UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE PARA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DA SALA INVERTIDA

HERMINIO EDSON MAIA SANTANA

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Herminio Edson Maia Santana

UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE PARA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DA SALA INVERTIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio da Fonseca de Lira

MANAUS
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S232u

Santana, Herminio Edson Maia
Uma proposta de aplicação das Fórmulas de Moivre para potenciação e radiciação de Números Complexos por meio da Sala Invertida / Herminio Edson Maia Santana. 2018
48 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Antonio da Fonseca de Lira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Informática na Educação. 2. Números Complexos. 3. Sala Invertida. 4. Geogebra. 5. Geometria Dinâmica. I. Lira, Antonio da Fonseca de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

HERMINIO EDSON MAIA SANTANA

UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE PARA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DA SALA INVERTIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06 de dezembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio da Fonseca de Lira - UFAM
Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira - UFAM
Membro

Prof. Antonio Ferreira Santana Filho - IFAM
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Professor Dr. Antonio da Fonseca de Lira, pela melhor orientação que poderia desejar, em todos os aspectos, além de ser uma de minhas inspirações como professor.

Agradeço aos amigos de turma do PROFMAT, que tanto constribuíram para a realização dessa pesquisa, quanto para que me tornasse um professor e ser humano melhor. Destaco aqui a amiga Rosilei Cardozo Moreira, a qual seria injusto tentar transmitir em palavras sua contribuição para esse trabalho.

Obrigado aos colegas professores de trabalho e à turma do Terceirão Século 2018, por quem sinto tanto orgulho.

Agradeço a Gutemberg Leão Brasil e Delysson Amazonas Sales, sempre presentes.

Agradeço à minha namorada, Jessica Ferreira Barbosa, pelo incentivo e apoio durante todo esse tempo.

Agradeço à minha irmã, Mirelle Maia Santana, minha mãe, Maria Roberlene Maia, e pai, Bento dos Santos Santana, por serem partes tão importantes de minha jornada.

Por fim, agradeço aos meus avós, Raimundo Edson Maia e Maria do Socorro Maia, a quem dedico todas as obras de minha vida.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar o estudo das Fórmulas de Moivre, através da Metodologia de Aula Invertida, com utilização do software educacional Geogebra e dos princípios da Geometria Dinâmica e Interativa, aos olhos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval, onde será discutido o desenvolvimento do aluno durante o preparo e pesquisa do conteúdo, no que antecede a aula sobre Números Complexos, além de uma análise a respeito das habilidades demonstradas pelos alunos no processo de elaboração de material, slides, gráficos e afins, e da própria apresentação em sala de aula. Para isso, será relatado também o planejamento e execução desta aula por parte do professor e alunos, bem como sobre as ferramentas escolhidas por esses para auxiliar no estudo de tal conteúdo.

Palavras-chave: Informática na Educação, Números Complexos, Sala de aula invertida, Geogebra, Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

This research aims to analyze the learning of the Moivre Formulas, through the *flippedclassroom methodology*, using Geogebra educational software and the principles of the Interactive and Dynamic Geometry, using the Semiotics Representation Theory, by Raymond Duval, where it will be discussed the development of the student through the preparation and study about the Complex Numbers, and a beyond analysis about the skills showed by the students in the material elaboration, including slides and graphics, and the presentment itself. In order to do that, it will be reported the planning and development of this class about the perspective of professor an study, as well as the tools that been choose about them to helps in the research.

Keywords: Geogebra, Dynamic Geometry, Technology in Education, Flipped Classroom, Complex Numbers.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A motivação pela escolha do tema se deu pela percepção desse pesquisador, ao dar aulas aos 3° Anos do Ensino Médio em anos anteriores, de que tal assunto é um dos mais complicados neste nível e que necessita das mais variadas ferramentas que venham a auxiliar o estudo deste conteúdo. Qual seria, portanto, uma abordagem alternativa para o ensino desse conteúdo no Ensino Médio?

As Metodologias Ativas de Aprendizagem, que envolvem a Metodologia de Sala de Aula Invertida, podem parecer novidade a alguns olhos, mas se trata de objeto de pesquisa já a muitos anos. Suas raízes remontam à década de 90 e hoje é base de muitos projetos inovadores, dentre os mais conhecidos o *Google for Education*. Trata-se de uma tendência que vem ganhando bastante espaço em cada vez mais instituições dos três níveis de ensino.

Outro assunto que já não é mais novidade entre os pesquisadores é o ensino aliado às novas tecnologias. Não é de hoje que os computadores potencializam o ensino das mais diversas maneiras, e o mercado de trabalho parece exigir tais perícias dos novos profissionais. Enquanto as noções básicas de computação eram abordadas em cursos paralelos ao ensino básico, hoje fazem parte do cotidiano de muitas escolas, não apenas como disciplina específica, mas também como auxílio aos professores de português, matemática, geografia, etc.

Muitas escolas atuais, porém, não abordam mais os princípios básicos da computação, mas levam aos alunos atividades elaboradas e complexas envolvendo temas como robótica e astronomia. Aliado a isso, os professores de outras disciplinas encontram novos meios de abordarem seus próprios conteúdos, estudando parábola enquanto constroem foguetes, ou estudando geografia enquanto elaboram complicados sistemas de programação.

Existem, ainda, aquelas ferramentas tecnológicas voltadas propriamente ao ensino. É o caso de softwares como o Geogebra, totalmente gratuito, online e disponível aos Sistemas Operacionais mais comuns atualmente. Esta poderosa ferramenta possibilita que professores e alunos de todos os cantos do mundo interajam e compartilhem suas experiências com o software, aplicando diferentes pesquisas a suas próprias realidades. Este software permite a construção de gráficos e figuras, em duas ou três dimensões, de forma que o aluno possa interagir com a figura, ao mesmo tempo em que experimenta o reflexo dessas figuras numa janela puramente algébrica, que relaciona cada elemento com seu significado matemático.

A esta possibilidade de interagir com a figura, dá-se o nome de Geometria Dinâmica e Interativa, GDI, que incrementa o uso do software em sala de aula, na medida que os alunos podem estudar todo um capítulo apenas com uma mesma construção geométrica no software. A escolha dos princípios de Geometria Dinâmica surge como possibilidade de proporcionar ao aluno o protagonismo em sua própria aprendizagem, permitindo ao professor se manter como mediador do processo de ensino, segundo os princípios das Metodologias de Aula Invertida.

O objetivo desta pesquisa é, portanto, **propor, aplicar e analisar uma abordagem para o ensino das Fórmulas de Moivre**, através de uma Aula Invertida com uso de Geometria Dinâmica, sob o olhar da Teoria das Representações Semióticas. Para isto, será realizado um levantamento teórico a respeito dos conceitos, teorias e ferramentas a serem usados na pesquisa. Posteriormente, serão comentadas as características da turma e do colégio onde ocorrerão as aulas, bem como uma descrição detalhada do planejamento da aula, incluindo comentários a respeito da metodologia adotada e suas justificativas. Por fim, será realizada uma descrição das aulas apresentadas pelos alunos, sobre as ferramentas utilizadas por eles e as abordagens feitas pelo professor durante essas aulas, bem como comentários a respeito da avaliação e do desempenho dos alunos nessa Aula Invertida, aos olhos da teoria escolhida e dos conceitos propostos. A pesquisa é finalizada com uma Discussão dos Resultados e a Conclusão do trabalho.

Capítulo 1

CONSIDERAÇÕES SOBRE METODOLOGIAS ATIVAS DE APRENDIZAGEM

1.1 A Metodologia Ativa Sala de Aula Invertida

A tecnologia já está presente em todos os nossos afazeres diários. A indústria foi reformulada de maneira a se adaptar a um mundo de inovações que chegam com uma velocidade estrondosa e muitas de nossas crianças deverão trabalhar em profissões que ainda nem existem. Não se pode esperar que as salas de aula continuem as mesmas por muito mais tempo, as escolas estão, aos poucos, se reformulando, se ajustando à uma nova realidade, e isso tem um impacto significativo na maneira com que os professores atuam e como os alunos aprendem.

Esse movimento teve início principalmente nas escolas da rede particular de ensino, onde já se pode encontrar disciplinas que sequer existiam a pouco tempo atrás. Alunos estudam Robótica antes de estudarem sobre a anatomia do corpo humano, ou estudam programação de computadores antes de conhecerem noções importantes da matemática vista no Ensino Médio.

Os aparelhos eletrônicos estão presentes nas escolas, são objetos de estudo e também ferramentas poderosas para auxílio do educador, e podem estar presentes tanto nestas aulas de robótica como nas de Língua Portuguesa ou Matemática, por exemplo. Por meio das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs ou TDIC), é possível reduzir gastos, agilizar atividades e possibilita ao professor utilizar recursos que de outra maneira não poderiam ser levados ao ambiente escolar. Como afirma DE ALMEIDA [15]:

> As narrativas, que eram tradicionalmente orais ou escritas, podem ser agora produzidas com uma combinação de mídias, o que pode contribuir para que esta atividade seja muito mais rica e sofisticada, sob o ponto de vista da representação de conhecimento e da aprendizagem. A disseminação dos recursos tecnológicos e o fato de as TDIC concentrarem em um único dispositivo diversos recursos, como a câmera fotográfica, a câmera de vídeo, o gravador de som, etc., como já ocorre com os celulares

> e os laptops educacionais, têm possibilitado novas formas de produção de narrativas, além do texto escrito ou falado. Além disso, novas formas de produção de texto, advindas das práticas sociais com o uso de múltiplas linguagens midiáticas, propiciam a organização de nossas experiências por meio de histórias que articulam os acontecimentos com os quais lidamos, representados por meio de texto, imagem ou som.

Mas as mudanças vistas na educação básica vão muito além de alterações na Grade Curricular e nas ferramentas utilizadas, a própria maneira de ensinar está se alterando. Estes novos processos de ensino-aprendizagem, onde o aluno é personagem ativo nas discussões em sala de aula, são conhecidos por Metodologias Ativas de Aprendizagem, e começam a ditar os passos de uma nova maneira de educar. Ainda segundo DE ALMEIDA [15]:

> A aprendizagem ativa ou também conhecida como metodologia ativa de aprendizagem não é novidade e tem sido implantada por intermédio de diferentes estratégias como o Project Based Learning (PBL), aprendizagem baseada em projetos; o Game Based Learning (GBL), ensino e aprendizagem por meio de jogos; o Método do Caso ou Teaching Case, discussão e solução de casos; ou o Team-based Learning (TBL), focado no aprendizado em equipe. Essas estratégias não necessariamente utilizam as TDICs. No entanto, elas têm sido adaptadas para serem utilizadas juntamente com as TDICs, gerando novas modalidades de ensino como o PeerInstruction (PI), aprendizado por pares; ou a Sala de Aula Invertida (conhecida em inglês como flipped classroom), implantadas tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior.

Com recursos tecnológicos cada vez mais acessíveis, as escolas estão mais equipadas que nunca. Apenas estes recursos não revolucionam o processo de ensino, afinal, a tão comum combinação lousa e pincel são tecnologias, mesmo que não digitais. É preciso associar estes recursos a novas metodologias, a fim de se aproveitar do imenso potencial destas tecnologias.

O acesso a internet e a capacidade de comunicação instantânea são ferramentas poderosas para auxilio do professor, porém o aluno necessita de orientação para encontrar informações que sejam relevantes em relação ao que está sendo estudado e, ainda, com fontes confiáveis. Todas estas preocupações estão presentes na hora do planejamento e na escolha da metodologia a ser utilizada pelo professor. Para Berbel [3]:

> As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras.

Diante desta gama de recursos, é sempre possível que o estudante traga novas informações referentes ao conteúdo e que ainda não sejam do conhecimento do professor. Um bom exemplo é o site Youtube, que possui uma infinidade de vídeos se tratando de quase todo tema possível, em praticamente todas as línguas. É muito provável que ao estudar assistindo vídeo aulas o aluno encontre um vídeo que possa enriquecer o debate em sala de aula.

Esta abordagem, além de incentivar o interesse dos alunos, pode também moldar o senso crítico deste, afim de que se torne um cidadão capaz de tomar decisões, analisando detalhes que talvez passassem despercebidos por outros. Segundo Babel [3]:

> O engajamento do aluno em relação a novas aprendizagens, pela compreensão, pela escolha e pelo interesse, é condição essencial para ampliar suas possibilidades de exercitar a liberdade e a autonomia na tomada de decisões em diferentes momentos do processo que vivencia, preparando-se para o exercício profissional futuro.

Porém, este interesse por parte do aluno nem sempre é alcançado durante uma aula expositiva, mesmo que muitos professores pensem desta maneira. É preciso proporcionar ao aluno a oportunidade de transcender as quatro paredes da sala de aula. Para isto, é preciso levar em consideração diversos fatores, como a infraestrutura da escola, o número de alunos na turma, dentre outros. Como afirma Barbosa [2]:

> Geralmente, a expressão aprendizagem ativa, que pode ser entendida também como aprendizagem significativa, é usada de forma vaga e imprecisa. Intuitivamente, professores imaginam que toda aprendizagem é inerentemente ativa. Muitos consideram que o aluno está sempre ativamente envolvido enquanto assiste a uma aula expositiva. Entretanto, pesquisas da ciência cognitiva sugerem que os alunos devem fazer algo mais do que simplesmente ouvir, para ter uma aprendizagem efetiva.

Considerando estas dificuldades, é possível fugir do método tradicional de ensino. Ensinar matemática, especificamente, sempre foi um desafio para qualquer professor em qualquer parte do mundo. Parece ser senso comum a ideia de que a matemática é enfadonha e de que seus principais conceitos não possuem aplicação alguma, o que é um erro absurdo, que nem sempre consegue ser sanado pelo professor. Apesar disso, há sim alguns conceitos da matemática básica que não fazem ou farão parte do cotidiano dos alunos, ou pelo menos daqueles que não querem seguir uma carreira acadêmica que envolva as Ciências Exatas.

Um adolescente que sonha em um dia ser médico encontrará facilmente uma aplicação nas ciências biológicas para uma Função Polinomial de Primeiro Grau, porém não será tão fácil convencê-lo da necessidade de se estudar os Números Complexos e suas propriedades. É neste caso que o professor precisará procurar estratégias alternativas para prender a atenção da turma.

Uma estratégia que está ganhando bastante espaço nas escolas é a Sala de Aula Invertida, onde a organização tradicional de sala de aula dá lugar à debates em que os alunos são responsáveis pelas propostas de argumentações. A este respeito, citando Valente [15]:

> A sala de aula é invertida no sentido que o conteúdo e as instruções são estudados online, usando as TDICs, antes de o aluno frequentar a sala de aula. Durante esse período, o aluno deve estudar o material de apoio e responder, via uma plataforma de educação a distância, a um conjunto de questões. O professor, antes da aula, verifica

> as questões mais problemáticas que devem ser trabalhadas em sala de aula. Durante a qual, o professor apresenta o material em aproximadamente 20 minutos, intercalados com questões para discussão, visualizações e exercícios de lápis e papel. Os alunos usam simulações animadas, desenvolvidas para ajudá-los a visualizar conceitos e realizaram experimentos em grupos, com o auxílio do computador na aquisição e análise dos dados.

Utilizando-se da metodologia de Sala Invertida, a necessidade de buscar informações e adquirir conhecimento é enfatizada para o aluno. Trata-se de uma maneira de utilizar-se de todos os recursos tecnológicos disponíveis, com propósitos bem definidos. A princípio, pode parecer a preparação para uma apresentação de seminário, onde o aluno pesquisa e apresenta os resultados. Apesar disto, a Sala Invertida está mais focada no estudo e na assimilação de novos conteúdos, não no processo de decorar informações.

Na sala de aula tradicional, o processor utiliza seu tempo para transmitir conteúdo, enquanto o aluno utiliza seu tempo em sala para exercitar aquilo que aprendeu na escola, enquanto na aula invertida, o aluno deverá pesquisar e desenvolver novas habilidades, de acordo com tema proposto pelo professor, para então debater em sala de aula, apresentando seus resultados e corrigindo eventuais equívocos com auxílio do professor. Para Valente [15]:

> A inversão ocorre, uma vez que no ensino tradicional, a sala de aula serve para o professor transmitir informação para o aluno que, após a aula, deve estudar o material que foi transmitido e realizar alguma atividade de avaliação para indicar se o material foi assimilado. Na abordagem da sala de aula invertida, o aluno estuda antes da aula e esta se torna o lugar de aprendizagem ativa, o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo, laboratórios etc. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina.

Através desta abordagem, o professor pode elaborar um vídeo introdutório ao conteúdo a ser trabalhado, prepara uma apresentação em slides ou, ainda, disponibilizar uma lista de vídeo aulas, de forma que o aluno tenha as informações necessárias para dar prosseguimento aos estudos. O interessante é que, como já foi citado, não há necessidade de o aluno ficar preso à este material, podendo buscar novas fontes.

Além do material disponibilizado, o professor deve ter em mente uma atividade a ser desenvolvida no retorno dos estudos em casa. Este pode compor uma apresentação em slides, elaboração de um vídeo, dentre outros. De acordo com a Revista Ensino Inovativo [14]:

> O principal objetivo desta abordagem, em linhas gerais, é que o aluno tenha prévio acesso ao material do curso - impresso ou on-line - e possa discutir o conteúdo com o professor e os demais colegas. Nessa perspectiva, a sala de aula se transforma em um espaço dinâmico e interativo, permitindo a realização de atividades em grupo, estimulando debates e discussões, e enriquecendo o aprendizado do estudante a partir de diversos pontos de vista.

Esta tem sido uma alternativa para chamar a atenção dos alunos para conteúdos matemáticos que não são facilmente aplicáveis em seu cotidiano. Há, de fato, uma inversão de valores, já que a sala de aula deixa de ser um ambiente onde se expõem conteúdos e passa a ser local de mediação para discussão de conteúdos já estudados pelo aluno. Neste trabalho abordaremos o desenvolvimento de uma proposta de Aula Invertida, sob a luz das Metodologias Ativas de Aprendizagem, para o ensino das Fórmulas de Moivre para potenciação e radiciação de números complexos, bem como as dificuldades encontradas durante a aplicação do projeto em uma turma do 3 Ano do Ensino Médio de um colégio da rede particular de ensino e uma posterior discussão dos resultados alcançados.

1.2 Utilização de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática

Com o avanço exponencial da tecnologia, todos os aspectos de nosso cotidiano estão sendo constantemente alterados em seus mínimos detalhes. A maneira como lemos o jornal, como nos exercitamos, como recebemos notícias do que está ocorrendo pelo mundo, todas essas tarefas são realizadas de maneira bem diferente de 20 anos atrás. E a tendência é de que estas mudanças sejam cada vez mais rápidas, na medida em que a tecnologia se enraíza na vida das novas gerações. Não poderia ser diferente estas mudanças no processo de ensino aprendizagem, conforme afirma Valente [15]:

> A presença das tecnologias digitais de comunicação e educação (TDICs) no nosso dia a dia tem alterado visivelmente os meios de comunicação e como nos comunicamos. As possibilidades e o potencial que essas tecnologias oferecem para a comunicação são enormes. É possível vislumbrar mudanças substanciais nos processos comunicacionais, alterando a maneira como recebemos e acessamos a informação. Infelizmente as mudanças observadas no campo da comunicação não têm a mesma magnitude e impacto com relação à educação. Esta ainda não incorporou e não se apropriou dos recursos oferecidos pelas TDICs. Na sua grande maioria, as salas de aulas ainda têm a mesma estrutura e utilizam os mesmos métodos usados na educação do século XIX: as atividades curriculares ainda são baseadas no lápis e no papel, e o professor ainda ocupa a posição de protagonista principal, detentor e transmissor da informação.

Seja no ensino público ou privado, do ensino infantil ao superior, salvo excessões, as aulas em geral possuem uma mesma característica: o professor na lousa explicando o conteúdo a seus alunos. Propostas como o Ensino Híbrido já estão presentes na formação de professores a vários anos, porém, mesmo com todos os recursos computacionais encontrado nos celulares, por exemplo, a utilização destes recursos de maneira eficiente ainda não é realidade. De fato, estas novas ferramentas sempre são utilizadas de forma mais eficaz primeiro nas indústrias, para então serem objeto de pesquisa e aplicação no ensino. Segundo Almeida [5]:

> De um modo geral, é possível constatar que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e as mídias digitais têm causado grande impacto em praticamente todos os segmentos da nossa sociedade, da nossa vida e, sobretudo, no desenvolvimento do conhecimento científico e nos avanços da ciência. No entanto, na Educação, a presença destas tecnologias é muito pouco significativa e seu potencial é pouco explorado. Ainda não observamos nos processos de ensino e de aprendizagem, em distintos níveis, do Básico ao Superior, os mesmos impactos e transformações visivelmente identificados em outros segmentos, tais como no sistema bancário, nos processos administrativos, nos serviços e nas empresas em geral.

Quando se encontram estas excessões, os colégios que trabalham com ensino baseado em projetos, utilizam-se das TDCIs e das Metodologias Ativas, pode-se perceber alguns bons resultados.

Não é um caminho fácil. A própria estrutura da escola deve se adaptar para receber esta nova proposta de ensino. O Ensino Híbrido se adequa à nova realidade da indústria, no sentido de quebrar paradigmas. A nova sala de aula deve ser adaptada à demanda do mercado, e a demanda hoje pede profissionais que pensam 'fora da caixa'. Tudo o que é previsível é rapidamente descartado e a palavra-chave do momento é a inovação. Para Moran [10], em 2015:

> A escola padronizada, que ensina e avalia a todos de forma igual e exige resultados previsíveis, ignora que a sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora.

Percebe-se que as mudanças não devem ser apenas na estrutura física da escola, mas sim no próprio currículo e Projeto Político Pedagógico, refletindo assim no planejamento individual dos professores. Como afirma Moran [10], 2015:

> As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa.

O princípio é, através da tecnologia digital, integrar o ambiente escolar à realidade externa e integrar a realidade externa ao ambiente de sala de aula. Como consequência desta nova abordagem, o ensino não modulado deixa de ser uma alternativa e passa a ser regra dentro da escola. É injusto com os alunos, por exemplo, falar sobre a importância da matemática no desenvolvimento da tecnologia sem que o professor de História esteja presente. Em outras palavras, não se pode trazer o mundo à escola, ou levar a escola ao mundo, sem que se aplique o conceito de interdisciplinaridade. Para Almiro [1], 2004:

> Para um professor isolado numa escola não é fácil decidir que tarefas deve selecionar e propor aos seus alunos, saber como as deve orientar e que questões deve colocar, ultrapassar os medos quando experimenta coisas novas e vencer as dificuldades que encontra na gestão das suas aulas. Mas se houver um trabalho colaborativo entre os colegas, na discussão e troca de ideias e de experiências letivas é possível enriquecer as práticas e promover a inovação e a melhoria da qualidade educativa.

Aliando a interdisciplinaridade, as Metodologias Ativas e o uso das tecnologias, pode-se, portanto, criar um ambiente altamente produtivo para o ensino de matemática, especialmente no que diz respeito ao Pensamento Matemático, propondo o desenvolvimento do raciocínio lógico e da interpretação de problemas em primeiro plano, enquanto as fórmulas e algoritmos se tornam consequência do processo de ensino.

Uma das possibilidades de uso de softwares no ensino de matemática é a utilização de softwares que se aproveitam da chamada Geometria Dinâmica e Interativa, GDI, que oferece ao aluno a possibilidade de manipular um objeto matemático em sua forma geométrica, possibilitando ao professor realizar abordagens de conteúdo que seriam impossíveis numa sala de aula convencional, com uso de lousa e pincel. Esta abordagem é apresentada por contraste ao método tradicional de ensino da geometria, TRCE, que se utiliza de régua, compasso e esquadro. Como afirma Nascimento [11], 2012, sobre a Geometria Dinâmica:

> Em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, podemos dizer que a GDI é uma geometria do tipo: uma construção por N testes, enquanto a tradicional TRCE é do tipo uma construção por um teste, desta forma torna um laboratório dentro do computador, onde possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com a TRCE.

Um exemplo de construção dinâmica utilizando o software Geogebra, é a construção de um quadrilátero. Basta que sejam criados quatro pontos distintos no plano cartesiano e, através da ferramenta Polígonos, construir o quadrilátero ABCD. Todas as informações básicas do quadrilátero já estarão disponíveis na Janela Algébrica, como as coordenadas dos vértices e os nomes dos elementos. Além disso, outras informações podem ser acrescentadas utilizando outras ferramentas disponíveis, como a medida dos lados, dos ângulos e da área deste quadrilátero.

Além das informações disponibilizadas pelo software, ainda é possível alterar a forma do quadrilátero apenas movendo de posição um de seus vértices ou lados, enquanto as informações correspondentes serão atualizadas instantaneamente na janela ao lado. Esta dinamicidade permite ao professor e aos alunos visualizarem todos os tipos de quadriláteros numa mesma imagem, enquanto no ensino tradicional cada imagem feita com régua e compasso é estática e imutável. É o que confirma Brand 2006 [6]:

> O nome Geometria Dinâmica e Interativa (GDI) hoje é largamente utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos

> sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Este nome pode ser melhor entendido como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, que é ”estática”, pois após o aluno realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho.

Já há algumas décadas os matemáticos vêm se beneficiando do uso de computadores para potencializar seus experimentos. Porém, do ponto de vista do ensino de matemática básica, parece que é a Geometria uma das áreas que mais se beneficiam dos novos recursos tecnológicos, e isso se dá por conta do desenvolvimento de softwares para GDI.

No que diz respeito aos muitos softwares educacionais voltados ao ensino de matemática, um dos mais conhecidos por professores do ensino básico no Brasil é mesmo o Geogebra. Este alia a geometria e a álgebra de maneira nunca antes vista, e tudo isto com ferramentas de fácil manuseio até mesmo para os alunos. Desta maneira, este software se apresenta como um bom complemento para uma Aula Invertida, tendo em vista que os alunos podem, eles mesmos, construírem suas figuras geométricas e apresentá-las em sala de aula.

1.2.1 O Geogebra

Determinados conteúdos da Matemática do Ensino Médio requerem do aluno um nível de abstração ainda maior do que o de costume. Nestes casos faz-se necessário que o professor procure alternativas que auxiliem o estudante a visualizar tais objetos por uma perspectiva diferente. Seja usando cartazes, revistas, jogos ou mesmo recursos tecnológicos em sala de aula.

O estudo da Geometria na escola básica têm ficado limitado por conta das possibilidades de recursos utilizados pelos professores. Apesar disso, é um conteúdo imprescindível para o desenvolvimento do Raciocínio Lógico-Matemático, não podendo ser negligenciado por quaisquer motivos, o que torna necessário que o professor busque alternativas para sanar esta lacuna.

> Aprender geometria e poder desenhar a natureza e as formas criadas pelo homem torna-se ferramenta imprescindível neste contexto, dando àquele que a detém, facilidades na comunicação e na interpretação de vários códigos. [9]

Um recurso que vem ganhando força nos últimos anos são os smartphones e notebooks, que já fazem parte do cotidiano escolar. Através de um aparelho de celular, os alunos têm acesso à revistas virtuais, cartazes, jogos, softwares educacionais, sites de pesquisa de conteúdos, tudo isso na palma da mão. Somente este leque de possibilidades já seria algo incrivelmente poderoso a ser usada por um professor mediador, mas ainda contamos com um diferencial: A dinamicidade.

> As TDICs têm uma característica importante: a capacidade de animar objetos na tela. Com esse recurso, torna-se uma ferramenta essencial para complementar ou mesmo substituir muitas atividades desenvolvidas para o lápis e o papel. Na área de

> Ciências, por exemplo, muitos fenômenos podem ser simulados, permitindo o desenvolvimento de atividades ou a criação de um "Mundo do faz de conta", onde certas atividades não são passíveis de serem desenvolvidas no mundo real. [15]

As construções geométricas feitas em salas de aula tradicionais caracterizam uma metodologia útil para o processo de ensino. Porém, a incapacidade de se ajustar um desenho feito no caderno ou uma figura no livro às necessidades e curiosidades dos alunos, é um problema a ser solucionado. A possibilidade de simular situações utilizando softwares pode ser o melhor caminho para aliar tecnologia com o ensino da geometria, ao mesmo tempo em que possibilita o preenchimento desta lacuna, oferecendo dinamicidade na construção e análise de figuras geométricas.

Este contraste entre o estudo da geometria em salas de aula tradicionais e da geometria aliada à softwares educacionais já é objeto de estudo para muitos pesquisadores na área de educação matemática.

> A definição de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI) é a implementação computacional da "geometria tradicional", aquela usando as tecnologias régua, compasso e esquadro (TRCE). O termo "Dinâmico" do nome pode ser mais bem entendido como oposição à estrutura "estática" das construções da geometria tradicional. E o termo "Interativo" é que após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais. [12]

O maior benefício é o poder de adaptabilidade das imagens desenvolvidas pelo computador. Com uma mesma figura é possível estudar várias possibilidades, ajustando-se a imagem às necessidades do aluno e às observações que o professor julgar necessárias, mesmo que estas observações e dúvidas não tenham sido previstas durante o planejamento de aula.

> Em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, podemos dizer que a GDI é uma geometria do tipo: uma construção por N testes, enquanto a tradicional TRCE é do tipo uma construção por um teste, desta forma torna um laboratório dentro do computador, onde possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com a TRCE. [12]

Quando estudamos geometria, por exemplo, a lousa e o pincel, ou mesmo a régua e o compasso, se tornam claramente recursos obsoletos, principalmente quando precisamos exemplificar figuras que se alteram de acordo com determinada propriedade matemática que está sendo estudada, ou mesmo quando precisamos desenhar objetos em três dimensões. É neste momento que percebemos as inúmeras alternativas que as TDICs nos possibilitam.

Softwares desenvolvidos exclusivamente para o ensino de matemática, trazem para a sala de aula propostas como a Geometria Dinâmica, que nos possibilita estudar figuras geométricas em movimento, enquanto cada elemento da figura pode ficar em destaque quando necessário. Um destes softwares de Geometria Dinâmica foi escolhido como ferramenta em nossa pesquisa, o Software Geogebra.

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. [13]

Sendo um aplicativo gratuito e já sendo disponibilizado para Smartphones e, inclusive, online, o Geogebra pode ser utilizado tanto pelos professores como pelos alunos em quaisquer escolas, sendo necessário uma infraestrutura extremamente básica. Cada aluno pode acompanhar a construção de figuras através de seus celulares ou notebooks disponibilizados pela escola. Além disso, o Geogebra possibilita a interação entre as representações Algébricas e Geométricas de um objeto matemático, o que se encaixou perfeitamente com o objetivo desta pesquisa, possibilitando a representação geométrica da potência e raiz de um Número Complexo, conteúdo que é visto pelos alunos como puramente algébrico.

Capítulo 2

FÓRMULAS DE MOIVRE

2.1 Números Complexos

O conteúdo de Números Complexos visto 3° ano Ensino Médio é um dos assuntos que apresentam um maior grau de complexidade na matemática básica. Por envolver os campos algébricos, geométricos e trigonométricos da Matemática, esta área da matemática exige do aluno muito do conhecimento matemático visto nos anos anteriores do Ensino Médio e Fundamental. Exatamente por tamanha complexidade, trata-se de um conteúdo a ser abordado com utilização das mais variáveis ferramentas que venham a facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Deve-se, ainda, ser alvo das mais variáveis pesquisas acadêmicas na área de ensino, a fim de se desenvolver ainda mais ferramentas que auxiliem o professor nesta demanda e permitir ir além dos tradicionais quadro e pincel. A respeito desta abordagem clássica, de acordo com Horizonte: [7]

> Permanece como maneira mais comum de introduzir os números complexos a abordagem puramente algébrica e formal: "Um número complexo é um objeto da forma a + bi, onde a e b são reais, $i^2 = -1$, e permanecem válidas as leis operatórias básicas da álgebra". Esta definição (correta) permite começar logo a operar com números complexos sem dificuldade, mas através desta abordagem perde-se a oportunidade de apresentar o conjunto dos complexos imediatamente como entes geométricos, e a experiência de aula nos mostra que muitas vezes esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a "forma trigonométrica". O iniciante permanece com uma visão excessivamente formal e algebrizante, e não lhe ocorre aplicar conhecimentos de números complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss.

São vários os teóricos que afirmam que a transição entre os diferentes meios de representação de um mesmo objeto matemático facilita sua aprendizagem. Deixando de lado a abordagem geométrica, o professor acaba perdendo a oportunidade de proporcionar um aprendizado significativo, especialmente se estas representações geométricas forem abordadas com utilização de softwares de geometria dinâmica, algo que não foge da realidade mesmo entre a maioria das escolas públicas. Damm afirma que: [4]

> Para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a noésis (conceitualização) ocorra através de significativas semióses (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representações diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Num primeiro momento, o estudo dos complexos envolvendo sua representação geométrica é bastante simples e intuitiva, considerando que a este momento o aluno já deve ter estudado conteúdos que utilizem a representação num Plano Cartesiano. Isso ocorre porque o Plano de Argand-Gauss, ou Plano Complexo, nada mais é do que uma adaptação do Plano Cartesiano, onde o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas recebem outros nomes, o eixo dos reais e o dos imaginários, respectivamente. Sendo assim, cada número complexo possui uma única representação geométrica no plano, chamado de afixo.

A transição entre as diferentes representações, chamada por Duval de 'Conversão', fica mais complicada quando começamos a introduzir a noção de número complexo na sua forma trigonométrica, que são utilizadas para facilitar o cálculo de multiplicações, potências e radiciações entre estes números.

2.2 Potenciação e Radiciação de Números Complexos

Em particular, quando se trata de operacionalizar potenciação e radiciação de números complexos, faz-se necessário a utilização das Fórmulas de Moivre, mas estas utilizam noções de Trigonometria, Álgebra e,com menor frequência, Geometria Plana, o que dificulta ainda mais o aprendizado deste conteúdo.

Como já foi visto, cada número complexo possui um único afixo no plano. Desta maneira, é possível calcular a distância deste ponto à origem do plano através da aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo formado pelo segmento que representa esta distância. À medida deste segmento, dá-se o nome de Módulo do Número Complexo e representa-se comumente pela letra grega ρ. Além disso, cada ponto determina um ângulo em relação à parte positiva do eixo real e,a este ângulo, dá-se o nome de argumento do número complexo, geralmente representado pela letra grega θ.

Ainda no triângulo da figura abaixo, conclui-se que o número complexo $z = a + bi$, com $a, b\epsilon|R$, agora pode ser apresentado através de constantes trigonométricas, de acordo com as equações $Cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $Sen(\theta) = \frac{b}{\rho}$. Tem-se, portanto, uma nova forma de representar o número complexo, chamada de Forma Trigonométrica ou polar, do tipo $z = \rho(Cos(\theta) + iSen(\theta)$.

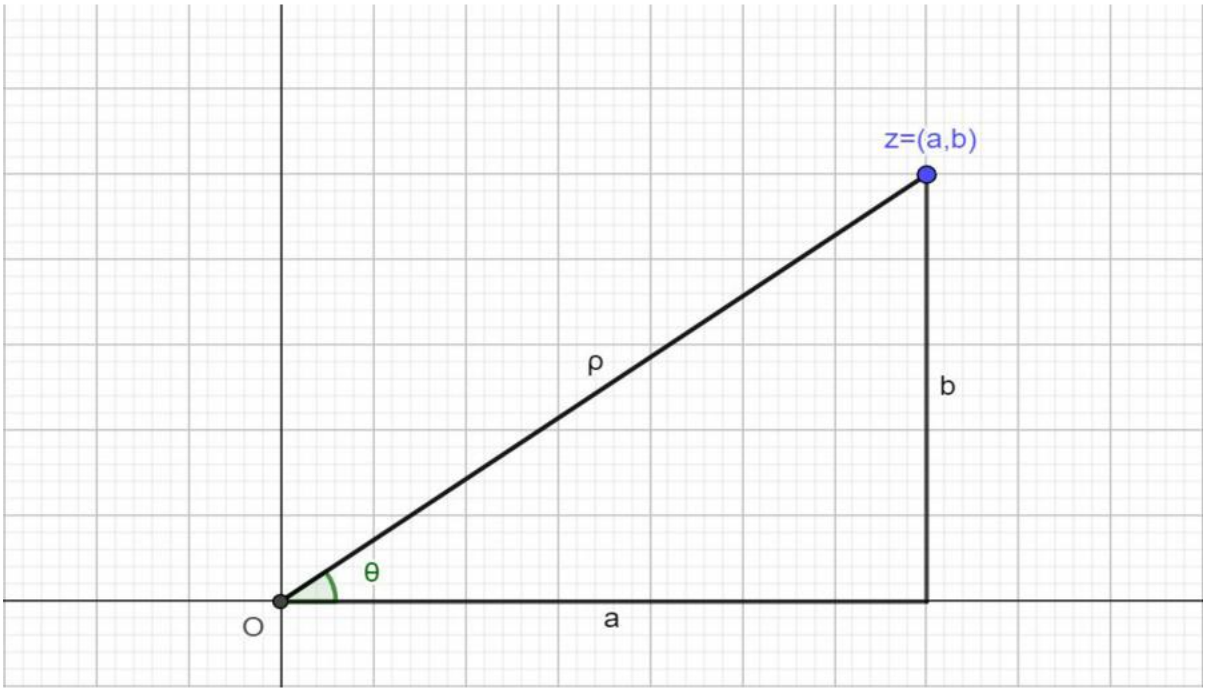

Figura 2.1: Representação Geométrica

Com um pouco de álgebra e aplicação de propriedades trigonométricas, conclui-se que, dados dois números complexos $z = \rho_1(Cos(\theta)+iSen(\theta)$ e $w = \rho_2(Cos(\beta)+iSen(\beta)$, o produto pode ser representado pela fórmula $z * w = \rho_1 * \rho_2(cos(\theta + \beta) + isen(\theta + \beta)$. A partir desta fórmula, obtemos a **Fórmula de Moivre para Potenciação de Números Complexos**, a citar:

$$z^n = \rho^n(cos(n * \theta) + isen(n * \theta))$$

Observe que esta fórmula simplifica bastante a obtenção do resultado de uma potência, tendo em vista que a potência $z^n = (a + bi)^n$, especialmente para expoentes grandes, resultaria numa esgotante distribuição de um binômio de newton, sendo ainda mais complicado pelas potências de i.

Diferente dos números reais, em que cada número possui uma única raíz n-ésima, um mesmo número complexo possui n raízes n-ésimas. Porém, a fórmula para a obtenção destas raízes é, na verdade, uma adaptação da primeira Fórmula de Moivre, sendo necessário que o aluno internalise o raciocínio apresentado a seguir.

O número complexo $u = \alpha(cos(\delta)+isen(\delta)$ é uma das raízes n-ésimas do número complexo $z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)$ somente se $u^n = z$, donde segue que: $u^n = \alpha^n(cos(n\delta) + isen(n\delta) = z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)$

Fazendo as equivalências, concluímos que $\alpha = \sqrt[n]{\rho}$ e $\delta = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, onde $k = 1, 2, 3, ..., n$. Substituindo em u, obtemos a **Segunda Fórmula de Moivre para Radiciação de Números Complexos**, donde podemos obter os números complexos $u_1, u_2, ..., u_n$, que são as raízes n-ésimas de z.

$$\sqrt[n]{z} = u_k = \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n}))$$

Ao utilizar a Segunda Fórmula de Moivre, mesmo que se utilize valores para k maiores que n, serão obtidos nada mais que repetições das raízes já encontradas. Por exemplo, ao calcular para $k = n + 1$ obtém-se a raíz $u_{n+1} = u_1$, bem como $u_{n+2} = u_2$ e assim sucessivamente. Isto confirma o que foi dito acima, que um número complexo z possui exatamente n raízes n-ésimas.

Capítulo 3

INTERAÇÃO ALUNOS E PROFESSOR NO PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

3.1 A Sala Invertida no ensino das Fórmulas de Moivre

Esta pesquisa foi realizada na turma do 3° Ano do Ensino Médio do Centro Educacional Século, colégio da rede particular de Manaus. Este colégio, onde leciona o autor desta pesquisa, possui metodologia ímpar voltada ao ensino por projetos, em particular àquelas conhecidas como Metodologias Ativas de Aprendizagem, além de possuir infraestrutura interessante para o desenvolvimento de atividades do tipo. Alguns dos espaços que podem ser destacados na escola e que servem de ferramenta para elaboração de aulas invertidas são a Rádio Século e o Estúdio de Gravação de Áudio/Vídeo, biblioteca com recursos e ambientes tecnológicos, espaço de convivência bem estruturado, dentre outros. Os 8 alunos da turma foram divididos em três grupos, de acordo com as necessidades dos tópicos do capítulo sobre Números Complexos, sendo:

Grupo I - Forma Algébrica dos Números Complexos e Operações;

Grupo II - Forma Trigonométrica dos Números Complexos e Operações;

Grupo III - Fórmulas de Moivre para Potenciação e Radiciação de Números Complexos;

A proposta desta pesquisa é o estudo das Fórmulas de Moivre, Grupo III, porém faz-se necessária a transcrição e comentários a respeito da elaboração e apresentação dos três grupos, tendo em vista a importância desta sequência para o entendimento do conteúdo por completo.

Seguindo a Metodologia de Sala de Aula Invertida, o conteúdo foi apresentado aos alunos através de um slide postado na área correspondente à turma do 3° ano no Google Classroom, ou Google Sala de Aula, ferramenta online utilizada pelo colégio onde cada turma possui seu espaço virtual destinado à postagem de informações, atividades, avisos e materiais complementares para as aulas. Este slide contém as informações de conteúdo a ser estudado, sugestões de vídeo aulas, sugestões de metodologias a serem abordadas e métodos de avaliação a serem utilizados pelo professor.

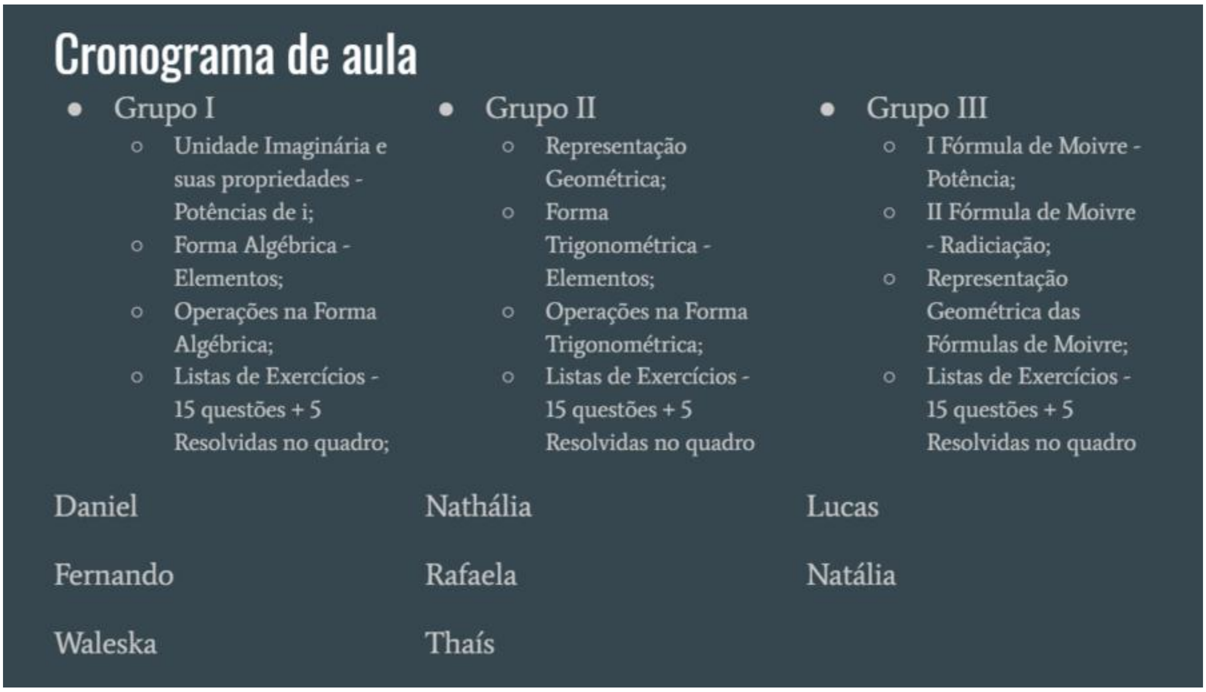

Figura 3.1: Cronograma de Aula

Neste slide estão divididos os conteúdos a serem abordados pelos alunos de acordo com cada grupo:

O Grupo I está encarregado da introdução do conteúdo, contribuição histórica, notações, a Forma Algébrica do Número Complexo e suas principais operações e propriedades.

O Grupo II deverá abordar a Representação Geométrica dos Números Complexos, apresentação do Plano de Argand-Gauss, ou Plano Complexo, suas principais características e propriedades, bem como a elaboração de uma fórmula que relacione os Números Complexos e a Trigonometria aplicada aos triângulos encontrados neste plano, facilitando assim o cálculo de produto e quociente entre Números Complexos.

O Grupo II tratará sobre a Potenciação e Radiciação dos Números Complexos, bem como suas representações no Plano Complexo, demonstrando assim as duas Fórmulas de Moivre.

Os três grupos deverão, ainda, resolver em sala o mínimo de 5 exercícios como exemplo dos conteúdos ministrados, além de elaborarem uma mini apostila contendo 15 questões específicas sobre seus temas, com preferência para questões de vestibulares.

Ainda nos Slides, são sugeridos um total de 29 vídeo-aulas referentes aos conteúdos propostos. Além dos vídeos, os alunos também possuem o Livro Didático utilizado nas aulas convencionais, que abordam o conteúdo por completo e propõem dezenas de exercícios de vestibulares. Os alunos deverão, ainda, pesquisar mais vídeos e conteúdos disponíveis na internet, de acordo com as necessidades de cada grupo.

Figura 3.2: Algumas das videoaulas sugeridas

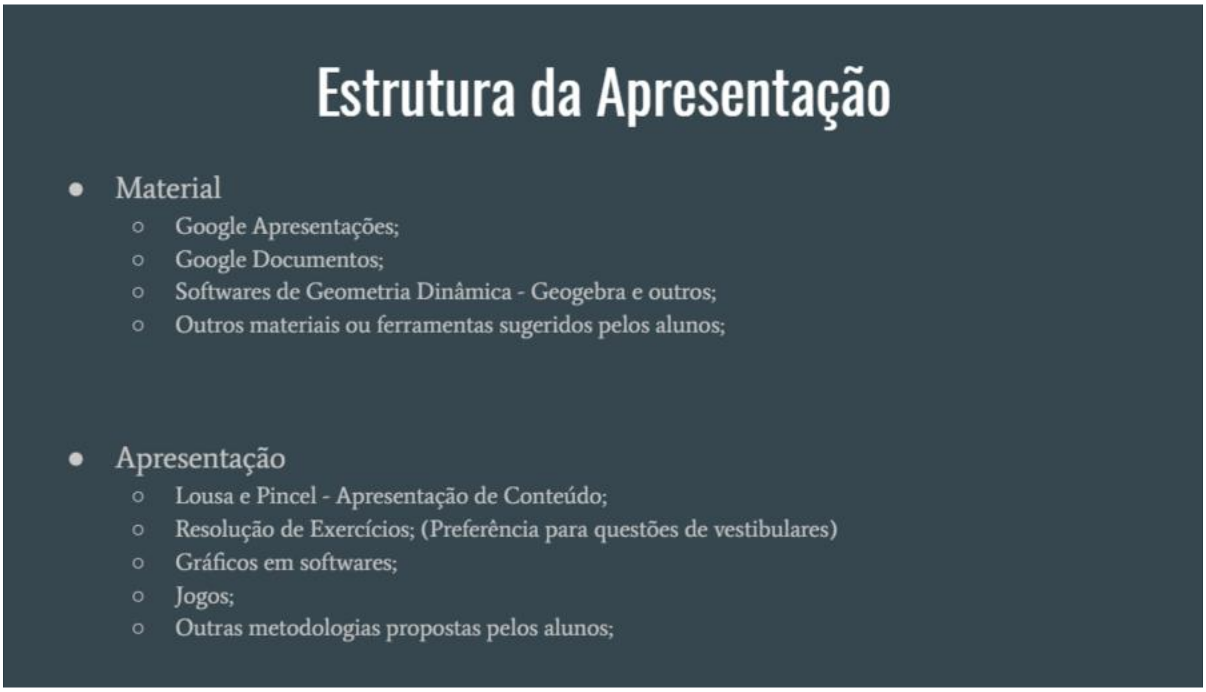

Figura 3.3: Estrutura da Apresentação

Apesar de sugeridos, os aplicativos e softwares propostos como 'Estrutura da Apresentação' não são necessários para a apresentação da Aula Invertida, bem como sua utilização não se caracteriza como critério de avaliação, ficando os alunos livres para escolherem quais ferramentas e metodologias deverão utilizar em suas aulas. Dentre as sugestões, apenas os exercícios são obrigatórios como parte da composição da nota.

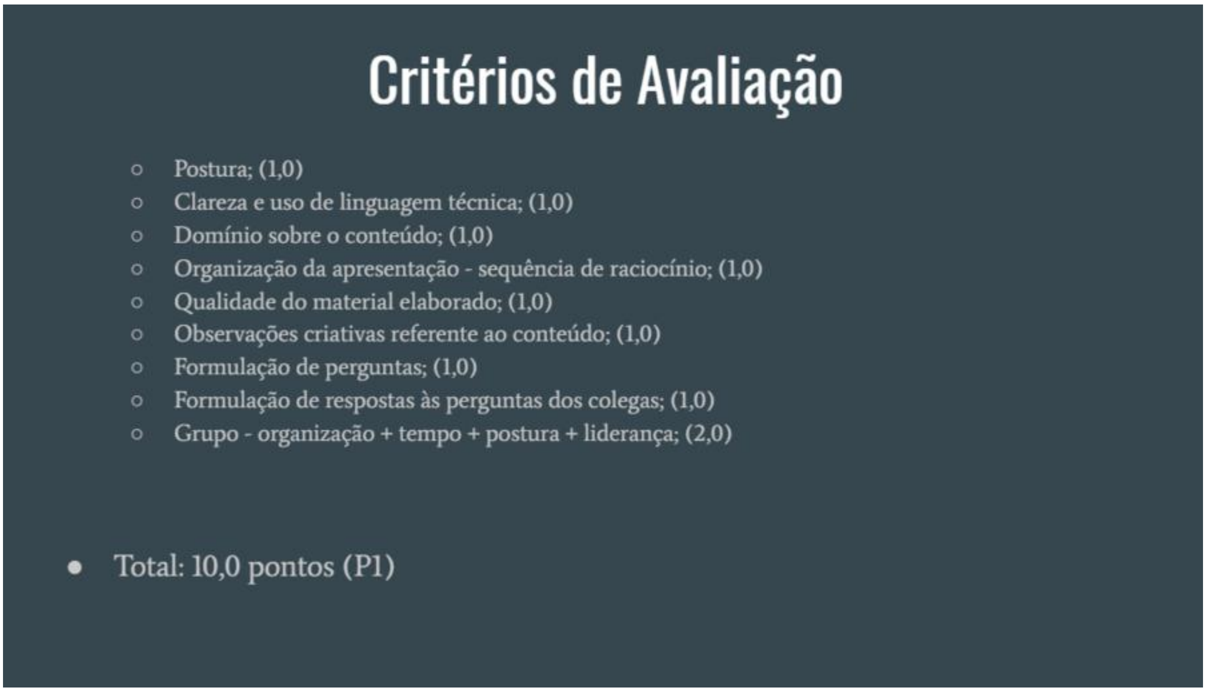

Figura 3.4: Critérios de Avaliação

Estes são os critérios de avaliação a serem considerados na apresentação de Aula Invertida, tendo em vista que todas as atividades do tipo realizadas no colégio caracterizam notas para compor a média bimestral. Tais itens podem ser alterados, e frequentemente o são, de acordo com a proposta de apresentação dos alunos.

É dado aos alunos o prazo médio de uma semana, entre o momento em que estes slides são disponibilizados e a apresentação da Aula Invertida pelos alunos. Neste intervalo, os alunos deverão realizar pesquisas, elaborar material e estudar para suas apresentações. De acordo com a metodologia, estas atividades deveriam ser feitas em casa, porém trata-se de uma escola de tempo integral, de modo que parte do trabalho é feito na própria escola.

Durante este tempo, ainda, o professor pode auxiliar os alunos no manuseio dos softwares utilizados, no caso o Geogebra, a fim de esclarecer eventuais dúvidas dos alunos, exclusivamente a respeito da construção e utilização das ferramentas disponibilizadas pelo software.

3.2 Apresentação dos Trabalhos e as Construções Gráficas

Foi comentado que a turma havia sido dividida em três grupos. O objetivo era seguir uma sequência lógica do conteúdo, com todas as fórmulas mais importantes demonstradas durante as apresentações, sejam algebricamente, através de lousa e pincel, seja geometricamente, através do Geogebra, ou ainda uma apresentação envolvendo estas duas representações, o que seria o ideal.

Como ficou a cargo de cada grupo decidir sobre quais as ferramentas a serem utilizadas em suas apresentações, apenas o Grupo III utilizou-se do Geogebra como complemento de seus trabalhos. Apesar disto, segue uma descrição resumida a respeito das apresentações desses grupos, tendo em vista a necessidade de entender o conteúdo destes para se estudar as Fórmulas de Moivre.

Grupo I - Unidade Imaginária e suas propriedades

Aqui foi feita a introdução do conteúdo, começando com a discussão a respeito do contexto histórico que envolveu a 'descoberta' da unidade imaginária como solução para equações polinomiais de terceiro grau, a partir do século XVI.

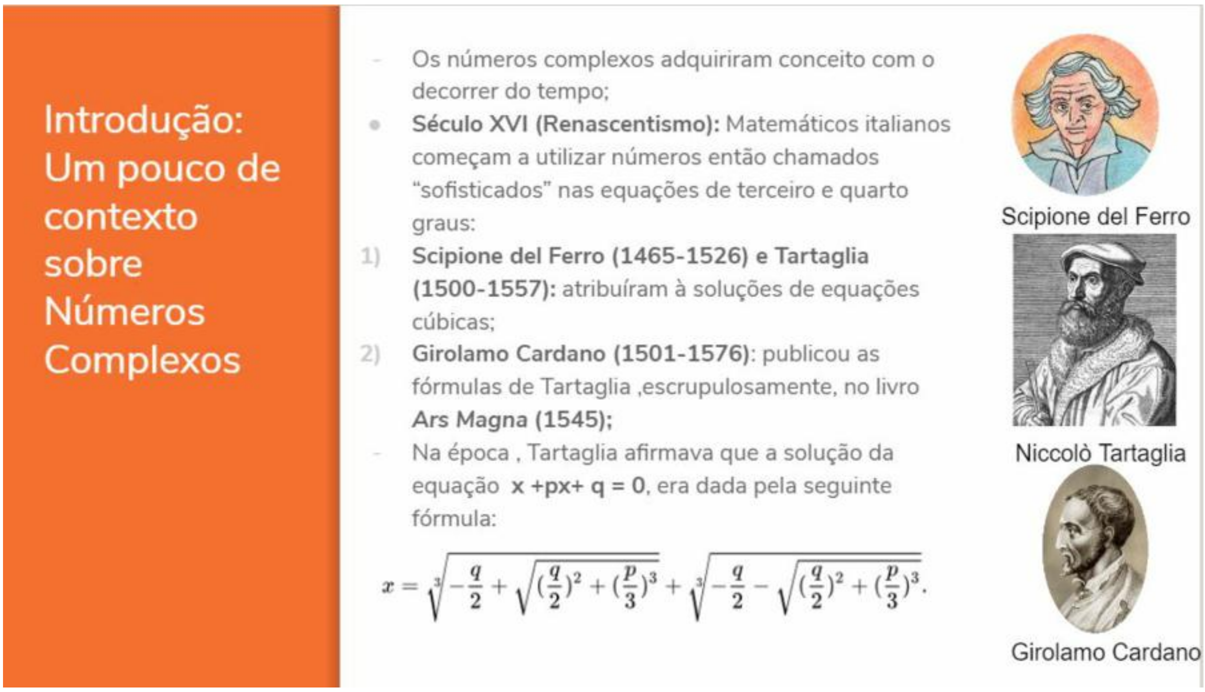

Figura 3.5: Um pouco de história

Foram citadas figuras importantes na área de exatas, como Girolamo Cardano e Niccolò Fontana Tartaglia, que são protagonistas de um desacordo a respeito de quem seria o autor de uma fórmula para resolução de equações polinomiais de terceiro grau e sobre a primeira aparição do que viria a ser um número complexo. A fórmula é historicamente atribuída a Tartaglia.

Desta abordagem histórica vale ressaltar a importância do matemático francês Abraham de Moivre, que fez importantes contribuições para diversas áreas da matemática durante o século XVIII. Dentre estas contribuições, destaca-se o desenvolvimento de uma relação entre os Números Complexos e a Trigonometria, onde Moivre desenvolveu duas fórmulas importantes para o cálculo de potenciação e radiciação de números deste conjunto, cálculos estes que são, em certos níveis, impossíveis de serem realizados de outra maneira. É de suma importância que os alunos tenham iniciado o trabalho abordando esse tema, dando significado ao conteúdo que será abordado a seguir.

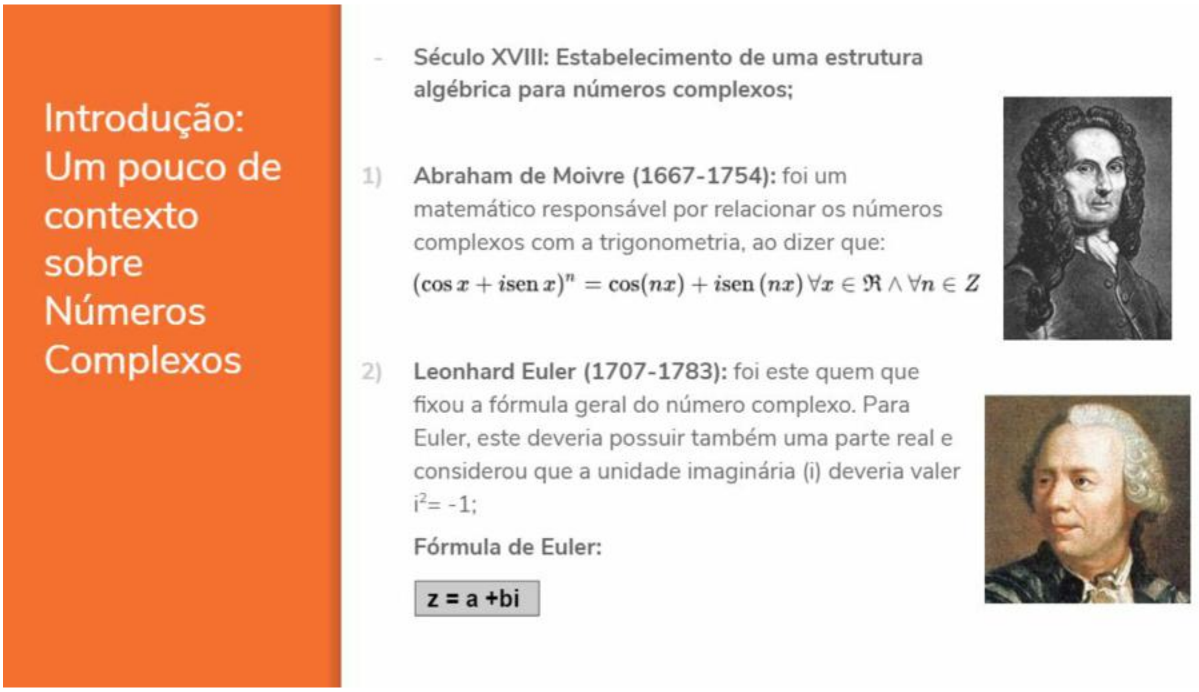

Figura 3.6: Moivre e Euler

Além da abordagem histórica do conteúdo, os alunos desenvolveram um método para potenciação da unidade imaginária. Este método é conhecido como Potências de i, e explica como o número i^n se comporta de acordo com o número natural n utilizado. De maneira geral, trata-se de uma sequência cíclica, conforme mostra a figura:

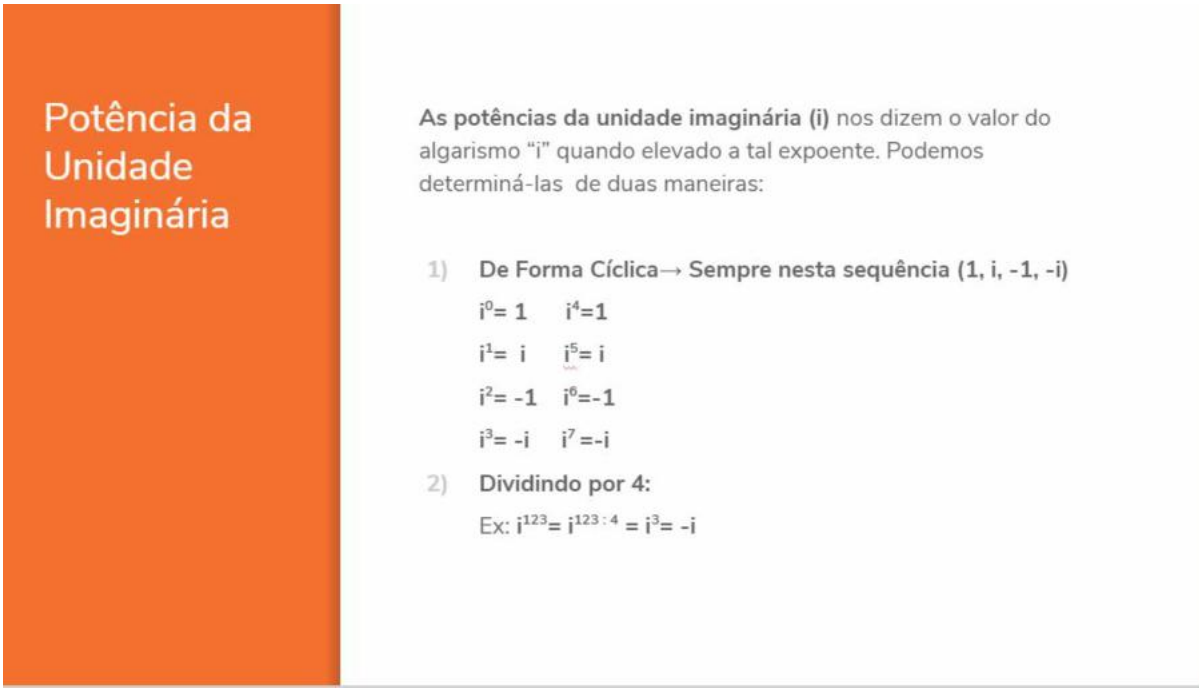

Figura 3.7: As potências de i

Ainda neste primeiro grupo, fora definida a Forma Algébrica de um Número Complexo: o Conjunto dos Números Complexos é definido como todo número escrito na forma $z = a + bi$, com a e b números reais. Os alunos apresentaram esta definição já com a associação ao Plano Complexo, que nada mais é do que um Plano Cartesiano 'adaptado' aos Números Complexos e também conhecido como Plano de Argand-Gauss.

De acordo com a fala dos alunos, o número $z = a + bi$ possui uma Parte Real, $\mathrm{R}e(z) = a$, e uma Parte Imaginária, $Im(z) = b$, sendo representados pelos eixos horizontal e vertical do Plano, respectivamente. Sendo assim, cada número escrito na forma algébrica representa um ponto no plano, o qual foi nomeado Afixo de z.

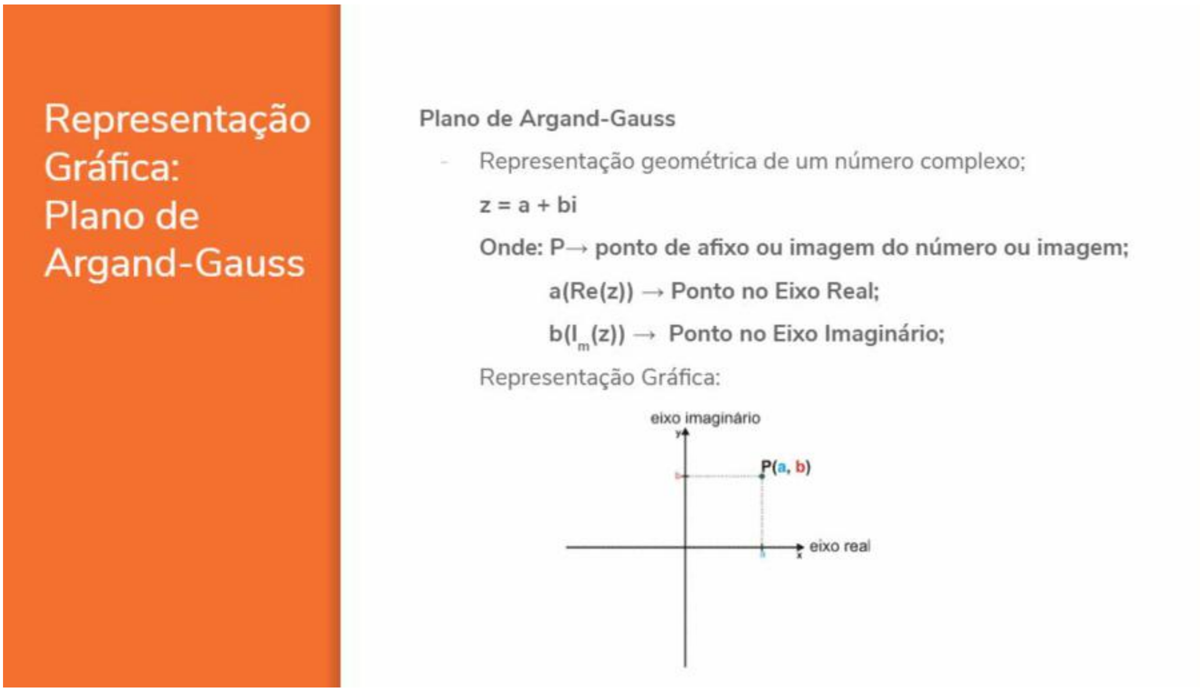

Figura 3.8: Plano de Argand-Gauss

Finalmente, foram apresentadas as operações de Soma, Subtração, Multiplicação e Divisão de Números Complexos. Nesta etapa destaca-se a operação de Multiplicação, que goza da propriedade distributiva, observando-se as particularidades da unidade imaginária. Como trata-se de uma distribuição, equivalente à multiplicação de polinômios, torna-se inviável a multiplicação consecutiva de vários elementos, e mesmo a potência com expoente relativamente grande, tendo em vista a enorme quantidade de processos necessários.

Ainda assim, é importante que a operação de multiplicação esteja bem definida para o complexo em sua forma algébrica, tendo em vista a quantidade de problemas e que podem ser resolvidos com esta operação, desde que o tratamento algébrico não se torne inviável. Em outras palavras, muitas questões de vestibular podem ser resolvidas apenas fazendo o produto entre dois números na forma $z = a + bi$, utilizando a propriedade distributiva, enquanto em casos de multiplicações maiores, há outras maneiras mais viáveis. Os alunos definiram esta operação e trouxeram exemplos resolvidos:

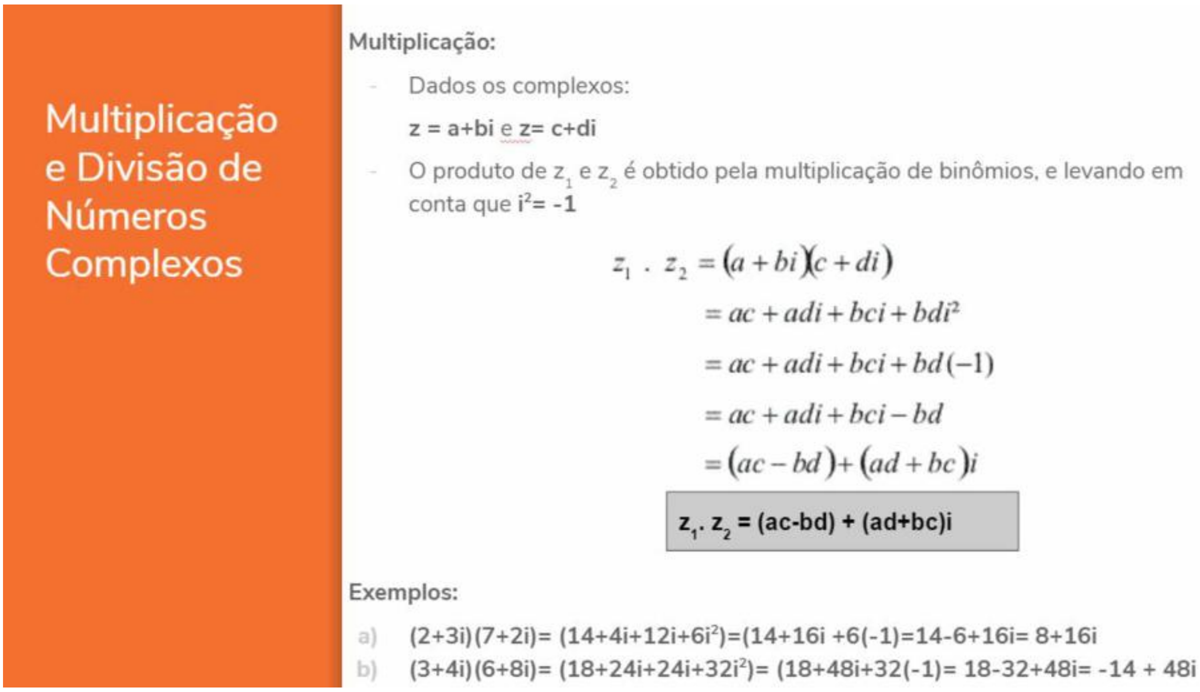

Figura 3.9: Multiplicação entre dois Números Complexos

Enquanto para as operações de Soma e Subtração, os alunos as definiram juntas e trouxeram exemplos resolvidos:

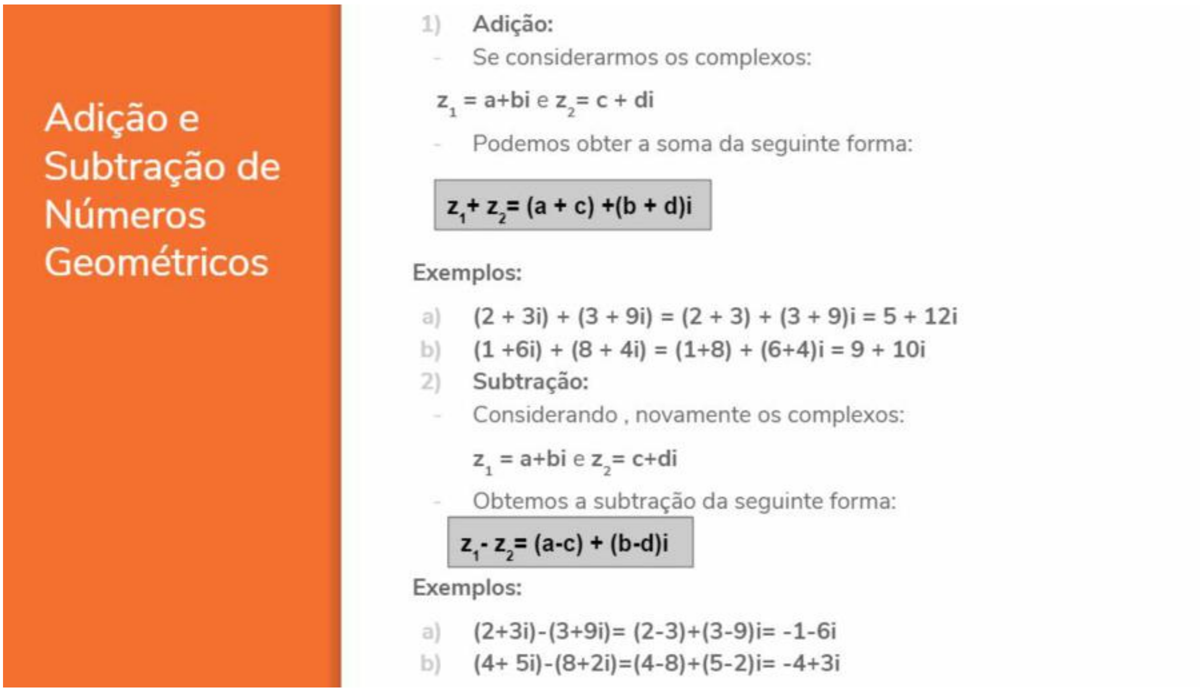

Figura 3.10: Adição e Subtração de Números Complexos

No que diz respeito à operação de Divisão, foi preciso inicialmente definir o Conjugado de um Número Complexo conforme a imagem:

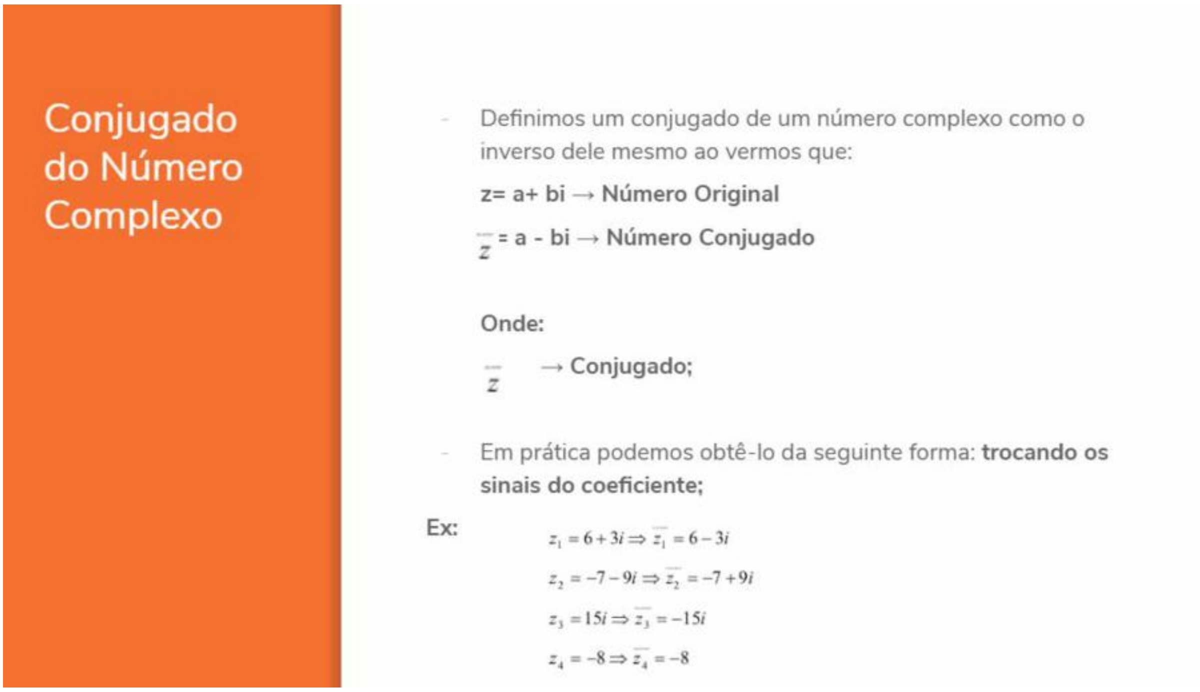

Figura 3.11: Definição e Exemplos de Conjugado

Tendo sido observado que o produto entre um complexo e seu conjugado resulta em um número real, definiu-se a operação de divisão conforme a figura:

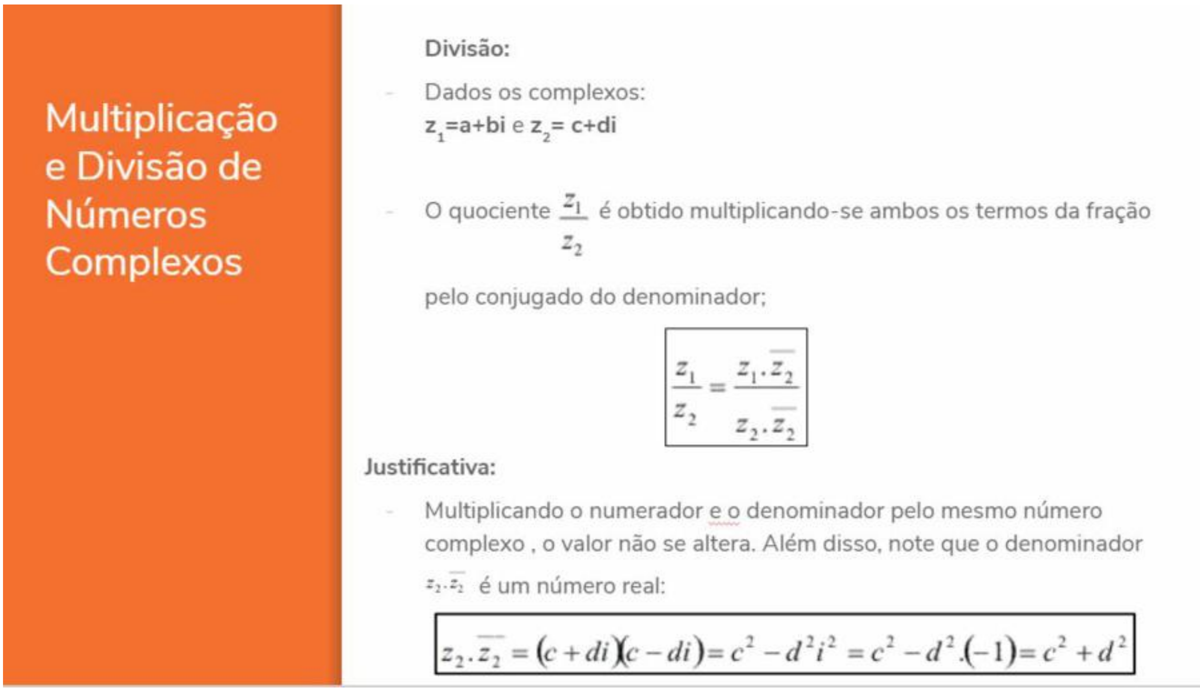

Figura 3.12: Definição de Divisão de Números Complexos

O objetivo da divisão entre dois números complexos na forma $z = a + bi$ é obter, como resultado um número escrito nesta mesma forma. Por esse motivo multiplica-se pelo conjugado do denominador, de forma que a unidade imaginária apareça apenas no numerador da fração. Observe os exemplos apresentados pelos alunos:

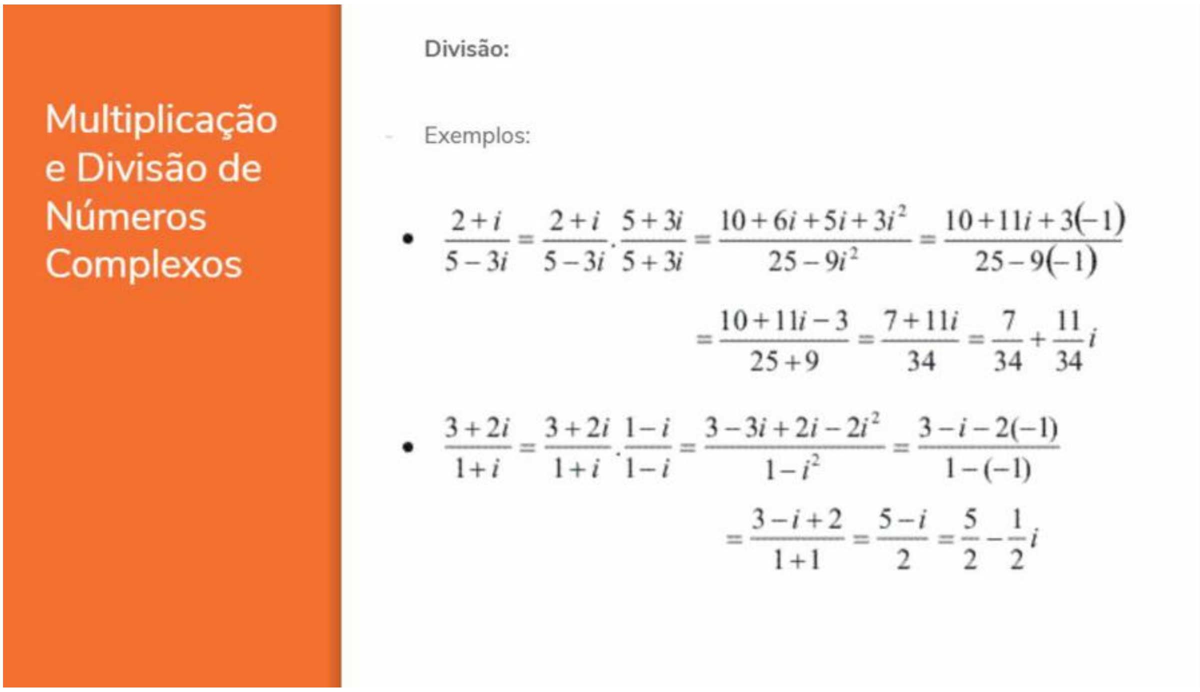

Figura 3.13: Exemplos de Divisão

O primeiro grupo finalizou sua apresentação com a resolução de alguns exercícios de vestibulares envolvendo o conteúdo abordado.

Grupo II - Forma Trigonométrica dos Números Complexos

A primeira demonstração desse grupo foi a do Módulo de um Número Complexo, definido como a distância do afixo à origem do plano. A fórmula obtida será indispensável para os demais tópicos a serem abordados pela equipe:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Uma vez definido o Módulo, é hora de aplicar algumas relações trigonométricas ao triângulo da figura abaixo. Através desse triângulo, foram deduzidas as fórmulas $a = r \cdot cos(\theta)$ e $b = r \cdot sen(\theta)$, sendo r o módulo de z e θ o argumento de z. Desta maneira, pode-se escrever o Complexo $z = a + bi$ em sua Forma Trigonométrica:

$$z = r \cdot [cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)]$$

Conforme orientado pelo professor, todas as demonstrações vieram acompanhadas de exemplos numéricos, onde é possível vizualisar as operações sendo utilizadas na resolução de problemas.

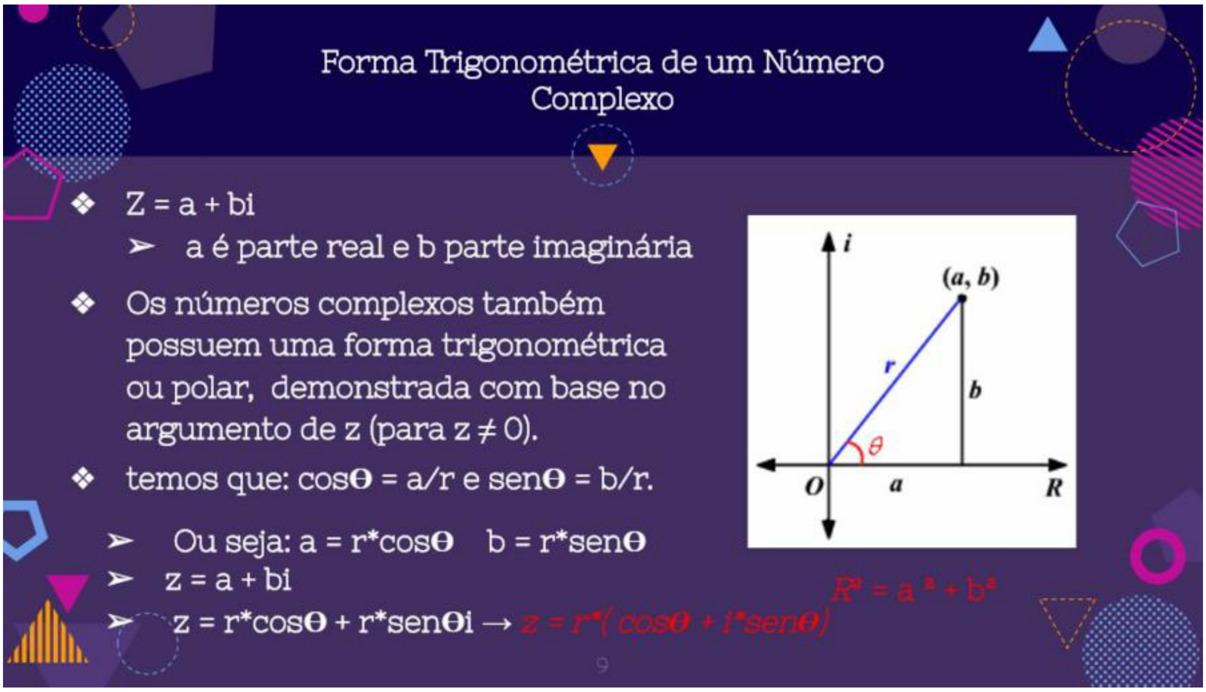

Figura 3.14: Dedução da Forma Trigonométrica de z

Uma vez determinada sua forma trigonométrica, fora discutido a realização de operações nesta representação. Utilizando-se de relações trigonométricas, os alunos demonstraram a seguinte fórmula para o produto de dois ou mais Números Complexos, de acordo com a imagem abaixo:

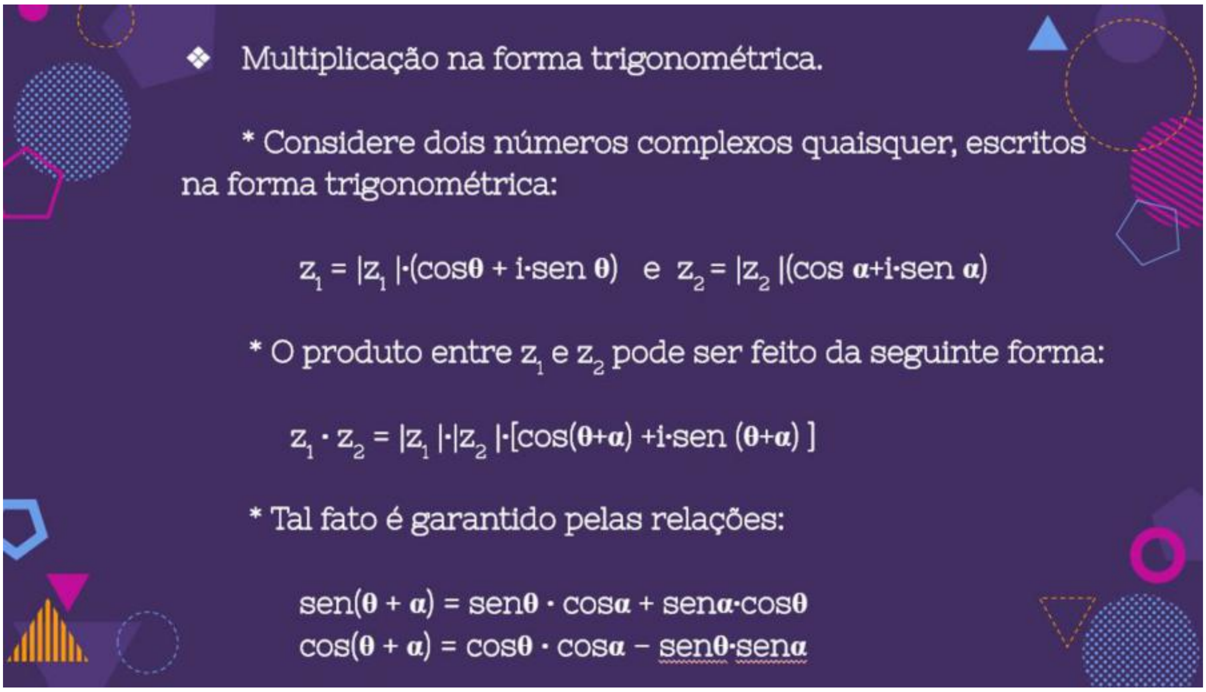

Figura 3.15: Fórmula para Multiplicação de Números Complexos

Seguindo o mesmo raciocínio, foi apresentada a fórmula para divisão entre dois Números Complexos:

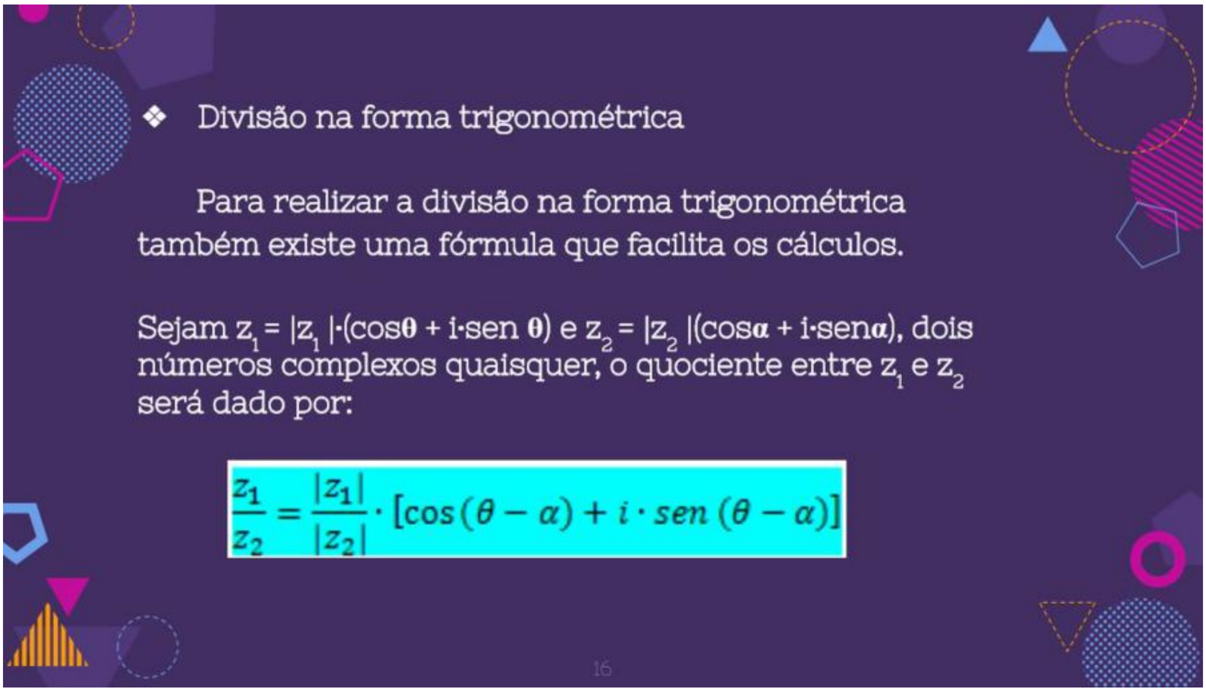

Figura 3.16: Fórmula para Divisão de Números Complexos

O Grupo II finalizou a apresentação com exercícios resolvidos e resolvendo em sala outros exercícios de aplicação do tema abordado pela sua equipe.

Finalmente, com base em tudo o que foi estudado e apresentado pelos grupos anteriores, segue relato sobre a apresentação do Grupo III, que aborda o tema desta pesquisa, bem como comentários a respeito do uso de um gráfico interativo para o estudo das Fórmulas de Moivre:

Grupo III - Fórmulas de Moivre

A apresentação começou com a o exemplo da figura abaixo, caracterizando a inviabilidade em se calcular multiplicações sucessivas de Números Complexos, como em uma potenciação. As soluções apresentadas são as de realizar repetidamente o processo de distribuição ou utilizar as propriedades do Binômio de Newton.

Apesar de ser possível realizar os cálculos utilizando as sugestões acima, o Grupo II apresentou anteriormente uma solução bem mais elegante para isto. Se é possível transformar o complexo $z = a + bi$ em sua representação trigonométrica $z = r \cdot [Cos(\theta) + i \cdot Sen(\theta)]$ e, ainda, sendo dois Números Complexos $z_1 = r_1[Cos(\theta_1) + iSen(\theta_1)]$ e $z_2 = r_2[Cos(\theta_2) + iSen(\theta_2)]$, temos que $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[Cos(\theta_1 + \theta_2) + iSen(\theta_1 + \theta_2)]$, pode-se deduzir o valor de $z^2 = r^2[Cos(2\theta) + iSen(2\theta)]$. Os alunos ainda deduziram novamente esta fórmula através do processo explicado nas imagens abaixo:

Estendendo-se o raciocínio para calcular $z^3 = z^2 \cdot z$ e observando o comportamento do

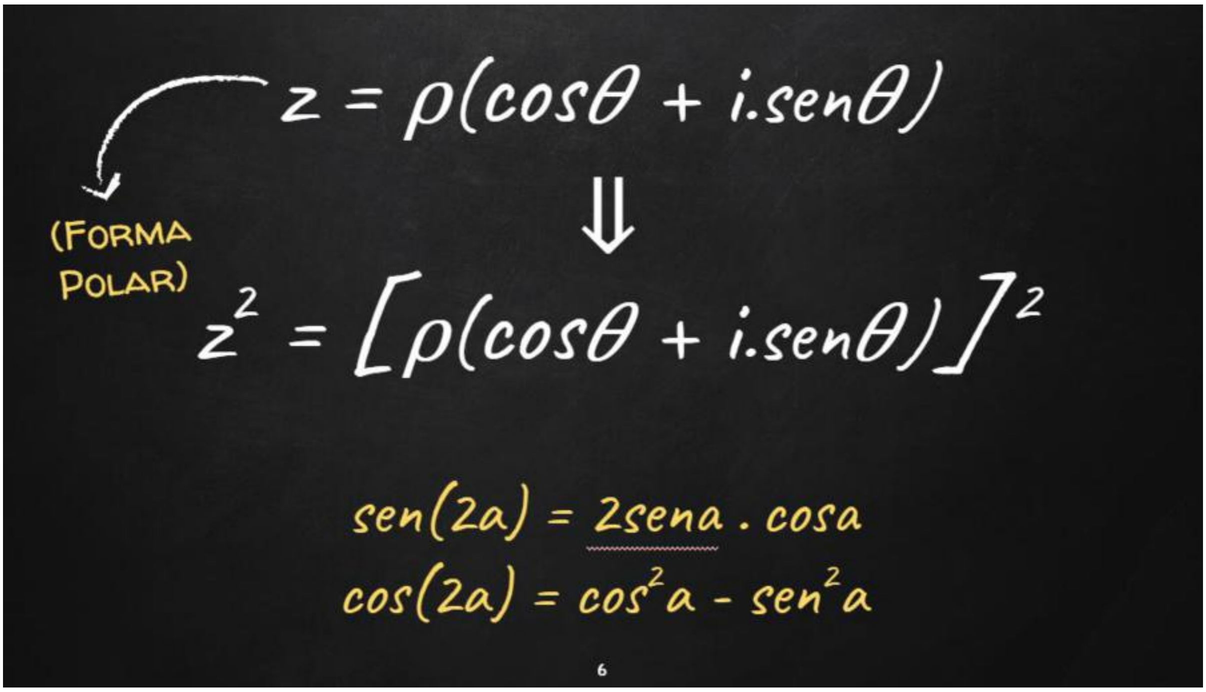

Figura 3.17: Complexo z elevado à potência 2

desenvolvimento na resolução da potenciação, e generalizando o resultado para o expoente n, obtém-se a I Fórmula de Moivre para Potenciação de Números Complexos:

$$z^n = r^n \cdot [Cos(n\theta) + i \cdot Sen(n\theta)]$$

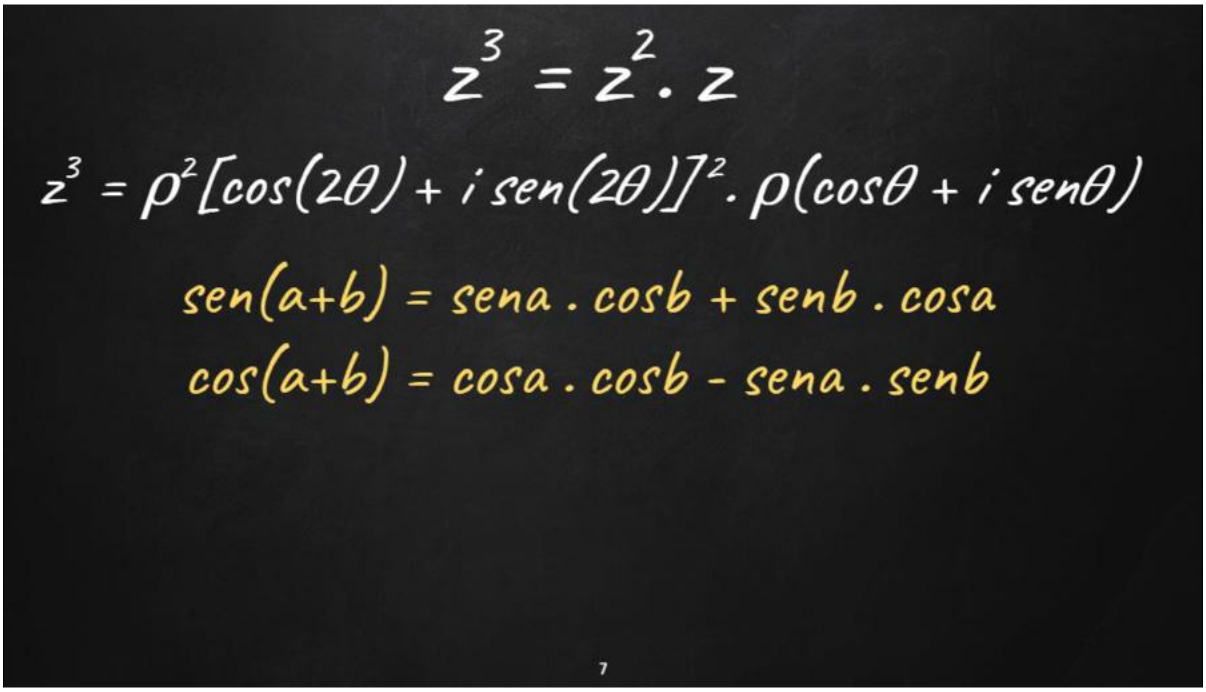

Figura 3.18: Generalizando a potência para expoente n

Dando continuidade à aula, os alunos começaram a deduzir uma fórmula para calcular raízes de um Número Complexo. Definindo o Complexo u como raíz $n-$ *ésima* de z, e utilizando a I Fórmula deduzida acima, obtém-se:

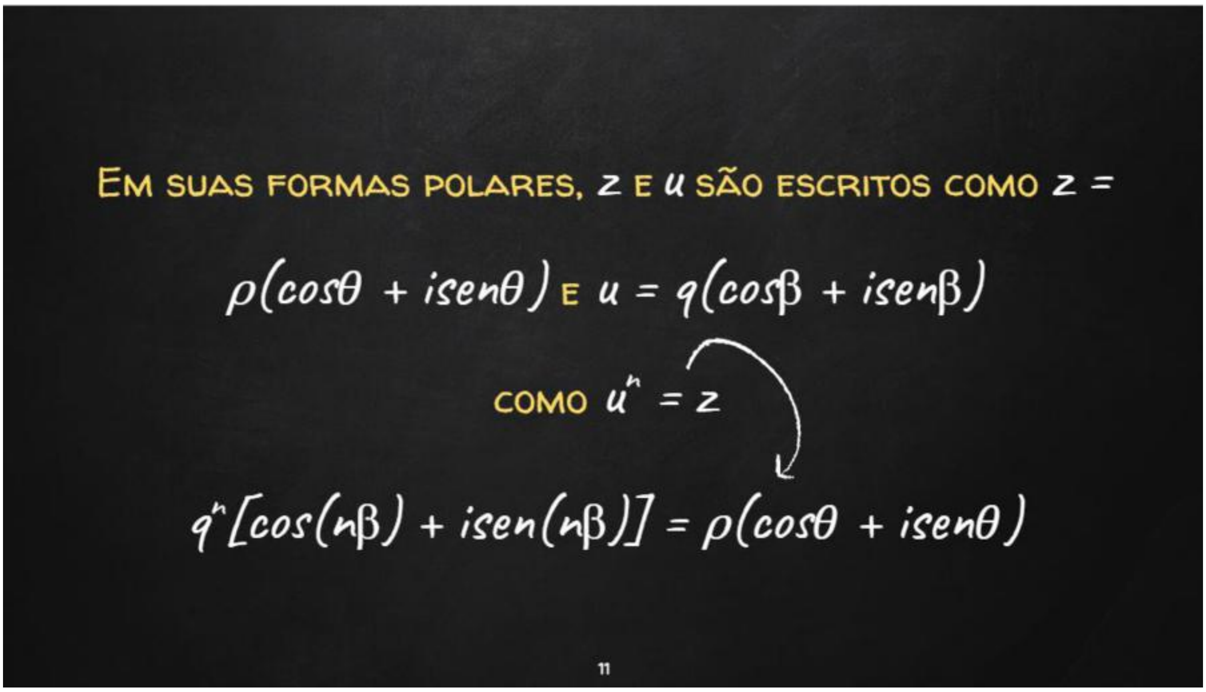

Figura 3.19: Início da dedução da fórmula de radiciação

Igualando termo a termo, têm-se cada um dos elementos de u que formarão a nova fórmula:

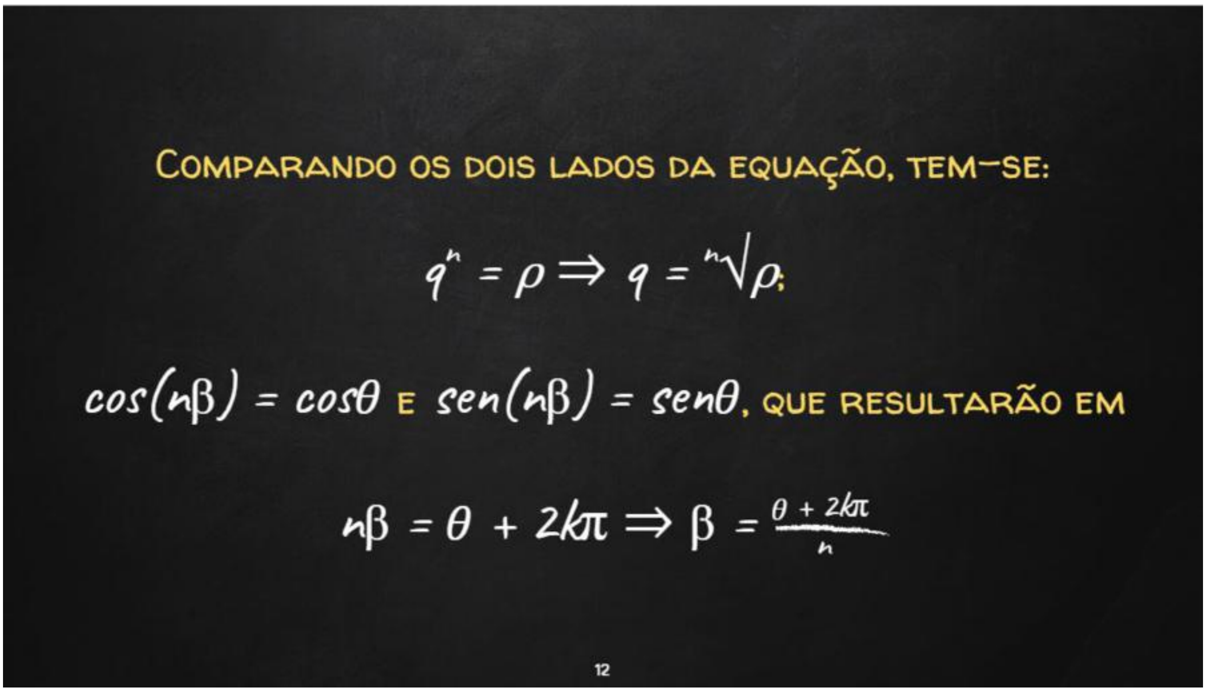

Figura 3.20: Elementos utilizados na demonstração

Finalmente, a II Fórmula de Moivre para Radiciação de Números Complexos, onde é possível obter as n raízes apenas substituindo k pelos valores do conjunto dado na imagem:

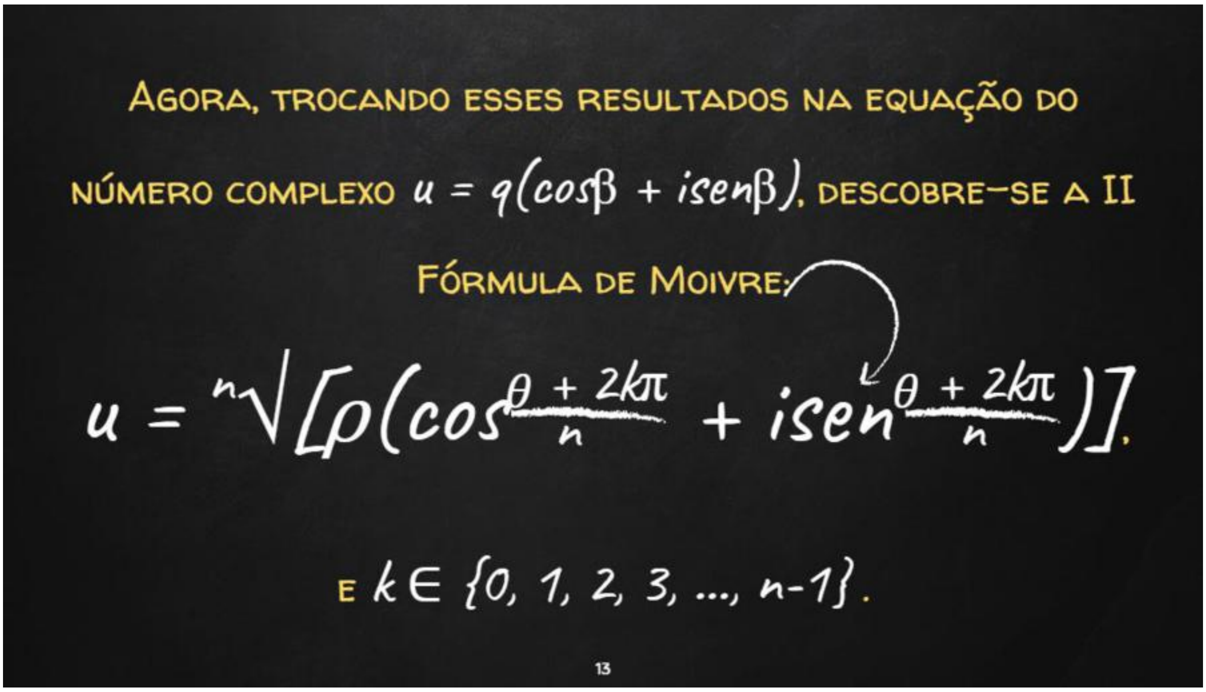

Figura 3.21: II Fórmula de Moivre

Estas foram deduções com abordagem puramente algébrica. A partir de então, os alunos recorreram à Representação Geométrica das fórmulas deduzidas anteriormente, conforme solicitado pelo professor. Para isso, os alunos criaram dois arquivos no software Geogebra, um para cada fórmula, e apresentaram em sala na versão online do aplicativo. É importante comentar os elementos utilizados pelos alunos nas construções dos gráficos, pois são reflexos do que os alunos aprenderam na realização da Aula Invertida.

Os gráficos criados no Geogebra apresentam, como configuração padrão, uma Janela Algébrica à esquerda e uma Janela Geométrica 2D à direita. Este último contém os eixos cartesianos e uma malha quadriculada. As descrições a seguir se referem, de maneira geral, aos elementos da Janela Geométrica.

Em primeiro lugar, os alunos utilizaram a **Ferramenta Controle Deslizante** para representar os números referentes às partes Real e Imaginário do Número Complexo em sua Forma Algébrica. Esta ferramenta consiste em criar um segmento da reta real, contendo números inteiros ou decimais, conforme a configuração do editor do gráfico. Pode-se observar essas barras no canto superior esquerdo do gráfico construído pelos alunos, bem como uma terceira barra que representa o valor de n, expoente em que o número z será elevado.

Uma vez criados os parâmetros, os alunos então definiram o Número Complexo como par ordenado, $z = (Real, Imaginrio)$ e o segmento que liga a origem do Plano Complexo, o ponto $O = (0, 0)$, ao afixo de z. O comprimento deste segmento representa o Módulo de z, assim como a hipotenusa do triângulo OAZ, sendo $A = (Real, 0)$. Neste triângulo, os alunos construíram, utilizando a **Ferramenta Ângulo**, o ângulo $\theta = AOZ$, que representa o Argumento de z, ou o ângulo formado pelo segmento OZ em relação ao eixo horizontal. Observe que o valor de $n = 9,5$ não está inteiro, como deveria ser, pois trata-se de uma das dúvidas que surgiram a respeito do software, dúvidas estas que foram esclarecidas durante as aulas.

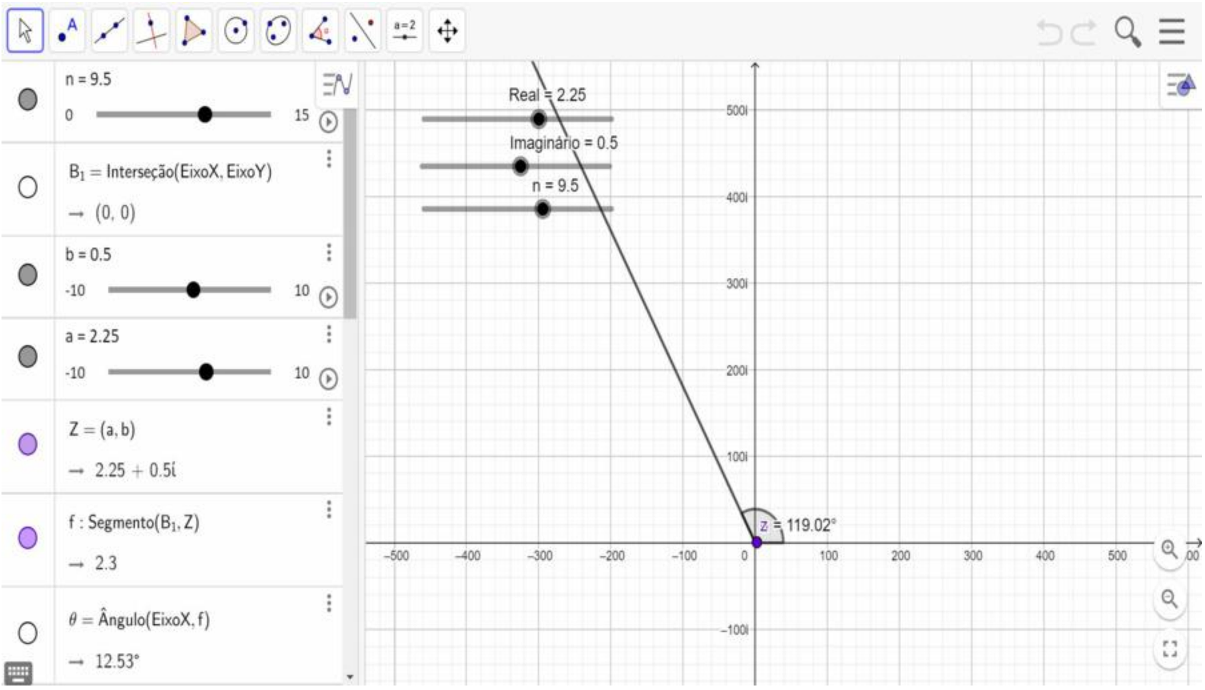

Figura 3.22: I Fórmula de Moivre - Gráfico criado pelos alunos

Por fim, os alunos definiram no software as constantes $c = (\sqrt{Real^2 + Imaginrio^2})^n \cdot Cos(n\theta)$ e $d = (\sqrt{Real^2 + Imaginrio^2})^n \cdot Sen(n\theta)$, utilizados para a construção do Ponto $E = (c, d)$, $n - sima$ potência do Número Complexo z, em sua Representação Geométrica.

Como construções auxiliares, foram criados, ainda, o segmento OE, representando o módulo de E, as projeções deste segmento nos respectivos eixos também aparecem na construção como linhas tracejadas e com cores distintas. Os alunos também ativaram a opção **Exibir Rastros** no ponto E, de forma que, para um mesmo número z, quando selecionados os valores de $n = 1, 2, 3, ...$, é possível observar que estes, nesta ordem, formam uma espiral que cresce rapidamente. Esta característica fora explicada pelo professor numa intervenção durante a apresentação, e pode ser descrita como reflexo da multiplicação do Argumento e do Módulo de z por um número inteiro cada vez maior. A figura 3.23 permite visualizar parte inicial desta espiral.

Para representar a II Fórmula de Moivre, foram utilizados quatro **Controles Deslizantes**, representando as partes Real e Imaginário, o número n correspondente ao índice da raíz, e o número $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Uma vez determinado o número $z = (Real, Imaginrio)$, as raízes foram representadas pelo ponto 'Resposta', com coordenadas iguais a $r_1 = (\sqrt{Real^2 + Imaginrio^2})^n \cdot Cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$ e $r_2 = (\sqrt{Real^2 + Imaginrio^2})^n \cdot Sen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$, de forma que, para $n = 3$, serão obtidas

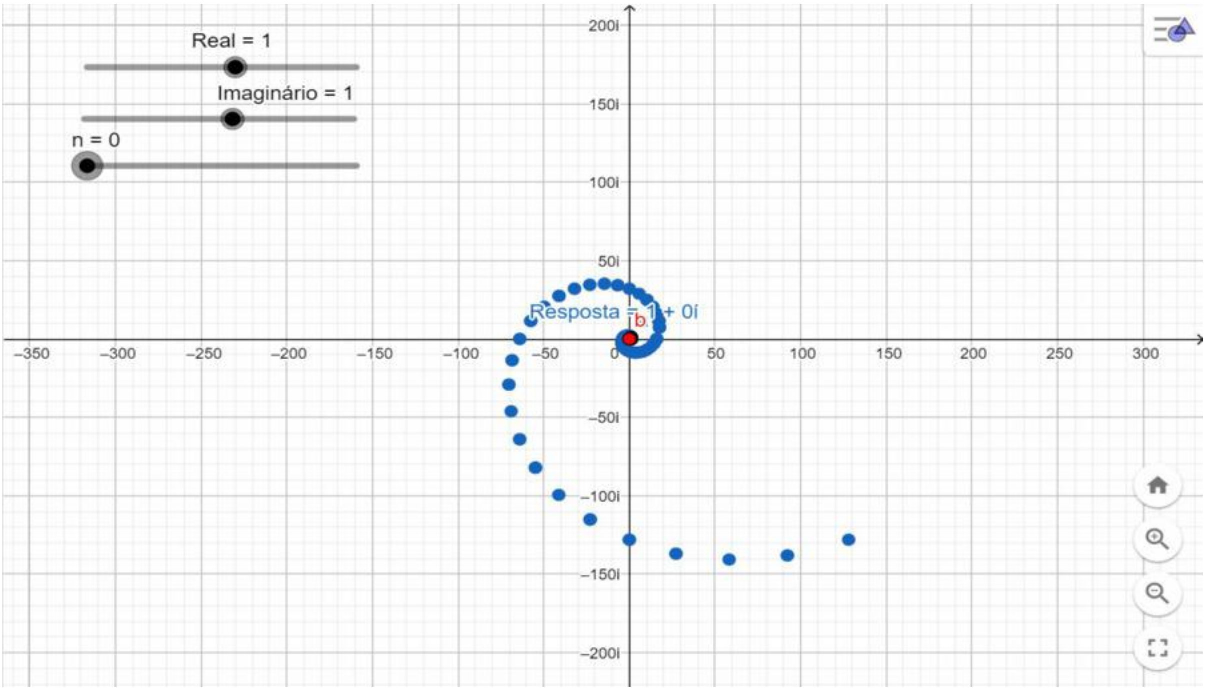

Figura 3.23: Expiral formada pelas potências de z

3 resultados distintos, de acordo com os valores de $k = 0, 1, 2$, assim como para $n = 4$ e $k = 0, 1, 2, 3$, e assim por diante. Os alunos observaram, ainda, que os rastros destas n raízes formam um polígono regular de n lados, mas que não haviam encontrado nada além disso em suas pesquisas. Após este momento, o professor realizou nova intervenção para explicar que esta característica é devido à divisão do ângulo pela constante n, bem como pelo fato de que o módulo dessas raízes são congruentes entre si.

Como conclusão de sua apresentação, os alunos resolveram exercícios de vestibulares envolvendo o conteúdo ministrado, finalizando assim suas atividades referentes a este conteúdo.

3.3 Conclusão e Recomendações

Fora discutido em nossa pesquisa sobre a importância de enfatizar as diferentes formas de se representar um mesmo objeto matemático, e como este domínio pode caracterizar o entendimento pleno deste objeto e do conteúdo abordado. O capítulo anterior consiste na descrição das apresentações de Aulas Invertidas, como objeto desta pesquisa, conforme proposto inicialmente.

De acordo com a Teoria das Representações Semióticas (TRS), de Duval, há duas maneiras de se transitar entre as representações de um objeto, num processo chamado de **transformação cognitiva**, que são conhecidas como: **tratamento** e **conversão**. Para Junior [8]:

> O tratamento de uma representação semiótica é uma transformação que se dá no próprio sistema semiótico em que esta foi produzida. A representação de um objeto

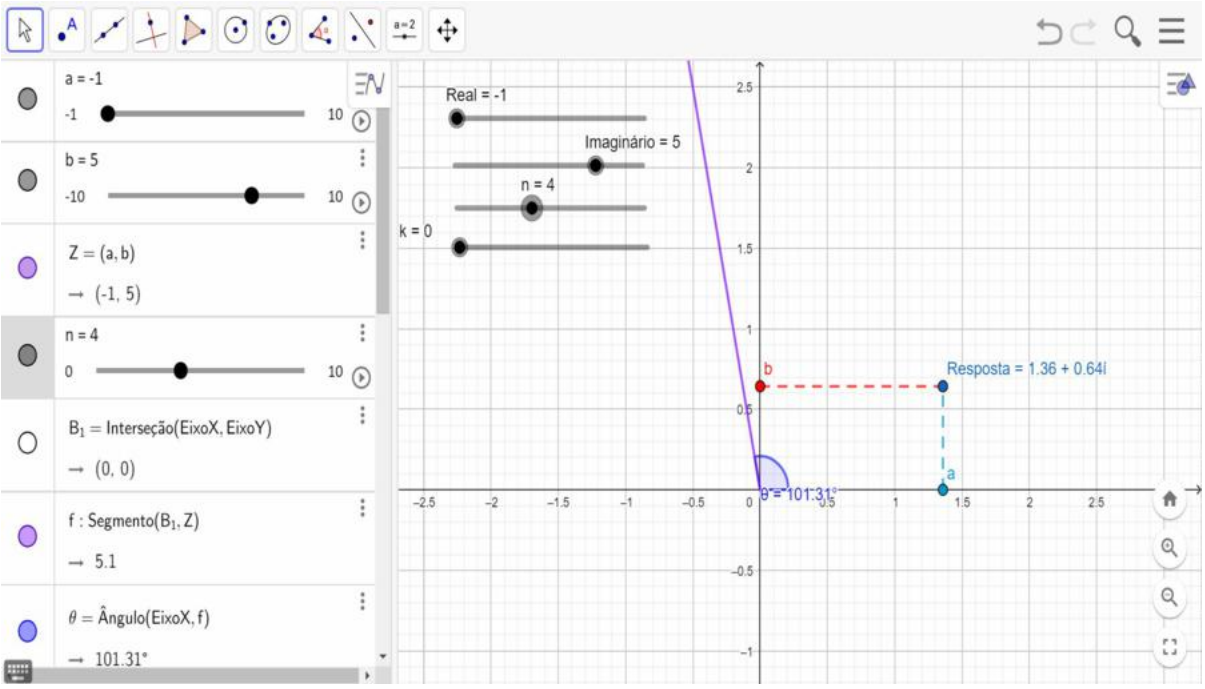

Figura 3.24: II Fórmula de Moivre - Gráfico criado pelos alunos

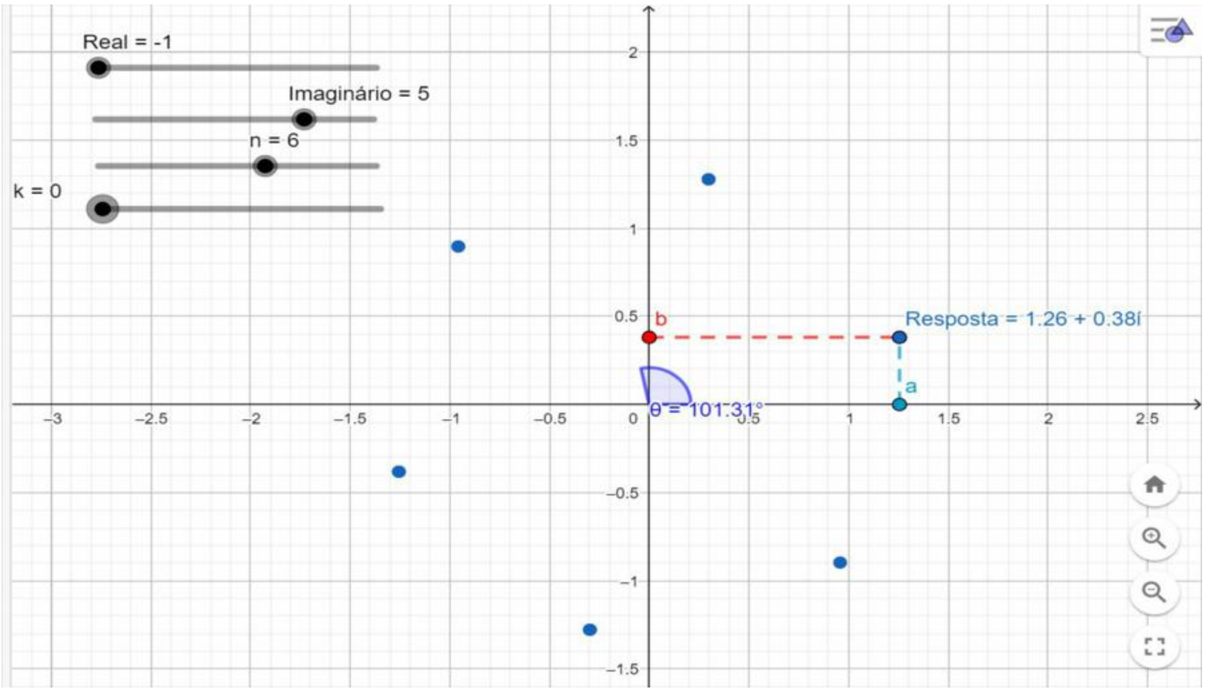

Figura 3.25: Exemplo de um Hexágono Regular formado pelas raízes de z

> é transformada em outra representação do mesmo objeto, sem mudar a forma da representação ou as operações pertinentes ao objeto matemático considerado. Ou seja, uma representação é transformada em outra, mas o sistema semiótico ao qual elas se vinculam se mantém.

É o que fica evidente quando os alunos realizaram as demonstrações das fórmulas. De um modo geral, uma demonstração matemática consiste numa sequência de informações que implicam em outras informações, até que se chegue na fórmula desejada. Refere-se, portanto, exatamente ao processo de tratamento citado acima. No caso específico da apresentação do Grupo III, os alunos usaram como base as afirmações feitas pelos colegas de grupos anteriores, como o fato de que $a = \rho \cdot Cos(\theta)$ e $b = \rho \cdot Sen(\theta)$, por exemplo, para afirmar que $z = a + bi = \rho \cdot [Cos(n\theta) + iSen(n\theta)]$. Nesse caso, os alunos realizaram uma transformação dentro da mesma representação. Embora sejam conhecidas, respectivamente, como forma algébrica e forma trigonométrica do Número Complexo, ambas são representações na forma algébricas.

Em outras ocasiões, os alunos realizaram transformações de objetos matemáticos entre diferentes tipos de representação semiótica, o que é chamado conversão. Conforme explica Junior [8]:

> A conversão de uma representação semiótica se dá entre sistemas semióticos distintos. A representação de um objeto é transformada em outra representação do mesmo objeto mudando a sua forma, portanto, mudando o sistema semiótico.

Os gráficos construídos pelo Geogebra são exemplos de conversão realizados durante as aulas. Um número que é representado por $z = a + bi = \rho \cdot [Cos(n\theta) + iSen(n\theta)]$, agora pode ser observado como um ponto no plano complexo, através das coordenadas (a, b) ou $(\rho \cdot Cos(\theta), \rho \cdot Sen(\theta))$. O mais interessante, porém, é que após as aulas os alunos foram capazes de prever como um gráfico iria se comportar quando se alterasse determinado elemento na forma trigonométrica, ou prever qual componente da fórmula iria se alterar, e de que maneira, quando se alterasse sua representação geométrica.

Esse processo em que o aluno transita entre duas ou mais representações de um objeto, prevendo como ambos se comportam, é exatamente o que busca Duval, quando afirma que ”para que haja a apreensão do conceito de um objeto matemático, é necessário que a noésis (conceitualização) aconteça por meio de significativas semiósis (representações) [8].” Em vários momentos na apresentação descrita no capítulo anterior, ficara evidente que os alunos foram capazes de apreender o conceito de Potencialização e Radiciação de Números Complexos, tendo em vista que a própria elaboração dos gráficos só é possível quando o aluno domina as características e propriedades do objeto que ele busca representar.

O software Geogebra, em suas janelas Algébricas e Geométricas, facilitam a observação dessas transições entre álgebra e geometria, de forma que quando se altera um dos valores dos Controles Deslizantes, a representação geométrica do objeto equivalente, e dos demais que dependem destes valores originais, são instantaneamente alterados. Nesse momento, a dinamicidade geométrica presente na escolha do software se mostra fator decisivo para o processo de aprendizado dos alunos, tendo em vista que a compreensão do assunto pelos alunos que apresentaram no Grupo III pôde ser compartilhada com os colegas quando esses argumentavam e debatiam durante as apresentações, sempre utilizando os gráficos dinâmicos.

Diante dos resultados obtidos nestas apresentações de Aula Invertida, conclui-se que fora alcançado o domínio do conteúdo a um nível satisfatório, os alunos se mostram capazes de resolver exercícios de todos os níveis envolvendo os Números Complexos, independente da forma em que estes números se apresentem.

Considerações Finais

Esta pesquisa apresenta uma alternativa para o estudo dos Números Complexos, envolvendo princípios de Geometria Dinâmica e a Metodologia de Aula Invertida. Trata-se de uma tentativa de integrar a tecnologia ao ensino a fim de trazer novas possibilidades ao professor em abordar assunto tão complexo, além de permitir que o aluno se torne protagonista no processo aprendizagem.

Como foi possível observar, a abordagem específica para o conteúdo de Números Complexos, embora justificada, não caracteriza que tal metodologia deva ser aplicada apenas a este assunto. Ao contrário, uma vez aliados, os GDIs e a Aula Invertida mostrou-se ferramenta poderosa de auxílio ao professor em sala de aula, em diversos assuntos vistos do 9° Ano do Ensino Fundamental ao final do Ensino Médio, turmas as quais o autor dessa pesquisa leciona.

De fato, após a aplicação desta pesquisa, em meados de 2018, esta metodologia passou a fazer parte dos planejamentos diários deste professor, tendo em vista a característica do uso de tecnologias na escola em questão.

A escolha do software Geogebra também não caracteriza a impossibilidade de serem utilizados outros softwares de GDIs. Outras opções gratuitas são 'Poly' e 'Régua e Compasso', além de alguns outros pagos. O Geogebra, porém, possui uma comunidade ativa no mundo todo, que compartilham trabalhos feitos em uma espécie de rede social para professores e alunos, através do site *www.geogebra.org*. Além disso, esse software permite uma construção mais intuitiva, o que permite que os próprios alunos desenvolvam as construções, inclusive através de seu *smartphone*.

Por fim, destaca-se a possibilidade de independência e liberdade por parte do aluno, permitindo que este se depare com outras metodologias e explicação de outros professores durante a pesquisa que antecede a apresentação. Trata-se, portanto, de uma abordagem diferenciada da tradicional, ao mesmo tempo em que permite ao aluno descobrir ainda outras abordagens diferentes daquelas planejadas pelo professor, além de, se assim escolher, se preparar assistindo aulas clássicas, encontradas aos montes na internet.

Numa época de renovações no campo de ensino graças às tecnologias, uma metodologia que permite aliar o estudo de um conteúdo a partir de um tema, e não o contrário, mostra-se promissora a professores que queiram fugir do tradicionalismo.

Referências Bibliográficas

[1] João Almiro. Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de matemática. *Consultado em Maio*, 28:2009, 2004.

[2] Eduardo Fernandes Barbosa and DG de Moura. Metodologias ativas de aprendizagem no ensino de engenharia. In *Anais International Conference on Engineering and Technology Education, Cairo, Egito*, volume 13, 2014.

[3] Neusi Aparecida Navas Berbel. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. *Semina: Ciências Sociais e Humanas*, 32(1):25–40, 2012.

[4] RF DAMM et al. Educação matemática: uma introdução. *São Paulo: EDUC*, 1999.

[5] Maria Elizabeth Bianconcini de Almeida and José Armando Valente. Integração currículo e tecnologias e a produção de narrativas digitais. *Currículo sem fronteiras*, 12(3):57–82, 2012.

[6] Leônidas de Oliveira Brandão, Seiji Isotani, and Janine Gomes Moura. Imergindo a geometria dinâmica em sistemas de educação a distância: igeom e saw. *Brazilian Journal of Computers in Education*, 14(1), 2006.

[7] BELO HORIZONTE. Alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem de números complexos: Uma experiência com professores e alunos.

[8] AGRICCO JUNIOR and RENATO CEZAR. Números complexos e grandezas elétricas: Análise de livros didáticos apoiada na teoria dos registros de representações semióticas. 2017.

[9] Regina Coeli Moraes Kopke. Imagens e reflexões: A linguagem da geometria nas escolas. *Caligrama (São Paulo. Online)*, 2(1), 2006.

[10] José Morán. Mudando a educação com metodologias ativas. *Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens*, 2:15–33, 2015.

[11] Eimard GA do NASCIMENTO. Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. *XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN*, 8457:2012, 1808.

[12] Eimard GA do NASCIMENTO. Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. *XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN*, 8457:2012, 1808.

[13] Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. Geogebra.

[14] O QUE. Sala de aula invertida.

[15] José Armando Valente. A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. *UNIFESO-Humanas e Sociais*, 1(01):141–166, 2014.