Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente

Gabriel Araújo de Sousa

Manaus - AM
Fevereiro de 2019

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente

por

Gabriel Araújo de Sousa

sob a orientação do

Prof. Dr. Antonio Airton Freitas Filho

Manaus - AM
Fevereiro de 2019

Rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente

por

Gabriel Araújo de Sousa [1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em 15 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

Antonio Airton Freitas Filho

Prof. Dr. Antônio Airton Freitas Filho - (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

José N. V. Gomes

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes - (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Manoel Vieira de Matos Neto

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto - (Membro Externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S725r

Sousa, Gabriel Araújo
Rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente / Gabriel Araújo Sousa. 2019
48 f.: 31 cm.

Orientador: Antonio Airton Freitas Filho
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Rigidez. 2. Variedades tipo-Einstein. 3. Curvatura escalar constante. 4. Variedades Einstein. I. Freitas Filho, Antonio Airton II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Esta dissertação é dedicada à minha mãe Noemia Araújo de Castro.

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio e incentivo. À minha mãe Noemia Castro, pelo amor, por estar ao meu lado continuamente e ter dado auxílio imensurável para meus estudos. À minha companheira Sara Caroline, pelo carinho e força que sempre transmitira com palavras de incentivo.

Ao professor Antonio Airton Freitas Filho, pela orientação, por todo suporte e disponibilidade concedidos para a realização desta dissertação.

Ao professor José Nazareno Vieira Gomes, pelos ensinamentos nas aulas e nos seminários extraclasses. Ao professor Manoel Vieira de Matos Neto, pelas críticas e sugestões finais. E à ambos por terem aceitado participar da banca.

Aos colegas de faculdade que de alguma forma, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação.

Ao PPGM, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade.

E à CAPES, pela assistência financeira.

"Na sombra teus olhos
resplandecem enormes."

(Carlos Drummond de Andrade)

Resumo

Esta dissertação tem como fundamento o estudo detalhado dos resultados de rigidez obtidos no preprint intitulado “A note on gradient Einstein-type manifolds” devido a José N. V. Gomes [arXiv:1710.10549, preprint 2017]. Mais precisamente, foi provado que uma variedade tipo-Einstein gradiente compacta com curvatura escalar constante é isométrica a uma esfera padrão com função potencial dada explicitamente. No caso não compacto, foi assumido as hipóteses do Teorema de Karp e de curvatura escalar constante para deduzir que uma variedade tipo-Einstein gradiente é isométrica a um espaço Euclidiano, um espaço hiperbólico ou um produto deformado Einstein. Finalmente, sob certas condições dos parâmetros, foi mostrado que uma variedade tipo-Einstein gradiente homogênea, não compacta e não degenerada é Einstein.

Palavras-chave: Rigidez, Variedades tipo-Einstein, Curvatura escalar constante, Variedades Einstein.

Abstract

This dissertation is based on the detailed study of rigidity results obtained in the preprint entitled “A note on gradient Einstein-type manifolds” due to José N. V. Gomes [arXiv:1710.10549, preprint 2017]. More precisely, it has been proved that a compact gradient Einstein-type manifold with constant scalar curvature is isometric to a standard sphere with potential function explicitly given. In noncompact case, was assumed the hypotheses of Karp's Theorem and constant scalar curvature to deduce that a gradient Einstein-type manifold is isometric to a Euclidean space, a hyperbolic space or a Einstein warped product. Finally, under certain conditions of the parameters, it has been shown that a homogeneous, noncompact and nondegenerate gradient Einstein-type manifold is Einstein.

Palavras-chave: Rigidity, Einstein-type manifolds, Constant scalar curvature, Einstein manifolds.

Sumário

Introdução

Atualmente tem havido um crescente interesse em variedades suaves cuja métrica Riemanniana satisfaz certas equações tensoriais, podendo envolver o tensor de Ricci, campos vetoriais globais, a curvatura escalar, entre outros entes geométricos. Tais equações serão referidas como equações de estrutura e surgem naturalmente em diferentes contextos como veremos mais adiante.

A equação de estrutura de uma *variedade Einstein* (M^n, g) é dada por $Ric = \lambda g$, para alguma função suave λ em M, em que Ric denota o tensor de Ricci na métrica Einstein g. Tal métrica surge como ponto crítico do funcional Einstein-Hilbert, para detalhes veja Besse [6]. Ao longo dos anos foram feitas generalizações desta equação precursora. Recentemente, Catino et al. [12] introduziram o conceito de *variedade tipo-Einstein* a qual abrange várias dessas estruturas, de forma a unificar problemas de classificações estudados na literatura.

Uma variedade Riemanniana conexa (M^n, g), com $n \geqslant 3$, é uma variedade tipo-Einstein ou admite uma estrutura tipo-Einstein se existem $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\lambda \in C^\infty(M)$ tais que

$$\alpha Ric + \frac{\beta}{2}\mathcal{L}_X g + \mu X^\flat \otimes X^\flat = (\rho S + \lambda)g, \tag{1}$$

para alguns parâmetros $\alpha, \beta, \mu, \rho \in \mathbb{R}$, com $(\alpha, \beta, \mu) \neq (0, 0, 0)$. Quando X for identicamente nulo ou λ for não constante diremos que a estrutura é *trivial* ou *própria*, respectivamente. Note que a nomenclatura própria no contexto de variedades tipo-Einstein é distinta do conceito de função própria.

Um caso especial ocorre quando $X = \nabla f$, para alguma função suave $f : M \to \mathbb{R}$. Neste caso, a equação (1) é reescrita como segue

$$\alpha Ric + \beta \nabla^2 f + \mu df \otimes df = (\rho S + \lambda)g, \tag{2}$$

e diremos que a variedade tipo-Einstein é *gradiente*. A função f é denominada *função potencial* e o termo trivial refere-se ao fato de f ser constante.

Observe que, escolhendo adequadamente os parâmetros e a função λ em (1), obtemos os seguintes casos particulares: variedades Einstein, sólitons de Ricci, sólitons ρ-Einstein, quase-sólitons de Ricci, quase-sólitons de Yamabe e variedades m-quasi-Einstein generalizada. Cada uma delas têm sua importância particular. Por exemplo, os sólitons de Ricci correspondem às soluções auto-similares do fluxo de Ricci e são fundamentais para a compreensão das singularidades do mesmo, veja Hamilton [16]. Os sólitons ρ-Einstein correspondem às soluções auto-similares do fluxo de Ricci-Bourguignon [8], veja Catino e Mazzieri [13]. Os quase-sólitons de Ricci são generalizações dos sólitons ρ-Einstein, apesar de terem sido introduzidos como generalizações dos sólitons de Ricci, veja Pigola et al. [26]. Os sólitons de Yamabe correspondem às soluções auto-similares do fluxo de Yamabe, fluxo este introduzido por Hamilton [17].

Em outro cenário temos a noção de variedades m-quasi-Einstein generalizada, definidas a partir das variedades m-quasi-Einstein gradiente. Esta última foi originada do estudo de variedades que são produtos deformados Einstein, veja [6]. Foi mostrado que um produto deformado é Einstein se, e somente se, a fibra é Einstein e a base satisfaz a equação de uma variedade m-quasi Einstein gradiente. Os resultados de rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente compactas e não compactas em Gomes [14] foram motivados do estudo de variedades m-quasi-Einstein generalizada, veja Barros e Gomes [1] e de quase-sólitons de Ricci homogêneos, veja Calviño-Louzao et al. [9]. Em Barros e Gomes [2] foi realizado um estudo de variedades m-quasi-Einstein generalizada compactas (não necessariamente gradiente) através da decomposição de Hodge-de Rham, no qual concluiu-se que toda variedade m-quasi-Einstein compacta Einstein é trivial.

Em suma, os sólitons de Ricci, sólitons ρ-Einstein e os sólitons de Yamabe são caracterizados como soluções auto-similares do fluxo de Ricci, fluxo de Ricci-Bourguignon e do fluxo de Yamabe, respectivamente. Enquanto que uma variedade m-quasi-Einstein gradiente é caracterizada como base de um produto deformado Einstein. Algumas restrições para a construção de produtos deformados Einstein podem ser encontradas em Case et al. [11] e em Kim e Kim [19].

Destacaremos agora alguns detalhes e propriedades que seguem das definições dadas anteriormente.

Primeiramente, na definição de variedade tipo-Einstein observe que o termo ρS poderia ser agregado à função λ. Entretanto, o referido termo está destacado para incluir explicitamente o caso de sólitons ρ-Einstein.

No caso em que a variedade tipo-Einstein gradiente é trivial, segue diretamente da definição que tal variedade é Einstein ($\alpha \neq 0$) e a estrutura gradiente é não própria. Isto mostra que toda variedade tipo-Einstein gradiente própria é não trivial.

Por outro lado, suponha que a variedade (M^n, g) é Einstein, então por (2), obtemos

$$\beta\nabla^2 f + \mu df \otimes df = \left(\rho S + \lambda - \frac{S}{n}\alpha\right) g.$$

Desta forma, escolhendo convenientemente os parâmetros, obtemos um quase-sóliton de Yamabe no qual f é não necessariamente constante, isto é, não garantimos que a estrutura gradiente é trivial.

Dizemos que uma variedade tipo-Einstein gradiente (com $\beta \neq 0$) é *não degenerada* se $\beta^2 \neq (n-2)\alpha\mu$, e *degenerada* se $\beta^2 = (n-2)\alpha\mu$. A justificativa desta terminologia é dada através da equivalência entre variedades tipo-Einstein gradiente degenerada e variedades conformemente Einstein, veja [12]. Esta condição é essencial para a determinação de variedades tipo-Einstein gradiente que são Einstein em [14].

Em [12], o caso $\beta = 0$ foi tratado separadamente e foi dada uma precisa descrição da métrica para o caso $\alpha = 0$. Foi provado ainda que uma variedade tipo-Einstein gradiente completa, não compacta, não trivial e não degenerada pode ser localmente caracterizada quando o tensor de Bach é nulo e a função potencial é própria. A proposta em [14] é analisar casos não estudados em [12].

No primeiro capítulo faremos uma exposição sobre alguns conceitos fundamentais utilizados nos principais resultados do trabalho, os quais serão abordados no segundo capítulo.

O primeiro resultado de rigidez é para variedades compactas com curvatura escalar constante.

Teorema 1. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente compacta, não trivial, de curvatura escalar constante com β e μ não nulos. Então, (M^n, g) é isométrica a uma esfera padrão $\mathbb{S}^n(c)$. Além disso, a menos de homotetia e uma constante, a função potencial é dada por*

$$f = \frac{\beta}{\mu} \ln\left(\tau - \frac{h_v}{n}\right),$$

onde $\tau \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$ e h_v é uma função altura definida na esfera unitária $\mathbb{S}^n$.

A função potencial destacada neste teorema motiva a obtenção de estruturas tipo-Einstein gradiente. Exemplificaremos para esses casos as variedades $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$, embora as duas primeiras sejam não compactas, veja Exemplos 2.1 e 2.2.

Para o caso não compacto o próximo resultado de rigidez assume as hipóteses do Teorema de Karp [18], para contornar a não compacidade, uma vez que o método para sua demonstração tem o mesmo ponto de partida do caso compacto, veja Lema 2.1.

Teorema 2. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente completa, não compacta, não trivial, de curvatura escalar constante e com α, β e μ não nulos. Considere $u = e^{\frac{\mu}{\beta}f}$ e a bola geodésica $B(r)$ centrada em algum ponto fixado $x \in M$. Além disso, suponha que pelo menos uma das seguintes condições seja satisfeita:*

(1) $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{B(2r)\setminus B(r)} \|\overset{\circ}{Ric}(\nabla u)\| dM = 0.$

(2) $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{B(2r)\setminus B(r)} \|\nabla u\| dM = 0$ *e as curvaturas de Ricci são limitadas superiormente.*

(3) *Existe* $L > 0$ *tal que vol* $(B(r)) \leqslant Lr^q$, *para* $r \geqslant 1$ *e* $\mathring{Ric}(\nabla u) \in L^p(M, dM)$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $q > 1$.

(4) *Existe* $L > 0$ *tal que vol* $(B(r)) \leqslant Lr$, *para* $r \geqslant 1$ *e* $\|\nabla u\| \to 0$ *uniformemente para o infinito em* M.

Então, (M^n, g) *é uma variedade Einstein com curvatura escalar* S *não positiva e* u *possui no máximo um ponto crítico. Mais precisamente:*

(*i*) *Se* $S = 0$, *então* λ *não possui zeros e* (M^n, g) *é isométrica a um espaço Euclidiano.*

(*ii*) *Se* $S < 0$ *e* u *possui apenas um ponto crítico, então* (M^n, g) *é isométrica a um espaço hiperbólico.*

(*iii*) *Se* $S < 0$ *e* u *não possui ponto crítico, então* (M^n, g) *é isométrica a um produto deformado* $\mathbb{R} \times_\varphi \mathbb{F}$, *onde* $\mathbb{F}$ *é uma variedade Einstein completa, e* φ *é uma solução positiva da equação diferencial* $\ddot{\varphi} + \frac{S}{n(n-1)}\varphi = 0$ *em* $\mathbb{R}$.

O último caso de rigidez envolve condições para uma variedade tipo-Einstein não compacta ser Einstein.

Teorema 3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade tipo-Einstein gradiente homogênea, própria, não compacta, não degenerada e com* α *e* μ *não nulos. Se* $\beta^2 \neq \alpha\mu$, *então* (M^n, g) *é uma variedade Einstein.*

É interessante destacar que a não degenerescência é crucial para a demonstração desse resultado. Ademais, a hipótese $\beta^2 \neq \alpha\mu$ torna-se exatamente a não degenerescência em dimensão três.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho, o par (M^n, g) indicará a variedade suave conexa M de dimensão $n \geqslant 3$, munida com a métrica Riemanniana g (ou $\langle , \rangle$). O símbolo $\mathfrak{X}(M)$ será usado para designar o conjunto dos campos vetoriais suaves $X : M \to TM$ e $C^\infty(M)$ para o conjunto das funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$.

Utilizaremos a convenção de soma de Einstein, na qual índices repetidos em posições invertidas indicará um somatório (índice no expoente não significará potência). Também iremos admitir noções de variedades suaves e de geometria Riemanniana que podem ser encontradas em [7], [10] ou [20].

1.1 Tensores

Um $(1, r)$-*tensor* em M é uma aplicação

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$, isto é, um campo de tensores em M, enquanto que em um $(0, r)$-tensor o contradomínio é $C^\infty(M)$. Especificamente,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, h \in C^\infty(M)$.

Exemplo 1.1. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $x, y \in T_pM$, o produto interno de x e y na métrica Riemanniana de M, isto é, $g_p(x, y) = \langle x, y \rangle_p$, é um $(0, 2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são as funções g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Observação 1.1. *Em uma variedade Riemanniana, um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser identificado com um único $(0,1)$-tensor $X^\flat : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ (ou equivalentemente uma 1-forma diferenciável) dado por*

$$X^\flat(Y) = \langle X, Y\rangle, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.1}$$

É conveniente considerar o isomorfismo musical *sharp* $\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que associa cada 1-forma diferenciável ω a um único campo $\omega^\sharp$, dado por

$$\omega(Y) = \langle \omega^\sharp, Y\rangle, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{X}(M),$$

ou seja, a inversa da aplicação *flat* $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ que leva cada campo diferenciável X no seu dual $X^\flat$ dado por (1.1).

Em geral, um $(0,r)$-tensor T pode ser identificado com um $(1, r-1)$-tensor $\tilde{T}$ através da métrica como segue

$$\langle \tilde{T}(Y_1, \dots, Y_{r-1}), Y_r\rangle = T(Y_1, \dots, Y_r).$$

Por conveniência indicaremos $\tilde{T}$ simplesmente por T. Em particular, o $(0,2)$-tensor métrico g é associado ao $(1,1)$-tensor identidade em $\mathfrak{X}(M)$, o qual denotaremos por I.

Definição 1.1. *A derivada covariante de um $(1,r)$-tensor T é um $(1, r+1)$-tensor ∇T, dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r) = \nabla_X\big(T(Y_1, \dots, Y_r)\big) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_r). \tag{1.2}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \dots Y_r) = \nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0,r)$-tensor T é um $(0, r+1)$-tensor ∇T dado pela expressão (1.2). A definição da derivada covariante de tensores é naturalmente motivada pela regra de Leibniz.

Exemplo 1.2. *A derivada do tensor métrico é o tensor nulo. De fato, dados $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\begin{aligned} \nabla g(X, Y_1, Y_2) = \nabla_X g(Y_1, Y_2) &= \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) \\ &= \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definição 1.2. *O tensor curvatura de Riemann é o* $(1,3)$*-tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Este tensor pode ser interpretado como uma generalização da noção de curvatura em curvas e superfícies diferenciáveis. O aparecimento da derivada de segunda ordem é natural e a disposição das parcelas são introduzidas para que R seja de fato um tensor.

Além disso, se considerarmos um sistema de coordenadas em torno de um ponto $p \in M$ e usarmos que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, obtemos

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i})\partial_k,$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Com a métrica, podemos definir o $(0,4)$-tensor associado ao $(1,3)$-tensor curvatura

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

dado por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle.$$

Deste modo, é possível verificar propriedades de simetria do tensor curvatura. A Proposição seguinte mostra isso e sua demonstração pode ser vista em Carmo [10].

Proposição 1.1. *O tensor curvatura* R *satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$;

(ii) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$;

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(Primeira identidade de Bianchi);*

(iv) $(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$ *(Segunda identidade de Bianchi).*

A partir do tensor curvatura podemos definir os seguintes entes geométricos:

Definição 1.3. *Considere* $p \in M$*. A curvatura seccional de* x *e* $y \in T_pM$ *é definida por*

$$K_p(x,y) = \frac{\langle R(x,y)y, x \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2$, *e desde que* x, y *gerem um plano* $\pi \subset T_pM$.

Esta definição não depende da escolha dos vetores que geram π, veja [10]. Desta forma, podemos denotar $K_p(x, y)$ por $K_p(\pi)$, a curvatura seccional em p segundo o plano π.

Observe que em um referencial $\{E_i\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ a função $K : U \to \mathbb{R}$ é suave. Em particular, se o referencial for ortonormal, então

$$K(E_i, E_j) = \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i\rangle, \text{ para } i \neq j.$$

Definição 1.4. *Definimos o traço de um* $(0, 2)$*-tensor* T *como sendo o traço do* $(1, 1)$*-tensor associado, ou seja, se* $\{E_i\}$ *é uma base ortonormal, então*

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i \langle T(E_i), E_i\rangle = \sum_i T(E_i, E_i).$$

Na base coordenada $\{\partial_i\}$,

$$\mathrm{tr}(T) = g^{ij}T(\partial_i, \partial_j).$$

Com isso, é possível definir um produto interno entre $(0, 2)$-tensores T, S chamado *produto interno de Hilbert-Schmidt*, da seguinte forma:

$$\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(T^*S).$$

Em uma base ortonormal $\{E_i\}$, tem-se

$$\mathrm{tr}(T^*S) = \sum_i \langle T^*S(E_i), E_i\rangle = \sum_i \langle S(E_i), T(E_i)\rangle.$$

Com esta expressão podemos concluir diretamente as propriedades de produto interno e que $\mathrm{tr}(T) = \langle T, g\rangle$.

Note que a definição do produto interno de Hilbert-Schmidt é equivalente a $\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(TS^*)$.

Exemplo 1.3. *A parte sem traço de um* $(0, 2)$*-tensor* T *em* (M^n, g) *é definida por*

$$\mathring{T} = T - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} g. \tag{1.3}$$

Deste modo, $\mathrm{tr}(\mathring{T}) = 0$ *e*

$$0 \leqslant |\mathring{T}|^2 = |T|^2 - \frac{\mathrm{tr}(T)^2}{n}.$$

Definição 1.5. *O tensor de Ricci é definido como sendo o traço do tensor curvatura, isto* *é, se* $\{E_i\}$ *é um referencial ortonormal, então*

$$Ric(X,Y) = \sum_i \langle R(E_i,X)Y, E_i\rangle.$$

Observe que pela Proposição 1.1, o tensor de Ric é um $(0,2)$-tensor simétrico. Com isso, para cada $p \in M$, o Teorema Espectral garante a existência dos autovalores $\{\rho_i(p)\}$, para uma base ortonormal de autovetores $\{E_i(p)\}$, do operador $Ric_p : T_pM \to T_pM$ dados por

$$Ric_p\,(E_i(p)) = \rho_i(p)E_i(p). \tag{1.4}$$

Estes autovalores são denominados *curvaturas de Ricci em* p e são suaves como funções pois $\rho_i = Ric\,(E_i, E_i)$.

Finalmente, definimos a *curvatura escalar* S como sendo o traço do tensor de Ricci, isto é,

$$S = \sum_i Ric(E_i,E_i) = 2\sum_{i<j} K(E_i,E_j). \tag{1.5}$$

Observação 1.2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Einstein, ou seja,* $Ric = \lambda g$, *em que* $\lambda \in C^\infty(M)$. *Através do traço obtemos que* $\lambda = \frac{S}{n}$. *Além disso, por* (1.3) *dizer que* (M^n, g) *é Einstein significa* $\mathring{Ric} \equiv 0$.

Teorema 1.1 (Lema de Schur)**.** *Seja* (M^n, g) *uma variedade Einstein, isto é,* $Ric = \lambda g$, *onde* $\lambda \in C^\infty(M)$. *Se* $n \geqslant 3$, *então* λ *é constante.*

Demonstração. Veja [10]. □

1.2 Operadores diferenciais

Assim como a derivada covariante de campos vetoriais permite estender a noção de derivada direcional do espaço Euclidiano para variedades Riemannianas, a derivada covariante de tensores estende certos operadores diferenciais tais como gradiente, divergente, laplaciano, entre outros.

Destacaremos agora alguns desses operadores.

Definição 1.6. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O gradiente de* f *é o campo vetorial suave* ∇f, *definido sobre* M *por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f) = \nabla_X f,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Escreva $\nabla f = a^i E_i$ em termos de um referencial ortonormal $\{E_i\}$ em uma vizinhança $U \subset M$. Temos que $a^i = \langle \nabla f, E_i \rangle$, e portanto em U,

$$\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, E_i \rangle E_i = \sum_i E_i(f) E_i.$$

Em geral, se $\{\partial_i\}$ é o referencial coordenado em U, teremos

$$\nabla f = g^{ij} \partial_j(f) \partial_i.$$

Além disso, segue das propriedades de derivação que se $f, h : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então $\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h$ e $\nabla(fh) = h\nabla f + f \nabla h$.

Proposição 1.2. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$d(\phi \circ f) = \phi'(f) df.$$

Demonstração. Pelo caráter tensorial da diferencial df, provaremos apenas no referencial coordenado $\{\partial_i\}$. Por definição,

$$d(\phi \circ f)(\partial_i) = \partial_i(\phi \circ f) = \phi'(f)\partial_i(f) = \phi'(f) df(\partial_i).$$

□

Observação 1.3. *Dizemos que um referencial ortonormal $\{E_i\}$ em um aberto $U \subset M^n$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$.*

Definição 1.7. *Seja X um campo de vetores suave em M. A divergência de X é a função suave* $\mathrm{div} X : M \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$(\mathrm{div} X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\},$$

onde $v \in T_pM$.

Seja $\{E_i\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$ de p. Escrevendo o campo $X = \sum_i a_i E_i$ em U, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle &= \sum_i \big(E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle \big) \\ &= \sum_i \big(E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \big). \end{aligned}$$

Em particular, se o referencial $\{E_i\}$ for geodésico em $p \in U$, teremos $\mathrm{div} X = \sum_i E_i(a_i)$.

Ademais, segue diretamente das propriedades de conexão e da definição de gradiente que

$$\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y \quad \text{e} \quad \mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \langle \nabla f, X\rangle.$$

Definição 1.8. *Seja $f: M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O laplaciano de f é a função suave $\Delta f: M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Segue pelas propriedades do gradiente e divergente que $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$, e para duas funções suaves $f, h: M \to \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= \mathrm{div}(\nabla(fh)) = \mathrm{div}(h\nabla f) + \mathrm{div}(f\nabla h) \\
&= h\,\mathrm{div}(\nabla f) + \langle \nabla h, \nabla f\rangle + f\,\mathrm{div}(\nabla h) + \langle \nabla f, \nabla h\rangle \\
&= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle.
\end{aligned}$$

Definição 1.9. *Seja $f: M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$-tensor dado por*

$$\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Através do $(0,2)$-tensor associado, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\
&= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) = \nabla^2_{X,Y}(f).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Além disso, o hessiano é um tensor simétrico. De fato,

$$\nabla^2_{Y,X}(f) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f). \tag{1.7}$$

Subtraindo (1.6) de (1.7) concluímos a afirmação. Ademais, segue da definição que

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\nabla^2 f). \tag{1.8}$$

Proposição 1.3. *Sejam f, h funções suaves em (M^n, g). Então são válidas as afirmações:*

(1) $\nabla^2 f = \nabla df$;

(2) $\nabla h df = h\nabla^2 f + dh \otimes df$;

(3) $\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) = \frac{1}{2} d|\nabla f|^2$.

Demonstração. (1) Segue por definição da derivada covariante e do hessiano que, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}\nabla df(X,Y) &= \nabla_X\big(df(Y)\big) - df(\nabla_X Y)\\ &= X\big(Y(f)\big) - \big(\nabla_X Y\big)(f)\\ &= \nabla^2 f(X,Y).\end{aligned}$$

(2) De fato, pelas propriedades de conexão e por (1), para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla hdf(X,Y) &= (\nabla_X hdf)(Y) = h(\nabla_X df)(Y) + X(h)df(Y)\\ &= h\nabla df(X,Y) + dh(X)df(Y)\\ &= \big(h\nabla^2 f + dh\otimes df\big)(X,Y).\end{aligned}$$

(3) Com efeito, por definição de gradiente e pela compatibilidade da métrica, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned}d|\nabla f|^2(X) &= X(|\nabla f|^2) = X\left(g(\nabla f, \nabla f)\right)\\ &= 2g(\nabla_X \nabla f, \nabla f) = 2\nabla^2 f(X, \nabla f)\\ &= 2\nabla^2 f(\nabla f, X).\end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.10. *Definimos a divergência de um $(1,r)$-tensor T em (M^n, g) como sendo o $(0,r)$-tensor dado por*

$$(\mathrm{div}T)(v_1,\ldots,v_r)(p) = \mathrm{tr}\left(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1,\ldots,v_r)(p)\right),$$

onde $p \in M$ e $(v_1,\ldots,v_r) \in T_pM \times \cdots \times T_pM$.

Para o $(1,1)$-tensor T considere um referencial ortonormal local $\{E_i\}$, então, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}T)(Z) &= \sum_i g\left((\nabla_{E_i} T)(Z), E_i\right)\\ &= \sum_i g\left(\nabla_{E_i} T(Z) - T(\nabla_{E_i} Z), E_i\right)\\ &= \mathrm{div}(T(Z)) - \sum_i T(\nabla_{E_i} Z, E_i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{div}(T(Z)) = (\mathrm{div}T)(Z) + g(\nabla Z, T^*). \tag{1.9}$$

Proposição 1.4. *Seja T um $(0,2)$-tensor simétrico em (M^n, g). Então, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e cada $\varphi \in C^\infty(M)$,*

$$\operatorname{div}(T(\varphi Z)) = \varphi(\operatorname{div}T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z).$$

Demonstração. Segue das propriedades do divergente, da equação (1.9) e da simetria de T que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(T(\varphi Z)) &= \operatorname{div}(\varphi T(Z)) = \varphi\operatorname{div}(T(Z)) + g(\nabla\varphi, T(Z))\\ &= \varphi(\operatorname{div}T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z).\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. São válidas as afirmações:*

(1) $\operatorname{div}(fI) = df$*;*

(2) $\operatorname{div}Ric = \frac{1}{2}dS$ *(Segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes).*

Demonstração. (1) Segue da equação (1.9) e das propriedades de divergente de campos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fI)(X) &= \operatorname{div}(fI(X)) - g(\nabla X, fI)\\ &= f\operatorname{div}X + g(\nabla f, X) - f\operatorname{div}X\\ &= df(X).\end{aligned}$$

(2) Pelo caráter pontual dos tensores, é suficiente provar para um referencial geodésico $\{E_i\}$ em $p \in M$. Para isso, usaremos as notações $R(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}$ e $\nabla_{E_i} = \nabla_i$. Sendo assim, observe que, em p,

$$dS(E_k) = E_k(S) = E_k\Big(\sum_i Ric(E_i, E_i)\Big) = \sum_{i,j} E_k\langle R_{jii}, E_j\rangle = \sum_{i,j}\langle \nabla_k R_{jii}, E_j\rangle.$$

Pela antissimetria dos dois primeiros índices do tensor curvatura e pela Segunda Identidade de Bianchi 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}dS(E_k) = -\sum_{i,j}\langle \nabla_k R_{iji}, E_j\rangle &= \sum_{i,j}\langle \nabla_i R_{jki}, E_j\rangle + \sum_{i,j}\langle \nabla_j R_{kii}, E_j\rangle\\ &= \sum_{i,j}\langle \nabla_i R_{jki}, E_j\rangle + \sum_{i,j}\langle \nabla_j R_{ikj}, E_i\rangle\\ &= 2\sum_{i,j}\langle \nabla_i R_{jki}, E_j\rangle, \qquad (1.10)\end{aligned}$$

onde na penúltima parcela usamos que $E_j\langle R_{kii}, E_j\rangle = E_j\langle R_{ikj}, E_i\rangle$ em p e na última parcela trocamos i por j. Por outro lado, ainda no ponto p, temos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}Ric)(E_k) &= \sum_i \langle(\nabla_i Ric)E_k, E_i\rangle = \sum_i \langle \nabla_i Ric(E_k), E_i\rangle \\
&= \sum_i E_i\langle Ric(E_k), E_i\rangle = \sum_{i,j} E_i\langle R_{jki}, E_j\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, E_j\rangle. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

De (1.10) e (1.11) segue o resultado. □

1.3 Campos conformes

Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é *conforme* se existir uma função suave ψ em M tal que

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g.$$

A função ψ é chamada *fator conforme* de X. Diremos que X é um campo de vetores conforme *trivial* se ψ for constante.

O caráter conforme de um campo é invariante por mudança conforme da métrica. Isto significa que se g e $\overline{g}$ são métricas conformes, isto é, $\overline{g} = \mu g$, para alguma função positiva $\mu \in C^\infty(M)$, e X é conforme em relação à g, então X é conforme em relação à $\overline{g}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \overline{g} = \mathcal{L}_X(\mu g) &= X(\mu)g + \mu\mathcal{L}_X g \\
&= X(\mu)g + 2\mu\psi g \\
&= 2\big(X(\mu)/2\mu + \psi\big)\overline{g}.
\end{aligned}$$

Portanto $\overline{g}$ também é conforme em relação à X com fator conforme $\psi + X(\mu)/2\mu$.

Outras propriedades de campos conformes são as equações encontradas em Obata e Yano [24]. Se X é conforme em (M^n, g), com fator conforme ψ, então

$$\begin{cases}
\frac{1}{2}\mathcal{L}_X S = -(n-1)\Delta\psi - S\psi; & (1.12)\\
\mathcal{L}_X \mathring{Ric} = -(n-2)\mathring{\nabla}^2\psi = -(n-2)\left(\nabla^2\psi - \frac{\Delta\psi}{n}g\right). & (1.13)
\end{cases}$$

Em particular, se a curvatura escalar for constante em (1.12), então

$$-\Delta\psi = \frac{S}{n-1}\psi, \qquad (1.14)$$

isto é, ψ é uma autofunção do laplaciano. Na hipótese mais forte de (M^n, g) ser Einstein, então pelo Lema de Schur 1.1, a curvatura escalar é constante e a equação (1.13) é reescrita como segue

$$\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n} g = -\frac{S}{n(n-1)}\psi g. \tag{1.15}$$

1.4 Resultados auxiliares

Em seguida, abordaremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Proposição 1.6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $f \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f.$$

Demonstração. De fato, pela propriedade da derivada de Lie para $(0,2)$-tensores, veja Petersen [25], temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(Y, Z) &= \nabla f(g(Y, Z)) - g([\nabla f, Y], Z) - g(Y, [\nabla f, Z]) \\
&= g(\nabla_{\nabla f} Y, Z) + g(Y, \nabla_{\nabla f} Z) - g(\nabla_{\nabla f} Y - \nabla_Y \nabla f, Z) - g(Y, \nabla_{\nabla f} Z - \nabla_Z \nabla f) \\
&= g(\nabla_Y \nabla f, Z) + g(\nabla_Z \nabla f, Y) \\
&= 2\nabla^2 f(Y, Z).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.7. *Sejam X, Y campos de vetores suaves em (M^n, g). Então,*

$$Ric(X, Y) = \mathrm{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\mathrm{div} Y)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla Y\rangle.$$

Demonstração. Veja Gomes [15]. □

Proposição 1.8. *Seja f uma função suave em (M^n, g). Então,*

$$\mathrm{div}(\nabla^2 f) = d\Delta f + Ric(\nabla f, \cdot).$$

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 1.7,

$$\begin{aligned}
Ric(X, \nabla f) &= \mathrm{div}(\nabla_X \nabla f) - \langle X, \nabla\left(\mathrm{div}(\nabla f)\right)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla\nabla f\rangle \\
&= \mathrm{div}(\nabla^2 f(X)) - (d\Delta f)(X) - \langle \nabla X, \nabla^2 f\rangle.
\end{aligned}$$

Utilizando a equação (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} Ric(X, \nabla f) + (d\Delta f)(X) &= \operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle \\ &= (\operatorname{div} \nabla^2 f)(X), \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. O resultado segue pela simetria do tensor de Ricci. $\square$

Teorema 1.2 (Teorema da Divergência)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo ∂M de M está munido com a orientação e a métrica induzida por M, e ν denota o normal exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M \operatorname{div} X dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M).$$

Em particular, se $\partial M = \emptyset$ tem-se

$$\int_M \operatorname{div} X dM = 0.$$

Demonstração. Veja Lee [20]. $\square$

Teorema 1.3 (Princípio do Máximo de Hopf)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanianna compacta sem bordo, orientável e f uma função suave em M. Se $\Delta f \geqslant 0$ (ou $\Delta f \leqslant 0$), então f é constante.*

Demonstração. De fato, segue por hipótese e do Teorema da Divergência 1.2 que

$$0 \leqslant \int_M \Delta f dM = \int_M \operatorname{div}(\nabla f) dM = 0.$$

Desta forma, $\Delta f = 0$ e o resultado segue das Identidades de Green, veja [20]. $\square$

Capítulo 2

Variedades tipo-Einstein gradiente

O nosso objetivo é estudar algumas propriedades da estrutura tipo-Einstein gradiente. Os dois primeiros resultados de rigidez serão estudados através de uma função auxiliar u.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana admitindo a estrutura tipo-Einstein gradiente (2). Considere a função suave $u : M \to \mathbb{R}^+$ dada por $u = e^{\frac{\mu}{\beta} f}$, onde β e μ são não nulos. Então, pela Proposição 1.2 tem-se $du = \frac{\mu}{\beta} u df$, e usando a Proposição 1.3, obtemos

$$\nabla^2 u = \nabla du = \frac{\mu}{\beta} \nabla u df = \frac{\mu}{\beta} \big(u \nabla^2 f + du \otimes df \big) = \frac{\mu}{\beta} u \left(\nabla^2 f + \frac{\mu}{\beta} df \otimes df \right).$$

Desta forma, podemos escrever

$$\frac{\beta^2}{\mu u} \nabla^2 u = \beta \nabla^2 f + \mu df \otimes df.$$

Substituindo em (2), concluímos que a estrutura tipo-Einstein gradiente é equivalente a

$$\frac{\alpha}{\beta} Ric + \frac{\beta}{\mu u} \nabla^2 u = \tilde{\lambda} g, \tag{2.1}$$

onde $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\beta}(\rho S + \lambda)$.

O lema a seguir é essencial para o resultado de rigidez no caso compacto e também é usado no estudo do caso não compacto.

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente com β e μ não nulos. Então,*

$$\operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big) = \frac{n-2}{2n} \langle \nabla u, \nabla S \rangle - \frac{\alpha \mu}{\beta^2} u \|\mathring{Ric}\|^2,$$

em que $u = e^{\frac{\mu}{\beta} f}$.

Demonstração. De fato, pela expressão (1.9), temos

$$\mathrm{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big) = \big(\mathrm{div}\mathring{Ric}\big)(\nabla u) + \langle \nabla^2 u, \mathring{Ric}\rangle. \tag{2.2}$$

Usando a Proposição 1.5, temos que

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{div}\mathring{Ric}\big)(\nabla u) &= \big(\mathrm{div}Ric\big)(\nabla u) - \big(\mathrm{div}\frac{S}{n}g\big)(\nabla u)\\ &= \frac{1}{2}dS(\nabla u) - \frac{1}{n}dS(\nabla u)\\ &= \frac{n-2}{2n}\langle \nabla S, \nabla u\rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por outro lado, lembrando que $\langle g, \mathring{Ric}\rangle = \mathrm{tr}(\mathring{Ric}) = 0$ e usando a expressão (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla^2 u, \mathring{Ric}\rangle = \frac{\mu}{\beta}u\Big\langle \tilde{\lambda}g - \frac{\alpha}{\beta}Ric, \mathring{Ric}\Big\rangle &= -\frac{\alpha\mu}{\beta^2}u\Big\langle \mathring{Ric} + \frac{S}{n}g, \mathring{Ric}\Big\rangle\\ &= -\frac{\alpha\mu}{\beta^2}u\|\mathring{Ric}\|^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto, substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2) segue o afirmado. □

2.1 Caso compacto

O primeiro resultado de rigidez é sobre a esfera padrão e sua demonstração é motivada do resultado correspondente em variedades m-quasi-Einstein generalizada em Barros e Gomes [1].

Assumiremos que β e μ sejam não nulos. Entretanto, para $\alpha = \mu = 0$, a estrutura é abrangida em Obata [23]. Já o caso $\alpha \neq 0$, $\mu = 0$ é suficiente usar os resultados de quase-sólitons de Ricci em Barros e Ribeiro [3]. Em ambos a conclusão é que a variedade é isométrica a uma esfera padrão, desde que a curvatura escalar seja constante.

Teorema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente compacta, não trivial, de curvatura escalar constante com β e μ não nulos. Então, (M^n, g) é isométrica a uma esfera padrão $\mathbb{S}^n(c)$. Além disso, a menos de homotetia e uma constante, a função potencial é dada por*

$$f = \frac{\beta}{\mu}\ln\left(\tau - \frac{h_v}{n}\right),$$

onde $\tau \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$ e h_v é uma função altura na esfera unitária $\mathbb{S}^n$.

Demonstração. Analisaremos primeiro o caso em que $\alpha \neq 0$. Como a curvatura escalar S

é constante, pelo Lema 2.1,

$$\operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big) = -\frac{\alpha\mu}{\beta^2} u \|\mathring{Ric}\|^2.$$

Aplicando o Teorema da Divergência 1.2, temos

$$0 = \int_M \operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big) dM = -\frac{\alpha\mu}{\beta^2} \int_M u \|\mathring{Ric}\|^2 dM.$$

Como $\alpha, \mu \neq 0$ e u é uma função positiva segue que $\|\mathring{Ric}\|^2 = 0$, isto é, (M^n, g) é uma variedade Einstein. Reescrevendo (2.1), obtemos

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{S}{n} g + \frac{\beta}{\mu u}\nabla^2 u = \tilde{\lambda} g \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = \left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda} u - \frac{\alpha\mu}{\beta^2}\frac{S}{n} u\right) g \tag{2.5}$$

e, pela Proposição 1.6,

$$\mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\psi g, \quad \text{onde} \quad \psi = \left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda} - \frac{\alpha\mu}{\beta^2}\frac{S}{n}\right) u. \tag{2.6}$$

Desta forma, ∇u é um campo vetorial gradiente conforme não trivial. De fato, tomando o traço em (2.6) e usando a Proposição 1.6, temos que o fator conforme é dado por $\psi = \frac{\Delta u}{n}$. Segue do Princípio do Máximo de Hopf 1.3 e da estrutura tipo-Einstein gradiente ser não trivial que ψ não pode ser constante.

Como por hipótese S é constante, pela equação (1.14) referente a campos conformes, temos

$$-\Delta \psi = \frac{S}{n-1}\psi, \tag{2.7}$$

e portanto $\frac{S}{n-1}$ é um autovalor do laplaciano. Segue que $S > 0$, pois ψ não é constante.

Por (M^n, g) ser Einstein, então pela equação (1.15) referente a campos conformes, obtemos que

$$\nabla^2 \psi = -\frac{S}{n(n-1)}\psi g.$$

Agora podemos aplicar o Teorema de Obata [23] para concluir que (M^n, g) é isométrica à esfera padrão $\mathbb{S}^n(c)$, de curvatura $c = \sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}$. Fazendo homotetia na métrica podemos supor $S = n(n-1)$. Substituindo em (2.7) e usando que $\psi = \frac{\Delta u}{n}$, obtemos

$$-\Delta\Delta u = n\Delta u. \tag{2.8}$$

Desta maneira, Δu é uma autofunção associada ao primeiro autovalor da esfera unitária

$\mathbb{S}^n$. Por Berger [4], segue que $\Delta u = h_v$, onde $v \in \mathbb{S}^n$. Assim, podemos reescrever a equação (2.8) como segue

$$-\Delta h_v = n\Delta u \quad \Rightarrow \quad \Delta\left(\frac{h_v}{n} + u\right) = 0.$$

Pelo Princípio do Máximo de Hopf 1.3 concluímos que $u = \tau - \frac{h_v}{n}$, onde τ é uma constante positiva. Ademais, como v é unitário segue que $h_v \leqslant 1$ e portanto,

$$0 < u = \tau - \frac{h_v}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_v}{n} < \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \tau.$$

Para o caso $\alpha = 0$, a equação (2.1) é reduzida a

$$\nabla^2 u = \psi g, \quad \text{onde} \quad \psi = \frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda} u. \tag{2.9}$$

Novamente pela Proposição 1.6 segue que ∇u é um campo vetorial gradiente conforme não trivial, explicitamente, $\mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\psi g$, onde $\psi = \frac{\Delta u}{n}$.

Como S é constante, pela equação (1.14) referente a campos conformes $\Delta\psi = -\frac{S}{n-1}\psi$. Desta forma,

$$\Delta u = n\psi = -\frac{n(n-1)}{S}\Delta\psi,$$

e pelo Princípio do Máximo de Hopf 1.3 existe uma constante τ tal que

$$u = -\frac{n(n-1)}{S}\psi + \tau \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{S}{n(n-1)}u + \frac{S}{n(n-1)}\tau.$$

Usando (2.9), obtemos

$$\nabla^2\psi = -\frac{S}{n(n-1)}\nabla^2 u = -\frac{S}{n(n-1)}\psi g.$$

Agora basta proceder como no caso anterior. $\square$

No Apêndice A calculamos o hessiano da função altura h_v na esfera unitária (e no espaço hiperbólico) de duas maneiras. A partir disso pode-se verificar que a função altura é uma autofunção do laplaciano.

Na prova do Teorema 2.1 identificamos que o Lema 2.1 é a principal fórmula para analisarmos o caso não compacto. Além disso, a equivalência entre as equações (2) e (2.1) e a definição da função u motiva o estudo dos seguintes exemplos.

Exemplo 2.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g_\circ)$ o espaço Euclidiano. Considere a função $f = \frac{\beta}{\mu}\ln(u)$ com β e μ números reais não nulos e $u = \|x\|^2 + \tau$, onde τ é uma constante positiva. Então, o* *hessiano de u como $(1,1)$-tensor é dado matricialmente por*

$$\nabla^2 u = \left[\partial_i \partial_j (u)\right]_{n\times n} = \left[\partial_i (2x_j)\right]_{n\times n} = 2\left[\delta_{ij}\right]_{n\times n} = 2I. \tag{2.10}$$

Deste modo, observando que em $(\mathbb{R}^n, g_\circ)$ o tensor de Ricci é identicamente nulo, podemos substituir (2.10) no lado esquerdo da equação (2.1), obtendo

$$\frac{\alpha}{\beta} Ric + \frac{\beta}{\mu u} \nabla^2 u = 2\frac{\beta}{\mu u} g_\circ.$$

Sendo assim, como a curvatura escalar S também é identicamente nula, podemos tomar $\lambda = 2\frac{\beta^2}{\mu u}$ concluindo que f e λ parametrizam $(\mathbb{R}^n, g_\circ)$ com uma estrutura tipo-Einstein gradiente não trivial.

Exemplo 2.2. *Seja $\big(\mathbb{M}^n(c), g_\circ\big)$ a esfera padrão $\mathbb{S}^n$ para $c = 1$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ para $c = -1$. Denote por h_v a função altura com $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixo e unitário. Considere as funções $f = \frac{\beta}{\mu}\ln(u)$, onde $u = \tau - \frac{c}{n} h_v$ com $\tau \in \left(\frac{c}{n}, +\infty\right)$ e*

$$\lambda = c\left[-\rho n(n-1) + \alpha(n-1) + \frac{\beta^2}{\mu}\frac{(\tau - u)}{u}\right],$$

onde ρ, α, β e μ são constantes reais com β e μ não nulos.

Usando que $S = cn(n-1)$ e como $\big(\mathbb{M}^n(c), g_\circ\big)$ é uma variedade Einstein, segue que $Ric = c(n-1)g_\circ$. Além disso, $\nabla^2 u = \frac{h_v}{n} g_\circ$ (veja Apêndice A), e assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} Ric + \frac{\beta}{\mu u}\nabla^2 u &= \frac{\alpha}{\beta} c(n-1) g_\circ + \frac{\beta}{\mu u}\frac{h_v}{n} g_\circ \\
&= c\left[\frac{\alpha}{\beta}(n-1) + \frac{\beta}{\mu u}\frac{c}{n} h_v\right] g_\circ \\
&= c\left[\frac{\alpha}{\beta}(n-1) + \frac{\beta}{\mu}\frac{(\tau - u)}{u}\right] g_\circ.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}(\rho S + \lambda) &= \frac{1}{\beta}\left\{\rho c n(n-1) + c\left[-\rho n(n-1) + \alpha(n-1) + \frac{\beta^2}{\mu}\frac{(\tau-u)}{u}\right]\right\} \\
&= c\left[\frac{\alpha}{\beta}(n-1) + \frac{\beta}{\mu}\frac{(\tau-u)}{u}\right].
\end{aligned}$$

Desta forma, f e λ parametrizam $\big(\mathbb{M}^n(c), g_\circ\big)$ com uma estrutura tipo-Einstein gradiente não trivial.

2.2 Caso não compacto

O objetivo dessa seção é, sob algumas condições geométricas, estabelecer resultados de rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente não triviais. A ideia provém do Lema 2.1, onde no caso compacto é utilizado o Teorema da Divergência para concluir que a variedade é Einstein. O primeiro passo é provar o seguinte lema.

Lema 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente não trivial com β e μ não nulos. Se (M^n, g) é uma variedade Einstein, então a função suave positiva $u = e^{\frac{\mu}{\beta}f}$ produz um campo concircular especial em (M^n, g). Mais precisamente, u satisfaz a equação*

$$\nabla^2 u = (-Ku + C)g,$$

com coeficientes constantes K e C, onde $K = \frac{S}{n(n-1)}$.

Demonstração. Se (M^n, g) é uma variedade Einstein, pela segunda equação de (2.5) tem-se que

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}u - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{S}{n}u\right)g \quad \text{e} \quad \Delta u = \left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}u - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{S}{n}u\right)n. \tag{2.11}$$

Segue da Proposição 1.5 que $\operatorname{div}(\nabla^2 u) = \nabla\left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}u - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{S}{n}u\right)$. Logo, pela Proposição 1.8,

$$\nabla\left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}u - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{S}{n}u\right) = \nabla\left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}nu - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}Su\right) + \frac{S}{n}\nabla u,$$

e assim,

$$\nabla\left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}(n-1)u + \frac{S}{n}u - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{(n-1)}{n}Su\right) = 0.$$

Dividindo esta equação por $(n-1)$, obtemos

$$\nabla\left(\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}u + \frac{S}{n(n-1)}u - \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{S}{n}u\right) = 0.$$

Pela conexidade de M existe uma constante C tal que

$$\frac{\mu}{\beta}\tilde{\lambda}u = -\frac{S}{n(n-1)}u + \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\frac{S}{n}u + C. \tag{2.12}$$

Substituindo na primeira identidade de (2.11) obtemos $\nabla^2 u = \left(-\frac{S}{n(n-1)}u + C\right)g$ e tomando $K = \frac{S}{n(n-1)}$ o resultado segue. Note que pelo Lema de Schur 1.1 S é constante. $\square$

O segundo passo é o Teorema de Karp, uma extensão geral do Teorema de Stokes para o caso não compacto, e um de seus corolários.

Lema 2.3 (Teorema de Karp [18]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e não compacta. Considere a bola geodésica $B(r)$ de raio r centrada em algum ponto fixado $x \in M$ e um campo vetorial X tal que*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{B(2r)\setminus B(r)} \|X\| dM = 0.$$

Se $\operatorname{div}X$ possui uma integral (ou seja, se $(\operatorname{div}X)^+$ ou $(\operatorname{div}X)^-$ for integrável), então $\int_M \operatorname{div}X dM = 0$. Em particular, se $\operatorname{div}X$ não muda de sinal fora de algum conjunto compacto, então $\int_M \operatorname{div}X dM = 0$.

Corolário 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, não compacta e com a seguinte propriedade: existe $L > 0$ e $q \geqslant 1$ tal que $vol\,(B(r)) \leqslant Lr^q$, para $r \geqslant 1$. Se $\operatorname{div}X \geqslant 0$ fora de algum conjunto compacto e ou (a) $q > 1$ e $X \in L^p\,(M, dM)$, onde $1/p + 1/q = 1$ ou (b) $q = 1$ e $\|X\| \to 0$ uniformemente para o infinito em M, então $\int_M \operatorname{div}X dM = 0$.*

Teorema 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente completa, não compacta, não trivial, de curvatura escalar constante e com α, β e μ não nulos. Considere $u = e^{\frac{\mu}{\beta}f}$ e a bola geodésica $B(r)$ centrada em algum ponto fixado $x \in M$. Além disso, suponha que pelo menos uma das seguintes condições seja satisfeita:*

(1) $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{B(2r)\setminus B(r)} \|\mathring{Ric}(\nabla u)\| dM = 0.$

(2) $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{B(2r)\setminus B(r)} \|\nabla u\| dM = 0$ *e as curvaturas de Ricci são limitadas superiormente.*

(3) *Existe $L > 0$ tal que $vol\,(B(r)) \leqslant Lr^q$, para $r \geqslant 1$ e $\mathring{Ric}(\nabla u) \in L^p\,(M, dM)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $q > 1$.*

(4) *Existe $L > 0$ tal que $vol\,(B(r)) \leqslant Lr$, para $r \geqslant 1$ e $\|\nabla u\| \to 0$ uniformemente para o infinito em M.*

Então, (M^n, g) é uma variedade Einstein com curvatura escalar S não positiva e u possui no máximo um ponto crítico. Mais precisamente:

(i) *Se $S = 0$, então λ não possui zeros e (M^n, g) é isométrica a um espaço Euclidiano.*

(ii) *Se $S < 0$ e u possui apenas um ponto crítico, então (M^n, g) é isométrica a um espaço hiperbólico.*

(iii) *Se $S < 0$ e u não possui ponto crítico, então (M^n, g) é isométrica a um produto deformado $\mathbb{R} \times_\varphi \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é uma variedade Einstein completa, e φ é uma solução positiva da equação diferencial $\ddot{\varphi} + \frac{S}{n(n-1)}\varphi = 0$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Em vista do Lema 2.1 e das condições do Teorema de Karp 2.3, o teorema será provado sob a hipótese mais fraca de S constante para $\langle \nabla u, \nabla S\rangle \leqslant 0$ em M, se $\alpha\mu > 0$, ou $\langle \nabla u, \nabla S\rangle \geqslant 0$ em M, se $\alpha\mu < 0$. Em todo caso, $\operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big)$ no Lema 2.1 não muda de sinal em M.

Item (1)**:** Se (1) vale, então pelo Lema 2.1 e usando o Teorema de Karp 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big) dM \\ &= \int_M \frac{n-2}{2n}\langle \nabla u, \nabla S\rangle dM - \int_M \frac{\alpha\mu}{\beta^2} u \|\mathring{Ric}\|^2 dM. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pela hipótese mais fraca de $\operatorname{div}\big(\mathring{Ric}(\nabla u)\big)$ não mudar de sinal em M, segue que ambas as parcelas de (2.13) são nulas. Em particular, $\mathring{Ric} \equiv 0$, isto é, M é uma variedade Einstein e pelo Lema de Schur 1.1 S é constante. Ademais, como M também é completa e não compacta, segue do Teorema de Bonnet-Myers que $S \leqslant 0$ (ver Bonnet [5] e Myers [22]).

Item (2)**:** Suponha que (2) seja válido. Então existe uma constante $K > 0$ tal que $\rho_i \leqslant \sqrt{\frac{K}{n}}$, para $i = 1 \ldots n$, onde ρ_i são as curvaturas de Ricci. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal e note que, por (1.4), tem-se

$$\|Ric\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle Ric(E_i), Ric(E_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 \leqslant K.$$

Assim,

$$\|\mathring{Ric}(\nabla u)\|^2 \leqslant \|\mathring{Ric}\|^2 \|\nabla u\|^2 = \left(\|Ric\|^2 - \frac{S^2}{n}\right) \|\nabla u\|^2 \leqslant K \|\nabla u\|^2.$$

Portanto, o Item (2) implica o Item (1).

Itens (3) **e** (4)**:** Ambos os Itens (3) e (4) implicam o Item (1). Isto segue diretamente do Corolário 2.1 do Teorema de Karp.

Agora, como consequência do Lema 2.2, u satisfaz

$$\nabla^2 u = \left(-\frac{S}{n(n-1)} u + C\right) g, \tag{2.14}$$

onde C é uma constante dada em (2.12). Desta forma, podemos aplicar o Teorema 2 em Tashiro [27] para deduzir que (M^n, g) é como em $(i) - (iii)$.

(a) Caso $S = 0$: Aqui a prova depende da nulidade ou não da função λ. De (2.12) obtemos que $C = \frac{\mu}{\beta^2}\lambda u$. Assim, se $C = 0$, então $\lambda \equiv 0$. Reciprocamente, se existe $x \in M$ tal que $\lambda(x) = 0$, então $C = 0$ e $\lambda \equiv 0$. E, se λ não possui zeros, teremos $C \neq 0$.

Item (i)**:** Suponha por absurdo que exista $x \in M$ tal que $\lambda(x) = 0$. Então $C = 0$, $\lambda \equiv 0$ e consequentemente $\nabla^2 u = 0$ e $Ric \equiv 0$ por (2.1). Desta forma, $\Delta u = 0$ e isto é uma contradição, pois não seria possível encontrar uma função harmônica positiva não constante u em uma variedade com tensor de Ricci nulo, veja Yau [28]. Assim, segue que $C \neq 0$ e $\nabla^2 u = Cg$. Portanto, (M^n, g) é isométrica a um espaço Euclidiano. Como u por construção é positivo, podemos tomar, por exemplo, $u(x) = \|x\|^2 + \tau$, com $\tau > 0$. Neste caso, a estrutura tipo-Einstein gradiente em (M^n, g) é dada no Exemplo 2.1.

(b) Caso $S < 0$: A prova depende nesse caso do número de pontos críticos do campo escalar concircular u (que é no máximo um, veja [27]).

Item (ii)**:** Se u possui apenas um ponto crítico, então (M^n, g) é isométrica a um espaço hiperbólico. Uma solução positiva não trivial de (2.14) em $\mathbb{H}^n$ foi apresentada no Exemplo 2.2.

Item (iii)**:** Se u não possui pontos críticos, então (M^n, g) é isométrica a um produto deformado Einstein $\mathbb{R} \times_\varphi \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é uma variedade Einstein completa e φ é uma solução positiva da equação diferencial $\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$ em $\mathbb{R}$, com $k = \frac{S}{n(n-1)}$, veja Masahiko [21].

$\square$

Exemplo 2.3. *Seja I um intervalo aberto da reta contendo a origem de forma que $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, dada por*

$$\varphi(t) = \frac{a}{\sqrt{-k}} \operatorname{senh}(\sqrt{-k}t) + \sqrt{\frac{a^2 + l}{-k}} \cosh(\sqrt{-k}t),$$

seja uma função positiva, onde $a > 0, l \geqslant 0$ e $k < 0$ são constantes. Note que esta função é solução da equação diferencial $\ddot{\xi} + k\xi = 0$. De fato,

$$\dot{\varphi}(t) = a\cosh(\sqrt{-k}t) + \sqrt{a^2 + l}\, \operatorname{senh}(\sqrt{-k}t)$$

e

$$\ddot{\varphi}(t) = a\sqrt{-k}\, \operatorname{senh}(\sqrt{-k}t) + \sqrt{-k}\sqrt{a^2 + l}\cosh(\sqrt{-k}t),$$

portanto $\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$. Além disso, observe que

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}(0)\frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{senh}(\sqrt{-k}t) + \varphi(0)\cosh(\sqrt{-k}t).$$

Seja agora $(\mathbb{F}^{n-1}, g_{\mathbb{F}})$ uma variedade Einstein completa com tensor de Ricci dado por

$$\begin{aligned} Ric_{g_{\mathbb{F}}} &= -(n-2)\left(-\dot{\varphi}(0)^2 - k\varphi(0)^2\right) g_{\mathbb{F}} \\ &= -(n-2)\left[-a^2 - k\left(\frac{a^2+l}{-k}\right)\right] g_{\mathbb{F}} \\ &= -(n-2) l g_{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 2.1 *em Pigola et al. [26] podemos construir um produto deformado Einstein $M^n = I \times_{\varphi} \mathbb{F}$ munido com a métrica*

$$g = dt^2 + \varphi(t)^2 g_{\mathbb{F}}$$

e tensor de Ricci dado por $Ric = (n-1)kg$. Além disso, $u(t,p) = \varphi(t)$ é uma função positiva satisfazendo a equação diferencial $\nabla^2 u + kug = 0$ em (M^n, g). Escrevendo $u = e^{\frac{\mu}{\beta}\frac{\beta}{\mu}\ln(u)}$, então pelo lado esquerdo da expressão (2.1), *obtemos*

$$\frac{\alpha}{\beta} Ric + \frac{\beta}{\mu u}\nabla^2 u = \frac{\alpha}{\beta}(n-1)kg - \frac{k\beta}{\mu} g = \left(\frac{\alpha}{\beta}(n-1)k - \frac{k\beta}{\mu}\right) g.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{\beta}(\rho S + \lambda) g = \left(\frac{1}{\beta}\rho n(n-1)k + \frac{\lambda}{\beta}\right) g.$$

Desta forma, tomando $\lambda = -\rho n(n-1)k + \alpha(n-1)k - \frac{k\beta^2}{\mu}$ concluímos que $f = \frac{\beta}{\mu}\ln(u)$ e λ parametrizam (M^n, g) com uma estrutura tipo-Einstein gradiente não trivial, para cada α, β, μ e ρ, onde β e μ são não nulos.

Agora, iremos estudar algumas condições para uma variedade tipo-Einstein gradiente não compacta (com $\beta \neq 0$) ser uma variedade Einstein. Entretanto, algumas restrições sobre os parâmetros α e μ precisam ser estabelecidas. A primeira, que parece ser mais natural, é considerá-los não nulos. Neste caso, como feito em (2.1), a equação (2) é equivalente a

$$Ric + h\nabla^2 u = \ell g, \tag{2.15}$$

onde $u = e^{\frac{\mu}{\beta}f}$, $h = \frac{\beta^2}{\alpha\mu}\frac{1}{u}$ e $\ell = \frac{1}{\alpha}(\rho S + \lambda)$. Agora, podemos aplicar a abordagem de variedades m-quasi-Einstein generalizada.

No que segue, assumiremos que u, h e ℓ são funções suaves arbitrárias satisfazendo a equação (2.15) na variedade Riemanniana (M^n, g). Então, usando as Proposições 1.5, 1.4

e 1.8, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}dS = \mathrm{div}Ric = \mathrm{div}(\ell g - h\nabla^2 u) &= \mathrm{div}(\ell g) - \mathrm{div}(h\nabla^2 u)\\ &= d\ell - h\mathrm{div}\nabla^2 u - \nabla^2 u\,(\nabla h, \cdot)\\ &= d\ell - hRic(\nabla u, \cdot) - hd\Delta u - \nabla^2 u(\nabla h, \cdot). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que $d(h\Delta u) = hd\Delta u + \Delta u dh$. Tomando o traço em (2.15), por (1.5) e (1.8) tem-se que $h\Delta u = n\ell - S$. Substituindo em (2.16), obtemos

$$\frac{1}{2}dS = d\ell - hRic(\nabla u, \cdot) - nd\ell + dS + \Delta u dh - \nabla^2 u(\nabla h, \cdot)$$

o que implica

$$(n-1)d\ell = \frac{1}{2}dS - hRic(\nabla u, \cdot) + \Delta u dh - \nabla^2 u(\nabla h, \cdot). \tag{2.17}$$

Por outro lado, segue da equação (2.15) e da Proposição 1.3 que

$$\begin{aligned} hRic(\nabla u, \cdot) &= \ell h du - h^2\nabla^2 u(\nabla u, \cdot)\\ &= \ell h du - \frac{h^2}{2} d|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Substituindo (2.18) em (2.17), obtemos

$$(n-1)d\ell = \frac{1}{2}dS - \ell h du + \frac{h^2}{2} d|\nabla u|^2 + \Delta u dh - \nabla^2 u(\nabla h, \cdot). \tag{2.19}$$

Em particular, para $h = \frac{c}{u}$, onde $c = \frac{\beta^2}{\alpha\mu}$, temos

$$dh = -\frac{c}{u^2}du \;\text{ e }\; c\Delta u = (n\ell - S)u. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.20) em (2.19) e usando novamente a Proposição 1.3, obtemos

$$\begin{aligned}(n-1)d\ell &= \frac{1}{2}dS - \frac{c}{u}du + \frac{c^2}{2u^2}d|\nabla u|^2 - \frac{c\Delta u}{u^2}du + \frac{c}{u^2}\nabla^2 u(\nabla u, \cdot)\\ &= \frac{1}{2}dS - \frac{c}{u}\ell du + \frac{c^2}{2u^2}d|\nabla u|^2 - \frac{n\ell - S}{u}du + \frac{c}{2u^2}d|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$(n-1)u^2 d\ell = \frac{u^2}{2}dS - cu\ell du - (n\ell - S)udu + \left(\frac{c^2+c}{2}\right)d|\nabla u|^2.$$

Aplicando a derivada exterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
d[(n-1)u^2]\wedge d\ell &= d\left(\frac{u^2}{2}\right)\wedge dS - d(cu\ell)\wedge du - d[(n\ell - S)u]\wedge du \\
&\quad + d\left(\frac{c^2+c}{2}\right)\wedge d|\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

O que implica

$$2(n-1)udu\wedge d\ell = udu\wedge dS - cud\ell\wedge du - nud\ell\wedge du + udS\wedge du.$$

Desta forma,

$$2(n-1)udu\wedge d\ell = -cud\ell\wedge du - nud\ell\wedge du.$$

Dividindo esta equação por u e substituindo o valor $c=\frac{\beta^2}{\alpha\mu}$, obtemos

$$2(n-1)du\wedge d\ell = \frac{\beta^2}{\alpha\mu}d\ell\wedge du - nd\ell\wedge du.$$

Portanto,

$$[\beta^2-(n-2)\alpha\mu]du\wedge d\ell = 0. \tag{2.21}$$

Notavelmente, é necessário considerar a condição de não degenerescência $\beta^2-(n-2)\alpha\mu\neq 0$ para obter uma boa relação entre u e ℓ. O seguinte lema mostra isto e dá mais um sentido à questão da degenerescência.

Lema 2.4. *Seja (M^n,g) uma variedade tipo-Einstein gradiente não trivial, não degenerada e com α e μ não nulos. Então, $\nabla\ell=\psi\nabla u$ para alguma função $\psi\in C^\infty(M)$, onde $\ell=\frac{1}{\alpha}(\rho S+\lambda)$ e $u=e^{\frac{\mu}{\beta}f}$.*

Demonstração. De fato, como $\alpha,\mu\neq 0$, segue da não degenerescência e da equação (2.21) que $du\wedge d\ell=0$. Portanto, existe $\psi\in C^\infty(M)$ tal que $d\ell=\psi du$, isto é, $\nabla\ell=\psi\nabla u$. $\square$

Em termos de $(1,1)$-tensor, a equação (2.17) pode ser escrita como

$$hRic(\nabla u) = \frac{1}{2}\nabla S - (n-1)\nabla\ell + \Delta u\nabla h - \nabla^2 u(\nabla h). \tag{2.22}$$

Substituindo as equações de (2.20) e (2.15) em (2.22), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{c}{u}Ric(\nabla u) &= \frac{1}{2}\nabla S - (n-1)\nabla\ell - \frac{c}{u^2}\Delta u\nabla u + \frac{c}{u^2}\nabla^2 u(\nabla u) \\
&= \frac{1}{2}\nabla S - (n-1)\nabla\ell - \frac{n\ell - S}{u}\nabla u + \frac{\ell}{u}\nabla u - \frac{1}{u}Ric(\nabla u).
\end{aligned}
$$

Multiplicando esta equação por u, temos

$$cRic(\nabla u) = \frac{u}{2}\nabla S - (n-1)u\nabla\ell - (n\ell - S)\nabla u + \ell\nabla u - Ric(\nabla u).$$

Finalmente, substituindo $c = \frac{\beta^2}{\alpha\mu}$ e reagrupando, obtemos

$$\frac{\beta^2 + \alpha\mu}{\alpha\mu}Ric(\nabla u) = \frac{u}{2}\nabla S - (n-1)u\nabla\ell - \left[(n-1)\ell - S)\right]\nabla u. \tag{2.23}$$

Como aplicação da equação (2.23) e do Lema 2.4 deduziremos o próximo teorema. A configuração mais apropriada é considerar a classe de variedades tipo-Einstein (M^n, g) próprias, as quais são não triviais. Os Exemplos 2.1 e 2.2 são variedades Einstein admitindo uma estrutura tipo-Einstein gradiente própria, enquanto que o Exemplo 2.3 é uma variedade Einstein admitindo uma estrutura tipo-Einstein gradiente, não trivial e não própria.

Teorema 2.3. *Seja (M^n, g) uma variedade tipo-Einstein gradiente homogênea, própria, não compacta, não degenerada e com α e μ não nulos. Se $\beta^2 \neq \alpha\mu$, então (M^n, g) é uma variedade Einstein.*

Demonstração. Provaremos o teorema sob a condição mais fraca de homogeneidade para curvaturas de Ricci constantes e consequentemente curvatura escalar constante, veja Calviño-Louzao et al. [9]. Pelo Lema 2.4, existe $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $\nabla\ell = \psi\nabla u$. Assim, podemos escrever a equação (2.23) como

$$\frac{\beta^2 + \alpha\mu}{\alpha\mu}Ric(\nabla u) = -\left[(n-1)u\psi + (n-1)\ell - S\right]\nabla u. \tag{2.24}$$

Por hipótese, $\beta^2 \neq \alpha\mu$, segue que ∇u é um autovetor do tensor de Ricci e podemos escrever (2.24) como segue

$$Ric(\nabla u) = k\nabla u,$$

onde $k = -\frac{\alpha\mu}{\beta^2+\alpha\mu}\left[(n-1)u\psi + (n-1)\ell - S\right]$ é constante, pois as curvaturas de Ricci são constantes. Temos também que

$$\mathring{Ric}(\nabla u) = Ric(\nabla u) - \frac{S}{n}\nabla u = \left(k - \frac{S}{n}\right)\nabla u.$$

Denotando $\overline{k} = k - \frac{S}{n}$, aplicando o divergente e usando o Lema 2.1, obtemos

$$\overline{k}\Delta u = \operatorname{div}\left(\mathring{Ric}(\nabla u)\right) = -\frac{\alpha\mu}{\beta^2}u\|\mathring{Ric}\|^2.$$

Deste modo, pela segunda equação de (2.20), temos

$$\overline{k}\Delta u = \overline{k}\frac{\alpha\mu}{\beta^2}(n\ell - S)u = -\frac{\alpha\mu}{\beta^2}u\|\mathring{Ric}\|^2.$$

Assim,

$$\overline{k}(n\ell - S) = -\|\mathring{Ric}\|^2.$$

Afirmamos que $\overline{k} = 0$. De fato, suponha que $\overline{k} \neq 0$, como (M^n, g) possui curvaturas de Ricci constantes segue que $\|\mathring{Ric}\|^2$ é constante e, deste modo λ também o seria, uma contradição. Assim, $\overline{k} = 0$ implica $\mathring{Ric} = 0$ donde concluímos a demonstração. $\square$

Finalizaremos o capítulo com uma observação sobre a rigidez deste último resultado.

Observação 2.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) que satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3 é Einstein, o que nos permite usar o Lema 2.2 e aplicar o Teorema 2 em [27] para deduzir, novamente, que (M^n, g) é como em $(i) - (iii)$ do Teorema 2.2.*

Apêndice A

O hessiano da função altura em $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$

Seja $(\mathbb{M}^n(c), g)$ a esfera padrão $\mathbb{S}^n$ para $c = 1$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ para $c = -1$ com suas respectivas métricas canônicas. Nesta notação, podemos escrever

$$\mathbb{M}^n(c) = \left\{ y \in \mathbb{N}^{n+1}(c) : \langle y, y \rangle_c = \sum_{l=1}^{n} y_l^2 + c y_{n+1}^2 = c \right\},$$

em que, para $c = 1$ temos $\mathbb{S}^n$ isometricamente imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{N}^{n+1}(1)$ e, para $c = -1$ temos $\mathbb{H}^n$ isometricamente imerso no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{N}^{n+1}(-1)$.

Dado um vetor unitário fixado $v \in \mathbb{N}^{n+1}(c)$, a função altura em $\mathbb{M}^n(c)$ é definida por

$$h_v(y) = \langle v, y \rangle_c.$$

A seguir calcularemos o hessiano da função altura de duas formas distintas. Primeiramente através da projeção estereográfica e, posteriormente, usaremos a teoria de imersões isométricas (ver [10], [15] ou [25]).

A.1 Cálculo via projeção estereográfica

Para o cálculo do hessiano usando a projeção estereográfica, primeiro note que

$$\begin{aligned} h_v(y) &= \langle v, y \rangle_c \\ &= v^1 y_1 + \ldots + v^n y_n + c v^{n+1} y_{n+1} \\ &= v^l y_l + c v^{n+1} y_{n+1}. \end{aligned}$$

onde $l = 1, \ldots, n$.

Desta forma, em coordenadas,

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 h_v)_{ij} &= g\left(\nabla_{\partial_i}\nabla h_v, \partial_j\right)\\
&= g\left(\nabla_{\partial_i}\nabla\left(v^l y_l + cv^{n+1}y_{n+1}\right), \partial_j\right)\\
&= v^l g\left(\nabla_{\partial_i}\nabla y_l, \partial_j\right) + cv^{n+1} g\left(\nabla_{\partial_i}\nabla y_{n+1}, \partial_j\right)\\
&= v^l(\nabla^2 y_l)_{ij} + cv^{n+1}(\nabla^2 y_{n+1})_{ij},
\end{aligned} \tag{A.1}$$

onde $\{\partial_i\}$ é o referencial coordenado em um sistema de coordenadas de $\mathbb{M}^n(c)$ dado. Portanto, para calcular o hessiano de h_v basta calcular o hessiano de y_α, para $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

Considere o sistema de coordenadas em $\mathbb{M}^n(c)$ através da inversa da projeção estereográfica $x : U_c \to \mathbb{M}^n(c)$ dada por

$$x(u) = (x_1(u), \ldots, x_{n+1}(u)) = \left(\frac{2u}{1+c|u|^2}, \frac{|u|^2 - c}{1+c|u|^2}\right),$$

onde U_c é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ para $c = 1$, ou a bola aberta unitária centrada na origem $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ para $c = -1$.

Desta forma, o hessiano de x_α em coordenadas é expresso por

$$(\nabla^2 x_\alpha)_{ij} = \partial_i\partial_j x_\alpha - \Gamma_{ij}^k \partial_k x_\alpha, \tag{A.2}$$

onde $\alpha = 1, \ldots, n+1$ e ∂_k significará $\frac{\partial}{\partial u_k}$ daqui em diante, onde $k = 1, \ldots, n$.

Definindo $\lambda_c = \frac{2}{1+c|u|^2}$ podemos escrever $x(u) = (\lambda_c u, c(1-\lambda_c))$. Como $|u|^2 = \sum_{l=1}^n u_l^2$, segue que

$$\partial_l \lambda_c = -\frac{2}{(1+c|u|^2)^2} \cdot 2cu_l = -c\lambda_c^2 u_l.$$

Com isso, denotando por $e_1, \ldots, e_{n+1}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$, segue que

$$x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha e_\alpha,$$

então, como

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_c,$$

devemos calcular $\partial_i x$, para $i = 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
\partial_i x &= \sum_{l=1}^{n} \partial_i x_l e_l + \partial_i x_{n+1} e_{n+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \partial_i (\lambda_c u_l) e_l + \partial_i \big(c(1-\lambda_c)\big) e_{n+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \big((\partial_i \lambda_c) u_l + \lambda_c \partial_i u_l\big) e_l + \lambda_c^2 u_i e_{n+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} (-c\lambda_c^2 u_i u_l + \lambda_c \delta_{il}) e_l + \lambda_c^2 u_i e_{n+1}.
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

E assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= \langle \partial_i x, \partial_j x \rangle_c \\
&= \sum_{l=1}^{n} (\lambda_c \delta_{il} - c\lambda_c^2 u_i u_l)(\lambda_c \delta_{jl} - c\lambda_c^2 u_j u_l) + c\lambda_c^4 u_i u_j \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\lambda_c^2 \delta_{il}\delta_{jl} - c\lambda_c^3 u_j u_l \delta_{il} - c\lambda_c^3 u_i u_l \delta_{jl} + \lambda_c^4 u_i u_j {u_l}^2\right) + c\lambda_c^4 u_i u_j.
\end{aligned}
$$

O que implica

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= \lambda_c^2 \delta_{ij} - 2c\lambda_c^3 u_i u_j + \lambda_c^4 u_i u_j |u|^2 + c\lambda_c^4 u_i u_j \\
&= \lambda_c^2 \delta_{ij} + u_i u_j \lambda_c^3 \left(-2c + \lambda_c |u|^2 + c\lambda_c\right) \\
&= \lambda_c^2 \delta_{ij} + u_i u_j \lambda_c^3 \left(-2c + 2c\right) \\
&= \lambda_c^2 \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, $x : U_c \to \mathbb{M}^n(c)$ é um sistema de coordenadas conforme a métrica canônica Euclidiana. Observe que no caso da esfera padrão $\mathbb{S}^n$ essa é uma parametrização para $\mathbb{S}^n \backslash \{e_{n+1}\}$. Para cobrir $\mathbb{S}^n$ podemos adicionar uma parametrização similar a essa para $\mathbb{S}^n \backslash \{-e_{n+1}\}$, por exemplo.

Agora podemos calcular as parcelas do hessiano de x_α em (A.2). Note que, por (A.3),

$$
\begin{cases}
\partial_j x_l = \lambda_c \delta_{jl} - c\lambda_c^2 u_j u_l, \quad \text{para} \;\; l = 1, \ldots, n. \\
\partial_j x_{n+1} = \lambda_c^2 u_j.
\end{cases}
$$

Com isso, para $l = 1, \ldots, n$,

$$
\begin{aligned}
\partial_i\partial_j x_l &= \partial_i\left(\lambda_c\delta_{jl} - c\lambda_c^2 u_j u_l\right)\\
&= \partial_i(\lambda_c)\delta_{jl} - c\Big(2\lambda_c\partial_i(\lambda_c)u_j u_l + \lambda_c^2(\partial_i u_j)u_l + \lambda_c^2 u_j\partial_i u_l\Big)\\
&= -c\lambda_c^2 u_i\delta_{jl} + 2\lambda_c^3 u_i u_j u_l - c\lambda_c^2 u_l\delta_{ij} - c\lambda_c^2 u_j\delta_{il}\\
&= 2x_i x_j x_l - c\lambda_c x_i\delta_{jl} - c\lambda_c x_j\delta_{il} - c\lambda_c x_l\delta_{ij},
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Para o outro caso,

$$
\begin{aligned}
\partial_i\partial_j x_{n+1} &= \partial_i(\lambda_c^2 u_j)\\
&= 2\lambda_c\partial_i(\lambda_c)u_j + \lambda_c^2\partial_i u_j\\
&= -2c\lambda_c^3 u_i u_j + \lambda_c^2\delta_{ij}\\
&= -2c\lambda_c x_i x_j + \lambda_c^2\delta_{ij}.
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Além disso, os símbolos de Christoffel são dados por

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lambda_c^{-2}\delta^{kl}\left(\partial_i(\lambda_c^2\delta_{jl}) + \partial_j(\lambda_c^2\delta_{il}) - \partial_l(\lambda_c^2\delta_{ij})\right)\\
&= \frac{1}{2}\lambda_c^{-2}\delta^{kl}\left(\partial_i(\lambda_c^2)\delta_{jl} + \partial_j(\lambda_c^2)\delta_{il} - \partial_l(\lambda_c^2)\delta_{ij}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lambda_c^{-2}\left(\partial_i(\lambda_c^2)\delta_{jk} + \partial_j(\lambda_c^2)\delta_{ik} - \partial_k(\lambda_c^2)\delta_{ij}\right)\\
&= \lambda_c^{-1}\left(\partial_i(\lambda_c)\delta_{jk} + \partial_j(\lambda_c)\delta_{ik} - \partial_k(\lambda_c)\delta_{ij}\right)\\
&= -c\left(\lambda_c u_i\delta_{jk} + \lambda_c u_j\delta_{ik} - \lambda_c u_k\delta_{ij}\right)\\
&= -c(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ik} - x_k\delta_{ij}).
\end{aligned}
$$

Então, para $l = 1, \ldots, n$, temos

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k\partial_k x_l &= \sum_{k=1}^n -c(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ik} - x_k\delta_{ij})(\lambda_c\delta_{kl} - c x_k x_l)\\
&= \sum_{k=1}^n -c\Big(\lambda_c x_i\delta_{jk}\delta_{kl} - c x_i x_k x_l\delta_{jk} + \lambda_c x_j\delta_{ik}\delta_{kl} - c x_j x_k x_l\delta_{ik} - \lambda_c x_k\delta_{ij}\delta_{kl} + c x_l {x_k}^2\delta_{ij}\Big)\\
&= -c\lambda_c x_i\delta_{jl} + x_i x_j x_l - c\lambda_c x_j\delta_{il} + x_i x_j x_l + c\lambda_c x_l\delta_{ij} - x_l\delta_{ij}\sum_{k=1}^n x_k^2\\
&= 2x_i x_j x_l - c\lambda_c x_i\delta_{jl} - c\lambda_c x_j\delta_{il} + c\lambda_c x_l\delta_{ij} - x_l\delta_{ij}(c - c x_{n+1}^2).
\end{aligned}
$$

Por conseguinte, usando (A.4),

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 x_l)_{ij} &= \partial_i \partial_j x_l - \Gamma_{ij}^k \partial_k x_l \\
&= 2x_i x_j x_l - c\lambda_c x_i \delta_{jl} - c\lambda_c x_j \delta_{il} - c\lambda_c x_l \delta_{ij} \\
&- 2x_i x_j x_l + c\lambda_c x_i \delta_{jl} + c\lambda_c x_j \delta_{il} - c\lambda_c x_l \delta_{ij} + x_l \delta_{ij}(c - c x_{n+1}^2) \\
&= -2c\lambda_c x_l \delta_{ij} + c x_l \delta_{ij}(1 - x_{n+1}^2) \\
&= -2c\lambda_c x_l \delta_{ij} + c x_l \delta_{ij}(1 - (1-\lambda_c)^2) \\
&= -2c\lambda_c x_l \delta_{ij} + c x_l \delta_{ij}(2\lambda_c - \lambda_c^2) \\
&= c\lambda_c x_l \delta_{ij}(-2 + 2 - \lambda_c) \\
&= -c x_l \lambda_c^2 \delta_{ij} \\
&= -c x_l g_{ij}. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

E para $n+1$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k \partial_k x_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} -c(x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij})\lambda_c x_k \\
&= -c\lambda_c x_i x_j - c\lambda_c x_i x_j + c\lambda_c \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\
&= -2c\lambda_c x_i x_j + c\lambda_c \delta_{ij}(c - c x_{n+1}^2) \\
&= -2c\lambda_c x_i x_j + \lambda_c \delta_{ij} \left(1 - (1-\lambda_c)^2\right) \\
&= -2c\lambda_c x_i x_j - \lambda_c^3 \delta_{ij} + 2\lambda_c^2 \delta_{ij},
\end{aligned}$$

que usando (A.5) resulta

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 x_{n+1})_{ij} &= \partial_i \partial_j x_{n+1} - \Gamma_{ij}^k \partial_k x_{n+1} \\
&= -2c\lambda_c x_i x_j + \lambda_c^2 \delta_{ij} + 2c\lambda_c x_i x_j + \lambda_c^3 \delta_{ij} - 2\lambda_c^2 \delta_{ij} \\
&= -\lambda_c^2 \delta_{ij} + \lambda_c^3 \delta_{ij} \\
&= -c^2(1-\lambda_c)\lambda_c^2 \delta_{ij} \\
&= -c x_{n+1} g_{ij}. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Por (A.6) e (A.7) concluímos que o hessiano de h_v em (A.1) é dado por

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 h_v)_{ij} &= v^l (\nabla^2 x_l)_{ij} + c v^{n+1} (\nabla^2 x_{n+1})_{ij} \\
&= -c v^l x_l g_{ij} - v^{n+1} x_{n+1} g_{ij} \\
&= -c(v^l x_l + c v^{n+1} x_{n+1}) g_{ij} \\
&= -c h_v g_{ij}.
\end{aligned}$$

isto é, $\nabla^2 h_v = -ch_v g$.

A.2 Cálculo via imersão

Alternativamente, para o cálculo do hessiano usando a imersão, considere ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de $\mathbb{M}^n(c)$ e $\mathbb{N}^{n+1}(c)$, respectivamente. Seja α a segunda forma fundamental de $\mathbb{M}^n(c)$ e A_N o operador de Weingarten associado à α, em que N é um campo de vetores normais em $\mathbb{M}^n(c)$, isto é, $\langle N, N\rangle_c = c$.

Assim, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^n(c))$ vale

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\\ &= \nabla_X Y + c\langle \alpha(X,Y), N\rangle_c N\\ &= \nabla_X Y + c\langle A_N X, Y\rangle_c N.\end{aligned} \tag{A.8}$$

Note que podemos considerar $N(x) = \vec{x}$, em que $\vec{x} \in \mathbb{N}^{n+1}(c)$ é o vetor posição em $x \in \mathbb{M}^n(c)$. Além disso, como $A_N = -dN$, segue que $A_N = -I$. Substituindo em (A.8), temos

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - c\langle X, Y\rangle_c \vec{x}. \tag{A.9}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^n(c))$, temos

$$\langle \nabla h_v, X\rangle_c = X(h_v) = X\langle v, \vec{x}\rangle_c = \langle v, X(x)\rangle_c = \langle v^\top, X\rangle_c,$$

donde $\nabla h_v = v^\top$.

Escrevendo $v = v^\top + c\langle v, \vec{x}\rangle_c \vec{x}$ e usando (A.9), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 h_v(X) &= \nabla_X \nabla h_v\\ &= \nabla_X v^\top\\ &= \overline{\nabla}_X v^\top + c\langle X, v^\top\rangle_c \vec{x}\\ &= \overline{\nabla}_X \left(v - c\langle v, \vec{x}\rangle_c \vec{x}\right) + c\langle X, v\rangle_c \vec{x}\\ &= -cX\left(\langle v, \vec{x}\rangle_c\right)\vec{x} - c\langle v, \vec{x}\rangle_c X(x) + c\langle X, v\rangle_c \vec{x}\\ &= -c\langle v, X\rangle_c \vec{x} - ch_v(x)X + c\langle X, v\rangle_c \vec{x}\\ &= -ch_v(x)X.\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla^2 h_v = -ch_v I$.

Referências Bibliográficas

[1] Barros, A.; Gomes, J. N. *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature*. J. Math Anal. Appl. (Print) 401 (2013) 702-705

[2] Barros, A.; Gomes, J. N. *Triviality of compact m-quasi-Einstein manifolds*. Results Math 71 (2017) 241-250

[3] Barros, A.; Ribeiro, E. *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*. Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012) 1033-1040

[4] Berger, M.; Gauduchon, P.; Mazet, E. *Le spectre d'une variètè Riemannienne*. Springer-Verlag, New York, 1971. (Lectures Notes in Mathematics, v. 194)

[5] Bonnet, O. *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*. C. R. Ac. Sc., Paris 40 (1855) 1311-1313

[6] Besse, A. L. *Einstein manifolds*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987

[7] Biezuner, R. B. *Notas de aula, Geometria Riemanniana*. UFMG, Minas Gerais, 2017

[8] Bourguignon, J.-P. *Ricci curvature and Einstein metrics*. Global differential geometry and global analysis, Lecture Notes in Math., v. 838. Springer, Berlin, 1981, p. 42-63

[9] Calviño-Louzao, E.; Fernández-López, M.; García-Río, E.; Vázquez-Lorenzo, R. *Homogeneous Ricci almost solitons*. Isr. J. Math. 220 (2017) 531-546

[10] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. 5ª ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011

[11] Case, J.; Shu, Y.; Wei, G. *Rigity of quasi-Einstein metrics*. Differential Geom. Appl. 29 (2011) 93-100

[12] Catino, G.; Mastrolia, P.; Monticelli, D.; Rigoli, M. *On the geometry of gradient Einstein-type manifolds*. Pacific J. Math. 286 (1) (2017) 39-67

[13] Catino, G.; Mazzieri, L. *Gradient Einstein solitons*. Nonlinear Anal. 132 (2016) 66-94

[14] Gomes, J. N. *A note on gradient Einstein-type manifolds*. ARXIV. e-print arXiv:1710.10549 (2017)

[15] Gomes, J. N. *Operadores diferenciais em variedades Riemannianas, Notas de Aula*. USP, São Paulo, 2015

[16] Hamilton, R. S. *The formation of singularities in the Ricci flow*. Surveys in Differential Geometry (Cambridge, MA, 1993), International Press, Cambridge, MA, (1995) 7-136

[17] Hamilton, R. S. *The Ricci flow on surfaces*. Contemp. Math. 71 (1988) 237-261

[18] Karp, L. *On Stokes's theorem for noncompact manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981) 487-490

[19] Kim, D.-S.; Kim, Y. H. *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (8) (2003) 2573-2576

[20] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. 2ª ed. Springer-Verlag, New York, 2013. (Graduate Texts in Mathematics v. 176)

[21] Masahiko, K. *On a differential equation characterizing a Riemannian structure of a manifold*. Tokyo J. Math. 6 (1) (1983) 143-151

[22] Myers, S. B. *Riemannian manifolds with positive mean curvature*. Duke Math. J. 8 (1941) 401-404

[23] Obata, M. *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*. J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333-340

[24] Obata, M.; Yano, K. *Conformal changes of Riemann metrics*. J. Diff. Geo. 4 (1970) 53-72

[25] Petersen, P. *Riemannian geometry*. 3ª ed. Springer-Verlag, New York, 2016. (Graduate Texts in Mathematics v. 171)

[26] Pigola, S.; Rigoli, M.; Rimoldi, M.; Setti A. *Ricci almost solitons*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. X (2011) 757-799

[27] Tashiro, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 251-275

[28] Yau, S. T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. Comm. Pure Appl. Math. 28 (2) (1975) 201-228