2\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3),\end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = \beta_1\nu_1^2 + \beta_2\nu_2^2 + \beta_3\nu_3^2 = -2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_2\mu_3\nu_1^2 + \mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2).$$

Da equação (2.10), segue que $\lambda^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 0$, resultando $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \neq 0$, pois caso contrário, de $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 = 0$ teríamos

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = \mu_1\mu_2 + \mu_3(\mu_1 + \mu_2) = \mu_1\mu_2 - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2) \\ &= -\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \mu_2^2. \end{aligned}$$

Logo, $\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = 0$. Como a expressão polinomial $\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = 0$ em termos de μ_1 ou μ_2 não possui solução real não nula, então $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Assim, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ e consequentemente $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0$. Portanto, $\lambda = 0$. ■

É interessante observar que o próximo resultado foi também considerado uma generalização ou uma prova alternativa do Teorema 7.2 de Tsukada [19], onde foram classificadas as superfícies totalmente geodésicas de G.

Proposição 2.1. Sejam Σ uma superfície totalmente umbílica em G e λ a função de umbilicidade de Σ. Se λ é constante e $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$, então

(a) Σ é totalmente geodésica e $\Delta \neq 0$.

(b) Se $c_3 < c_2 < c_1$, então $c_3 < 0 < c_1$, $c_2 = c_1 + c_3$, e Σ é uma superfície integral de uma das distribuições geradas por $\{\sqrt{c_1}E_1 + \sqrt{-c_3}E_3, E_2\}$ ou $\{\sqrt{c_1}E_1 - \sqrt{-c_3}E_3, E_2\}$.

Demonstração. Com λ constante e o Lema 2.1 segue que

$$\begin{aligned} 0 = \langle\nabla\lambda, \nabla\lambda\rangle &= 4\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)^2\nu_1^2\langle E_1^\top, E_1^\top\rangle + 4\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)^2\nu_2^2\langle E_2^\top, E_2^\top\rangle \\ &\quad + 8\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)\nu_1\nu_2\langle E_1^\top, E_2^\top\rangle \\ &= 4\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)^2\nu_1^2(1 - \nu_1^2) + 4\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)^2\nu_2^2(1 - \nu_2^2) \\ &\quad - 8\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)\nu_1^2\nu_2^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, substituindo as expressões paramétricas dadas por (2.9) em (2.16), tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= 4\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)^2\Big(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}(\beta_3 - \beta_2)\eta - (\beta_3 - \beta_2)^2\eta^2\Big) \\ &\quad + 4\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)^2\Big(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}(\beta_1 - \beta_3)\eta - (\beta_1 - \beta_3)^2\eta^2\Big) \\ &\quad - 8\mu_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)\Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\beta_3 - \beta_2)\eta + \frac{1}{3}(\beta_1 - \beta_3)\eta \\ &\quad + (\beta_1 - \beta_3)(\beta_3 - \beta_2)\eta^2\Big). \end{aligned}$$

Assim, $\eta \in C^\infty(\Sigma)$ satisfaz a equação do segundo grau

$$a_2\eta^2 + a_1\eta + a_0 = 0, \tag{2.17}$$

em que

$$a_2 = -4\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)^2(\beta_3 - \beta_2)^2 - 4\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)^2(\beta_1 - \beta_3)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 8\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_3-\beta_2),\\
a_1 &= \frac{4}{3}\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2(\beta_3-\beta_2) + \frac{4}{3}\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)^2(\beta_1-\beta_3)\\
&\quad - \frac{8}{3}\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\beta_1-\beta_2),\\
a_0 &= \frac{8}{9}\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2 + \frac{8}{9}\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)^2 - \frac{8}{9}\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2).
\end{aligned}
$$

Usando as expressões dos β_i, dadas por (2.8), obtemos

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -4\big[\big(\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\beta_3-\beta_2) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)(\beta_1-\beta_3)\big)^2\big]\\
&= -4\big[\big(\mu_2(\mu_1-\mu_3)\beta_2 + \mu_2(\mu_3-\mu_1)\beta_3 + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\beta_1 + \mu_1(\mu_2-\mu_3)\beta_3\big)^2\big]\\
&= -4\big[\big(\mu_2(\mu_1-\mu_3)(\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)(\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)\\
&\quad + \mu_3^2(\mu_1-\mu_2)) + \mu_3(\mu_2-\mu_1)(\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_3-\mu_1))\big)^2\big]\\
&= -4\big[\big((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1^2\mu_2-\mu_2^2\mu_1) + (\mu_1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(\mu_2^2\mu_3-\mu_3^2\mu_2)\\
&\quad + (\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1^2\mu_3-\mu_3^2\mu_1)\big)^2\big]\\
&= -4\big[\big((\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)\big)^2\big]\\
&= -4(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_3)^2(\mu_1-\mu_3)^2(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4}{3}\mu_2(\mu_3-\mu_1)\big(\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\beta_3-\beta_2) - \mu_1(\mu_3-\mu_2)(\beta_1-\beta_2)\big)\\
&\quad + \frac{4}{3}\mu_1(\mu_3-\mu_2)\big(\mu_1(\mu_3-\mu_2)(\beta_1-\beta_3) - \mu_2(\mu_3-\mu_1)(\beta_1-\beta_2)\big)\\
&= \frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)\mu_1\mu_2(\beta_1-\beta_2) + (\mu_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)\mu_2\mu_3\beta_2\\
&\quad + (\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)\mu_1\mu_3\beta_1 + \big(\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2 - \mu_1^2(\mu_2-\mu_3)^2\big)\beta_3\big]\\
&= \frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)\mu_1\mu_2(2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2) + \mu_2^2(\mu_1-\mu_3) - \mu_1^2(\mu_2-\mu_3))\\
&\quad + (\mu_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)\mu_2\mu_3(\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1))\\
&\quad + (\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)\mu_1\mu_3(\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_1-\mu_3))\\
&\quad + \big(\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2 - \mu_1^2(\mu_2-\mu_3)^2\big)(\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_3-\mu_1))\big]\\
&= \frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)\mu_1\mu_2(2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2) + \mu_1\mu_2(\mu_2-\mu_1) + \mu_3(\mu_1-\mu_2)(\mu_1+\mu_2))\\
&\quad + (\mu_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)\mu_1^2\mu_2\mu_3 - \mu_3^3\mu_2(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_1)\\
&\quad + (\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)\mu_2^2\mu_1\mu_3 + \mu_3^3\mu_1(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_2)\\
&\quad + (\mu_2(\mu_3-\mu_1) - \mu_1(\mu_2-\mu_3))(\mu_2(\mu_3-\mu_1)+\mu_1(\mu_2-\mu_3))(\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)\\
&\quad + \mu_2^2(\mu_3-\mu_1))\big]\\
&= \frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(2\mu_3^2\mu_1\mu_2 - \mu_1^2\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2))\\
&\quad + \mu_3^3\mu_1(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_2) - \mu_3^3\mu_2(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_1) - \mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1))(\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_3-\mu_1))\big]\\
=&\frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)+\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2)-\mu_1^2\mu_2^2)\\
&+\mu_3^3\mu_1(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_2)-\mu_3^3\mu_2(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_1)-\mu_1^3\mu_3(\mu_3-\mu_2)^2(\mu_1-\mu_2)\\
&+\mu_2^3\mu_3(\mu_3-\mu_1)^2(\mu_2-\mu_1)\big]\\
=&\frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)+\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2)-\mu_1^2\mu_2^2)\\
&+(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(-\mu_3^3\mu_1(\mu_1-\mu_2)+\mu_1^3\mu_3(\mu_3-\mu_2))\\
&+(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(-\mu_3^3\mu_2(\mu_1-\mu_2)-\mu_2^3\mu_3(\mu_3-\mu_1))\big]\\
=&\frac{4}{3}\big[(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)+\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2)-\mu_1^2\mu_2^2)\\
&+(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(-\mu_1^2\mu_3^2+\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_3))\\
&+(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(-\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_2+\mu_3))\big]\\
=&\frac{4}{3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(4\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-\mu_1^2\mu_2^2-\mu_2^2\mu_3^2-\mu_1^2\mu_3^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 =& \frac{8}{9}(\mu_2^2\mu_3^2-2\mu_2^2\mu_1\mu_3+\mu_1^2\mu_2^2+\mu_1^2\mu_3^2-2\mu_1^2\mu_2\mu_3+\mu_1^2\mu_2^2-\mu_3^2\mu_1\mu_2+\mu_2^2\mu_1\mu_3\\
&+\mu_1^2\mu_2\mu_3-\mu_1^2\mu_2^2)\\
=&\frac{8}{9}(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)).
\end{aligned}
$$

Como a_0, a_1, a_2 são constantes dependendo de μ_1, μ_2, μ_3, então η é constante, e portanto a aplicação de Gauss invariante à esquerda é constante. Assim, por [9], Σ é, a menos de uma translação à esquerda, um subgrupo de G. Além disso, Σ é uma superfície mínima e portanto totalmente geodésica. Por fim, afirmamos que $\Delta \neq 0$. De fato, se $\Delta = 0$, então $\mu_i = \mu_j$ para algum $i \neq j$ ou $\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3 = 0$. No primeiro caso, suponha sem perda de generalidade $\mu_1 = \mu_2$. Logo, $a_1 = a_2 = 0$ e

$$
a_0 = \frac{8}{9}(\mu_2^4+2\mu_2^2\mu_3^2-\mu_2^2\mu_3(2\mu_2+\mu_3)) = \frac{8}{9}\mu_2^2(\mu_2-\mu_3)^2.
$$

Pela equação (2.17) temos que $a_0 = 0$. Assim, $\mu_1=\mu_2=0$ ou $\mu_1=\mu_2=\mu_3$, resultando $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=0$, o que contradiz a hipótese. Se $\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3=0$ e $\mu_i\neq\mu_j$ para todo $i \neq j$, então $a_2 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Dessa forma, podemos resolver η e obter uma única solução

$$
\eta_1 = \frac{\frac{8}{9}(\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2))}{\frac{4}{3}(4\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2))(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}.
$$

Note que $\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3=0$ implica $\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2=-2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{6(\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{18\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{1}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Substituindo em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}\nu_1^2 &= \frac{1}{3} + \frac{(\beta_3-\beta_2)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)+(\beta_3-\beta_2)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)+3\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)-\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{-3\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_2^2 &= \frac{1}{3} + \frac{(\beta_1-\beta_3)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)+(\beta_1-\beta_3)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)+3\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)-\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{-3\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{\mu_2^2}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_3^2 &= \frac{1}{3} + \frac{(\beta_2-\beta_1)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)+(\beta_2-\beta_1)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)+3\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)+\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)-\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{-3\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\\ &= \frac{\mu_3^2}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\nu_1^2 &= \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)},\\
\nu_2^2 &= \frac{\mu_2^2}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)},\\
\nu_3^2 &= \frac{\mu_3^2}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Como $\mu_i \neq \mu_j$, para todo $i \neq j$, então sem perda de generalidade considere $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ e de (2.19) segue que $\nu_2 = 0$ e portanto $\mu_2 = 0$. De $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = 0$ temos que $\mu_1\mu_3 = 0$, ou seja, $\mu_1 = 0$ ou $\mu_3 = 0$, resultando novamente, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0$. Portanto, $\Delta \neq 0$.

Vamos agora mostrar o item (b). Se $\Delta \neq 0$, então a equação (2.17) possui duas soluções. Observe que, (2.18) continua sendo solução para $a_2 \neq 0$, basta substituir em (2.17). Dessa forma, as igualdades em (2.19) também são satisfeitas. Além disso, a condição $c_3 < c_2 < c_1$ implica que $\mu_2 = 0$ e $\nu_2 = 0$. Logo, $c_2 = c_1 + c_3$, $\mu_1 = c_3$ e $\mu_3 = c_1$. Consequentemente,

$$\nu_1^2 = \frac{-c_3}{c_1 - c_3} \quad \text{e} \quad \nu_3^2 = \frac{c_1}{c_1 - c_3}.$$

Assim, $c_3 < 0 < c_1$. Sendo $\nu_2 = 0$, então E_2 é tangente a Σ. Agora, seja X outro campo tangente a Σ, tal que X e E_2 sejam linearmente independentes. Escrevendo $X = \sum_{k=1}^{3} x_k E_k$, temos

$$0 = \langle X, N \rangle = x_1\nu_1 + x_3\nu_3$$

ou seja, $x_1\nu_1 = -x_3\nu_3$. Como $\nu_1 = \pm\sqrt{\frac{-c_3}{c_1-c_3}}$, $\nu_3 = \pm\sqrt{\frac{c_1}{c_1-c_3}}$ e, sem perda de generalidade, tomando $x_2 = 0$ segue que $X = \sqrt{c_1}E_1 + \sqrt{-c_3}E_3$ ou $X = \sqrt{c_1}E_1 - \sqrt{-c_3}E_3$. Portanto, $D_1 = \{\sqrt{c_1}E_1 + \sqrt{-c_3}E_3, E_2\}$ ou $D_2 = \{\sqrt{c_1}E_1 - \sqrt{-c_3}E_3, E_2\}$ são distribuições em TG e para cada $p \in \Sigma$, $(D_1)_p = T_p\Sigma$ ou $(D_2)_{(p)} = T_p\Sigma$. Concluindo assim, o item (b).

Vamos agora mostrar que a segunda solução implica $\beta_i = 0, \forall i$. De (2.17), a outra solução é da forma

$$\begin{aligned}
\eta_2 = \frac{a_0}{\eta_1 a_2} &= \frac{\frac{8}{9}(\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^2\mu_3^2 + \mu_1^2\mu_3^2 - \mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{-\frac{4}{3}(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&= \frac{-2(\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^2\mu_3^2 + \mu_1^2\mu_3^2 - \mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de η_2 em (2.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\nu_1^2 &= \frac{1}{3} + \frac{2(\beta_2-\beta_3)(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2+2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{2(\beta_2-\beta_3)\big(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)+2(\beta_2-\beta_3)\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big[(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)-(\beta_2-\beta_3)\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[3\mu_1^2\mu_2-3\mu_1^2\mu_3+3\mu_3^2\mu_2-3\mu_3^2\mu_1+3\mu_2^2\mu_1-3\mu_2^2\mu_3\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big[-3\mu_1^2\mu_2+3\mu_1^2\mu_3\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)+\mu_2\mu_3(\mu_3-\mu_2)+\mu_1(\mu_2^2-\mu_3^2\big]}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{2\mu_1^3\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)(\mu_3-\mu_2)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[\mu_1^2-\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3\big]-2\mu_1^3\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_1^2-\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3-2\mu_1\mu_3\big)+\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_1^2-\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_1^2-\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3-2\mu_1\mu_2\big)-2\mu_1^4\mu_2\mu_3}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_1^2-\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2-\mu_1\mu_3+\mu_3^2\big)+\mu_2^2\mu_3^2\big(-\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_1^2-\mu_2\mu_3-\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3\big)-2\mu_1^4\mu_2\mu_3}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{\mu_1^4\big(\mu_2^2-2\mu_2\mu_3+\mu_3^2\big)+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_1-\mu_2)+\mu_1\mu_2\big)+\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_1-\mu_2)-\mu_1\mu_2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{\mu_1^4(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&\quad + \frac{\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_1-\mu_2)+\mu_1\mu_2+\mu_1^2-\mu_1^2\big)+\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_1-\mu_2)-\mu_1\mu_2+\mu_2^2-\mu_2^2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2} \\
&= \frac{\mu_1^4(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)+\mu_2^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)-\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{-\mu_1^4(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)+\mu_2^2\mu_3^2(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{\beta_2\beta_3}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu_2^2=&\frac{1}{3}+\frac{2(\beta_3-\beta_1)(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2+2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2(\beta_3-\beta_1)\big(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)+2(\beta_3-\beta_1)\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big[(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)-(\beta_3-\beta_1)\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[-3\mu_1^2\mu_2+3\mu_1^2\mu_3+3\mu_2^2\mu_3-3\mu_2^2\mu_1+3\mu_3^2\mu_2-3\mu_3^2\mu_1\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big[-3\mu_2^2\mu_3+3\mu_2^2\mu_1\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)+\mu_1\mu_3(\mu_1-\mu_3)+\mu_2(\mu_3^2-\mu_1^2)\big]}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2\mu_1\mu_2^3\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)(\mu_1-\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[\mu_2^2-\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2\big]-2\mu_1\mu_2^3\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_2^2-\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2-2\mu_2\mu_3\big)+\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_2^2-\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2-2\mu_1\mu_2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_2^2-\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2\big)-2\mu_1\mu_2^4\mu_3}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{\mu_2^4\big(\mu_1^2-2\mu_1\mu_3+\mu_3^2\big)+\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_2(\mu_1-\mu_3)-\mu_1\mu_3\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_2(\mu_3-\mu_1)-\mu_1\mu_3\big)+\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_2-\mu_1)+\mu_1\mu_2+\mu_2^2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
=&\frac{\mu_2^4(\mu_1-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_2(\mu_1-\mu_3)-\mu_1\mu_3+\mu_3^2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_2(\mu_3-\mu_1)-\mu_1\mu_3\big)+\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_2-\mu_1)+\mu_1\mu_2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\mu_2^4(\mu_1-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)+\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_2(\mu_3-\mu_1)-\mu_1\mu_3+\mu_1^2-\mu_1^2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_2-\mu_1)+\mu_1\mu_2+\mu_2^2-\mu_2^2\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\mu_2^4(\mu_1-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)+\mu_2^2\mu_3^2(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{-\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)+\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{-\mu_1^4(\mu_1-\mu_3)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\beta_1\beta_3}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu_3^2&=\frac{1}{3}+\frac{2(\beta_1-\beta_2)(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2+2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3))}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2(\beta_1-\beta_2)\big(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2-\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big)}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)+2(\beta_1-\beta_2)\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big[(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)-(\beta_1-\beta_2)\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[3\mu_3^2\mu_1-3\mu_3^2\mu_2+3\mu_2^2\mu_1-3\mu_2^2\mu_3+3\mu_1^2\mu_3-3\mu_1^2\mu_2\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\big[-3\mu_3^2\mu_1+3\mu_3^2\mu_2\big]}{3(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)+\mu_1\mu_2(\mu_2-\mu_1)+\mu_3(\mu_1^2-\mu_2^2)\big]}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{2\mu_1\mu_2\mu_3^3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^2\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2)\big[\mu_3^2-\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3\big]-2\mu_1\mu_2\mu_3^3(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_3^2-\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3\big)+\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_3^2-\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3-2\mu_1\mu_3\big)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_3^2-\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3-2\mu_2\mu_3\big)-2\mu_1\mu_2\mu_3^4}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\mu_3^4\big(\mu_2^2-2\mu_1\mu_2+\mu_1^2\big)+\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_1(\mu_3-\mu_2)+\mu_2\mu_3\big)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_2^2\mu_3^2\big(\mu_3(\mu_2-\mu_1)-\mu_1\mu_2+\mu_1^2\big)+\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_1(\mu_3-\mu_2)-\mu_2\mu_3\big)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\mu_3^4(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_1^2\mu_2^2\big(\mu_1(\mu_3-\mu_2)+\mu_2\mu_3+\mu_3^2-\mu_3^2\big)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_2^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)+\mu_1^2\mu_3^2\big(\mu_1(\mu_3-\mu_2)-\mu_2\mu_3+\mu_2^2-\mu_2^2\big)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\mu_3^4(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)+\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2+\mu_2^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)-\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2}{(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{-\mu_3^4(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_1^2\mu_2^2(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)+\mu_2^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&+\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)}{(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}\\
&=\frac{\beta_1\beta_2}{(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\nu_1^2&=\frac{\beta_2\beta_3}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2},\\
\nu_2^2&=\frac{\beta_1\beta_3}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2},\\
\nu_3^2&=\frac{\beta_1\beta_2}{(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

De (2.8), segue que a condição $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ implica $\beta_1 \leq 0$ e $\beta_3 \geq 0$. Logo, segue de (2.20) que $\beta_2 \geq 0$. Contudo, como $\nu_3^2 \geq 0$ e $\beta_1 \leq 0$, segue também de (2.20) que $\beta_2 \leq 0$. Então, $\beta_2 = 0$ e daí $\nu_1 = \nu_3 = 0$. Portanto, E_2 é normal a superfície Σ, equivalentemente, E_1, E_3 são campos tangentes a Σ. Daí, $\overline{\nabla}_{E_1}E_2 = -\lambda E_1$ e $\overline{\nabla}_{E_3}E_2 = -\lambda E_3$. Mas, de (1.10), $\overline{\nabla}_{E_1}E_2 = \mu_1 E_3$ e $\overline{\nabla}_{E_3}E_2 = -\mu_3 E_1$. Portanto, $\lambda = \mu_1 = \mu_3 = 0$ o que resulta $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, contradizendo a hipótese. ■

Observação 2.1. Note que, supondo $c_3 < c_1 < c_2$ na Proposição 2.1, temos $c_3 < 0 < c_2$, $c_1 = c_2 + c_3$ e Σ é uma superfície integral de uma das distribuições geradas por $\{E_1, \sqrt{c_2}E_2 + \sqrt{-c_3}E_3\}$ ou $\{E_1, \sqrt{c_2}E_2 - \sqrt{-c_3}E_3\}$. Agora, supondo $c_1 < c_3 < c_2$, então $c_3 = c_1 + c_2$ e portanto Σ é uma superfície integral de uma das distribuições geradas por $\{\sqrt{-c_1}E_1 + \sqrt{c_2}E_2, E_3\}$ ou $\{\sqrt{-c_1}E_1 - \sqrt{c_2}E_2, E_3\}$.

A Proposição 2.1 permite generalizar um resultado sobre a não existência de superfícies totalmente umbílicas dos espaços homogêneos $E(\kappa,\tau)$, com $\tau \neq 0$ e $\kappa \neq 4\tau^2$, provado em [14]. Tal generalização é o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Se $\Delta = 0$ e $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 \neq 0$, então G não admite superfícies totalmente umbílicas.*

Demonstração. É uma consequência imediata do Lema 2.4 e Proposição 2.1. ∎

Em virtude do Corolário 2.1, analisamos o caso $\Delta \neq 0$. Veremos agora que, se G possui curvatura escalar positiva e as constantes de estrutura são tais que $\Delta \neq 0$, então não existe superfície totalmente umbílica em G. De fato, observe que a matriz dos coeficientes do sistema linear (2.14) é invertível, assim

$$\begin{aligned} \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 &= 1,\\ (\beta_2-\beta_1)\nu_2^2+(\beta_3-\beta_1)\nu_3^2 &= -\beta_1,\\ \mu_3(\mu_1-\mu_2)\nu_2^2+\mu_2(\mu_1-\mu_3)\nu_3^2 &= -(\mu_2\mu_3+\lambda^2). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Daí, segue que

$$\nu_3^2 = \frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_3-\beta_1}\nu_2^2 - \frac{\beta_1}{(\beta_3-\beta_1)}. \tag{2.22}$$

Agora, substituindo (2.22) na terceira equação de (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_3(\mu_1-\mu_2)\nu_2^2+\mu_2(\mu_1-\mu_3)\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_3-\beta_1}\nu_2^2-\frac{\beta_1}{\beta_3-\beta_1}\right)+(\mu_2\mu_3+\lambda^2)\\ &= \mu_3(\mu_1-\mu_2)\nu_2^2+\frac{\mu_2(\mu_1-\mu_3)(\beta_1-\beta_2)}{(\beta_3-\beta_1)}\nu_2^2+(\mu_2\mu_3+\lambda^2)-\frac{\mu_2(\mu_1-\mu_3)\beta_1}{(\beta_3-\beta_1)}\\ &= \mu_3(\mu_1-\mu_2)(\beta_3-\beta_1)\nu_2^2+\mu_2(\mu_1-\mu_3)(\beta_1-\beta_2)\nu_2^2\\ &\quad -(\beta_1-\beta_3)(\mu_2\mu_3+\lambda^2)-\mu_2(\mu_1-\mu_3)\beta_1\\ &= \nu_2^2\big(\mu_3(\mu_1-\mu_2)\beta_3+\mu_2(\mu_3-\mu_1)\beta_2+\mu_1(\mu_2-\mu_3)\beta_1\big)\\ &\quad -(\beta_1-\beta_3)\lambda^2-\mu_1\mu_2\beta_1+\mu_2\mu_3\beta_3. \end{aligned}$$

Mas, $-\Delta = \mu_3(\mu_1-\mu_2)\beta_3+\mu_2(\mu_3-\mu_1)\beta_2+\mu_1(\mu_2-\mu_3)\beta_1$. Então,

$$\begin{aligned} \nu_2^2(-\Delta) &= (\beta_1-\beta_3)\lambda^2+\mu_1\mu_2(\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_1-\mu_2))\\ &\quad -\mu_2\mu_3(\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)+\mu_2^2(\mu_3-\mu_1))\\ &= (\beta_1-\beta_3)\lambda^2+\mu_1^2\mu_2^3-\mu_2^3\mu_1\mu_3+\mu_3^2\mu_1^2\mu_2-\mu_3^2\mu_2^2\mu_1\\ &\quad -\mu_1^2\mu_3^2\mu_2+\mu_1^2\mu_2^2\mu_3-\mu_3^2\mu_2^3+\mu_2^3\mu_1\mu_3\\ &= (\beta_1-\beta_3)\lambda^2+\mu_2^2(\mu_1^2\mu_2-\mu_3^2\mu_1+\mu_1^2\mu_3-\mu_3^2\mu_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\beta_1 - \beta_3)\lambda^2 + \mu_2^2(\mu_2(\mu_1 - \mu_3)(\mu_1 + \mu_3) + \mu_3\mu_1(\mu_1 - \mu_3)) \\
&= (\beta_1 - \beta_3)\lambda^2 + \mu_2^2(\mu_1 - \mu_3)(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\nu_2^2 = \frac{(\beta_3 - \beta_1)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)}. \tag{2.23}
$$

Agora, usando (2.22) e (2.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
\nu_3^2 &= \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_1)}{\Delta(\beta_3 - \beta_1)}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2(\beta_1 - \beta_2)}{(\beta_3 - \beta_1)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} - \frac{\beta_1}{(\beta_3 - \beta_1)} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2(\beta_1 - \beta_2) - \beta_1(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)}{(\beta_3 - \beta_1)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{-\mu_2^2\beta_2 - \beta_1(-\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3)}{(\beta_3 - \beta_1)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3 - \mu_2) + \mu_2^2\mu_3^2(\mu_1 - \mu_2) + \beta_1(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3)}{(\beta_3 - \beta_1)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_3^2(\mu_1 - \mu_2)\big(2\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3)}{(2\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3)(\mu_3 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_3^2}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)}.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Finalmente, substituindo os valores de (2.23) e (2.24) na primeira equação de (2.21), segue que

$$
\nu_1^2 + \frac{(\beta_3 - \beta_1)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_3^2}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} = 1,
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\nu_1^2 &= 1 - \frac{(\beta_3 - \beta_2)}{\Delta}\lambda^2 - \frac{\mu_2^2}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} - \frac{\mu_3^2}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} \\
&= \frac{(\beta_2 - \beta_3)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} + \frac{\mu_3^2}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} + 1 \\
&= \frac{(\beta_2 - \beta_3)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2(\mu_3 - \mu_1) + \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_3 - \mu_1)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_3 - \mu_1)} \\
&= \frac{(\beta_2 - \beta_3)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_3 - \mu_1)} \\
&= \frac{(\beta_2 - \beta_3)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_1^2}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu_1^2 &= \frac{(\beta_2-\beta_3)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)},\\
\nu_2^2 &= \frac{(\beta_3-\beta_1)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)},\\
\nu_3^2 &= \frac{(\beta_1-\beta_2)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_3^2}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Por (2.25) e Lema 2.1, o gradiente da função λ satisfaz

$$\begin{aligned}
\|\nabla\lambda\|^2 = {} & 4\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2\Bigg[\frac{(\beta_2-\beta_3)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} - \frac{(\beta_2-\beta_3)^2}{\Delta^2}\lambda^4\\
& - \frac{2\mu_1^2(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}\lambda^2 - \frac{\mu_1^4}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1-\mu_3)^2}\Bigg]\\
& + 4\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)^2\Bigg[\frac{(\beta_3-\beta_1)}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\mu_2^2}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)} - \frac{(\beta_3-\beta_1)^2}{\Delta^2}\lambda^4\\
& - \frac{2\mu_2^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)}\lambda^2 - \frac{\mu_2^4}{(\mu_2-\mu_1)^2(\mu_2-\mu_3)^2}\Bigg]\\
& - 8\mu_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)\Bigg[\frac{(\beta_2-\beta_3)(\beta_3-\beta_1)}{\Delta^2}\lambda^4 + \frac{\mu_2^2(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)}\lambda^2\\
& + \frac{\mu_1^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}\lambda^2 + \frac{\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)}\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & 4\lambda^2\Bigg[\frac{\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2(\beta_2-\beta_3)}{\Delta} - \frac{2\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta}\\
& - \frac{2\mu_1^2\mu_2^2(\mu_3-\mu_2)^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)} + \frac{2\mu_1\mu_2^3(\mu_3-\mu_1)(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)} + \frac{2\mu_1^3\mu_2(\mu_3-\mu_2)(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)}\\
& - \lambda^2\Bigg(\frac{\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)^2(\beta_2-\beta_3)^2}{\Delta^2} + \frac{\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)^2(\beta_3-\beta_1)^2}{\Delta^2}\\
& + \frac{2\mu_1\mu_2(\beta_2-\beta_3)(\beta_3-\beta_1)}{\Delta^2}\Bigg)\Bigg] + \frac{4\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)} - \frac{4\mu_1^4\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\\
& + \frac{4\mu_1^2\mu_2^2(\mu_2-\mu_3)}{(\mu_2-\mu_1)} - \frac{4\mu_1^2\mu_2^4}{(\mu_1-\mu_2)^2} + \frac{8\mu_1^3\mu_2^3}{(\mu_1-\mu_2)^2}\\
= {} & 4\lambda^2\Bigg[\frac{(\beta_2-\beta_3)}{(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\Bigg(\frac{\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} - \frac{2\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_3)}\\
& + \frac{2\mu_2^3\mu_1}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_3)}\Bigg) + \frac{(\beta_3-\beta_1)}{(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\Bigg(\frac{\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}\\
& + \frac{2\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1-\mu_3)} - \frac{2\mu_1^3\mu_2}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1-\mu_3)}\Bigg)\\
& - \frac{\lambda^2}{\Delta^2}\Bigg(\mu_2(\mu_3-\mu_1)(\beta_2-\beta_3) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)(\beta_3-\beta_1)\Bigg)^2\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)}\left((\mu_1-\mu_3)-\frac{\mu_1^2}{(\mu_1-\mu_2)}+(\mu_3-\mu_2)-\frac{\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)}+\frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_1-\mu_2)}\right)\\
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{(\beta_2-\beta_3)}{(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)-2\mu_1^2\mu_2^2+2\mu_2^3\mu_1}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_3)}\right)\\
&+\frac{(\beta_3-\beta_1)}{(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)+2\mu_1^2\mu_2^2-2\mu_1^3\mu_2}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_3)}\right)\\
&-\frac{\lambda^2}{\Delta^2}\Big(\mu_2(\mu_3-\mu_1)\beta_2+\mu_1(\mu_2-\mu_3)\beta_1+\mu_3(\mu_1-\mu_2)\beta_3\Big)^2\Bigg]\\
&+\frac{4\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left(\mu_1^2-\mu_1\mu_2-\mu_1^2-\mu_1\mu_2+\mu_2^2-\mu_2^2+2\mu_1\mu_2\right)\\
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{(\beta_2-\beta_3)}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{-\mu_2^2\mu_3\mu_1+\mu_2^3\mu_3-\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^3\mu_1}{(\mu_2-\mu_3)}\right)\\
&+\frac{(\beta_3-\beta_1)}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{\mu_1^2\mu_3\mu_2-\mu_1^3\mu_3+\mu_1^2\mu_2^2-\mu_1^3\mu_2}{(\mu_1-\mu_3)}\right)-\frac{\lambda^2}{\Delta^2}\Delta^2\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{(\beta_2-\beta_3)}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{\mu_2^2\mu_1(\mu_2-\mu_1)+\mu_2^2\mu_3(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_2-\mu_3)}\right)\\
&+\frac{(\beta_3-\beta_1)}{(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{\mu_1^2\mu_2(\mu_2-\mu_1)+\mu_1^2\mu_3(\mu_2-\mu_1)}{(\mu_1-\mu_3)}\right)-\lambda^2\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{1}{(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{(-\mu_2^2\mu_1-\mu_2^2\mu_3)(\beta_2-\beta_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)}\right)\\
&+\frac{1}{(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}\left(\frac{(-\mu_1^2\mu_2-\mu_1^2\mu_3)(\beta_3-\beta_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}\right)-\lambda^2\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{1}{\Delta}\Bigg((-\mu_2^2\mu_1-\mu_2^2\mu_3)(\mu_1-\mu_3)\big(2\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)-\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)\big)\\
&+(-\mu_1^2\mu_2-\mu_1^2\mu_3)(\mu_2-\mu_3)\big(2\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)+\mu_1^2(\mu_3-\mu_2)-\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)\big)\Bigg)-\lambda^2\Bigg]\\
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{1}{\Delta}\Bigg((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)\big(-2\mu_1^3\mu_2^2-2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3+2\mu_2^3\mu_1^2+2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3\big)\\
&+(\mu_1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)\big(\mu_3^2\mu_2^2\mu_1+\mu_3^3\mu_2^2\big)+(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)\big(\mu_1^2\mu_3^2\mu_2+\mu_3^3\mu_1^2\big)\\
&+(\mu_2-\mu_3)\big(-\mu_1^4\mu_2\mu_3+\mu_1^4\mu_2^2-\mu_1^4\mu_3^2+\mu_1^4\mu_2\mu_3\big)\\
&+(\mu_1-\mu_3)\big(\mu_2^4\mu_1\mu_3-\mu_2^4\mu_1^2+\mu_2^4\mu_3^2-\mu_2^4\mu_1\mu_3\big)\Bigg)-\lambda^2\Bigg]\\
&=4\lambda^2\Bigg[\frac{1}{\Delta}\Bigg((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)2\mu_1^2\mu_2^2\\
&+(\mu_1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)\big(\mu_3^3\mu_2^2-\mu_2^3\mu_3^2+\mu_2^3\mu_3^2+\mu_3^2\mu_2^2\mu_1\big)\\
&+(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)\big(\mu_3^3\mu_1^2-\mu_1^3\mu_3^2+\mu_1^3\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2\mu_2\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(\mu_2-\mu_3)\big(\mu_1^4\mu_2^2-\mu_1^4\mu_3^2\big)+(\mu_1-\mu_3)\big(\mu_2^4\mu_3^2-\mu_2^4\mu_1^2\big)\Big)-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big[\frac{1}{\Delta}\Big((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\big(2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2\big)\\
&+(\mu_1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)\big(\mu_2^3\mu_3^2+\mu_3^2\mu_2^2\mu_1\big)+(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)\big(\mu_1^3\mu_3^2+\mu_1^2\mu_3^2\mu_2\big)\\
&+(\mu_2-\mu_3)\big(\mu_1^4\mu_2^2-\mu_1^4\mu_3^2\big)+(\mu_1-\mu_3)\big(\mu_2^4\mu_3^2-\mu_2^4\mu_1^2\big)\Big)-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big[\frac{1}{\Delta}\Big((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\big(2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2\big)\\
&+(\mu_1-\mu_3)\big(\mu_3^2-\mu_2^2\big)\mu_1^2\mu_2^2+(\mu_2-\mu_3)(\mu_1^2-\mu_3^2)\mu_1^2\mu_2^2\Big)-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big[\frac{1}{\Delta}\Big((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\big(2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2\big)\\
&-(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2+\mu_3)\mu_1^2\mu_2^2+(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1+\mu_3)\mu_1^2\mu_2^2\Big)-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big[\frac{1}{\Delta}\Big((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\big(2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2\big)\\
&-(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)\big(\mu_1^3\mu_2^2-\mu_2^3\mu_1^2\big)\Big)-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big[\frac{1}{\Delta}\Big((\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\big(2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2\big)\\
&-(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\mu_1^2\mu_2^2\Big)-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big[\frac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)\big(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2\big)}{\Delta}-\lambda^2\Big]\\
&=4\lambda^2\Big(-\frac{\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2}{\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_2+\mu_3\mu_1}-\lambda^2\Big)\\
&=4\lambda^2\big(\epsilon-\lambda^2\big), \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

onde $\epsilon = -\dfrac{2(\mu_1^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_2^2+\mu_3^2\mu_1^2)}{\rho}$ e ρ é a curvatura escalar de G, ver (1.12). Asssim, se G possui curvatura escalar positiva, então $\epsilon < 0$. Mas, isto não pode ocorrer, pois de (2.26) $\|\nabla\lambda\|^2 < 0$. Logo, não existe superfície totalmente umbílica em grupos de Lie unimodulares, tal que $\Delta \neq 0$ e a curvatura escalar positiva.

2.1 Prova do Teorema Principal

Nesta seção, nos dedicamos a prova do teorema principal deste capítulo.

Teorema 2.1. Seja G um grupo de Lie unimodular com constantes de estruturas $c_3 \leq c_2 \leq c_1$.

(1) Se $c_1 = c_2 = c_3$ ou $c_1 = c_2$, $c_3 = 0$, então G tem curvatura seccional constante e portanto, é isométrico a $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{R}^3$.

(2) Se $c_3 < 0 < c_1$ e $c_2 = c_1 + c_3$, então

- Para $c_2 \neq 0$, qualquer superfície totalmente umbílica em G pertence a uma das duas famílias de superfícies totalmente geodésicas descritas na Proposição 2.1.
- Para $c_2 = 0$, $G = Sol_3$ munido com uma métrica invariante à esquerda por uma homotetia da métrica usual. Além disso, qualquer superfície totalmente umbílica em G é totalmente geodésica ou, a menos de isometrias do espaço ambiente, uma das superfícies descritas em [14].

(3) Nos outros casos, não existem superfícies totalmente umbílicas em G.

Demonstração. Por (1.11),

$$\begin{aligned} K(E_1, E_2) &= \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1\rangle = -\mu_1\mu_2 + c_3\mu_3, \\ K(E_1, E_3) &= \langle R(E_1, E_3)E_3, E_1\rangle = -\mu_1\mu_3 + c_2\mu_2, \\ K(E_2, E_3) &= \langle R(E_2, E_3)E_3, E_2\rangle = -\mu_2\mu_3 + c_1\mu_1, \end{aligned}$$

em que K é a curvatura seccional de G. Se $c_1 = c_2 = c_3 = c \neq 0$, então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{2}c$. Logo, $K(E_1, E_2) = K(E_1, E_3) = K(E_2, E_3) = \frac{1}{4}c^2$, ou seja, $K > 0$ e portanto de [1], G é isométrico a $\mathbb{S}^3$. Por outro lado, se $c_1 = c_2$ e $c_3 = 0$, então $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\mu_3 = c_1 = c_2$. Logo, $K(E_1, E_2) = K(E_1, E_3) = K(E_2, E_3) = 0$, e assim G é isométrico a $\mathbb{R}^3$. Concluindo assim o item (1).

Observe que se $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0$, então retornaremos ao primeiro item do Teorema. Assim, suponha $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$. Considere Σ uma superfície totalmente umbílica em G com função de umbilicidade λ. Se λ é constante, então o resultado segue da Proposição 2.1 e do Corolário 2.1. Dessa forma, suponha λ não constante. Primeiro, notemos que $\nabla\lambda = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i E_i$, com $\alpha_i \in C^\infty(\Sigma)$ e usando o Lema 2.1, segue que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \langle E_1, 2\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1 E_1^\top + 2\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\nu_2 E_2^\top\rangle \\ &= 2\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1(1 - \nu_1^2) - 2\mu_1(\mu_3 - \mu_2)\nu_2^2\nu_1 \\ &= 2\mu_2\mu_3\nu_1 - 2\mu_2\mu_3\nu_1^3 - 2\mu_1\mu_2\nu_1 + 2\mu_1\mu_2\nu_1^3 - 2\mu_1\mu_3\nu_2^2\nu_1 + 2\mu_1\mu_2\nu_2^2\nu_1 \\ &= 2\nu_1\big(\mu_2\mu_3 - \mu_2\mu_3\nu_1^2 - 2\mu_1\mu_3\nu_2^2 - 2\mu_1\mu_2\nu_3^2\big) \\ &= 2\nu_1(\lambda^2 + \mu_2\mu_3). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\alpha_2 = 2\nu_2(\lambda^2 + \mu_1\mu_3) \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 2\nu_3(\lambda^2 + \mu_1\mu_2).$$

Considere o campo tangente a Σ e ortogonal a $\nabla\lambda$ dado por

$$X = \nabla\lambda \wedge N = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = (\alpha_3\nu_2 - \alpha_2\nu_3)E_1 + (\alpha_1\nu_3 - \alpha_3\nu_1)E_2 + (\alpha_2\nu_1 - \alpha_1\nu_2)E_3.$$

Se escrevermos $X = \sum_{i=1}^{3} b_i E_i$, com $b_1, b_2, b_3 \in C^\infty(\Sigma)$, segue que

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_3\nu_2 - \alpha_2\nu_3 = 2\nu_2\nu_3\big[(\lambda^2 + \mu_1\mu_2) - (\lambda^2 + \mu_1\mu_3)\big] = 2\mu_1(\mu_2 - \mu_3)\nu_2\nu_3, \\ b_2 &= \alpha_1\nu_3 - \alpha_3\nu_1 = 2\nu_1\nu_3\big[(\lambda^2 + \mu_2\mu_3) - (\lambda^2 + \mu_1\mu_2)\big] = 2\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\nu_3, \\ b_3 &= \alpha_2\nu_1 - \alpha_1\nu_2 = 2\nu_1\nu_2\big[(\lambda^2 + \mu_1\mu_3) - (\lambda^2 + \mu_2\mu_3)\big] = 2\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\nu_1\nu_2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Agora, observamos que $dN_p(X_p) = \big(\langle\nabla\nu_1, X_p\rangle, \langle\nabla\nu_2, X_p\rangle, \langle\nabla\nu_3, X_p\rangle\big)$, e de (2.25)

$$\nu_1\nabla\nu_1 = \frac{(\beta_3 - \beta_2)\lambda}{\Delta}\nabla\lambda, \quad \nu_2\nabla\nu_2 = \frac{(\beta_1 - \beta_3)\lambda}{\Delta}\nabla\lambda, \quad \nu_3\nabla\nu_3 = \frac{(\beta_2 - \beta_1)\lambda}{\Delta}\nabla\lambda.$$

Portanto $dN_p(X_p) = 0$ para todo $p \in \Sigma$. Usando o mesmo argumento da prova do Lema 2.3, (b_1, b_2, b_3) satisfazem o sistema linear (2.13). Logo, de (2.13) e (2.27), obtemos

$$\begin{cases} \lambda\mu_1(\mu_2 - \mu_3)\nu_2\nu_3 + \mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)\nu_3^2\nu_1 - \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2)\nu_2^2\nu_1 = 0, \\ \lambda\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1\nu_3 + \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2)\nu_1^2\nu_2 - \mu_1^2(\mu_2 - \mu_3)\nu_3^2\nu_2 = 0, \\ \lambda\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\nu_1\nu_2 + \mu_1^2(\mu_2 - \mu_3)\nu_2^2\nu_3 - \mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1^2\nu_3 = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda\nu_2\nu_3 &= \frac{\mu_2^2(\mu_1 - \mu_3)\nu_3^2 + \mu_3^2(\mu_1 - \mu_2)\nu_2^2}{\mu_1(\mu_2 - \mu_3)}\nu_1, \\ \lambda\nu_1\nu_3 &= \frac{\mu_1^2(\mu_2 - \mu_3)\nu_3^2 + \mu_3^2(\mu_2 - \mu_1)\nu_1^2}{\mu_2(\mu_3 - \mu_1)}\nu_2, \\ \lambda\nu_1\nu_2 &= \frac{\mu_1^2(\mu_3 - \mu_2)\nu_2^2 + \mu_2^2(\mu_3 - \mu_1)\nu_1^2}{\mu_3(\mu_1 - \mu_2)}\nu_3. \end{aligned}$$

Usando apenas a primeira equação e tomando o quadrado em ambos lados, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_1^2(\mu_2 - \mu_3)^2\lambda^2\nu_2^2\nu_3^2 =& \mu_3^4(\mu_1 - \mu_2)^2\nu_2^4\nu_1^2 + 2\mu_2^2\mu_3^2(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)\nu_1^2\nu_2^2\nu_3^2 \\ &+ \mu_2^4(\mu_1 - \mu_3)^2\nu_3^4\nu_1^2. \end{aligned}$$

De (2.25), a função de umbilicidade λ satisfaz uma equação polinomial da forma

$$q_6\lambda^6 + q_4\lambda^4 + q_2\lambda^2 = 0,$$

onde

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \mu_3^4(\mu_1-\mu_2)^2\left(\frac{2\mu_1^2\mu_2^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}+\frac{\mu_2^4(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)^2(\mu_2-\mu_3)^2}\right)\\
&\quad+2\mu_2^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)\left(\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\mu_1^2\mu_2^2(\beta_1-\beta_2)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}+\frac{\mu_2^2\mu_3^2(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)^2(\mu_1-\mu_3)}\right)\\
&\quad+\mu_2^4(\mu_1-\mu_3)^2\left(\frac{2\mu_1^2\mu_3^2(\beta_1-\beta_2)}{\Delta(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)^2}+\frac{\mu_3^4(\beta_2-\beta_3)}{\Delta(\mu_3-\mu_1)^2(\mu_3-\mu_2)^2}\right)\\
&\quad-\frac{\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_3)^2}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)^2(\mu_1-\mu_3)}\\
&=-\frac{\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_4 &= \mu_3^4(\mu_1-\mu_2)^2\left(\frac{\mu_1^2(\beta_3-\beta_1)^2}{\Delta^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}+\frac{2\mu_2^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)}{\Delta^2(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)}\right)\\
&\quad+\frac{2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)}{\Delta^2}+\frac{2\mu_2^2\mu_3^4(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)}{\Delta^2(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}\\
&\quad+\frac{2\mu_2^4\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\beta_1-\beta_2)(\beta_2-\beta_3)}{\Delta^2(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)}+\frac{\mu_2^4\mu_1^2(\mu_1-\mu_3)^2(\beta_1-\beta_2)^2}{\Delta^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}\\
&\quad+\frac{2\mu_2^4\mu_3^2(\mu_1-\mu_3)^2(\beta_1-\beta_2)(\beta_2-\beta_3)}{\Delta^2(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}-\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_3)^2(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}\\
&\quad-\frac{\mu_1^2\mu_2^2(\mu_2-\mu_3)^2(\beta_1-\beta_2)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)}\\
&=\frac{\mu_1^2\mu_3^4(\mu_1-\mu_2)(\beta_3-\beta_1)^2}{\Delta^2(\mu_1-\mu_3)}+\frac{2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)}{\Delta^2}+\frac{\mu_1^2\mu_2^4(\mu_1-\mu_3)(\beta_1-\beta_2)^2}{\Delta^2(\mu_1-\mu_2)}\\
&\quad-\frac{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_3)(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_1-\mu_3)}-\frac{\mu_1^2\mu_2^2(\mu_2-\mu_3)(\beta_1-\beta_2)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)}\\
&=\mu_1\mu_2\mu_3\left[\frac{\mu_1\mu_3^3(\beta_3-\beta_1)^2}{\Delta^2(\mu_3-\mu_1)}+\frac{2\mu_1\mu_2\mu_3(\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)}{\Delta^2}+\frac{\mu_1\mu_2^3(\beta_1-\beta_2)^2}{\Delta^2(\mu_2-\mu_1)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\mu_1\mu_3(\beta_3-\beta_1)}{\Delta(\mu_3-\mu_1)}+\frac{\mu_1\mu_2(\beta_1-\beta_2)}{\Delta(\mu_2-\mu_1)}\right]+\frac{\mu_1^2\mu_3^3(\beta_3-\beta_1)}{\Delta^2(\mu_1-\mu_3)}\big(\mu_1\mu_3(\beta_3-\beta_1)+\Delta\big)\\
&\quad+\frac{\mu_1^2\mu_2^3(\beta_1-\beta_2)}{\Delta^2(\mu_1-\mu_2)}\big(\mu_1\mu_2(\beta_1-\beta_2)+\Delta\big)\\
&=\mu_1\mu_2\mu_3Q(\mu_1,\mu_2,\mu_3),
\end{aligned}
$$

em que Q é um polinômio nas variáveis μ_1,μ_2,μ_3.

$$
q_6=\frac{(\beta_2-\beta_3)}{\Delta^3}\Big(\mu_3^4(\mu_1-\mu_2)^2(\beta_3-\beta_1)^2+2\mu_2^2\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu_2^4(\mu_1-\mu_3)^2(\beta_1-\beta_2)^2\Big) - \frac{\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)}{\Delta^2}\\
&= \frac{(\beta_2-\beta_3)}{\Delta^3}\Big(\mu_3^2(\mu_1-\mu_2)(\beta_3-\beta_1)+\mu_2^2(\mu_1-\mu_3)(\beta_1-\beta_2)\Big)^2\\
&+ \frac{\mu_1^2(\mu_2-\mu_3)^2(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_2)}{\Delta^2}\\
&= \frac{(\beta_2-\beta_3)(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1-\mu_3)^2(\mu_2-\mu_3)^2\big(\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)\big)^2}{\Delta^3}\\
&+ \frac{\mu_1^2(\mu_1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)^2\big(2\mu_2^2-\mu_1\mu_3+\mu_2(\mu_1+\mu_3)\big)\big(2\mu_3^2-\mu_1\mu_2+\mu_3(\mu_1+\mu_2)\big)}{\Delta^2}\\
&= \frac{\big(\mu_2^2(\mu_3-\mu_1)+\mu_3^2(\mu_2-\mu_1)\big)^2\big(2\mu_1^2-\mu_2\mu_3+\mu_1(\mu_2+\mu_3)\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^3}\\
&+ \frac{\big(2\mu_1^2\mu_2^2-\mu_1^3\mu_3+\mu_1^2\mu_2(\mu_1+\mu_3)\big)\big(2\mu_3^2-\mu_1\mu_2+\mu_3(\mu_1+\mu_2)\big)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3)^2}.
\end{aligned}
$$

Como λ não é constante, segue que $q_2 = q_4 = q_6 = 0$. Sendo $\Delta \neq 0$, a condição $q_2 = 0$ implica $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$ ou $\mu_3 = 0$. Como $q_6 = 0$, podemos verificar que, se algum μ_i é igual a 0, então a soma dos outros dois também é igual a 0. Portanto, G é isométrico ao grupo Sol_3. ■

Capítulo 3

Superfícies totalmente umbílicas em grupos de Lie não-unimodulares

Neste capítulo, G denota um grupo de Lie não-unimodular. Pela Seção 1.5, G é isométrico ao produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_{B(a,b)} \mathbb{R}$, onde a matriz B é dada por (1.13). Como antes, o nosso objetivo é estudar a classificação das superfícies totalmente umbílicas em G. Para tanto, seguiremos com as mesmas notações do Capítulo 2.

De acordo com o Lema 1.5,

$$\begin{aligned}R(\phi_u, \phi_v)N = \big[&\big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1 y_1 + \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2 y_2 \\ &+ \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\nu_3 y_3\big]\phi_u - \big[\big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1 x_1 \\ &+ \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2 x_2 + \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\nu_3 x_3\big]\phi_v.\end{aligned}$$

Como Σ é totalmente umbílica em G, então por (2.1)

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1 x_1 + \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2 x_2 \\ &\quad + \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\nu_3 x_3\big), \\ \lambda_v &= \big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1 y_1 + \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2 y_2 \\ &\quad + \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\nu_3 y_3.\end{aligned}$$

Escrevendo,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1, \\ \beta_2 &= \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2, \\ \beta_3 &= \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\nu_3,\end{aligned}$$

e como $\lambda_u = \langle \phi_u, \nabla\lambda\rangle$, $\lambda_v = \langle \phi_v, \nabla\lambda\rangle$, temos que

$$\nabla\lambda = \sum_{k=1}^{3} \beta_k E_k^{\top}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1 E_1^\top + \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2 E_2^\top \\
&\quad + \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\nu_3 E_3^\top. \\
&= \big((1-a)^2 - ab^2 - ab^2(1-a)\big)\nu_1 E_1^\top + \big((1+a)^2 + ab^2 + ab^2(1+a)\big)\nu_2 E_2^\top \\
&\quad + \big(1 - a^2(1+b^2)\big)\big(-\nu_1 E_1^\top - \nu_2 E_2^\top\big),
\end{aligned}
$$

Assim, fazendo as distribuições e operações necessárias, obtemos

$$
\begin{aligned}
\nabla\lambda &= 2a\big(a - 1 - b^2 + ab^2\big)\nu_1 E_1^\top + 2a\big(a + 1 + b^2 + ab^2\big)\nu_2 E_2^\top \\
&= 2a(1+b^2)\big((a-1)\nu_1 E_1^\top + (a+1)\nu_2 E_2^\top\big).
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Os próximos resultados são análogos aos Lemas 2.1, 2.2 e 2.3.

Lema 3.1. *As funções $\nu_i \in C^\infty(\Sigma)$, satisfazem:*

$$
\begin{aligned}
\nabla\nu_1 &= \big((1+a)\nu_3 - \lambda\big)E_1^\top + ab\nu_3 E_2^\top + b\nu_1 E_3^\top, \\
\nabla\nu_2 &= ab\nu_3 E_1^\top + \big((1-a)\nu_3 - \lambda\big)E_2^\top - b\nu_1 E_3^\top, \\
\nabla\nu_3 &= -\big((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\big)E_1^\top - \big(ab\nu_1 + (1-a)\nu_2\big)E_2^\top - \lambda E_3^\top.
\end{aligned}
$$

Demonstração. A prova é análoga a do Lema 2.1. ■

Lema 3.2. *Se $a \neq 0$, então*

$$
\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b + 2(a^2-1)\nu_1\nu_2 = 0 \tag{3.2}
$$

Demonstração. Do mesmo modo que no Lema 2.2, mostra-se que

$$
\begin{aligned}
\left[E_2^\top, E_3^\top\right](\lambda) = 2a(1+b^2)\Big[&\nu_1^2\nu_2\big(a^2 - 2a^2\nu_1^2 - 1 - 2a^2\nu_2^2 - 2a\nu_2^2 + 2a\nu_1^2\big) \\
&+ b\nu_1\big(-a^2 + a + 2a^2\nu_2^2 + a^2\nu_1^4 - 2a\nu_1^4 - a^2\nu_2^4 - 2a\nu_2^4 \\
&+ a\nu_1^2 + a\nu_2^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 + \nu_1^4 - \nu_2^4\big) + \nu_2(a^2-1) - 2\nu_2^5(a^2-1) \\
&+ \nu_2^3(a^2-1) + \lambda\nu_2\nu_3(a+1)\Big].
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Por outro lado, usando o Lema 3.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
E_3^\top(E_2^\top(\lambda)) = 2a(1+b^2)\big[&\nu_1^2\nu_2\big(2(a-1) - a^2\nu_1^2 + 3\nu_1^2 + 2a^2\nu_2^2 - 2a(\nu_1^2+\nu_2^2) - 3\lambda\nu_3(a-1)\big) \\
&+ ab\nu_1\big(6a\nu_2^2 - 6a\nu_1^2\nu_2^2 - 5a\nu_2^4 + 2a\nu_1^2 - a\nu_1^4 + 2\nu_2^2 - \nu_2^4 + \nu_1^4 - a - 1\big) \\
&+ b\nu_1\big(2a\nu_1^2\nu_2^2 + 4\nu_1^2\nu_2^2 - a\nu_1^2 - \nu_1^2 + a\nu_1^4 - \nu_1^4 + a\nu_2^4 + 5\nu_2^4 - a\nu_2^2 - \nu_2^2\big) \\
&+ \nu_2(a^2-1) - 4\nu_2^3(a^2-1) + 3\nu_2^5(a^2-1) + \lambda\nu_2\nu_3(a+1) - 3\lambda\nu_2^3\nu_3(a+1)\big],
\end{aligned}
$$

$$
E_2^\top(E_3^\top(\lambda)) = 2a(1+b^2)\big[\nu_1^2\nu_2\big(-a^2 - 1 - 3\nu_1^2(a^2-1) - 3\lambda\nu_3(a-1) + 2a - 4a\nu_2^2\big)
$$

$$
\begin{aligned}
&+ ab\nu_1\big(2(1-a) + 3a\nu_1^2 + 7a\nu_2^2 - 6a\nu_1^2\nu_2^2 - 6a\nu_2^4 - 3\nu_1^2 - \nu_2^2 + 2\nu_1^2\nu_2^2 - 2\nu_2^4\big) \\
&+ b\nu_1\big(- 4\nu_2^2 + 4\nu_1^2\nu_2^2 + 4\nu_2^4\big) + 2\nu_2(a^2-1) - 3\nu_2^3(a^2-1) + 2\lambda\nu_2\nu_3(a+1) \\
&- 3\lambda\nu_2^3\nu_3(a+1) + \nu_2^5(a^2-1)\big].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left[E_2^\top, E_3^\top\right](\lambda) = 2a(1+b^2)\big[&\nu_1^2\nu_2\big(- a^2 + 1 - 2a^2\nu_1^2 - 2a^2\nu_2^2 + 2a\nu_1^2 - 2a\nu_2^2\big) \\
&+ b\nu_1\big(- a^2 + 3a + a^2\nu_2^2 + a^2\nu_1^2 - a^2\nu_2^4 + a^2\nu_1^4 - 2a\nu_1^2 - 2a\nu_2^2 \\
&- 2a\nu_2^4 - 2a\nu_1^4 - 2\nu_2^2 - \nu_2^4 + \nu_1^2 + \nu_1^4\big) + \nu_2(a^2-1) + \nu_2^3(a^2-1) \\
&+ \lambda\nu_2\nu_3(a+1) - 2\nu_2^5(a^2-1)\big].
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Igualando (3.3) e (3.4), obtemos

$$
2a(1+b^2)\big[b\nu_1\big(- 2a + a^2\nu_2^2 + 3a\nu_1^2 + 3a\nu_2^2 - 2\nu_1^2 + 2\nu_2^2 - a^2\nu_1^2\big) + 2\nu_1^2\nu_2(a^2-1)\big] = 0.
$$

Como $1 + b^2 \neq 0$, então

$$
a\nu_1\big[\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b + 2(a^2-1)\nu_1\nu_2\big] = 0.
$$

Repetindo o mesmo processo para $[E_1^\top, E_2^\top]$ e $[E_1^\top, E_3^\top]$, obtemos as seguintes identidades

$$
\begin{aligned}
a\nu_3\big[\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b + 2(a^2-1)\nu_1\nu_2\big] = 0, \\
a\nu_2\big[\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b + 2(a^2-1)\nu_1\nu_2\big] = 0.
\end{aligned}
$$

Como ν_1, ν_2 e ν_3 não se anulam simultaneamente, obtemos (3.2). ∎

Observamos que se $a = 0$, então o grupo G é isométrico a $\mathbb{H}^3$, ver observação 1.2. Se $a = 1$ e $b = 0$, então G é isométrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ver exemplo 1.1. Agora para o caso $a \neq 1$ e $b \neq 0$, o Lema 3.2 implica que a imagem da aplicação de Gauss está contida em uma curva e assim possui dimensão no máximo 1. Note ainda que, se $a = 1$ e b é arbitrário, então G é isométrico a $\mathbb{E}(-4, b)$ (ver observação 1.2) e esse caso também pode ser descartado, pois já sabemos que $\mathbb{E}(-4, b)$ não admite superfície totalmente umbílica.

Vamos agora para o caso $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Lema 3.3. *Se $a \notin \{0, 1\}$, então as seguintes identidades são verdadeiras*

$$
\lambda^2 - 2\nu_3\lambda - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2(1+b^2)\nu_3^2 + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2 = 0, \tag{3.5}
$$

$$
4b\nu_1^2\nu_2^2 + ((1-a)\nu_1^2 - (1+a)\nu_2^2 + 2a)ab\nu_3^2 = 0. \tag{3.6}
$$

Demonstração. Como a imagem da aplicação normal de Gauss invariante à esquerda tem dimensão no máximo 1, então dado $p \in \Sigma$, existe $u \in T_p\Sigma$ tal que $dN_p(u) = 0$ e consequentemente $\langle u, \nabla \nu_i \rangle = 0$ para todo $i \in \{1,2,3\}$. Escrevendo $u = \sum_{i=1}^{3} b_i E_i$, e usando (1.15), então

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_u N &= \sum_{i,j=1}^{3} b_i \nu_j \overline{\nabla}_{E_i} E_j \\
&= b_1\nu_1\overline{\nabla}_{E_1}E_1 + b_1\nu_2\overline{\nabla}_{E_1}E_2 + b_1\nu_3\overline{\nabla}_{E_1}E_3 + b_2\nu_1\overline{\nabla}_{E_2}E_1 + b_2\nu_2\overline{\nabla}_{E_2}E_2 \\
&\quad + b_2\nu_3\overline{\nabla}_{E_2}E_3 + b_3\nu_1\overline{\nabla}_{E_3}E_1 + b_3\nu_2\overline{\nabla}_{E_3}E_2 + b_3\nu_3\overline{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&= b_1\nu_1(1+a)E_3 + b_1\nu_2 abE_3 - b_1\nu_3(1+a)E_1 - b_1\nu_3 abE_2 + b_2\nu_1 abE_3 \\
&\quad + b_2\nu_2(1-a)E_3 - b_2\nu_3 abE_1 - b_2\nu_3(1-a)E_2 + b_3\nu_1 bE_2 - b_3\nu_2 bE_1 \\
&= \left(-b_1\nu_3(1+a) - b_2\nu_3 ab - b_3\nu_2 b\right)E_1 + \left(-b_1\nu_3 ab - b_2\nu_3(1-a) + b_3\nu_1 b\right)E_2 \\
&\quad + \left(b_1\nu_1(1+a) + b_1\nu_2 ab + b_2\nu_1 ab + b_2\nu_2(1-a)\right).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como Σ é totalmente umbílica segue que

$$\overline{\nabla}_u N = -\lambda u = -\lambda\left(b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3\right).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
-\lambda b_1 &= -b_1\nu_3(1+a) - b_2\nu_3 ab - b_3\nu_2 b \\
-\lambda b_2 &= -b_1\nu_3 ab - b_2\nu_3(1-a) + b_3\nu_1 b \\
-\lambda b_3 &= b_1\nu_1(1+a) + b_1\nu_2 ab + b_2\nu_1 ab + b_2\nu_2(1-a).
\end{aligned}
$$

Sendo $b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 = 0$, pois $\langle u, N\rangle = 0$, então

$$
\begin{pmatrix}
-\nu_3(1+a)+\lambda & -\nu_3 ab & -\nu_2 b \\
-\nu_3 ab & -\nu_3(1-a)+\lambda & \nu_1 b \\
\nu_1(1+a)+\nu_2 ab & \nu_1 ab + \nu_2(1-a) & \lambda \\
\nu_1 & \nu_2 & \nu_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.7)
$$

O sistema (3.7) é homogêneo, assim, os menores de ordem 3 da matriz que representa esse sistema devem ser nulos para que tenhamos uma solução não trivial. Logo,

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \lambda\left(-(1+a)\nu_3 + \lambda\right)\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda\right) - ab^2\nu_1\nu_3\left((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\right) \\
&\quad + ab^2\nu_2\nu_3\left((1-a)\nu_2 + ab\nu_1\right) + b\nu_2\left((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\right)\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda\right) \\
&\quad - b\nu_1\left(-(1+a)\nu_3 + \lambda\right)\left((1-a)\nu_2 + ab\nu_1\right) - a^2b^2\nu_3^2\lambda \\
&= \lambda\left((1-a^2)\nu_3^2 - \lambda\nu_3(1+a) - \lambda\nu_3(1-a) + \lambda^2\right) - ab^2\nu_1^2\nu_3(1+a) - a^2b^3\nu_1\nu_2\nu_3 \\
&\quad + ab^2\nu_2^2\nu_3(1-a) + a^2b^3\nu_1\nu_2\nu_3 + b\nu_2\Big(-(1-a^2)\nu_1\nu_3 + \lambda\nu_1(1+a) \\
&\quad - ab\nu_2\nu_3(1-a) + \lambda\nu_2 ab\Big) - b\nu_1\Big(-ab\nu_1\nu_3(1+a) - \nu_2\nu_3(1-a^2) + \lambda ab\nu_1 \\
&\quad + \lambda\nu_2(1-a)\Big) - a^2b^2\nu_3^2\lambda \\
&= \lambda\left((1-a^2)\nu_3^2 - 2\lambda\nu_3 + \lambda^2\right) - ab^2\nu_1^2\nu_3(1+a) + ab^2\nu_2^2\nu_3(1-a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- b\nu_1\nu_2\nu_3(1-a^2) + b\nu_1\nu_2\lambda(1+a) - ab^2\nu_2^2\nu_3(1-a) + ab^2\nu_2^2\lambda \\
&+ ab^2\nu_1^2\nu_3(1+a) + b\nu_1\nu_2\nu_3(1-a^2) - ab^2\nu_1^2\lambda - b\nu_1\nu_2\lambda(1-a) - a^2b^2\nu_3^2\lambda \\
={}& \lambda\nu_3^2(1-a^2) - 2\lambda^2\nu_3 + \lambda^3 + b\nu_1\nu_2\lambda(1+a) + ab^2\nu_2^2\lambda - ab^2\nu_1^2\lambda - b\nu_1\nu_2\lambda(1-a) \\
&- a^2b^2\nu_3^2\lambda \\
={}& \lambda\nu_3^2(1-a^2) - 2\lambda^2\nu_3 + \lambda^3 + 2ab\nu_1\nu_2\lambda + ab^2\nu_2^2\lambda - ab^2\nu_1^2\lambda - a^2b^2\nu_3^2\lambda \\
={}& \lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 + \nu_3^2(1-a^2) + 2ab\nu_1\nu_2 + ab^2\nu_2^2 - ab^2\nu_1^2 - a^2b^2\nu_3^2\right) \\
={}& \lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 ={}& \nu_3\left(-(1+a)\nu_3 + \lambda\right)\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda\right) - ab^2\nu_1^2\nu_3 + ab^2\nu_2^2\nu_3 \\
&+ b\nu_1\nu_2\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda\right) - b\nu_1\nu_2\left(-(1+a)\nu_3 + \lambda\right) - a^2b^2\nu_3^3 \\
={}& \nu_3\left((1-a^2)\nu_3^2 - \lambda\nu_3(1+a) - \lambda\nu_3(1-a) + \lambda^2\right) - ab^2\nu_1^2\nu_3 + ab^2\nu_2^2\nu_3 \\
&+ b\nu_1\nu_2\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda + (1+a)\nu_3 - \lambda\right) - a^2b^2\nu_3^3 \\
={}& \nu_3\left(\nu_3^2 - a^2\nu_3^2 - 2\lambda\nu_3 + \lambda^2\right) - ab^2\nu_1^2\nu_3 + ab^2\nu_2^2\nu_3 + 2ab\nu_1\nu_2\nu_3 - a^2b^2\nu_3^3 \\
={}& \nu_3\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 ={}& \nu_3\left(-(1+a)\nu_3 + \lambda\right)\left((1-a)\nu_2 + ab\nu_1\right) - \lambda ab\nu_1\nu_3 - b\nu_2^2\left((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\right) \\
&+ b\nu_1\nu_2\left((1-a)\nu_2 + ab\nu_1\right) - \lambda\nu_2\left(-(1+a)\nu_3 + \lambda\right) + ab\nu_3^2\left((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\right) \\
={}& \nu_3\left(-(1-a^2)\nu_2\nu_3 - ab\nu_1\nu_3(1+a) + \lambda\nu_2(1-a) + ab\nu_1\lambda\right) - \lambda ab\nu_1\nu_3 \\
&- b\nu_2^2\nu_1(1+a) - ab^2\nu_2^3 + b\nu_2^2\nu_1(1-a) + ab^2\nu_1^2\nu_2 + \lambda\nu_2\nu_3(1+a) - \lambda^2\nu_2 \\
&+ ab\nu_3^2\nu_1(1+a) + a^2b^2\nu_3^2\nu_2 \\
={}& -\nu_3^2\nu_2(1-a^2) - ab\nu_1\nu_3^2(1+a) + \lambda\nu_2\nu_3(1-a) + ab\nu_1\nu_3\lambda - \lambda ab\nu_1\nu_3 \\
&- b\nu_2^2\nu_1(1+a) - ab^2\nu_2^3 + b\nu_2^2\nu_1(1-a) + ab^2\nu_1^2\nu_2 + \lambda\nu_2\nu_3(1+a) - \lambda^2\nu_2 \\
&+ ab\nu_3^2\nu_1 + a^2b\nu_3^2\nu_1 + a^2b^2\nu_3^2\nu_2 \\
={}& -\nu_3^2\nu_2 + a^2\nu_3^2\nu_2 + 2\lambda\nu_2\nu_3 - ab\nu_2^2\nu_1 - ab^2\nu_2^3 - ab\nu_2^2\nu_1 + ab^2\nu_1^2\nu_2 - \lambda^2\nu_2 + a^2b^2\nu_3^2\nu_2 \\
={}& \nu_2\left(-\nu_3^2 + a^2\nu_3^2(1+b^2) + 2\lambda\nu_3 - 2ab\nu_1\nu_2 - ab^2\nu_2^2 + ab^2\nu_1^2 - \lambda^2\right) \\
={}& \nu_2\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_4 ={}& -ab\nu_3^2\left((1-a)\nu_2 + ab\nu_1\right) + \lambda\nu_1\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda\right) + b\nu_1\nu_2\left((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\right) \\
&- b\nu_1^2\left((1-a)\nu_2 + ab\nu_1\right) + ab\nu_2\nu_3\lambda - \nu_3\left((1+a)\nu_1 + ab\nu_2\right)\left(-(1-a)\nu_3 + \lambda\right) \\
={}& -ab\nu_3^2\nu_2 + a^2b\nu_3^2\nu_2 - a^2b^2\nu_3^2\nu_1 - \lambda\nu_1\nu_3 + a\lambda\nu_1\nu_3 + \lambda^2\nu_1 + b\nu_1^2\nu_2 + ab\nu_1^2\nu_2 \\
&+ ab^2\nu_2^2\nu_1 - b\nu_1^2\nu_2 + ab\nu_1^2\nu_2 - ab^2\nu_1^3 + ab\nu_2\nu_3\lambda - \nu_3\big(-(1-a^2)\nu_1\nu_3 + \lambda\nu_1(1+a) \\
&- ab\nu_2\nu_3(1-a) + ab\nu_2\lambda\big) \\
={}& -ab\nu_3^2\nu_2 + a^2b\nu_3^2\nu_2 - a^2b^2\nu_3^2\nu_1 - \lambda\nu_1\nu_3 + a\lambda\nu_1\nu_3 + \lambda^2\nu_1 + 2ab\nu_1^2\nu_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ ab^2\nu_2^2\nu_1 - ab^2\nu_1^3 + ab\nu_2\nu_3\lambda + \nu_3^2\nu_1 - a^2\nu_1\nu_3^2 - \lambda\nu_1\nu_3 + a\lambda\nu_1\nu_3 \\
&+ ab\nu_3^2\nu_2 - a^2b\nu_3^2\nu_2 - ab\nu_2\nu_3\lambda \\
= {} & \nu_1\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right) = 0, \\
\nu_3\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right) = 0, \\
\nu_2\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right) = 0, \\
\nu_1\left(\lambda^2 - 2\lambda\nu_3 - ab^2\nu_1^2 + ab^2\nu_2^2 - a^2\nu_3^2(1+b^2) + \nu_3^2 + 2ab\nu_1\nu_2\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Como os ν_i não se anulam simultaneamente, obtemos (3.5).

Para (3.6), considere o campo

$$
\begin{aligned}
X = \frac{\nabla\lambda \wedge N}{2a(1+b^2)} &= \frac{2a(1+b^2)\left((a-1)\nu_1E_1^\top + (a+1)\nu_2E_2^\top\right)\wedge N}{2a(1+b^2)} \\
&= (a-1)\nu_1E_1^\top \wedge N + (a+1)\nu_2E_2^\top \wedge N \\
&= (a-1)\nu_1\left(E_1 - \nu_1N\right)\wedge N + (a+1)\nu_2\left(E_2 - \nu_2N\right)\wedge N \\
&= (a-1)\nu_1E_1\wedge N + (a+1)\nu_2E_2\wedge N \\
&= (a-1)\nu_1\left(\nu_1E_1\wedge E_1 + \nu_2E_1\wedge E_2 + \nu_3E_1\wedge E_3\right) \\
&\quad + (a+1)\nu_2\left(\nu_1E_2\wedge E_1 + \nu_2E_2\wedge E_2 + \nu_3E_2\wedge E_3\right) \\
&= (a-1)\nu_1(\nu_2E_3 - \nu_3E_2) + (a+1)\nu_2(-\nu_1E_3 + \nu_3E_1) \\
&= (a+1)\nu_2\nu_3E_1 - (a-1)\nu_1\nu_3E_3 + \left((a-1)\nu_1\nu_2 - (a+1)\nu_1\nu_2\right)E_3 \\
&= (a+1)\nu_2\nu_3E_1 + (1-a)\nu_1\nu_3E_2 - 2\nu_1\nu_2E_3.
\end{aligned}
$$

De (3.5), temos que λ é constante ao longo das curvas onde N é constante. Daí, segue que $\nabla\lambda$ é ortogonal às curvas de nível de N, e portanto X é tangente a Σ e $dN_p(X_p) = 0$ para todo $p \in \Sigma$. Assim, escrevendo $X = \sum_{i=1}^{3} = b_iE_i$, temos $b_1 = (a+1)\nu_2\nu_3$, $b_2 = (1-a)\nu_1\nu_3$ e $b_3 = -2\nu_1\nu_2$. Agora, substituindo em (3.7), obtemos as seguintes identidades

$$
\begin{aligned}
&(-(1+a)\nu_3 + \lambda)(1+a)\nu_2\nu_3 - ab\nu_1\nu_3^2(1-a) + 2b\nu_2^2\nu_1 = 0, \\
&-ab\nu_3^2\nu_2(a+1) + (-(1-a\nu_3+\lambda))(1-a)\nu_1\nu_3 - 2b\nu_1^2\nu_2 = 0, \\
&((1+a)\nu_1 + ab\nu_2)(a+1)\nu_2\nu_3 + ((1-a)\nu_2 + ab\nu_1)(1-a)\nu_1\nu_3 - 2\lambda\nu_1\nu_2 = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
(a+1)\lambda\nu_2\nu_3 &= (a+1)^2\nu_3^2\nu_2 - b\nu_1(2\nu_2^2 - a(a-1)\nu_3^2), \\
(a-1)\lambda\nu_1\nu_3 &= -(1-a)^2\nu_3^2\nu_1 - b\nu_2(2\nu_1^2 + a(a+1)\nu_3^2), \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

$$2\lambda\nu_1\nu_2 = (-ab\nu_2(a-1)\nu_1^2 + 2(1+a^2)\nu_1\nu_2 + ab(a+1)\nu_2^2)\nu_3.$$

Como $a \neq 1$, de (3.2), temos

$$\nu_1\nu_2 = \frac{\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b}{2(1-a^2)}. \tag{3.9}$$

Agora, multiplicando a primeira igualdade em (3.8) por ν_1, a segunda igualdade por ν_2 e usando (3.9) nos termos $\nu_1\nu_2\nu_3^2$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda\nu_1\nu_2\nu_3 &= \frac{(a+1)^2\nu_3^2\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b}{2(1-a^2)(a+1)} \\
&\quad - \frac{b\nu_1^2(2\nu_2^2 + a(a-1)\nu_3^2)}{(a+1)} \\
&= \frac{(a+1)^2\nu_3^2\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b}{2(1-a^2)(a+1)} \qquad (3.10) \\
&\quad - \frac{2b(1-a^2)\nu_1^2(2\nu_2^2 + a(a-1)\nu_3^2)}{2(1-a^2)(a+1)}, \\
\lambda\nu_1\nu_2\nu_3 &= \frac{-(a-1)^2\nu_3^2\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b}{2(1-a^2)(a-1)} \\
&\quad - \frac{b\nu_2^2(2\nu_1^2 + a(a+1)\nu_3^2)}{(a-1)} \\
&= \frac{-(a-1)^2\nu_3^2\big((a+1)(a+2)\nu_2^2 - (a-1)(a-2)\nu_1^2 - 2a\big)b}{2(1-a^2)(a-1)} \qquad (3.11) \\
&\quad - \frac{2b(1-a^2)\nu_2^2(2\nu_1^2 + a(a+1)\nu_3^2)}{2(1-a^2)(a-1)}.
\end{aligned}$$

Igualando (3.10) e (3.11), e fazendo as simplificações necessárias, obtemos (3.6). Note que, usando, por exemplo, a primeira e a terceira igualdade de (3.8), obtemos

$$4b\nu_1^2\nu_2^2 + ab\nu_3^2\Big(-(a-1)^2\nu_1^2 + (a+1)^2\nu_2^2\Big) + 2a(a^2-1)\nu_1\nu_2\nu_3^2 = 0.$$

Substituindo (3.9) na expressão acima, temos

$$4b\nu_1^2\nu_2^2 + ab\nu_3^2\Big((1-a)\nu_1^2 - (1+a)\nu_2^2 + 2a\Big) = 0,$$

que é equivalente à equação (3.6). ■

Agora, estamos preparados para a prova do teorema principal desse capítulo.

Teorema 3.1. Seja $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_{B(a,b)} \mathbb{R}$ um grupo de Lie não-unimodular, com $a, b \geq 0$.

(1) Se $a = 0$, então G é isométrico ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

(2) Se $b = 0$ e $a = 1$, então G é isométrico ao espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

(3) Se $b = 0$ e $a \neq 1$, então qualquer superfície totalmente umbílica em G é uma superfície dos seguintes tipos:

   a) Uma superfície integral de uma das distribuições $\{E_1, E_3\}$ ou $\{E_2, E_3\}$. Em particular, a superfície é totalmente geodésica.

   b) Uma superfície invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias associadas a um dos campos de Killing ∂_x ou ∂_y. Isso dá origem a duas superfícies completas não totalmente geodésicas, únicas a menos de uma isometria do espaço ambiente.

(4) Nos outros casos, não existem superfícies totalmente umbílicas em G.

Demonstração. Se $a = 0$, então G é isométrico a $\mathbb{H}^3$ (ver observação 1.2). Como as superfícies totalmente umbílicas nesse espaço são conhecidas (ver [17]), o item (1) está provado.

Suponha $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Note que as equações (3.2) e (3.6) garantem que as funções ν_i satisfazem $P(\nu_1, \nu_2) = T(\nu_1, \nu_2) = 0$, em que P e T são polinômios da forma

$$P(x,y) = \big((a+1)(a+2)y^2 - (a-1)(a-2)x^2 - 2a\big)b + 2(a^2-1)xy$$
$$T(x,y) = 4bx^2y^2 + ab\big((1-a)x^2 - (1+a)y^2 + 2a\big)(1 - x^2 - y^2).$$

Observe que substituimos $\nu_3^2 = 1 - \nu_1^2 - \nu_2^2$ em (3.6) para obter a expressão de $T(x,y)$. Suponhamos que P e T possuem um fator comum $R \neq 0$. Afirmamos que R é constante. De fato, note que $P(0,y) = ((a+1)(a+2)y^2 - 2a)b$. Assim, como $b \neq 0$, a equação $P(0,y) = 0$ tem exatamente duas soluções que são dadas por

$$y_1 = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{(a+1)(a+2)}} \quad \text{e} \quad y_2 = -\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{(a+1)(a+2)}}.$$

Por outro lado, $T(0,y) = ab(2a - (1+a)y^2)(1 - y^2)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
T(0,y_1) = T(0,y_2) &= ab\left(2a - \frac{2a(1+a)}{(a+1)(a+2)}\right)\left(1 - \frac{2a}{(a+1)(a+2)}\right)\\
&= 2a^2b\left(1 - \frac{(1+a)}{(a+1)(a+2)}\right)\left(1 - \frac{2a}{(a+1)(a+2)}\right)\\
&= 2a^2b\left(\frac{(a+1)(a+2) - (1+a)}{(a+1)(a+2)}\right)\left(\frac{(a+1)(a+2) - 2a}{(a+1)(a+2)}\right)\\
&= 2a^2b\left(\frac{(a+1)^2}{(a+1)(a+2)}\right)\left(\frac{a^2 + 3a + 2 - 2a}{(a+1)(a+2)}\right)\\
&= \frac{2a^2b(a^2 + a + 2)}{(a+2)^2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Daí, concluimos que $R(0,y) \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Note que, o grau de R é no máximo 2. Se o grau de R é igual a 2, então R é um múltiplo escalar de P, mas P tem zeros ao longo do eixo $x=0$ e R não. Se o grau de R é igual a 1, então $R(x,y)=0$ representa uma reta no plano xy. Portanto, R deve ser paralelo ao eixo $x=0$, ou seja, $R(x,y)=x-\xi$ para algum $\xi \neq 0$. Assim, temos $P(\xi,y)=T(\xi,y)=0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e algum $\xi \neq 0$, o que é impossível em vista das expressões de $P(x,y)$ e $T(x,y)$. Portanto, R tem grau zero, ou seja, R é constante. Isso significa que P e T não possuem fator comum. Note que, o Teorema de Bézout's [4], nos diz que, se temos duas curvas planas projetivas sem fator comum, então o número de pontos de interseção dessas curvas é finito. Assim, aplicando esse resultado a P e T, existem finitas soluções (x,y) do sistema $P(x,y)=T(x,y)=0$. Consequentemente, as funções ν_1, ν_2, ν_3 são constantes.

Agora, para uma superfície totalmente umbílica Σ em G, considere os campos de vetores X, Y tangentes à Σ dados por

$$X = \nu_2 E_3 - \nu_3 E_2, \quad Y = \nu_3 E_1 - \nu_1 E_3.$$

Note que usando (1.10), temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X N &= \nabla_X(\nu_1 E_1 + \nu_2 E_2 + \nu_3 E_3) \\
&= X(\nu_1)E_1 + \nu_1 \nabla_X E_1 + X(\nu_2)E_2 + \nu_2 \nabla_X E_2 + X(\nu_3)E_3 + \nu_3 \nabla_X E_3 \\
&= \nu_1(\nu_2 \overline{\nabla}_{E_3} E_1 - \nu_3 \overline{\nabla}_{E_2} E_1) + \nu_2(\nu_2 \overline{\nabla}_{E_3} E_2 - \nu_3 \overline{\nabla}_{E_2} E_2) \\
&\quad + \nu_3(\nu_2 \overline{\nabla}_{E_3} E_3 - \nu_3 \overline{\nabla}_{E_2} E_3) \\
&= \nu_1\nu_2 b E_2 - \nu_1\nu_3 ab E_3 - \nu_2^2 b E_1 - \nu_2\nu_3(1-a)E_3 + \nu_3^2 ab E_1 + \nu_3^2(1-a)E_2 \\
&= (\nu_3^2 ab - \nu_2^2 b)E_1 + (\nu_3^2(1-a) + \nu_1\nu_2 b)E_2 - (\nu_1\nu_3 ab + \nu_2\nu_3(1-a))E_3.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$\nabla_Y N = (\nu_1\nu_2 b - \nu_3^2(1+a))E_1 - (\nu_3^2 ab + \nu_1^2 b)E_2 + (\nu_2\nu_3 ab + \nu_1\nu_3(1+a))E_3.$$

Da umbilicidade, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla_X N, E_1 \rangle = (a\nu_3^2 - \nu_2^2)b, \\
0 &= \langle \nabla_Y N, E_2 \rangle = (a\nu_3^2 + \nu_1^2)b.
\end{aligned}$$

Assim, se $b \neq 0$ então $\nu_1 = \nu_2 = 0$ e $\nu_3^2 = 1$. Portanto $a = 0$, o que é absurdo. Logo, G não admite superfície totalmente umbílica quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Agora, suponha $a \neq 0$ e $b = 0$. A técnica usada anteriormente não é válida, pois teríamos $T(x,y)$ identicamente nulo. Se $b = 0$ e $a = 1$, temos que G é isométrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (ver exemplo 1.1) e, como as superfícies totalmente umbílicas nesse ambiente são conhecidas (ver [14]), o item (2) está provado. Se $b = 0$ e $a \neq 1$, pela equação (3.2) temos $\nu_1\nu_2 = 0$. Suponha que $\nu_1 = 0$ em alguma vizinhança de Σ (o caso $\nu_2 = 0$ é análogo).

Em vista da Seção 1.1, os campos invariantes à esquerda são da forma

$$E_1 = e^{(1+a)z}\partial_x, \quad E_2 = e^{(1-a)z}\partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$

ou seja,

$$\partial_x = e^{-(1+a)z}E_1, \quad \partial_y = e^{-(1-a)z}E_2, \quad \partial_z = E_3.$$

Daí, a métrica invariante à esquerda de G é dada por

$$ds^2 = e^{-2(1+a)z}dx^2 + e^{-2(1-a)z}dy^2 + dz^2. \tag{3.12}$$

Sabemos que os campos de vetores ∂_x e ∂_y são campos de Killing (pois são invariantes à direita, ver Seção 1.1), e a condição $\nu_1 = 0$ implica que ∂_x é tangente à Σ. Então os fluxos gerados por ∂_x são isometrias de Σ. Fixado $p \in \Sigma$, considere a curva integral $\varphi_p(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ de ∂_x passando por $p = (x, y, z)$, isto é, $\dfrac{d\varphi_p}{dt}(t) = \partial_x(\varphi_p(t))$ e $\varphi_p(0) = p = (x, y, z)$. Assim, obtemos $\varphi_p(t) = (x+t, y, z)$ e concluimos que Σ é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias do tipo

$$(x, y, z) \longrightarrow (x + t, y, z).$$

Como ∂_x é tangente à Σ, então, ou Σ é um plano totalmente geodésico $\{y = y_0\}$ (que é uma superfície integral da distribuição gerada por $\{E_1, E_3\}$), ou Σ é uma superfície gerada por uma curva que é um gráfico sobre o eixo y, isto é, uma curva γ contida no plano também totalmente geodésico $\{x = 0\}$ dada por $\gamma(y) = (0, y, z(y))$. No segundo caso, Σ é parametrizada por

$$X(x, y) = (x, y, z(y)).$$

Como $X_x = \partial_x = e^{-(1+a)z}E_1$ e $X_y = \partial_y + z'\partial_z = e^{-(1-a)z}E_2 + z'E_3$, segue que

$$|X_x \wedge X_y|^2 = e^{-2(1+a)z}(e^{-2(1-a)z} + (z')^2) = e^{-2z}(e^{-2az}(z')^2 + e^{-2z}).$$

Portanto, o campo normal unitário à Σ é dado por

$$N = -\frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|} = \frac{e^{-az}z'}{D}E_2 - \frac{e^{-z}}{D}E_3,$$

onde $D^2 = e^{-2az}(z')^2 + e^{-2z}$. Como $b = 0$, usando (1.15) temos

$$\overline{\nabla}_{X_x}N = \overline{\nabla}_{X_x}(\frac{e^{-az}z'}{D}E_2 - \frac{e^{-z}}{D}E_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= X_x(\frac{e^{-az}z'}{D})E_2 + \frac{e^{-az}z'}{D}\overline{\nabla}_{X_x}E_2 - X_x(\frac{e^{-z}}{D})E_3 - \frac{e^{-z}}{D}\overline{\nabla}_{X_x}E_3 \\
&= \frac{e^{-az}e^{-(1+a)z}z'}{D}\overline{\nabla}_{E_1}E_2 - \frac{e^{-z}e^{-(1+a)z}}{D}\overline{\nabla}_{E_1}E_3 \\
&= \frac{e^{-z}e^{-(1+a)z}(1+a)}{D}E_1 \\
&= \frac{(1+a)e^{-z}}{D}X_x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_y}N &= \overline{\nabla}_{X_y}\left(\frac{e^{-az}z'}{D}E_2 - \frac{e^{-z}}{D}E_3\right) \\
&= X_y\left(\frac{e^{-az}z'}{D}\right)E_2 + \frac{e^{-az}z'}{D}\overline{\nabla}_{X_y}E_2 - X_y\left(\frac{e^{-z}}{D}\right)E_3 - \frac{e^{-z}}{D}\overline{\nabla}_{X_y}E_3 \\
&= \left(\frac{e^{-az}z'}{D}\right)'E_2 + \frac{e^{-az}z'}{D}\left(e^{-(1-a)z}\overline{\nabla}_{E_2}E_2 + z'\overline{\nabla}_{E_3}E_2\right) - \left(\frac{e^{-z}}{D}\right)'E_3 \\
&\quad - \frac{e^{-z}}{D}\left(e^{-(1-a)z}\overline{\nabla}_{E_2}E_3 + z'\overline{\nabla}_{E_3}E_3\right) \\
&= \left(\frac{e^{-az}z'}{D}\right)'E_2 + \frac{(1-a)z'e^{-z}}{D}E_3 - \left(\frac{e^{-z}}{D}\right)'E_3 + \frac{(1-a)e^{-(2-a)z}}{D}E_2 \\
&= \left[\left(\frac{e^{-az}z'}{D}\right)' + \frac{(1-a)e^{-(2-a)z}}{D}\right]E_2 + \left[\frac{(1-a)z'e^{-z}}{D} - \left(\frac{e^{-z}}{D}\right)'\right]E_3. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Agora, usando que Σ é totalmente umbílica, segue que

$$
\nabla_{X_y}N = \frac{(1+a)e^{-z}}{D}X_y = \frac{(1+a)e^{-z}}{D}\left(e^{-(1-a)z}E_2 + z'E_3\right). \qquad (3.14)
$$

Observe que, de (3.13) e (3.14), a condição de umbilicidade de Σ é equivalente ao seguinte sistema de EDO

$$
\begin{cases}
\left(\frac{e^{-az}z'}{D}\right)' & = 2a\frac{e^{-(2-a)z}}{D}, \\
\left(\frac{e^{-z}}{D}\right)' & = -2a\frac{z'e^{-z}}{D}.
\end{cases} \qquad (3.15)
$$

Note que, se $z = z(y)$ é uma solução, então a função $z(\pm y + y_0)$ também é uma solução para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, assim podemos restringir às soluções de (3.15) definidas no intervalo maximal contendo o 0 tal que $z'(0) \geq 0$. Agora, mostraremos que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) z é uma solução maximal do sistema (3.15).

(b) Existem $\Lambda, \theta \in \mathbb{R}$, com $\Lambda > 0$ e $\theta \geq -\frac{1}{2a}\log\Lambda$, tal que z é, a menos de uma mudança de parâmetros da forma $y \longmapsto \pm y + y_0$, a única solução da EDO

$$
z'' = (3a-1)\Lambda^2 e^{2(3a-1)z} - (a-1)e^{2(a-1)z}, \qquad (3.16)
$$

com condições iniciais $z(0) = \theta$ e $z'(0) = \sqrt{\Lambda^2 e^{2(3a-1)\theta} - e^{2(a-1)\theta}}$.

De fato, se (a) é satisfeito, então da segunda equação de (3.15), temos

$$\frac{-z'e^{-z}D - e^{-z}D_y}{D^2} = \frac{-2az'e^{-z}}{D},$$

que resulta em $\dfrac{D_y}{D} = (2a-1)z'$. Integrando a última igualdade, obtemos

$$D = \Lambda e^{(2a-1)z}, \quad \text{com} \quad \Lambda > 0. \tag{3.17}$$

De (3.17) e da identidade $D^2 = e^{-2az}(z')^2 + e^{-2z}$, temos

$$(z')^2 = \Lambda^2 e^{2(3a-1)z} - e^{2(a-1)z}. \tag{3.18}$$

Como o lado direito de (3.18) é sempre positivo, então

$$\Lambda^2 e^{2(3a-1)z} \geq e^{2(a-1)z} \Rightarrow \Lambda^2 \geq e^{-4az},$$

ou seja, $z \geq -\frac{1}{2a}\log\Lambda$. Portanto, $\theta = z(0) \geq -\frac{1}{2a}\log\Lambda$ e $z'(0)^2 = \Lambda^2 e^{2(3a-1)\theta} - e^{2(a-1)\theta}$. Note que, se derivarmos a expressão de (3.18), obtemos (3.16). Finalmente, usando (3.17) na primeira equação de (3.15), também obtemos (3.16). Portanto, a afirmação b) está provada.

Reciprocamente, suponha que z é uma solução de (3.16) para alguns Λ, θ com condições iniciais dadas em b). Então, multiplicando ambos lados de (3.16) por $2z'$, tem-se

$$2z'z'' = 2(3a-1)z'\Lambda^2 e^{2(3a-1)z} - 2(a-1)z'e^{2(a-1)z}.$$

Integrando a expressão acima, obtemos

$$(z')^2 = \Lambda^2 e^{2(3a-1)z} - e^{2(a-1)z} + C,$$

para alguma constante C. Como $z'(0)^2 = \Lambda^2 e^{2(3a-1)\theta} - e^{2(a-1)\theta}$, segue que $C = 0$ e portanto, $(z')^2 = \Lambda^2 e^{2(3a-1)z} - e^{2(a-1)z}$. Assim,

$$\begin{aligned} D^2 &= e^{-2az}\left(\Lambda^2 e^{2(3a-1)z} - e^{2(a-1)z}\right) + e^{-2z} \\ &= \Lambda^2 e^{2(2a-1)z}, \end{aligned}$$

ou seja, $D = e^{(2a-1)z}$. Logo, a última igualdade junto com (3.16) é equivalente ao sistema (3.15). Concluindo assim o item a).

Em particular, são obtidas as seguintes propriedades sobre as soluções de (3.15).

1. São funções suaves definidas em toda reta.

2. Admitem um limite inferior global $z \geq -\frac{1}{2a}\log\Lambda$.

3. Existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $z(y_0) = -\frac{1}{2a}\log\Lambda$.

Isso significa que, a menos de uma isometria do espaço ambiente, para cada $\Lambda > 0$, a superfície totalmente umbílica pode ser uma superfície associada a solução z_Λ de (3.15) com condições iniciais $z_\Lambda(0) = -\frac{1}{2a}\log\Lambda$ e $z'_\Lambda(0) = 0$. Além disso, pela unicidade em termos das condições iniciais, a função z_Λ é par (i.e, $z_\Lambda(-y) = z_\Lambda(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$).

Vamos agora mostrar que, as superfícies obtidas são congruentes quando variamos $\Lambda > 0$. Dados Λ_1, Λ_2, sejam z_{Λ_1} e z_{Λ_2} as soluções associadas, e considere $\omega = \frac{1}{2a}(\log\Lambda_1 - \log\Lambda_2)$. Note que, a transformação

$$(x, y, z) \to (xe^{(1+a)\omega}, ye^{(1-a)\omega}, z + \omega),$$

é uma isometria do espaço ambiente, que leva a superfície parametrizada por $(x, y) \to (x, y, z_{\Lambda_1}(y))$ na superfície parametrizada por $(x, y) \to (x, y, z_{\Lambda_2}(y))$. De fato, considere $f(x, y, z) = (xe^{(1+a)\omega}, ye^{(1-a)\omega}, z + \omega)$. Note que,

$$\begin{aligned} df_p(v) &= (v_1 e^{(1+a)\omega}, v_2 e^{(1-a)\omega}, v_3), \\ df_p(w) &= (w_1 e^{(1+a)\omega}, w_2 e^{(1-a)\omega}, w_3), \end{aligned}$$

para todo $p \in \Sigma$ e $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\Sigma$. Usando (3.12),

$$\begin{aligned} \langle df_p(v), df_p(w)\rangle_{f(p)} &= e^{-2(1+a)(p_3+\omega)}e^{2(1+a)\omega}v_1w_1 + e^{-2(1-a)(p_3+\omega)}e^{2(1-a)\omega}v_2w_2 + v_3w_3 \\ &= e^{-2(1+a)p_3}v_1w_1 + e^{-2(1-a)p_3}v_2w_2 + v_3w_3 \\ &= \langle v, w\rangle_p, \end{aligned}$$

onde $p = (p_1, p_2, p_3)$. Portanto, f é uma isometria. Sejam Σ_1 uma superfície parametrizada por $(x, y) \to (x, y, z_{\Lambda_1}(y))$ e $q \in \Sigma_1$. Observe que,

$$f(q) = (xe^{(1+a)\omega}, ye^{(1-a)\omega}, z_{\Lambda_1}(y) + \omega).$$

Considere $z(y) = z_{\Lambda_1}(y) + \omega$. Note que $z(0) = -\frac{1}{2a}\log\Lambda_2$ e $z'(0) = 0$. Como $z_{\Lambda_2}(y)$ é a única solução com as mesmas condições iniciais, então $z(y) = z_{\Lambda_2}(y)$. Portanto, $f(q) \in \Sigma_2$.

Agora, analisamos o caso $\nu_2 = 0$. De modo análogo ao caso $\nu_1 = 0$, verifica-se que a superfície Σ é invariante por isometrias do tipo $(x, y + t, z)$. Além disso, trocando a função x pela função y e a por $-a$, segue que Σ é um pedaço de um plano totalmente geodésico $x = x_0$ ou, a menos de uma isometria do espaço ambiente, gerada por uma curva $\gamma(x) = (x, 0, z(x))$, onde z é uma solução de alguma EDO com condições iniciais prescritas. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[2] Daniel, B., *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv. v. 82(1), p. 87–131, 2007.

[3] Espinar, J. M., Rosenberg, H., *Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces*, Comment. Math. Helv., v. 86, n. 3, p. 659-674, 2011.

[4] Fulton, W., *Algebraic Curves, An Introduction to Geometry*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.

[5] Inoguchi, J., Van der Veken, J., *A complete classification of parallel surfaces in three-dimensional homogeneous spaces*, Geom. Dedicata, v. 131, p. 159–172, 2008.

[6] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Space*, Academic Press, New York, 1962.

[7] Hoffman, K., Kunze, R., *Linear Algebra*, 2ed, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

[8] Manzano, J.M., Souam, R.,*The classification of totally umbilical surfaces in homogeneous 3-manifolds*, Math. Z., v. 279, p. 557–576, 2015.

[9] Meeks, W.H., Pérez, J., *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*, Contemp. Math., v. 570, p. 25–110, 2011.

[10] Milnor, J., *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math., v. 21(3), p. 293–329, 1976.

[11] Ochiai, T., Takahashi, T., *The group of isometrics of a left-Invariant Riemannian metric on a Lie group*, Math. Ann. v., 223, p. 91-96, 1976.

[12] Sanini, A., *Gauss map of a surface of the Heisenberg group*, Boll. Unione Mat. Ital., B (7) v. 11, p. 79–93, 1997.

[13] Souam, R., Toubiana, E., *On the classification and regularity of umbilical surfaces in homogeneous 3-manifolds*, XIV Sch. Differ. Geom. Mat. Contemp., v. 30, p. 201–215, 2006.

[14] Souam, R., Toubiana, E., *Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds*, Comment. Math. Helv., v. 84(3), p. 673–704, 2009.

[15] Souam, R., Van der Veken, J., *Totally umbilical hypersurfaces of manifolds admitting a unit Killing field*, Trans. Am. Math. Soc., v. 364(7), p. 3609–3626, 2012.

[16] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. 3, 3ed, Publish or Perish, Boston, 1999.

[17] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. 4, 3ed, Publish or Perish, Boston, 1999.

[18] Thurston, W., *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Math. Ser. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[19] Tsukada, K., *Totally geodesic submanifolds of Riemannian manifolds and curvature-invariant subspaces*, Kodai Math. J. v., 19(3), p. 395–437, 1996.

[20] Warner, F.W, *Foundations of diferentiable manifolds and Lie goups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1983.