

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM  
SIGNIFICATIVA

FRANKSON DOS SANTOS E SANTOS

MANAUS

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

FRANKSON DOS SANTOS E SANTOS

PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM  
SIGNIFICATIVA

Trabalho de conclusão de Curso  
apresentado ao Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática da  
Universidade Federal do Amazonas, como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS

2019

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237p Santos, Frankson dos Santos e  
Proporcionalidade e Regra de três através de uma abordagem  
significativa / Frankson dos Santos e Santos. 2019  
125 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Proporcionalidade. 2. Regra de Três. 3. Aprendizagem  
Significativa. 4. Educação. 5. Matemática. I. Oliveira, Nilomar Vieira  
de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

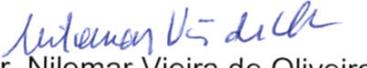
FRANKSON DOS SANTOS E SANTOS

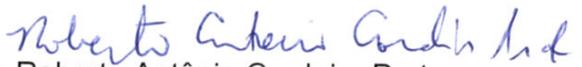
PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS, ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM  
SIGNIFICATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática de Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 12 de MARÇO de 2019

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira  
Presidente

  
Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata  
Membro Interno

  
Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto  
Membro Externo

## **AGRADECIMENTO**

A Deus, por tudo...

Aos meus pais Francisco Henriques e Mariulis dos Santos, exemplo de amor e amizade, pessoas fundamentais na minha existência que nos fazem sempre ir além, em busca de nossos sonhos;

A minha esposa Izabel Nunes e aos meus filhos Lucas André e O filho que Minha esposa está esperando, pessoas que estão sempre no meu dia a dia, encorajando e ajudando a transpor os obstáculos;

Ao meu orientador Professor Dr Nilomar Vieira Oliveira pela aceitação de orientar – me nesse trabalho, bem como da indicação do tema, muito grato pelos ensinamentos, durante o curso e o direcionamento dando sugestões e comentários que foram essenciais no desenvolvimento desse trabalho;

Aos meus professores Flavia Morgana, Carlos Wagner, Valdemir Martins, Roberto Prata e Disney Douglas que sempre nos incentivaram e direcionaram nossos ensinamentos;

Aos meus colegas da Turma PROFMAT 2017, muito grato pelos momentos de ensinamentos e conhecimentos, companheirismo e horas de estudos os desafios foram muitos mais sabemos que sem luta não temos gloria,

Enfim, a todos aqueles que acreditaram na realização desse sonho.

## RESUMO

Esta pesquisa investiga os conceitos e aplicabilidade de proporcionalidade e regra de três, quantificando as questões no Enem nos anos de 2013 a 2017 que nas suas resoluções possuem a ideia desses conteúdos, bem como a utilização de aulas interativas com áudio visual e a utilização de applets confeccionados no software Geogebra, verificando suas contribuições na interpretação e resolução de problemas com essa temática em uma turma de 3º ano do ensino médio na Escola Estadual José Mota Manacapuru Amazonas. Antes de formalizar o trabalho buscamos revisitar alguns documentos oficiais que regem a educação básica, PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio, para que assim tivéssemos um norte a seguir. Dando continuidade à pesquisa abordamos os conteúdos centrais e suas aplicabilidades das disciplinas de Física e Química escolhendo algumas leis para comentar. No capítulo seguinte procuramos encontrar nas provas do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) questões em que são empregadas as ideias de proporcionalidade e regra de três nas suas respectivas soluções. No capítulo subsequente desenvolvemos um dos objetivos gerais da pesquisa, a saber, investigar as contribuições do uso das aulas interativas e do software Geogebra para a aprendizagem de proporcionalidade e regra de três, tendo como um dos objetivos específicos analisar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos dos conteúdos enunciados. Utilizamos como fundamentação teórica a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2001) e a aprendizagem significativa de Ausubel. Caracterizamos como um estudo de caso numa abordagem quali - quantis. Os dados foram coletados por meio de questionários, e os resultados obtidos foram significativos quando se leva em conta o rendimento geral da turma observada.

**Palavras chaves:** Proporcionalidade – Regra de Três – Aprendizagem Significativa

## **ABSTRACT**

This research investigates the concepts and applicability of proportionality and rule of three, quantifying the issues in the Enem in the years of 2013 to 2017 that in their resolutions have the idea of these contents, as well as the use of interactive classes with visual audio and the use of applets made in the software Geogebra, verifying their contributions in the interpretation and resolution of problems with this subject in a class of 3rd year of high school in the State School José Mota Manacapuru Amazonas. Before formalize the work we seek to revisit some official documents that govern the basic education, PCNEM (National Curricular Parameters of High School) and Curricular Orientations for High School, so that we would have a north to follow. Continuing the research we approach the core contents and their applicabilities of the disciplines of Physics and Chemistry choosing some laws to comment. In the next chapter we try to find in the tests of the Enem (National Examination of Secondary Education) questions in which are used the ideas of proportionality and rule of three in their respective solutions. In the subsequent chapter we developed one of the general objectives of the research, namely to investigate the contributions of the use of interactive classes and Geogebra software for the learning of proportionality and rule of three, having as one of the specific objectives to analyze the students' previous knowledge about the concepts of the stated contents. We use as theoretical foundation the theory of the records of semiotic representations of Duval (2001) and the significant learning of Ausubel. We characterize it as a case study in a qualitative approach. The data were collected through questionnaires, and the results obtained were significant when the general performance of the observed class was taken into account.

Keywords: Proportionality - Rule of Three - Significant Learning

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Teorema de Tales .....	29
Figura 2: Teorema de Tales .....	30
Figura 3: Exemplo Teorema de Tales .....	30
Figura 4: Exemplo Teorema de Tales .....	31
Figura 5: Representação das grandezas.....	33
Figura 6: Representação do Sentido das grandezas.....	33
Figura 7: Representação das grandezas.....	35
Figura 8: Representação do Sentido das grandezas.....	35
Figura 9: Representação das grandezas.....	37
Figura 10: Representação das grandezas.....	38
Figura 11: Representação do Sentido das grandezas.....	38
Figura 12: Representação das grandezas.....	40
Figura 13: Representação das grandezas horas e dias .....	40
Figura 14: Representação das grandezas operários e dias .....	40
Figura 15: Representação das grandezas das Unidades e dias.....	41
Figura 16: Representação do sentido das grandezas .....	41
Figura 17: Representação diretamente das grandezas .....	41
Figura 18: Representação das grandezas.....	43
Figura 19: Representação das grandezas diretamente ou inversamente .....	43
Figura 20: Representação das Grandezas diretamente proporcional .....	43
Figura 21: Representação das grandezas.....	44
Figura 22: Representação das Grandezas.....	44
Figura 23: Representação das Grandezas diretamente proporcional.....	45
Figura 24: Representação Lei de Hooke .....	47
Figura 25: Figura da questão 139 ENEM/2013 .....	68
Figura 26: Figura da questão 150 ENEM/2013 .....	69
Figura 27: Figura da questão 152 ENEM/2013 .....	70
Figura 28: Figura da questão 167 ENEM/2013 .....	72
Figura 29: Figura da questão 172 ENEM/2013 .....	72
Figura 30: Figura da questão 177 ENEM/2013 .....	73
Figura 31: Figura da questão 180 ENEM/2013 .....	74
Figura 32: Figura da questão 136 ENEM/2014 .....	75

Figura 33: Figura da questão 136 ENEM/2014 .....	75
Figura 34: Figura da questão 137 ENEM/2014 .....	76
Figura 35: Figura da questão 142 ENEM/2014 .....	77
Figura 36: Figura da questão 146 ENEM/2014 .....	78
Figura 37: Figura da questão 148 ENEM/2014 .....	79
Figura 38: Figura da questão 148 ENEM/2014 .....	79
Figura 39: Figura da questão 156 ENEM/2014 .....	80
Figura 40: Figura da questão 162 ENEM/2014 .....	81
Figura 41: Figura da questão 169 ENEM/2014 .....	83
Figura 42: Figura da questão 171 ENEM/2014 .....	83
Figura 43: Figura da questão 173 ENEM/2014 .....	84
Figura 44: Figura da questão 143 ENEM/2015 .....	86
Figura 45: Figura da questão 143 ENEM/2015 .....	87
Figura 46: Figura da questão 144 ENEM/2015 .....	87
Figura 47: Figura da questão 145 ENEM/2015 .....	88
Figura 48: Figura da questão 147 ENEM/2015 .....	89
Figura 49: Figura da questão 150 ENEM/2015 .....	89
Figura 50: Figura da questão 164 ENEM/2015 .....	91
Figura 51: Figura da questão 173 ENEM/2015 .....	93
Figura 52: Figura da questão 138 ENEM/2016 .....	94
Figura 53: Figura da questão 140 ENEM/2016 .....	95
Figura 54: Figura da questão 143 ENEM/2016 .....	96
Figura 55: Figura da questão 151 ENEM/2016 .....	97
Figura 56: Figura da questão 154 ENEM/2016 .....	97
Figura 57: Figura da questão 169 ENEM/2016 .....	100
Figura 58: Figura da questão 171 ENEM/2016 .....	101
Figura 59: Figura da questão 175 ENEM/2016 .....	103
Figura 60: Figura da questão 175 ENEM/2016 .....	104
Figura 61: Figura da questão 137 ENEM/2017 .....	105
Figura 62: Figura da questão 148 ENEM/2017 .....	107
Figura 63: Figura da questão 148 ENEM/2017 .....	107
Figura 64: Figura da questão 153 ENEM/2017 .....	108
Figura 65: Figura da questão 159 ENEM/2017 .....	109

Figura 66: Figura da questão 168 ENEM/2017 .....	110
Figura 67: Figura da questão 173 ENEM/2017 .....	112
Figura 68: Figura da questão 175 ENEM/2017 .....	113
Figura 69: Figura da questão 175 ENEM/2017 .....	113
Figura 70: Figura da questão 178 ENEM/2017 .....	114
Figura 71: Figura da questão 178 ENEM/2017 .....	114
Figura 72: Figura applet 1 volume e planificação da caixa em relação aos seus respectivos lados .....	123
Figura 73: Figura applet 2 volume e planificação do cilindro em relação ao raio ....	124
Figura 74: Figura applet 3 área do triângulo retângulo em relação aos lados .....	124
Figura 75: Figura applet 4 quantidade de diagonais relacionado aos vértices.....	125
Figura 76: Figura applet 5 volume do cilindro em relação com o diâmetro da circunferência.....	125

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Percentual de Questões que envolvem a ideia de Proporcionalidade e Regra de Três no ENEM.....	54
Tabela 2: Tabela de Tabulação do Questionário 1 .....	57
Tabela 3: Tabela de Tabulação do Questionário 2 .....	60
Tabela 4: Tabela de comparação no crescimento percentual dos pesquisados. ....	62

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Quantidade de alunos de Acordo com percentual de acertos .....	58
Gráfico 2: Quantidade de alunos de Acordo com percentual de acertos .....	61
Gráfico 3: Quantidade de pesquisados de acordo com o percentual de crescimento .....	63

## Sumário

1. Introdução .....	13
1.1 Objetivos Gerais.....	16
1.1.2 Objetivos específicos .....	16
1.2 Documentos Educacionais Oficiais .....	16
1.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) .....	16
1.2.2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC) .....	18
1.2.3 Orientações Curriculares para o Ensino da Matemática .....	19
2. Proporcionalidade .....	22
2.1.1 Razão e Proporção .....	22
2.1.2 Números Proporcionais.....	23
2.1.3 Propriedades das Proporções .....	25
2.1.4 Grandezas Diretamente Proporcionais.....	25
2.1.5 Grandezas Inversamente Proporcionais .....	26
2.2 Regra de Três .....	32
2.2.1 Regra de Três Simples.....	32
2.2.2 Regra de três simples diretamente proporcional .....	33
2.2.3 Regra de três simples inversamente proporcional.....	36
2.2.4 Regra de Três Composta .....	39
3. Aplicabilidade de Proporcionalidade e Regra de três .....	45
3.1 Aplicação de Proporcionalidade e Regra de três na disciplina de Física. ....	45
3.2 Aplicação de Proporcionalidade e Regra de três na disciplina de Química .....	49
3.3 Visualizar e mostrar o percentual de questões envolvendo os conteúdos e/ou a ideia de proporcionalidade e regra de três no ENEM. ....	53
3.3.1 Comentários sobre o capítulo abordado.....	54
4 Processos Metodológicos .....	55
4.1.1 Local da pesquisa e Sujeitos envolvidos .....	55
4.1.2 Instrumento para coletas de dados .....	55
4.2 Análise dos Dados .....	56
4.2.1 Dados das repostas dos alunos no questionário inicial .....	56
4.2.2 O uso de mídia áudio visual na resolução de problemas de proporcionalidade e regra de três, bem como a utilização do aplicativo Geogebra. ....	58
4.2.3 Dados das repostas dos pesquisados no questionário final .....	59

4.2.4 Análises das estratégias de resolução dos problemas do questionário final por meio das aulas áudio visual e aplicativo do Geogebra .....	61
5. Considerações Finais.....	64
Referências Bibliográficas.....	66
Anexo 1 questões Enem que nas suas resoluções possuem a ideia de proporcionalidade e regra de três, tendo como referência os anos de 2013 à 2017.	67
1.1 ENEM DE 2013.....	67
1.2 ENEM DE 2014.....	74
1.3 ENEM DE 2015.....	86
1.4 ENEM DE 2016.....	94
1.5 ENEM DE 2017.....	105
Anexo 2 questionários aplicados e lista de exercício sobre regra de três.....	114
Anexo 3 applets trabalhados confeccionados no software Geogebra .....	123

## 1. Introdução

Entendemos que a proporcionalidade e a regra de três são importantes conceitos da Matemática, visto a sua aplicabilidade a diversas situações do dia a dia (compra e consumo, escalas, produtividade,...); dentro da própria matemática (multiplicação e divisão, equivalência de frações, porcentagem, relações entre unidades de medida, semelhança geométrica e homotetia, teorema de Tales,...); como também sua utilização por diversas áreas do conhecimento (física, química, biologia, engenharia,...) (IMENES, 2008). Portanto focaremos nossos estudos em proporcionalidade e regra de três e suas inúmeras aplicabilidades. Decidimos então começar nossa pesquisa por alguns documentos oficiais, PCNEN e Orientações Curriculares Para o Ensino Médio, para lembrarmos as orientações contidas nesses documentos e assim tê-los como norteadores do nosso trabalho.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (BRASIL, 1998, p. 65) sugerem a exploração de situações de aprendizagem envolvendo o dia a dia e outras áreas do conhecimento que levem o aluno a “observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução”, não convencionais, nesse sentido as **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**, define a finalidade da matemática no ensino médio, ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações, percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído, saibamos apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Os estudos sobre os processos de ensino e aprendizagem em Matemática é uma parte fundamental da educação. Frequentemente, os professores de Matemática são questionados sobre como são ensinados os conceitos na escola. São discutidas questões sobre como se aprende Matemática no cenário atual, perante o desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade contemporânea. Dessa forma, questiona-se a compreensão do ensino-aprendizagem de Matemática presente nas práticas docentes.

Uma das características fundamentais da atividade Matemática é a diversidade dos Registros de Representação Semiótica que ela mobiliza. Contudo, essa diversidade dificilmente é levada em consideração no ensino. Em razão dessa diversidade de registros de representação de um mesmo objeto matemático, a articulação desses diferentes registros é a premissa para a compreensão em Matemática (DUVAL, 2011).

Uma das razões que justificam o interesse nessa investigação se dá pelo fato da importância de conhecer e aplicar estratégias que viabilizam uma intervenção educativa de forma a melhorar a aquisição dos conhecimentos de proporcionalidade e regra de três.

A intervenção educativa precisa, portanto, de uma mudança de ótica substancial, na qual não somente abranja o saber, mas também o saber fazer, não tanto o aprender, como o aprender a aprender. Para isso, é necessário que os rumos da ação educativa incorporem em sua trajetória um conjunto de legalidades processuais. (Ausubel)

Nesse contexto Ausubel argumenta que a disponibilidade de ideias-âncora relevante, para uso na aprendizagem significativa e na retenção, pode, obviamente, ser maximizado se tirar-se partido das dependências sequenciais naturais existentes na disciplina e do fato de que a compreensão de um dado tópico, frequentemente, pressupõe o entendimento prévia de algum tópico relacionado. Além disso, Ausubel argumenta também que, insistindo na consolidação ou mestria do que está sendo estudado, antes que novos materiais sejam introduzidos, assegura-se contínua prontidão na matéria de ensino e sucesso na aprendizagem sequencialmente organizada.

O trabalho partiu da curiosidade de adentrar mais neste campo que abrange ensino e aprendizagem de matemática, visto ser uma disciplina que requer aulas práticas que venham de encontro com as necessidades individuais de cada aluno. Mostraremos as questões do ENEM em que devem ter na sua resolução a ideia de proporcionalidade ou regra de três, construindo tabelas e gráficos e constatando um grande percentual dessas questões nesses exames, ano a ano. A pesquisa se estrutura em dois momentos concomitantes: no primeiro momento, visa uma abordagem bibliográfica, em artigos, revistas científicas, livros e textos acadêmicos que abordam sobre a relevância da matemática no cotidiano das pessoas, como importância de aliar teoria e prática na metodologia de ensino.

Já no segundo momento, procede como forma de pesquisa de campo tendo como objetos de verificação questionários onde analisaremos o desenvolvimento das aulas em estruturas diferentes, no primeiro momento será aplicado um questionário inicial, posteriormente será trabalhadas aulas interativas e finalizaremos com um questionário final, para que possamos ressaltar e averiguar a diferença entre o rendimento do questionário inicial para o questionário final.

Durante a fase de pesquisa bibliográfica, foram identificadas possibilidades que podem ajudar a fazer reflexões sobre a prática docente de modo a melhor acompanhar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Neste trabalho, foi utilizada como fundamentação teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval bem como a aprendizagem Significativa de Ausubel.

O presente trabalho surge como elemento alternativo para reflexões e de contribuição para novas estratégias de ensino e aprendizagem visando à compreensão de conteúdos abordados em Proporcionalidade e Regra de Três no Ensino Médio.

Este trabalho foi elaborado em nove capítulos:

No Capítulo 1, é apresentada a problemática da pesquisa. O embasamento teórico, os objetivos e a justificativa pelo qual decidiu-se optar por este tema, bem como a apresentação dos documentos educacionais oficiais, sendo os norteadores da pesquisa realizada;

No Capítulo 2, neste Capítulo será desenvolvida a abordagem sobre Proporcionalidade e Regra de Três;

No Capítulo 3, neste Capítulo será desenvolvida a aplicação de Proporcionalidade e Regra de Três, das disciplinas de Física e Química, bem como o percentual de questões envolvendo os conteúdos e/ou ideia de proporcionalidade e regra de três no ENEM;

No Capítulo 4, abordaremos o processo metodológico da pesquisa de campo trabalhando local da pesquisa, indivíduos envolvidos e instrumento para a coleta de dados; como também a apresentação dos dados dos questionários aplicados, utilização de aulas interativas, bem como o uso do aplicativo Geogebra e os resultados obtidos;

No Capítulo 5, trata – se das considerações finais sobre o tema proposto.

## **1.1 Objetivos Gerais**

Mostrar os processos de ensino/aprendizagem, especificamente para o ensino de proporcionalidade e regra de três, através de recursos didáticos que facilitam uma melhor assimilação dos conteúdos abordados, bem como suas aplicabilidades.

### **1.1.2 Objetivos específicos**

- Analisar alguns documentos oficiais, e verificar suas recomendações para o ensino da matemática, bem como para o ensino de proporcionalidade e regra de três;
- Realizar os estudos de proporcionalidade e regra de três;
- Mostrar a aplicabilidade de proporcionalidade e regra de três na área da física e química;
- Pesquisar nas provas do ENEM questões que usam a ideia de proporcionalidade e regra de três;
- Mostrar o processo metodológico da pesquisa de campo;
- Analisar os dados dos questionários aplicados;
- Analisar as estratégias de resolução dos problemas do questionário final por meio da mídia áudio visual e Geogebra.

## **1.2 Documentos Educacionais Oficiais**

### **1.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**

A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio, como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade,

atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos.

Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.

O seguinte trecho chamou – nos, atenção o quanto a contribuição no ensino aprendizagem para o educando do Ensino Médio extraído do (PCNEM):

Com esta compreensão, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social. Deve propiciar a construção de compreensão dinâmica da nossa vivência material, de convívio harmônico com o mundo da informação, de entendimento histórico da vida social e produtiva, de percepção evolutiva da vida, do planeta e do cosmos, enfim, um aprendizado com caráter prático e crítico e uma participação no romance da cultura científica, ingrediente essencial da aventura humana.

Acreditamos que esse trecho representa bem a maneira como devemos encarar o ensino de matemática no Ensino Médio, em especial o ensino de proporcionalidade e regra de três. Devemos ter em mente que o aluno deve compreender e saber empregar aquilo que está sendo estudado. Devemos formar alunos capazes de associar os conteúdos matemáticos estudados em sala de aula com problemas que eles irão encontrar no seu cotidiano, sendo capazes inclusive de, a partir dos conhecimentos adquiridos, desenvolverem outros mais sofisticados e de maior abstração.

Portanto o aprendizado que tem seu ponto de partida no universo vivencial comum entre os alunos e os professores, que investiga ativamente o meio natural ou social real, ou que faz uso do conhecimento prático de especialistas e outros profissionais, desenvolve com vantagem o aprendizado significativo, criando condições para um diálogo efetivo, de caráter interdisciplinar, em oposição ao discurso abstrato do saber, prerrogativa do professor. Além disso, aproxima a escola do mundo real, entrando em contato com a realidade natural, social, cultural e produtiva, em visitas de campo, entrevistas, visitas industriais, excursões ambientais. Tal sistema de aprendizado também atribui sentido imediato ao conhecimento, fundamentando sua subsequente ampliação de caráter abstrato.

### **1.2.2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**

Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC que ainda está em processo de adequação nos possibilita, leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc.

Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das

noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

O seguinte trecho extraído da (BNCC), nos chamou atenção o quanto a finalidade da disciplina da matemática:

Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos.

Nesse contexto a aprendizagem é construída com o uso diário, nosso saber é adquirido e constituído através de diversas fases em nossa vida, iniciando-se na família, posteriormente na escola, no meio social e profissional. Assim é o ensino em nossa vida, precisamos ficar atentos a todos os detalhes com o intuito de obtermos a melhor formação possível.

### **1.2.3 Orientações Curriculares para o Ensino da Matemática**

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à

representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

O seguinte trecho nos chamou atenção o quanto a finalidade da disciplina de matemática para o ensino médio:

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Neste documento, os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: **Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.** Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles. Algumas vezes, de forma intencional, são retomados assuntos já tratados no ensino fundamental – é o momento de consolidar certos conceitos e ideias da matemática escolar que dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade. Sugestões quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de “fixação” ou a aplicação direta de fórmulas.

O seguinte trecho também extraído das orientações para o Ensino Médio identifica o bloco o qual será desenvolvido o tema de nossa dissertação:

No trabalho com *Números e operações* deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa; interpretar gráficos, tabelas e dados numéricos veiculados nas diferentes mídias; ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone; interpretar informação dada em artefatos tecnológicos (termômetro, relógio, velocímetro). Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários.

Também é preciso proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, no ramo da proporcionalidade buscar ideias de crescimento, modelo linear  $f(X) = a \cdot X$ , e proporcionalidades diretamente devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa  $f(X) = \frac{a}{X}$ . O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do cotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação.

Durante o ensino médio, o trabalho do aluno em outras disciplinas, como Física e a Química, por exemplo, pode servir como motivação para a consolidação da ideia de grandezas, particularmente aquelas formadas por relações entre outras grandezas (densidade, aceleração, etc.).

Em relação às grandezas geométricas, as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores, como área, perímetro e volumes. Nessa fase, o aluno já apresenta as condições necessárias para a compreensão de certas demonstrações que resultem em algumas fórmulas, por exemplo, a área do círculo.

## 2. Proporcionalidade

O fato de que muitas situações do nosso dia a dia funcionam de acordo com as leis da proporcionalidade, evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real, na compreensão de várias áreas do conhecimento, bem como, no aprendizado de outros conceitos da própria matemática (BRASIL, 1998).

Silvestre e Ponte (2009), sistematizando as concepções de diversos autores, apontam que o raciocínio proporcional envolve três condições: (I) capacidade para diferenciar situações de natureza proporcional de situações que não são; (II) entendimento da natureza multiplicativa das relações proporcionais; (III) capacidade para resolver diversas situações, revelando flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser prejudicado pelos dados numéricos, pelo contexto, pelas representações (tabular, algébrica, gráfica,...). Portanto, a utilização do raciocínio proporcional implica muito mais do que o uso da regra de três na resolução de problemas.

### 2.1.1 Razão e Proporção

A razão entre  $a$  e  $b$ , escrita através de notação matemática, é:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a : b, \text{ onde } b \neq 0$$

A leitura dessa razão entre  $a$  e  $b$  é: “ $a$  para  $b$ ” ou “ $a$  esta para  $b$ ”.

Os números  $a$  e  $b$  são os termos da razão, na qual  $a$  é o antecedente, e  $b$  o conseqüente (sendo  $b \neq 0$ ).

Exemplo 1: A razão entre 15 minutos e 1 hora é:

$$\frac{15 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \frac{15 \text{ min}}{60 \text{ min}} = \frac{15}{60} = \frac{15 : 3}{60 : 3} = \frac{5 : 5}{20 : 5} = \frac{1}{4}$$

Resposta: Ou seja, é 1 para 4.

**Exemplo 2:** Um torno de madeira, em 5 minutos, produz 3 000 rotações. A razão entre o número de rotações e o tempo gasto para produzi-las é:

$$\frac{3000 \text{ rotações}}{5 \text{ min}} = 600 \text{ rotações/min}$$

Resposta: A velocidade média desse torno, nesse período, é de 600 rotações/min.

**Exemplo 3:** O deslocamento diário de 140 quilômetros de casa para a fábrica onde trabalha, é percorrido por um operário em 2 horas. A razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la é.

$$\frac{140 \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{140}{2} \text{ km/h} = 70 \text{ km/h}$$

Resposta: Podemos dizer que a velocidade média de seu meio de transporte nesse deslocamento é de 70 km/h.

### 2.1.2 Números Proporcionais

Para compreendermos números proporcionais, vamos analisar a seguinte situação problema:

Qual das duas receitas, para preparação de sucos, indicadas abaixo produzirá um suco mais concentrado?

Receita 1 – Um pacote de poupa de frutas para 5 copos de suco:

Receita 2 – Dois pacotes de poupa da mesma fruta para 10 copos de suco:

$$\text{suco com a receita 1} = \frac{1 \text{ pacote}}{5 \text{ copos}}$$

$$\text{suco com a receita 2} = \frac{2 \text{ pacotes}}{10 \text{ copos}} = \frac{1 \text{ pacote}}{5 \text{ copos}}$$

Concluimos que os sucos têm a mesma concentração. Neste caso dizemos que os números 1, 5, 2, 10 são proporcionais.

Então os números **a**: **b** = **c**: **d** são proporcionais se a razão entre eles são iguais, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Os termos da proporção são os números **a**, **b**, **c**, **d**. Na proporção;

Os termos **a** e **d** são chamados de extremos **b** e **c** os termos e são chamados de meios.

De maneira semelhante se diz que os números **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** são, respectivamente, proporcionais aos números, **p**, **q**, **r**, **s**, **u**, **v** se,

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{d}{s} = \frac{e}{u} = \frac{f}{v} = k$$

**Exemplo de utilização dos números proporcionais:**

**Exemplo 1:** Num colégio o número de alunos é proporcional ao número de alunas. Se a razão entre o número de alunos e o número de alunas é 12 e no colégio existem 420 alunos, quantas alunas existem no colégio.

Seja  $X$  = número de alunos e  $Y$  = números de alunas

$$\frac{X}{Y} = \frac{420 \text{ alunos}}{Y} = 12$$

**Exemplo 2: Problema das Torneiras:** Duas torneiras, **A** e **B**, juntas enchem um tanque em 4 horas. Determine em quanto tempo a torneira **B**, sozinha, enche o tanque se a primeira torneira enche este tanque em 12 horas.

Solução: Se a torneira **A** enche o tanque em 12 horas, em forma de razão representamos isto por  $\frac{1}{12}$ . Se  $X$  representa o tempo que a torneira **B** leva para encher o mesmo tanque, da mesma forma, em termos de razão representamos por  $\frac{1}{X}$ . Então juntas, representamos por  $\frac{1}{12} + \frac{1}{X} = \frac{1}{4}$ , então  $X = 6$ , ou seja, a torneira **B** levará 6 horas para encher o tanque.

### 2.1.3 Propriedades das Proporções

1) Propriedade fundamental das proporções: Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ implica que } a \cdot d = b \cdot c.$$

Com esta propriedade já podemos estudar as questões surgidas com o planejamento da lanchonete “Delicias de Sucos”.

Se a lanchonete “Delicias de Sucos”, preparar 50 copos de suco de uva quantos copos de suco puro ela usa e quantos copos de água ela usa também.

Para cada 5 partes de suco pronto foram adicionados 3 partes de suco puro e 2 partes de água, então para 50 partes de suco pronto foram adicionados X partes de sucos puro e Y partes de água. Então:

$$\frac{5}{3} = \frac{50}{X} \rightarrow 5X = 150 \rightarrow X = 30$$

$$\frac{5}{2} = \frac{50}{Y} \rightarrow 5Y = 100 \rightarrow Y = 20$$

2) Numa proporção  $a : b :: c : d$  a soma e a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro termo assim como a soma e a diferença do terceiro e quarto termo está para o terceiro termo, isto é,

$$\frac{a + b}{a} = \frac{c + d}{c}, \frac{a - b}{a} = \frac{c - d}{c}$$

e também a soma e a diferença dos dois primeiros termos está para o segundo termo assim como a soma e a diferença do terceiro e quarto termo está para o quarto termo, isto é

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}, \frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$$

### 2.1.4 Grandezas Diretamente Proporcionais

**Definição:** Seja a grandeza Y a função de grandeza, isto é,  $Y = f(X)$ . Diz-se que Y é diretamente proporcional a X quando:

- (i) Y é uma função crescente de X;

(ii) Se  $X$  for multiplicado por um número natural  $n$ ,  $Y$  também será multiplicado por  $n$ , logo:  $f(n.X) = n.f(X), \forall X \in \mathbb{R} e \forall n \in \mathbb{N}$

Um exemplo pode ser dado a partir da definição acima, a qual permite afirmar que o peso de um arame homogêneo é diretamente proporcional ao comprimento desse arame, então o peso é função crescente do comprimento.

A homogeneidade do arame significa que dois pedaços do mesmo comprimento (tirados de qualquer parte do arame) têm o mesmo peso. Assim, o peso total de  $n$  pedaços com o mesmo comprimento é igual a  $n$  vezes o peso de cada um desses pedaços, ou seja, multiplicando-se o comprimento do arame por  $n$ , seu peso será também multiplicado por  $n$ .

### 2.1.5 Grandezas Inversamente Proporcionais

**Definição:** Seja a grandeza  $Y$  a função de grandeza, isto é,  $Y = f(X)$ . Diz-se que  $Y$  é inversamente proporcional a  $X$  quando:

(i)  $Y = f(X)$  é uma função decrescente de  $X$ ;

(ii) Se  $X$  for multiplicado por um número natural  $n$ , o valor correspondente a  $Y$  fica dividido por  $n$ , logo  $f(n.X) = \frac{1}{n}.f(X), \forall X \in \mathbb{R} e \forall n \in \mathbb{N}$

Por exemplo, quando o tempo necessário para ir através de uma linha reta, de um ponto  $A$ , a um ponto  $B$ , com velocidade constante, é inversamente proporcional à velocidade. De fato, o tempo diminui quando a velocidade aumenta, e, ainda, ele reduz a metade, a um terço, a um quarto, etc., quando a velocidade duplica, triplica, quadriplica etc..

**Observação:** É importante salientar que  $Y$  pode ser uma função crescente (ou decrescente) de  $X$  sem que seja diretamente (ou inversamente) proporcional a  $X$ , como mostram as situações abaixo.

Por exemplo, se a cada dia metade do volume contido num certo reservatório evapora-se, o volume  $Y$  de água existente no reservatório é uma função decrescente do número  $X$  de dias decorridos. Se o volume da água inicialmente contida no reservatório era  $V$ , então o volume  $Y$ , depois de decorridos  $X$  dias, será:

$Y = \frac{V}{2^X} = f(X)$ . Como,  $2^{nX} \neq n.2^X$ , segue que  $\frac{V}{2^{nX}} \neq \frac{1}{n} \cdot \frac{V}{2^X}$ , ou seja,

$$f(n.X) \neq \frac{1}{n} \cdot f(X), \text{ quando } n \neq 1.$$

Consequentemente, o volume de Y, mesmo sendo decrescente do número X de dias, não é inversamente proporcional a X.

A área de um quadrado é uma função crescente do lado, mas, ao dobrar o lado, a área fica multiplicada por quatro (em vez de dois), pois um quadrado de lado 2a decompõe-se em quatro quadrados justapostos de lado a.

A partir dos exemplos acima, conclui-se que as definições dadas para grandezas diretamente ou inversamente proporcionais ocorrem por meio de duas condições, a primeira condição apenas não é suficiente, ou seja, a segunda não é consequência dela, surge, então, a pergunta: A segunda condição acarretaria a primeira condição?

Dessa maneira, tem-se o seguinte: Se existisse somente números racionais e se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre comensuráveis, a igualdade:  $f(n.X) = n.f(X), \forall X \in \mathbb{R} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}$ . Conclui-se que  $Y = f(X)$  é crescente. Analogamente de  $f(n.X) = \frac{f(X)}{n}$ , conclui-se que  $Y = f(X)$  é decrescente. O que mostrar-se-á a seguir.

**Antes de enunciar e demonstrar o teorema fundamental da proporcionalidade, provaremos o seguinte lema:**

**Lema.** Seja  $f(n.X) = n.f(X)$ , para todo  $X > 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $f(r.X) = r.f(X)$ , para todo número racional  $r = \frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Temos:

$$q.f(r.X) = f(q.r.X) = f\left(q.\frac{p}{q}.X\right) = f(p.X) = p.f(X)$$

Logo  $f(r.X) = \frac{p}{q}.f(X) = r.f(X)$ , como queríamos demonstrar.

**Teorema Fundamental da Proporcionalidade.** As seguintes afirmações a respeito de  $Y = f(X)$  são equivalentes:

- 1) Y é diretamente proporcional a X;
- 2) para todo número real  $c > 0$ , tem-se  $f(c.X) = c.f(X)$ ;
- 3) existe um número  $k$ , chamado “constante de proporcionalidade” entre X e Y, tal que  $f(X) = k.X$ , para todo X.

### Demonstração:

Provaremos que  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ . Para mostrar que  $1) \Rightarrow 2)$ , Suponhamos, por absurdo, que  $Y = f(X)$ , seja diretamente proporcional a  $X$  mas que se consiga achar um número real  $c$  tal que  $f(c.X) \neq c.f(X)$ . Para fixar ideias, seja  $f(c.X) < c.f(X)$ , isto é,  $\frac{f(c.X)}{f(X)} < c$ ,  $f(X) > 0$ . Como entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional, podemos achar  $r$  racional tal que  $\frac{f(c.X)}{f(X)} < r < c$ , o que significa  $f(c.X) < f(X).r < f(X)c$ . O lema que provamos acima nos permite reescrever estas desigualdades como  $f(c.X) < f(r.X) < c.f(X)$ . Mas a desigualdade  $f(c.X) < f(r.X)$ , juntamente com o fato de ser  $r < c$ , está em contradição com a hipótese e  $Y$  ser diretamente proporcional a  $X$ , e ser, portanto, uma função crescente de  $X$ . Analogamente se prova que não pode ser  $f(c.X) > c.f(X)$ . Logo temos  $f(c.X) = c.f(X)$ , o que mostra que  $1) \Rightarrow 2)$ .

Para provar que  $2) \Rightarrow 3)$ , tomemos  $k = f(1)$ . Então, em virtude da hipótese 2), usada com  $X$  em lugar de  $c$ , temos  $f(X) = f(X.1) = X.f(1) = X.k$ , logo  $f(X) = k.X$ , como queríamos demonstrar.

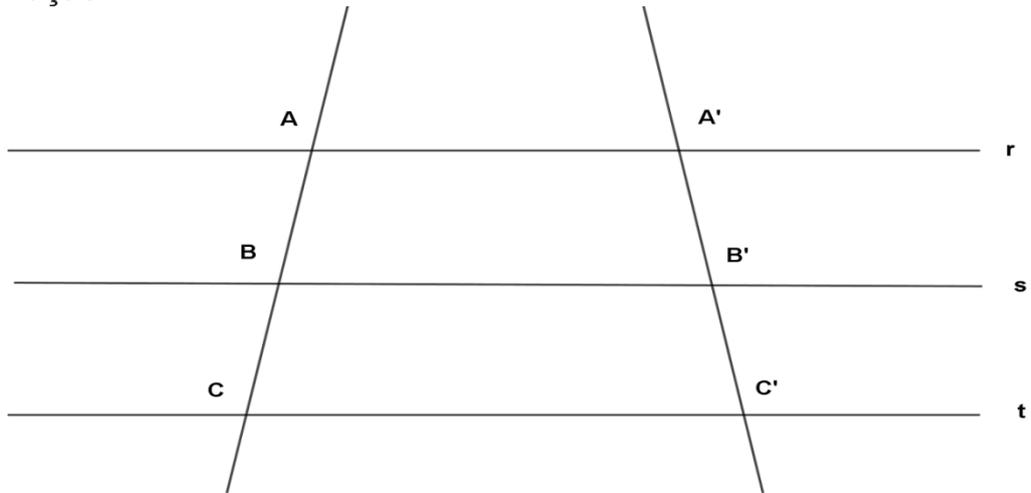
Finalmente, completamos o ciclo da demonstração provando que  $3) \Rightarrow 1)$ , Primeiro relembremos o acordo feito anteriormente: só lidamos com grandezas cujas medidas são números positivos. Logo  $k = f(1) > 0$ . Então  $X < X'$ , implica  $k.X < k.X'$ , ou seja,  $f(kX) < f(kX')$ , portanto  $Y = f(X)$  é uma função crescente de  $X$ . Além disso,  $f(n.X) = k.nX = n.kX = n.f(X)$ . Conclusão:  $Y$  é diretamente proporcional a  $X$ .

Um resultado básico de proporcionalidade em Geometria é o Teorema de Tales, que se apresenta a seguir, como exemplo de aplicação.

### Teorema de Tales

Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

**Demonstração:**



**Figura 1: Teorema de Tales**

Para demonstrar o Teorema de Tales devemos recorrer à definição do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, onde um feixe de paralelas determinam, em duas transversais quaisquer segmentos proporcionais. Assim dados o feixe de paralelas  $r$ ,  $s$  e  $t$  e as transversais  $a$  e  $b$ , temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Ou seja, os segmentos apresentados são proporcionais.

Num triângulo qualquer, se uma reta paralela a um dos lados deste triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão. Em outras palavras, seja um triângulo  $ABC$ , uma reta  $r$  paralela ao lado  $BC$  a qual intersecciona aos lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, nos pontos  $D$  e  $E$ , então:

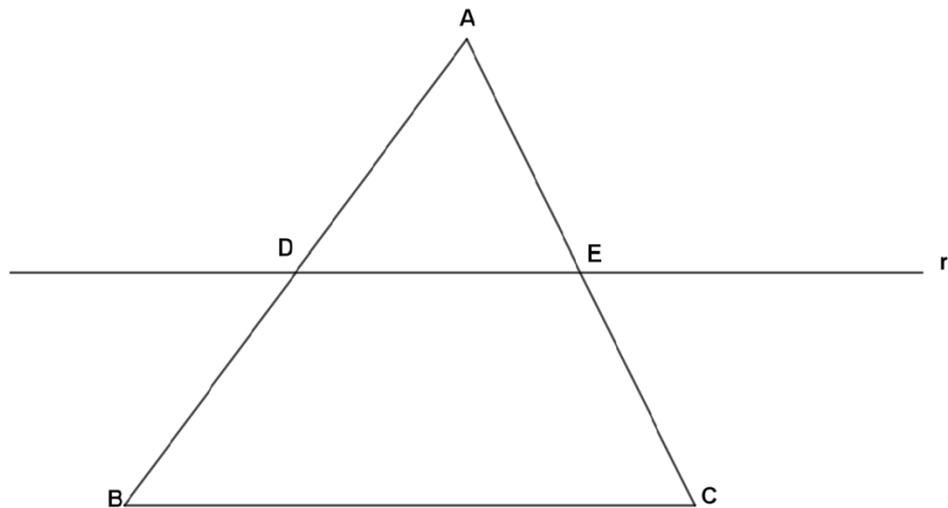


Figura 2: Teorema de Tales

Segue,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

Como gostaríamos demonstrar.

### Exemplos da aplicação do teorema de Tales

**Exemplo 1:** Considere três terrenos que estão entre duas ruas, A e B. Sabendo que as medidas de cada terreno de frente a rua A são 40 m, 30 m e 20 m, vamos determinar a medida de cada terreno para a rua B sabendo que a frente para essa rua tem 180 m. Vamos ilustrar segundo o nosso problema um esboço dos terrenos:

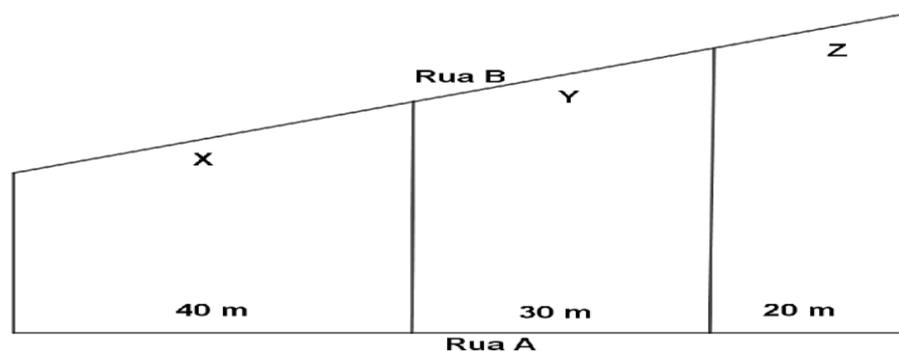


Figura 3: Exemplo Teorema de Tales

Pelo enunciado podemos dizer que  $X + Y + Z = 180$ , então pelo teorema de Tales, a relação dos seus lados será dada por:

$$\frac{X}{40} = \frac{Y}{30} = \frac{Z}{20} = \frac{X + Y + Z}{40 + 30 + 20} = \frac{180}{90} = 2$$

Assim precisamos determinar o valor de cada medida  $x$ ,  $y$  e  $z$  da figura. No caso, todas as razões são iguais a 2. O que nos traz:

$$\frac{X}{40} = 2 \rightarrow X = 80$$

$$\frac{Y}{30} = 2 \rightarrow Y = 60$$

$$\frac{Z}{20} = 2 \rightarrow Z = 40$$

Portanto os valores das variáveis são,  $X = 80, Y = 60$  e  $Z = 40$ .

**Exemplo 2:** Sejam as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  tais que  $r \parallel s \parallel t$ . Vamos determinar a medida dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  da figura abaixo:

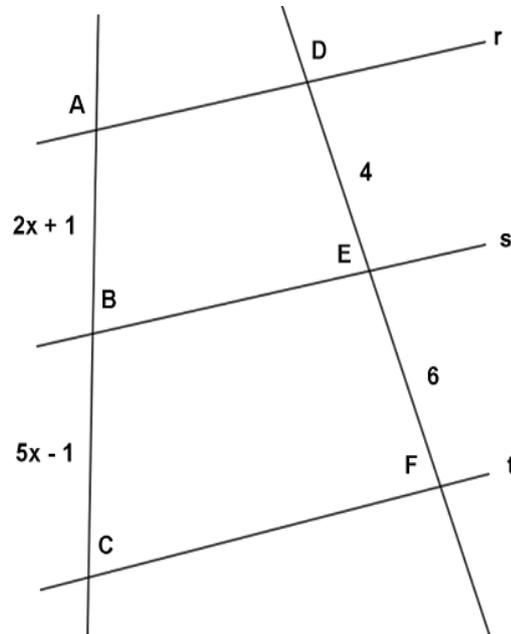


Figura 4: Exemplo Teorema de Tales

As medidas de cada segmento são:

$$\overline{AB} = 2X + 1$$

$$\overline{BC} = 5X - 1$$

$$\overline{DE} = 4$$

$$\overline{EF} = 6$$

$$\overline{AC} = 2X + 1 + 5X - 1 = 7X$$

$$\overline{DF} = 4 + 6 = 10$$

Pelo teorema de Tales, podemos então afirmar:

$$\frac{2X + 1}{4} = \frac{5X - 1}{6} = \frac{7X}{10}$$

Para resolver esta equação podemos escolher dois entre os três termos acima na igualdade:

$$\begin{aligned}\frac{2X + 1}{4} &= \frac{5X - 1}{6} \\ 6(2X + 1) &= 4(5X - 1) \\ 12X + 6 &= 20X - 4 \\ 6 + 4 &= 20X - 12X \\ 10 &= 8X \\ X &= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Então, as medidas valem  $\overline{AB} = \frac{7}{2}$  e  $\overline{BC} = \frac{21}{4}$ .

Diante desses resultados, é importante destacar que o conceito de proporcionalidade está relacionado a muitos outros conceitos matemáticos como porcentagem, número racional, função (principalmente, função linear), entre outros. Portanto, requer a mobilização de outros conceitos, em especial, conceito de função para a sua apropriação, bem como, a mobilização e coordenação de várias representações semióticas.

## 2.2 Regra de Três

Veremos um processo de resolução de problemas, muito utilizado na Matemática, que aplica a relação de proporcionalidade entre grandezas. Esse processo de resolução de problemas recebe o nome de regra de três.

### 2.2.1 Regra de Três Simples

Uma regra de três simples pode ser classificada em diretamente ou inversamente, de acordo com a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas.

## 2.2.2 Regra de três simples diretamente proporcional

Em uma regra de três simples diretamente proporcional, as grandezas são diretamente proporcionais entre si. Lembre-se de que podemos classificar duas grandezas em diretamente proporcionais se as duas variam no mesmo sentido, ou seja, quando uma aumenta, a outra também aumenta ou quando uma diminui a outra também diminui. Por exemplo, distância percorrida e tempo são grandezas diretamente proporcionais, pois quanto maior uma distância, maior o tempo gasto ao percorrê-la.

**Vejamos alguns exemplos desse tipo de regra de três:**

### Exemplo 1

Se 30 metros de tecido custam R\$ 318,00, quanto custará uma peça com 5 metros desse mesmo tecido?

Vamos adotar alguns passos para a resolução:

**Solução:**

**1º passo:** Organizar os dados em um quadro de comparação das grandezas.

Comprimento (m)	Preço (R\$)
30	318
5	$x$

**Representamos o valor que se quer determinar por uma variável.  
Nesse caso  $x$ .**

Figura 5: Representação das grandezas

**2º. passo:** Devemos analisar a variação das grandezas, indicando o sentido dessa variação.

Se o comprimento diminui, o que ocorre com o preço? Para uma quantidade menor de tecido, temos um preço também menor, ou seja, quando uma grandeza varia, a outra também varia no mesmo sentido.

(+) ↑	Comprimento (m)	Preço (R\$)	(+) ↑
	30	318	
(-) ↓	5	$x$	(-) ↓

Figura 6: Representação do Sentido das grandezas

Estamos usando setas indicativas para observar a variação de uma grandeza em relação à outra. As setas podem partir do menor para o maior valor ou, ao contrário, do maior valor para o menor. Não há obrigatoriedade para essa indicação, porém você deve estabelecer um padrão para todos os pares de grandezas. Em nossas aulas, vamos utilizar a direção do menor para o maior.

**3º. passo:** Escrever e resolver uma proporção com os dados.

Quando a regra de três simples envolve grandezas diretamente proporcionais, escrevemos a proporção diretamente do quadro de comparação.

A proporção formada, para o nosso exemplo, é:

$$\frac{30}{5} = \frac{318}{X}$$

Utilizando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$30 \cdot X = 318 \cdot 5$$

$$30X = 1590$$

$$X = \frac{1590}{30}$$

$$X = 53$$

**4º. passo:** Elaborar uma resposta, de acordo com o que se pede no problema.

**Resposta:** Cinco metros desse mesmo tecido custariam R\$ 53,00.

**Observe que, nos problemas de regra de três,**

- As quantidades correspondentes a uma mesma grandeza devem ser expressas em uma mesma unidade de medida.
- Geralmente, consideramos condições idênticas. Em um problema que envolva operários e número de peças produzidas, por exemplo, consideramos

que os operários produzam igualmente e que as condições de trabalho também sejam iguais para todos eles.

### Exemplo 2

Se 18 operários produzem 378 peças por dia de determinado produto, quantas peças seriam produzidas se essa linha de produção contasse com 25 operários?

#### Solução:

**1º. passo:** Organize os dados por grandeza. Assim, teremos um quadro de comparação das grandezas.

Operários	Nº de Peças (Unidades)
18	378
25	$x$

Figura 7: Representação das grandezas

**2º. passo:** Analise a variação das grandezas, indicando o sentido dessa variação.

	Operários	Nº de Peças (Unidades)	
(-)	18	378	(-)
(+)	25	$x$	(+)

Figura 8: Representação do Sentido das grandezas

Se o número de operários aumenta, o que ocorre com o número de peças a serem produzidas? Para um número maior de operários, temos um número de peças que também será maior, ou seja, quando uma grandeza varia a outra também varia no mesmo sentido.

Lembre-se: estamos utilizando as setas de indicação do valor menor para o valor maior de cada grandeza.

**3º. passo:** Escreva e resolva uma proporção com os dados.

Nesse caso, a proporção formada será:

$$\frac{18}{25} = \frac{378}{X}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$18 \cdot X = 378 \cdot 25$$

$$18X = 9450$$

$$X = \frac{9450}{18}$$

$$X = 525$$

**4º. passo:** Elabore uma resposta, de acordo com o que se pede no enunciado do problema.

**Resposta:** Vinte e cinco operários produziram 525 peças desse produto por dia.

### 2.2.3 Regra de três simples inversamente proporcional

Em uma regra de três simples inversamente proporcionais, uma das grandezas é inversamente proporcional à outra.

Lembre-se de que podemos classificar duas grandezas em inversamente proporcionais se as duas variam em sentido contrário, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui. Por exemplo, velocidade média e tempo são grandezas inversamente proporcionais, pois quanto maior for a velocidade média ao percorrer certa distância, menor será o tempo gasto nesse percurso.

**Exemplo 3:** Se 3 operários fazem uma obra em 20 dias, em quantos dias 12 operários fariam a mesma obra?

**1º. passo:** Organizar os dados em um quadro de comparação das grandezas.

Operários	Tempo (dias)
3	20
12	$x$

Figura 9: Representação das grandezas

**2º. passo:** Analisar a variação das grandezas, indicando o sentido dessa variação.

Se o número de operários aumenta, o número de dias para realizar o mesmo trabalho diminui. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

**3º. passo:** Escrever e resolver uma proporção com os dados.

Nesse caso, com duas grandezas inversamente proporcionais, precisamos escrever as razões de forma que as setas indicativas estejam apontando no mesmo sentido. Podemos inverter a primeira ou a segunda razão. Aqui, vamos inverter a segunda razão.

Assim, a proporção formada será:

$$\frac{3}{12} = \frac{x}{20}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$12 \cdot x = 3 \cdot 20$$

$$12x = 60$$

$$x = \frac{60}{12}$$

$$x = 5$$

**4º. passo:** Elabore uma resposta, de acordo com o que se pede no problema.

**Resposta:** Doze operários fariam a mesma obra em 5 dias.

#### Exemplo 4

Em uma pequena empresa, 18 funcionários trabalham durante 5 dias para produzir um lote de peças. Quantos dias serão necessários para produzir o outro lote de peças (idêntico ao primeiro) se para isso só tiverem disponíveis 15 funcionários?

#### Solução:

**1º. passo:** Organizar os dados em um quadro de comparação das grandezas.

Funcionários	Tempo (dias)
18	5
15	$x$

Figura 10: Representação das grandezas

**2º. passo:** Analisar a variação das grandezas, indicando o sentido dessa variação.

	Funcionários	Tempo (dias)	
(+)	18	5	(-)
(-)	15	$x$	(+)

Figura 11: Representação do Sentido das grandezas

Se o número de funcionários diminui, o número de dias para produzir um lote idêntico ao anterior aumenta. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

**3º. passo:** Escreva e resolva uma proporção com os dados.

Invertendo a segunda razão, para que as setas indicativas apontem no mesmo sentido, a proporção formada será:

$$\frac{18}{15} = \frac{x}{5}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$15 \cdot x = 18 \cdot 5$$

$$15X = 90$$

$$X = \frac{90}{15}$$

$$X = 6$$

**4º. passo:** Elabore uma resposta, de acordo com o que se pede no enunciado do problema.

**Resposta:** Quinze operários produziram um lote de peças (idêntico ao anterior) em 6 dias.

#### 2.2.4 Regra de Três Composta

Como já foi dito antes, na regra de três composta ocorrem três ou mais grandezas relacionadas entre si.

Nesse caso, em apenas uma grandeza é dado um valor conhecido e para as demais grandezas são dados dois valores. Na resolução desse tipo de situação-problema, vamos utilizar um método semelhante ao utilizado na resolução de regras de três simples.

##### Exemplo 1

Trabalhando 8 horas por dia, durante 12 dias, 30 operários produzem 1 000 unidades de determinado eletrodoméstico. Quantos dias serão necessários para que 48 operários, trabalhando 6 horas por dia, produzam 1 200 unidades desse mesmo produto?

##### Solução

**1º. passo:** Organizar os pares de valores de cada grandeza

Horas/dia	Dias	Operários	Produção (unidades)
8	12	30	1 000
6	$x$	48	1 200

Figura 12: Representação das grandezas

**2º. passo:** Identificar as grandezas em inversamente ou diretamente proporcionais. A indicação das setas será feita comparando-se cada uma das grandezas com a que apresenta o termo desconhecido. Observamos a variação de cada par de grandezas, considerando que as demais grandezas permanecem inalteradas.

**a) Comparando horas por dia e dias:**

Se o número de horas por dia de trabalho diminui, devemos trabalhar um número maior de dias para realizar o mesmo trabalho. Ou seja, essas grandezas são inversamente proporcionais. Assim, as setas apontam para direções opostas.

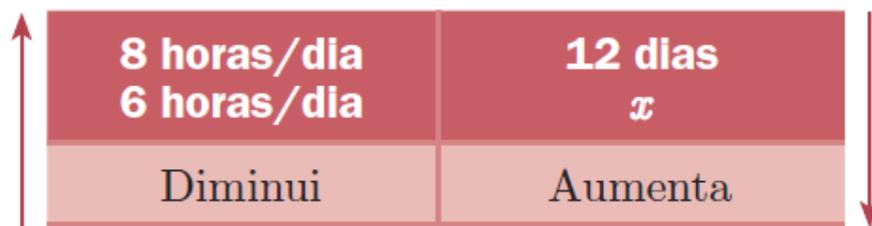


Figura 13: Representação das grandezas horas e dias

**b) Comparando operários e dias:**

Se o número de operários aumenta, podemos diminuir o número de dias para realizar um trabalho. Ou seja, essas duas grandezas são inversamente proporcionais. Assim, as setas apontam em direções opostas.

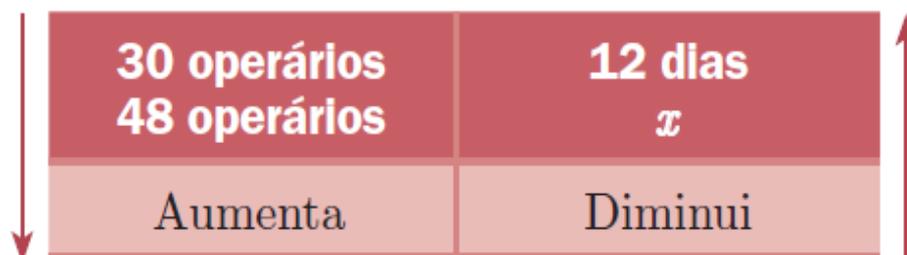


Figura 14: Representação das grandezas operários e dias

**c) Comparando produção e dias:**

Quando o número de unidades a serem produzidas aumenta, precisamos de mais dias para essa produção. Por isso, as grandezas produção e dias são diretamente proporcionais. Assim, as setas apontam para a mesma direção.

1 000 unid.	12 dias
1 200 unid.	$x$
Aumenta	Aumenta

Figura 15: Representação das grandezas das Unidades e dias

**3º. passo:** Construir a esquematização geral dos dados e realizar a inversão dos pares identificados como inversamente proporcionais.

A partir da seta da grandeza que tem o valor desconhecido (neste caso, dias), colocaremos as setas das demais grandezas. Quando as grandezas comparadas são diretamente proporcionais, as setas indicam a mesma direção ou, caso as grandezas envolvidas sejam inversamente proporcionais, as setas apresentadas indicam direções opostas. Lembre-se de que, nesse exemplo, somente as grandezas ‘operários’ e ‘produção’ são grandezas diretamente proporcionais.

Horas/dia	Dias	Operários	Produção (unidades)
8	12	30	1 000
6	$x$	48	1 200
Diminui	Aumenta	Diminui	Aumenta

Figura 16: Representação do sentido das grandezas

Invertendo as razões das grandezas inversamente proporcionais à grandeza ‘dias’, que são as grandezas ‘horas/dia’ e ‘operários’, obtemos:

Horas/dia	Dias	Operários	Produção (unidades)
6	12	48	1 000
8	$x$	30	1 200

Figura 17: Representação diretamente das grandezas

**4º. passo:** Montar a proporção e calcular o valor desconhecido

A solução por esse processo é a proporção obtida da igualdade entre a razão que apresenta o valor desconhecido e o produto das demais razões (após a inversão das que apresentam grandezas inversamente proporcionais a que apresenta o x). Observe:

$$\frac{12}{X} = \frac{6}{8} \cdot \frac{48}{30} \cdot \frac{1000}{1200}$$

OU

$$\frac{12}{X} = \frac{6 \cdot 48 \cdot 1000}{8 \cdot 30 \cdot 1200}$$

Invertendo as razões, temos:

$$\frac{X}{12} = \frac{8 \cdot 30 \cdot 1200}{6 \cdot 48 \cdot 1000}$$

Isolando o valor de x, temos:

$$X = \frac{12 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 1200}{6 \cdot 48 \cdot 1000}$$

Resolvendo os produtos e simplificando-os por 1 000, obtemos:

$$X = \frac{3456000}{288000}$$

$$X = \frac{3456}{288}$$

$$X = 12$$

**Resposta:** Seriam necessários 12 dias, nessas condições, para realizar o mesmo trabalho.

**Exemplo 2:** Se 20 homens, trabalhando durante 15 dias, constroem 500 m de uma estrada, quantos homens seriam necessários para construir 900 metros dessa estrada em 30 dias?

**1º. passo:** Organizar os pares de valores de cada grandeza

Homens/dia	Dias	Metros de uma Estrada
20	15	500
$x$	30	900

Figura 18: Representação das grandezas

**2º. passo:** Identificar as grandezas em inversamente ou diretamente proporcionais.

Homens/dia	Dias	Metros de uma Estrada
20	15	500
$x$	30	900

Figura 19: Representação das grandezas diretamente ou inversamente

**3º. passo:** Construir a esquematização geral dos dados e realizar a inversão dos pares identificados como inversamente proporcionais.

20	30	500
$x$	15	900

Figura 20: Representação das Grandezas diretamente proporcional

**4º. passo:** Montar a proporção e calcular o valor desconhecido

$$\frac{20}{x} = \frac{30 \cdot 500}{15 \cdot 900}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{30 \cdot 500}{15 \cdot 900}$$

$$\frac{20}{X} = \frac{15000}{13500}$$

$$\frac{X}{20} = \frac{13500}{15000}$$

$$X \cdot (15000) = 20 \cdot (13500)$$

$$15000X = 270000$$

$$X = \frac{270000}{15000}$$

$$X = 18$$

**Resposta:** São necessários 18 homens para fazer esse trabalho.

**Exemplo 3:** Na alimentação de 2 bois, durante 8 dias, são consumidos 2 420 kg de ração. Qual a quantidade de ração que seria necessária para alimentar 5 bois, durante 12 dias?

**Solução:**

**1º. passo:** Organizar os pares de valores de cada grandeza

Bois	Dias	kg de ração
2	8	2420
5	12	$x$

Figura 21: Representação das grandezas

**2º. passo:** Identificar as grandezas em inversamente ou diretamente proporcionais.

Bois	Dias	kg de ração
2	8	2 420
5	12	$x$

Figura 22: Representação das Grandezas

**3º. passo:** Construir a esquematização geral dos dados e realizar a inversão dos pares identificados como inversamente proporcionais.

2	8	2 420
5	12	<i>x</i>

Figura 23: Representação das Grandezas diretamente proporcional

**4º. passo:** Montar a proporção e calcular o valor desconhecido;

$$\frac{2420}{X} = \frac{8}{12} \cdot \frac{2}{5}$$

Efetuando o produto entre as razões

$$\frac{2420}{X} = \frac{16}{60}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$16 \cdot X = 60 \cdot (2420)$$

$$16X = 145200$$

$$X = \frac{145200}{16}$$

$$X = 9075$$

**Resposta:** São necessários 9 075 *kg* de ração.

### 3. Aplicabilidade de Proporcionalidade e Regra de três

#### 3.1 Aplicação de Proporcionalidade e Regra de três na disciplina de Física.

Com relação aos conhecimentos de Física, observamos a noção de proporcionalidade em diversos aspectos, o que contempla a abrangência do mesmo

no âmbito da Ciência. É relevante observar a estrutura que se fundamenta o ensino da Física, através de modelos extraídos da realidade como meio de resolver problemas. O que afirma Lima com propriedade a respeito: "É importante observar que, ao aplicarmos um modelo matemático para analisar uma situação concreta, devemos ter em mente os limites da validade do modelo". Como exemplos de modelos aplicados à Física enfatizando a proporcionalidade listamos as seguintes leis:

- Lei de Hooke.
- Lei da Gravitação Universal.
- Lei de Boyle e Mariotte.

### **Lei de Hooke**

Sobre a Lei de Hooke, a fórmula matemática que exprime tal modelo,  $d = \frac{F}{k}$ , onde  $d$  é a deformação da mola,  $F$  a intensidade e  $k$  o coeficiente de elasticidade, afirma "que a deformação sofrida por um corpo elástico (digamos, uma mola) é diretamente proporcional à (intensidade) força empregada".

A proporcionalidade evidenciada nesta lei fornece subsídios para algumas abordagens, dentre as quais, de constituir-se válida para respectivas aplicações ou dependendo de circunstâncias desfavoráveis mostrar-se inadequadas para funções subsequentes. Conforme afirma LIMA,

A validade dessa equação  $d = \frac{F}{k}$  como modelo matemático para representar o fenômeno é sujeito a restrições evidentes. A força  $F$  não pode ser muito pequena porque então, mesmo positiva não seria suficiente para deslocar a mola; neste caso teríamos  $d = 0$  com  $F > 0$ , logo. Não valeria o modelo  $d = \frac{F}{k}$ . Também não se pode tomar  $F$  muito grande porque a mola arrebentaria e, pouco antes disso, seu alongamento seria menos do que proporcional a  $F$ .

Para confirmar a Lei de Hooke podemos realizar um pequeno experimento com uma mola presa num suporte. Ao puxá-la podemos perceber que a força que aplicamos para esticá-la é diretamente proporcional à força que ela exerce, porém

em sentido contrário. Em outras palavras, a deformação da mola aumenta proporcionalmente à força aplicada nela.

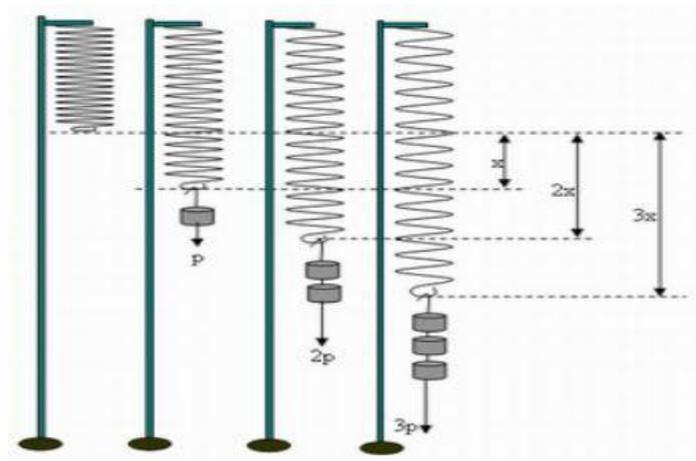


Figura 24: Representação Lei de Hooke

### Lei da Gravitação Universal

A **lei da gravitação universal** afirma que, se dois corpos possuem massa, ambos sofrerem força de tração mútua proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade. Essa lei foi formulada pelo físico inglês Isaac Newton em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, que descreve a lei da gravitação universal.

A gravidade é uma força fundamental de atração que age entre todos os objetos por causa de suas massas. Isto é, a quantidade de matéria de que são constituídos. A gravidade mantém os objetos celestes unidos e ligados, como os gases quentes contidos pelo sol e os planetas, confinados às suas órbitas. A gravidade da lua causa as marés oceânicas na Terra. Por causa da Gravitação, os objetos sobre a Terra são atraídos em seu sentido.

A força de atração entre dois corpos é diretamente proporcional a cada uma de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. A constante de gravitação universal é a constante que permite se escrever essa relação de proporcionalidade em forma de uma igualdade:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

Assim como outras constantes físicas, um dos principais papéis da constante de gravitação universal  $G$  é estabelecer a correção da lei física associada no que tange às unidades e à análise dimensional. Em unidades adotadas no Sistema Internacional de Unidades, seu valor expressa a atração gravitacional, em newtons, que verifica - se experimentalmente existir entre dois objetos de massa um quilograma cada, quando separados pela distância de um metro. O melhor valor aceito atualmente é:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$$

Com incerteza na última casa decimal. A unidade apresentada junto ao valor numérico da constante é por vezes escrita, de forma equivalente, como  $Nm^2/Kg^2$ .

A constante de gravitação universal  $G$  não deve ser confundida com  $g$  (em minúscula), que é o símbolo normalmente associado à variável que representa a intensidade da aceleração da gravidade terrestre junto à superfície do planeta, ou outro astro, quando explicitamente especificado. Em termos de  $G$ ,  $g$  expressa - se como:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Onde  $M$  e  $r$  representam nesse caso a massa e o raio do astro esférico. Para a Terra tem-se que a aceleração da gravidade vale por volta de  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

### **Lei de Boyle e Mariotte**

Contudo, o modelo que identifica a equação dos gases perfeitos, a saber, a Lei de Boyle e Mariotte, situa-se no âmbito das grandezas proporcionais diretas e inversas, visto que: O produto da pressão do gás ( $P$ ) pelo volume ( $V$ ) é igual ao produto da temperatura ( $T$ ) por uma constante  $K$ , ou ainda,  $P \cdot V = K \cdot T$ . Analisando pormenorizadamente tal equação podemos inferir algumas possibilidades consoantes, salienta Ávila: ora, se mantivermos constante a pressão do gás, deixando que variem a temperatura e o volume, é claro que estas duas variáveis  $T$  e  $V$  serão diretamente proporcionais, pois teremos  $T = C \cdot V$ , onde  $C$  é a constante  $\frac{P}{K}$ .

Analogamente, mantendo constante a temperatura, P e V resultam ser variáveis inversamente proporcionais, pois  $PV = K$ , onde K é a constante.

Consideravelmente, a situação advinda do cotidiano remete - nos a afirmar que os conhecimentos de Física encontram-se intrinsecamente presentes no contexto sociocultural da vida humana. Diante do exposto, podemos perceber o quanto a proporcionalidade é aplicada nos conteúdos citados, constituindo fator indispensável para abordagem dos mesmos.

### **3.2 Aplicação de Proporcionalidade e Regra de três na disciplina de Química**

Historicamente, o conhecimento químico centrou-se em estudos da natureza empírica sobre as transformações químicas e as propriedades dos materiais e substâncias. Os modelos explicáveis foram gradualmente se desenvolvendo conforme a concepção de cada época e, atualmente, o conhecimento científico em geral e o da Química em particular, requerem o uso constante de modelos extremamente elaborados. (BRASIL, 2006, p. 109-110).

Considerando as relações que permeiam os conteúdos de Química, notamos com veemência a presença da proporcionalidade como fator imprescindível para equalização dos compostos químicos e conseqüente conveniência para aplicações subsequentes. Como exemplo do referido anteriormente, citamos as Leis Ponderais das Reações Químicas: **Lei de Lavoisier; Lei de Proust e a Lei de Dalton**. Que evidenciam a aplicação da proporcionalidade em sua constituição.

#### **Lei de Lavoisier**

A **Lei de Lavoisier**, postulada em 1785 pelo químico francês Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794), corresponde a Lei da Conservação das Massas. Considerado o Pai da Química Moderna, segundo ele: "*Na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma*". Segundo Feltre, A lei da conservação da massa ou Lei de Lavoisier, [...], pode ser enunciada da seguinte maneira: "A massa total de um sistema fechado não varia, qualquer que seja a reação química que aí se verifique" (FELTRE, 1998, p.318), o que nos leva a afirmar que a quantidade das massas permanece constante, ou seja, a proporcionalidade não foi alterada.

Percebe – se que se ele realizasse suas experiências num ambiente aberto haveria uma perda de massa, posto que a substância reagisse com o ar. Nesse caso, se observarmos um ferro que com o passar do tempo reage com o ar (resultando na ferrugem), notamos a variação em sua massa inicial, ou seja, ela torna-se maior após o contato entre eles uma vez que apresenta a massa do ferro e a massa do ar. Assim, fica claro que a Lei de Lavoisier é somente aplicada em sistemas fechados.

### **Exemplificação para a Lei de Lavoisier**

(UEFS-2011) Com objetivo de comprovar a Lei de Conservação das Massas em uma reação química — Lei de Lavoisier —, um béquer de 125,0mL, contendo uma solução diluída de ácido sulfúrico,  $H_2SO_4(aq)$ , foi pesado juntamente com um vidro de relógio, contendo pequena quantidade de carbonato de potássio,  $K_2CO_3(s)$ , que, em seguida, foi adicionado à solução ácida. Terminada a reação, o béquer com a solução e o vidro de relógio vazio foi pesado, verificando-se que a massa final, no experimento, foi menor que a massa inicial. Considerando-se a realização desse experimento, a conclusão correta para a diferença verificada entre as massas final e inicial é:

- A) a Lei de Lavoisier não é válida para reações realizadas em soluções aquosas.
- B) a Lei de Lavoisier só se aplica a sistemas que estejam nas condições normais de temperatura e de pressão.
- C) a condição para a comprovação da Lei de Conservação das Massas é que o sistema em estudo esteja fechado.
- D) o excesso de um dos reagentes não foi levado em consideração, inviabilizando a comprovação da Lei de Lavoisier.
- E) a massa dos produtos de uma reação química só é igual à massa dos reagentes quando estes estão no mesmo estado físico.

### **Lei de Proust**

A **Lei de Proust**, Lei das Proporções Constantes ou Lei das Proporções Definidas, foi formulada no início do século XIX pelo químico francês Joseph Louis Proust (1754-1826) a qual afirma: *“Uma determinada substância composta é*

*formada por substâncias mais simples, unidas sempre na mesma proporção em massa".* Onde "Uma determinada substância composta é formada por substâncias mais simples, unidas sempre na mesma proporção em massa." (FELTRE, 2000, p. 52), ressaltando desse modo a presença contínua do fator proporcionalidade.

Assim, depois de diversas experiências de pesagem, Proust constatou que após as reações químicas, as substâncias (reagentes e produtos) envolvidas apresentavam a mesma massa proporcional, ou seja, eram constantes donde a combinação de elementos formavam substâncias proporcionais. Em outras palavras, a massas dos reagente e dos produtos podem se alterar com a reação química, mas sempre terá relações proporcionais.

### **Exemplificação**

Para entender melhor a aplicação da Lei de Proust, observe o exemplo abaixo da formação do gás carbônico (CO<sub>2</sub>):

1. Experiência 1: 6g de Carbono (C) são combinados com 16g de Oxigênio (O) formando 22g de Gás Carbônico (CO<sub>2</sub>)
2. Experiência 2: 12g de Carbono (C) são combinados com 32g de Oxigênio (O) formando 44g de Gás Carbônico (CO<sub>2</sub>)

Embora os números da segunda experiência sejam o dobro da primeira, eles são proporcionais, ou seja, a proporção das massas na primeira experiência é de 6:16:22, enquanto na segunda, a proporção é de 12:32:44. Para confirmar se a Lei de Proust está sendo utilizada, basta dividir os números das massas dos elementos envolvidos:

Logo,

Experiência 1:  $6/16=0,375$

Experiência 2:  $12/32=0,375$

Note que a molécula de água (H<sub>2</sub>O), formada pela combinação de duas moléculas de hidrogênio (com massa atômica 1) e uma de oxigênio (com massa atômica 16), sempre apresentam a proporção de 8:1. Dessa maneira, 2 moléculas

de hidrogênio têm  $(1 \times 2)$  2g, e 1 molécula de oxigênio  $(16 \times 1)$  possui 16g. Logo,  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ .

### Lei de Dalton

Convém ainda citar a Lei de Dalton ou a lei das proporções múltiplas, a qual confere o seguinte enunciado "Quando duas substâncias simples podem formar mais de uma substância composta, se fixarmos a massa de uma das substâncias simples, as massas da outra formarão uma proporção de números inteiros e pequenos"(op. cit. 2000, p. 53).

A Lei de Dalton refere-se às pressões parciais dos vários gases componentes de uma mistura gasosa. Consideremos uma mistura gasosa contida num recipiente rígido de volume  $V$ . Seja  $p$  a pressão exercida pela mistura. Se por um processo qualquer deixarmos no recipiente apenas as partículas de um dos gases componentes da mistura, retirando todas as outras, o gás que permaneceu ocupará sozinho todo o volume  $V$  do recipiente e exercerá uma pressão  $p_1 < p$ . Em outras palavras, a pressão parcial de um gás é a pressão que este exerceria se ocupasse sozinho, à mesma temperatura, todo o volume da mistura gasosa à qual pertence. Dalton, após analisar este fenômeno, chegou à conclusão de que: **“A esta pressão denominaremos pressão parcial do gás 1 na mistura gasosa”**.

### Exemplificação

(Mack-SP) Uma mistura de 1,5 mol de gás carbônico, 8 g de metano (16 g/mol) e 44,8 l de monóxido de carbono está contida em um balão de 30 L nas CNTP. É correto dizer que:

Dado: volume molar nas  $CNTP = 22,4 \text{ L/mol}$ .

- a) a pressão parcial do monóxido de carbono é o dobro da do metano.
- b) a pressão parcial do metano é o triplo da do gás carbônico.
- c) a pressão do gás carbônico é  $\frac{1}{4}$  da do monóxido de carbono.
- d) a pressão parcial do monóxido de carbono é o quádruplo da do metano.
- e) a pressão total é igual a 4 atm.

É necessário calcular a fração da quantidade de matéria (X) de cada gás na mistura. Para tal, precisamos primeiro encontrar os valores da quantidade de matéria (n):

Logo, podemos inferir com propriedade o quanto a proporcionalidade está inserida no conhecimento químico, conforme registros anteriores, e também consideravelmente em outros conteúdos pertinentes ao mesmo, denunciando a aplicabilidade da Matemática nas Ciências Naturais.

### **3.3 Visualizar e mostrar o percentual de questões envolvendo os conteúdos e/ou a ideia de proporcionalidade e regra de três no ENEM.**

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) é promovido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), que é vinculado ao Ministério da Educação (MEC). O Enem é hoje um patrimônio da sociedade brasileira e tem o seu valor reconhecido pela comunidade educacional. O Enem difere, em muito, de outras avaliações, devido à sua abrangência e ao público-alvo, que apresenta realidades muito diversas, além de alcançar um altíssimo número de participantes em todo o Brasil.

Tem – se que o estudo de Proporcionalidade e Regra de Três, são conteúdos que estão estreitamente relacionados com as mesmas ideias na matemática. Mostraremos como essas ideias estão sendo aplicadas nos exames do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

São Muitos exames aplicados, pois o ENEM no ano de 2018 completou 20 anos começando sua trajetória no ano de 1998, nossa pesquisa acontecerá dos anos de 2013 á 2017, visualizando e identificando as questões em que foram utilizadas as ideias de Proporcionalidade e Regra de Três, mostrando o percentual dessas questões a cada ano verificado nas provas do ENEM.

A pesquisa com esse tipo de questões e suas apresentações nesse capítulo, contribuirá ao professor do Ensino Médio que estiver desenvolvendo algum conteúdo que utilize a ideia de Proporcionalidade e Regra de Três, bem como apresentar aos seus alunos questões diversificadas de forma a entender e vivenciar os modelos de questões abordadas no Exame do Ensino Médio ENEM. Para

demonstração das questões usaremos o caderno de prova de número 05 cor amarela. Para a visualização das questões trabalhadas neste capítulo veja, Anexo 1.

### 3.3.1 Comentários sobre o capítulo abordado

O capítulo abordado mostra que os conteúdos Proporcionalidade e Regra de três são aplicados de diversas formas nas questões do ENEM, buscando avaliar a capacidade do candidato de identificar diferentes formas de variação de grandezas, seja a proporcional ou a inversamente proporcional, como também a ideia de Regra de três simples ou composta. Construiremos uma tabela para mostrar a quantidade de questões que envolvam a ideia de Proporcionalidade e Regra de três nos Exames do ENEM nos anos de 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017, conforme Anexo 1.

Os números apresentadas referem – se a questões que de alguma forma usa – se a ideia ou até mesmo o conceitos dos conteúdos Proporcionalidade ou Regra de três. Destaca – se que apenas os conceitos desses conteúdos não são suficientes para resolver certas questões, porém em algum momento das resoluções essa ideia será aplicada. Tem – se o seguinte resultado:

<b>Ano</b>	<b>Quantidade de Questões</b>	<b>Porcentagem</b>
<b>2013</b>	<b>16</b>	<b>35,56%</b>
<b>2014</b>	<b>22</b>	<b>48,89%</b>
<b>2015</b>	<b>14</b>	<b>31,11%</b>
<b>2016</b>	<b>18</b>	<b>40,00%</b>
<b>2017</b>	<b>17</b>	<b>37,78%</b>
<b>Total de Questões por Exame</b>		<b>45</b>

**Tabela 1: Percentual de Questões que envolvem a ideia de Proporcionalidade e Regra de Três no ENEM**

Observando a tabela 6.1 que nos mostra o percentual de Questões que utilizam a ideia de Proporcionalidade e Regra de três, vimos que em média O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), usa mais de 1/3 desses conteúdos, percentual bastante significativo, o que deixa claro a importância desses conteúdos para aqueles que elaboram as provas do ENEM.

Destaca – se que o objetivo desse trabalho não é visualizar a qualidade dessas questões e nem realizar suas devidas resoluções e sim mostrar a importância desse conteúdo bem como buscar metodologias que viabilizam uma melhor assimilação e aplicação pelo candidato dos conteúdos enunciados.

## **4 Processos Metodológicos**

### **4.1.1 Local da pesquisa e Sujeitos envolvidos**

A pesquisa foi realizada no período de Agosto a Setembro do ano de 2018, em uma turma com 30 alunos do 3º ano do ensino médio do turno Vespertino da Escola Estadual José Mota, localizada na Rua João de Deus, nº 2092, Bairro da Liberdade, Manacapuru - Amazonas.

### **4.1.2 Instrumento para coletas de dados**

A coleta de dados foi desenvolvida em três momentos distintos, sendo:

O primeiro momento a aplicação de um questionário chamado de questionário 1 composto por quatro questões de múltipla escolha, onde cada questão possuía cinco opções tendo apenas uma como correta utilizamos questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) contemplando o conceito e/ou a ideia de Proporcionalidade e Regra de três na qual vimos no anexo 2 desse trabalho.

O segundo momento foi composto por cinco aulas usando recursos de mídia áudio visual bem como a apresentação de applets utilizando o aplicativo do Geogebra no qual vimos no anexo 3, distribuído da seguinte forma:

- Nas duas primeiras aulas com 50 minutos cada aula, usamos apresentação de slides mostrando exemplos de questões que abordam a ideia de Proporcionalidade e Regra de Três;
- Na terceira aula também de 50 minutos, apresentamos um vídeo abordando a temática Proporcionalidade com o Professor Elon Lages Lima;
- Na quarta e Quinta aula também de 50 minutos, apresentamos applets criado no aplicativo Geogebra para o aluno interagir, visualizar e entender

processos significativos da aprendizagem referente os conteúdos Proporcionalidade e Regra de Três;

O terceiro momento aplicamos um novo questionário que chamamos de questionário 2, composto por quatro questões de múltipla escolha, onde cada questão possuía cinco opções tendo apenas uma como correta utilizamos questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) contemplando o conceito e/ou a ideia de Proporcionalidade e Regra de três na qual vimos no decorrer desse pesquisa no anexo 2. Entende – se que as questões abordadas tanto no questionário 1 como no questionário 2 se equivalem em termos de complexidade.

## 4.2 Análise dos Dados

A análise de dados é a atividade de transformar um conjunto de dados com o objetivo de poder verificá-los melhor dando-lhes ao mesmo tempo uma razão de ser e uma análise racional. Como também analisar os dados de um problema e identificá-los.

### 4.2.1 Dados das repostas dos alunos no questionário inicial

Tendo em vista a aplicação do Questionário Inicial na qual chamamos de questionário 1. Temos os seguintes resultados:

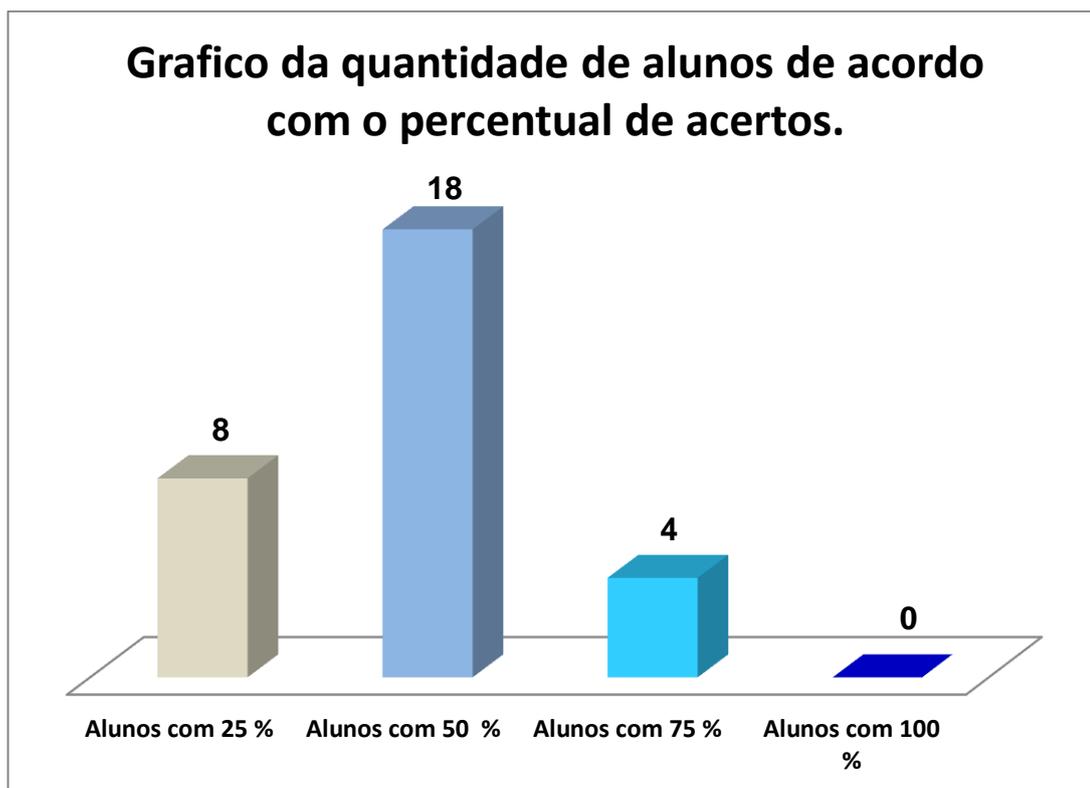
TABELA DE TABULAÇÃO DO QUESTIONÁRIO INICIAL						
0 PARA QUESTÕES ERRADAS E 1 PARA QUESTÕES CERTAS						
ALUNO	QUESTÃO 01	QUESTÃO 02	QUESTÃO 03	QUESTÃO 04	QUANTIDADE DE ACERTOS	PERCENTUAL DE ACERTOS
A1	1	0	0	0	1	25,0%
A2	1	0	0	1	2	50,0%
A3	1	0	0	1	2	50,0%
A4	0	0	1	0	1	25,0%
A5	1	0	1	0	2	50,0%
A6	1	0	1	0	2	50,0%
A7	1	0	1	0	2	50,0%
A8	1	1	0	1	3	75,0%
A9	1	0	1	0	2	50,0%

A10	1	0	1	0	2	50,0%
A11	1	0	0	0	1	25,0%
A12	0	1	0	1	2	50,0%
A13	1	1	1	0	3	75,0%
A14	1	0	0	0	1	25,0%
A15	1	0	0	1	2	50,0%
A16	1	1	0	1	3	75,0%
A17	1	0	0	1	2	50,0%
A18	1	0	0	0	1	25,0%
A19	1	1	0	1	3	75,0%
A20	0	0	1	0	1	25,0%
A21	1	0	0	0	1	25,0%
A22	1	0	0	0	1	25,0%
A23	1	0	0	1	2	50,0%
A24	1	0	0	1	2	50,0%
A25	1	1	0	0	2	50,0%
A26	0	1	0	1	2	50,0%
A27	1	0	1	0	2	50,0%
A28	1	0	0	1	2	50,0%
A29	0	1	0	1	2	50,0%
A30	0	1	0	1	2	50,0%
	<b>24</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>14</b>	<b>TOTAL DE ACERTOS POR QUESTÃO</b>	
	<b>80,0%</b>	<b>30,0%</b>	<b>30,0%</b>	<b>46,7%</b>	<b>PORCENTAGEM POR QUESTÃO</b>	

**Tabela 2: Tabela de Tabulação do Questionário 1**

**Observação: Os 30 alunos foram nominalmente caracterizado de A1 a A30.**

Diante da tabulação apresentada observou – se que os alunos que acertaram uma das quatro questões obtiveram um percentual de 25 % de acertos, os que acertaram duas questões das quatro trabalhadas obtiveram 50% de acertos e os que acertaram 3 questões das quatro desenvolvida obtiveram um percentual de 75 % de acertos, ressaltando que não tivemos alunos com 0% e nem com 100 % de percentual dos acertos.



**Gráfico 1: Quantidade de alunos de Acordo com percentual de acertos**

Entende – se que quatro alunos que representa um percentual de 13,33% dos pesquisados acertaram 75% do questionário, 18 alunos que representam um percentual de 60% dos pesquisados acertaram a metade da quantidade de questões, ou seja, 50% das questões do questionário e oito alunos que representa 26,67% dos pesquisados acertaram menos da metade das questões do questionário tendo um percentual de acerto de apenas 25%.

#### **4.2.2 O uso de mídia áudio visual na resolução de problemas de proporcionalidade e regra de três, bem como a utilização do aplicativo Geogebra.**

Os avanços tecnológicos aplicam-se a todos os segmentos da vida social, e na educação não poderia ser de outra forma, nas escolas os alunos dirigem suas atividades e condicionam seu pensar, seu agir, seu sentir, seu raciocínio e sua relação com as pessoas através de aparelhos tecnológicos.

Aprender e ensinar matemática são processos que não se podem dissociar e devem fazer parte dos saberes relacionado à prática do professor de Matemática.

Deste modo, a busca por novas formas de ensinar e aprender as propriedades e conceitos de Matemática deve ser uma das preocupações dos docentes no contexto atual. Diante desse novo panorama, é necessário refletir também sobre a formação dos professores a partir dessas transformações.

Para Freire (2011), as novas tecnologias da informação constituem-se molas propulsoras e recursos dinâmicos de educação, à medida que, quando bem utilizadas pelos educadores e educandos permitem intensificar a melhoria das práticas pedagógicas desenvolvidas em sala de aula e fora dela.

A utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática caracteriza uma Tendência na Educação Matemática não apenas por estar presente no cenário das inovações tecnológicas atuais, mas principalmente pelo rico potencial que seu uso promove. Gravina e Basso (2012) revelam que a tecnologia digital disponibiliza ferramentas interativas que reúne sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concreto-abstratos. São concretos uma vez que existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos, pois, respondem às nossas elaborações e construções mentais (GRAVINA e BASSO, 2012).

#### 4.2.3 Dados das repostas dos pesquisados no questionário final

Tendo em vista a aplicação do questionário final na qual chamamos de questionário 2. Obtemos os seguintes resultados:

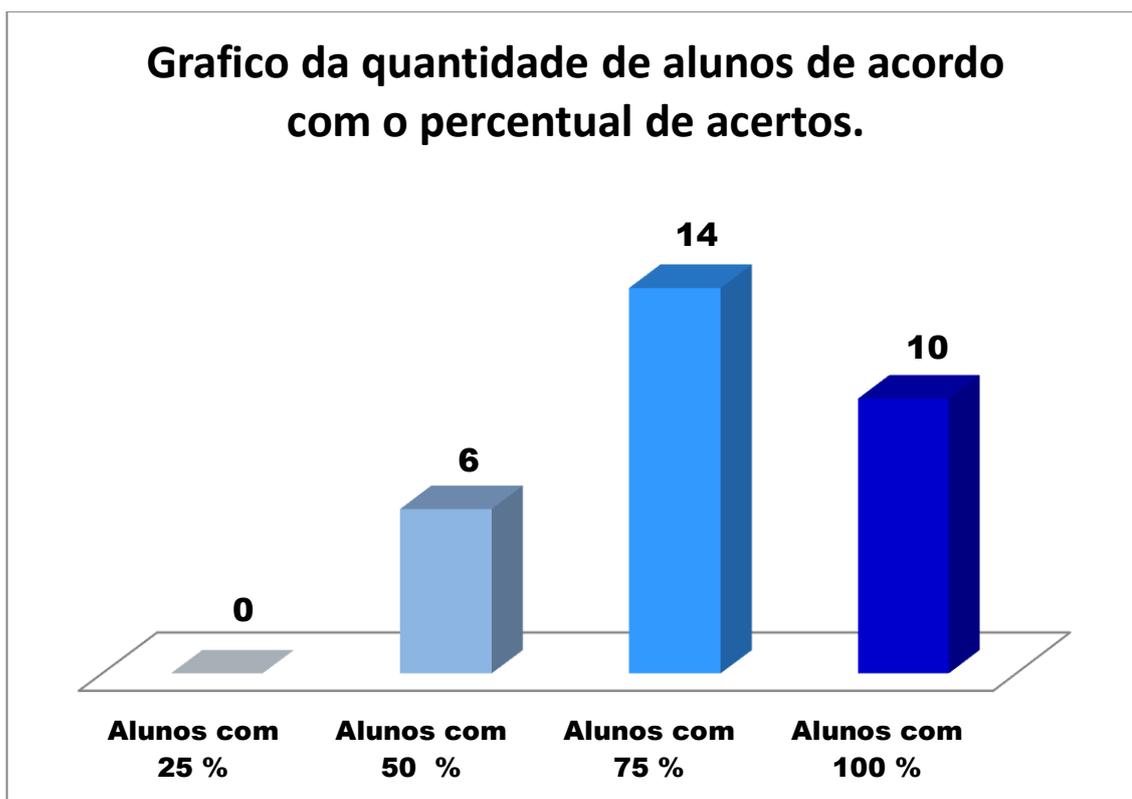
<b>TABELA DE TABULAÇÃO DO QUESTIONÁRIO FINAL</b>						
<b>0 PARA QUESTÕES ERRADAS E 1 PARA QUESTÕES CERTAS</b>						
<b>ALUNO</b>	<b>QUESTÃO 01</b>	<b>QUESTÃO 02</b>	<b>QUESTÃO 03</b>	<b>QUESTÃO 04</b>	<b>QUANTIDADE DE ACERTOS</b>	<b>PERCENTUAL DE ACERTOS</b>
A1	1	1	1	1	4	100,0%
A2	0	1	1	1	3	75,0%
A3	1	0	1	0	2	50,0%
A4	1	1	0	0	2	50,0%
A5	1	1	0	1	3	75,0%
A6	1	0	1	1	3	75,0%
A7	1	0	1	1	3	75,0%
A8	1	1	1	1	4	100,0%

A9	1	0	1	1	3	75,0%
A10	1	1	1	1	4	100,0%
A11	1	0	1	0	2	50,0%
A12	1	1	1	1	4	100,0%
A13	1	1	1	1	4	100,0%
A14	1	1	1	1	4	100,0%
A15	1	0	1	1	3	75,0%
A16	1	0	1	1	3	75,0%
A17	1	1	1	1	4	100,0%
A18	1	1	1	0	3	75,0%
A19	1	1	1	1	4	100,0%
A20	1	0	1	1	3	75,0%
A21	0	1	1	0	2	50,0%
A22	0	1	1	0	2	50,0%
A23	1	0	1	1	3	75,0%
A24	1	1	1	1	4	100,0%
A25	1	1	1	0	3	75,0%
A26	1	0	1	0	2	50,0%
A27	1	1	1	1	4	100,0%
A28	1	1	0	1	3	75,0%
A29	1	1	1	0	3	75,0%
A30	1	1	0	1	3	75,0%
	27	20	26	21	<b>TOTAL DE ACERTOS POR QUESTÃO</b>	
	90,0%	66,7%	86,7%	70,0%	<b>PORCENTAGEM POR QUESTÃO</b>	

**Tabela 3: Tabela de Tabulação do Questionário 2**

**Observação: Os 30 alunos foram nominalmente caracterizado de A1 a A30.**

Diante da tabulação do Questionário 2, onde temos que os alunos pesquisados são os mesmos que realizaram o questionário 1, observou – se que os mesmos possuem 50%, 75% e 100% de percentual de acertos.



**Gráfico 2: Quantidade de alunos de Acordo com percentual de acertos**

Entende – se que 10 alunos que representa um percentual de 33,33% dos pesquisados acertaram 100% do questionário, 14 alunos que representa um percentual de 46,67% dos pesquisados acertaram 75% das questões do questionário, tivemos seis alunos que representa um percentual de 20,00% dos alunos pesquisados acertando a metade da quantidade de questões, ou seja, 50% do questionário, não tivemos alunos que acertaram 25% do questionário como também não tivemos alunos que zeraram o questionário aplicado.

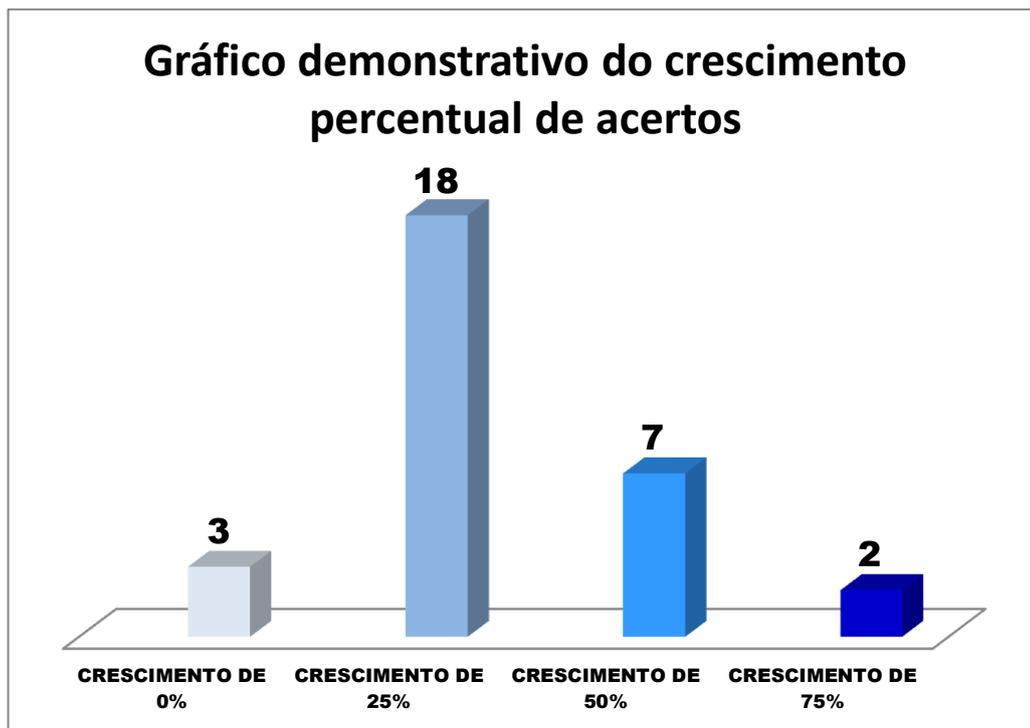
#### **4.2.4 Análises das estratégias de resolução dos problemas do questionário final por meio das aulas áudio visual e aplicativo do Geogebra**

Apresentação da tabela de comparação do percentual de acertos nos questionários aplicados.

<b>TABELA DE COMPARAÇÃO NO PERCENTUAL DE ACERTOS NOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS</b>			
<b>ALUNOS</b>	<b>PERCENTUAL DE ACERTOS NO QUESTIONÁRIO 1</b>	<b>PERCENTUAL DE ACERTOS NO QUESTIONÁRIO 2</b>	<b>CRESCIMENTO PERCENTUAL DE ACERTOS</b>
A1	25,0%	100,0%	75,0%
A2	50,0%	75,0%	25,0%
A3	50,0%	50,0%	0,0%
A4	25,0%	50,0%	25,0%
A5	50,0%	75,0%	25,0%
A6	50,0%	75,0%	25,0%
A7	50,0%	75,0%	25,0%
A8	75,0%	100,0%	25,0%
A9	50,0%	75,0%	25,0%
A10	50,0%	100,0%	50,0%
A11	25,0%	50,0%	25,0%
A12	50,0%	100,0%	50,0%
A13	75,0%	100,0%	25,0%
A14	25,0%	100,0%	75,0%
A15	50,0%	75,0%	25,0%
A16	75,0%	75,0%	0,0%
A17	50,0%	100,0%	50,0%
A18	25,0%	75,0%	50,0%
A19	75,0%	100,0%	25,0%
A20	25,0%	75,0%	50,0%
A21	25,0%	50,0%	25,0%
A22	25,0%	50,0%	25,0%
A23	50,0%	75,0%	25,0%
A24	50,0%	100,0%	50,0%
A25	50,0%	75,0%	25,0%
A26	50,0%	50,0%	0,0%
A27	50,0%	100,0%	50,0%
A28	50,0%	75,0%	25,0%
A29	50,0%	75,0%	25,0%
A30	50,0%	75,0%	25,0%

**Tabela 4: Tabela de comparação no crescimento percentual dos pesquisados.**

Obervou – se que os alunos pesquisados tiveram um aumento de 25%, 50% e 75% no crescimento percentual de acertos do questionario inicial para o questionário final como também alguns que mantiveram o mesmo percentual.



**Gráfico 3: Quantidade de pesquisados de acordo com o percentual de crescimento**

Entende – se que dois alunos que representa um percentual de 6,67% dos pesquisados obtiveram um crescimento percentual de acertos de 75%, sete alunos que representa um percentual de 23,33% dos pesquisados obtiveram um crescimento percentual de acertos de 50%, tivemos 18 alunos que representa um percentual de 60,00% dos alunos pesquisados que obtiveram um crescimento percentual de acertos de 25% e observou – se que três alunos que representa 10% dos pesquisados mantiveram – se inalterados do crescimento percentual de acertos referente aos questionários aplicados, ressaltando que não tivemos alunos que diminuíram o percentual de acertos nos questionários trabalhados.

A partir da análise dos resultados obtidos foi possível verificar o papel transformador dos recursos de mídias no contexto educacional, sendo este fato também relato por Correia (2011) verificou em seu trabalho que as mídias podem ser um grande aliado do professor e dos alunos em sala de aula, podendo facilitar o aprendizado de várias disciplinas. O desenvolvimento deste trabalho demonstrou que o aprendizado aumenta com o uso de recurso de mídia.

Dessa forma, a contribuição dos recursos audiovisuais auxilia no aprimoramento das aulas e contribuem significativamente para o aprendizado nas aulas de Matemática, conforme o relato de Salustiano (2011) fica claro que trabalhar

com recursos midiáticos provoca impacto na aprendizagem dos alunos. As tecnologias são como pontes que abrem a sala de aula para o mundo no qual permitem mostrar as várias formas de captar e mostrar o conhecimento sob ângulos e meios diferentes para um processo de construção da consciência crítica.

Nesse contexto As representações semióticas de Duval, bem como a aprendizagem significativa de Ausubel em consonância com FINGER et al (2011) A utilização de recursos áudios-visuais no ambiente escolar é uma forma de facilitar a construção do conhecimento tanto no ensino de Ciências e Matemática quanto às demais disciplinas. No estudo vivenciado, pode-se observar claramente um avanço no desempenho de quase todos os alunos pesquisados logo após a exibição de aulas expositivas, vídeos e o aplicativo do Geogebra para os alunos trabalhados. Após cada exibição, o índice de questionamentos, posicionamentos, debates, ou seja, diálogos em geral, foram relevantes no processo ensino-aprendizagem, proporcionando desta maneira, o envolvimento de todos os indivíduos (alunos e professores). Assim, fazendo uma análise de todo o desempenho dos alunos, é possível concluir que aulas expositivas e vídeos direcionados aos conteúdos abordados como também recursos tecnológicos utilizados como o Geogebra, por exemplo, contribuem para este processo.

Portanto, é inevitável e inadiável que o professor busque inserir em seu planejamento o uso dos recursos de mídias, como forma de auxiliar o desenvolvimento do processo ensino aprendizagem, contribuindo para a formação de cidadãos críticos e conscientes de seus deveres e direitos perante a sociedade.

## **5. Considerações Finais**

Uma das primeiras conclusões que chegamos ao final dessa dissertação é que devemos dar bastante atenção aos conteúdos que estabelecem uma ideia de Proporcionalidade e Regra de Três, haja vista a importância desses conteúdos, associando a proporcionalidade, por exemplo, com a semelhança de triângulo, porcentagens, áreas e volumes de figuras planas e espaciais são exemplos de conteúdos que podem ser desenvolvido a ideia de Proporcionalidade e Regra de Três.

Nossa preocupação em estabelecermos a relação entre proporcionalidade e regra de três é muito simples, pois a ideia de proporcionalidade e regra de três é muito usada durante o Ensino Básico, como também em situações do nosso cotidiano. Podemos verificar o uso da proporcionalidade em situações de compra e venda, ou ainda em algumas prescrições médicas. Essa importância pode ser verificada também ao examinarmos o Capítulo 6, onde analisamos algumas provas do ENEM para constatar que esse é o conteúdo mais explorado nesses exames.

Outra conclusão que podemos destacar é que cada educando possui diferentes tipos de aprendizagem e a visão intimista de Vygotsky, chegamos à conclusão que os alunos compreendem melhor quando expostos às atividades que estimulam o desenvolvimento de raciocínio lógico e a imaginação dos problemas propostos. Como também pode - se concluir que após a verificação dos dados obtidos através dos resultados dos questionários aplicados, é possível afirmar que o uso dos recursos de mídias, como estratégia facilitadora da aprendizagem nas aulas de Matemática, poderá auxiliar professores desta disciplina a alcançar os objetivos da mesma, contribuindo significativamente para o desenvolvimento do processo ensino aprendizagem.

Contudo este trabalho foi desenvolvido com a possibilidade de que toda essa pesquisa realizada seja de alguma forma instrumento usado por professores e alunos no que se refere à ideia de Proporcionalidade e Regra de Três.

## Referências Bibliográficas

<http://www.ufal.edu.br/ppgecim/formularios/banco-de-dissertacoes/hugo-silva-leao/>  
Acessado no dia 23/08/ 2018 às 17:40 hs;

<https://www.mat.ufpb.br/pibid/attachments/article/14/apostilas/razão/proporção/probabilidade/> Acessado no dia 20/11/2018;

[https://www.proformat-sbm.org.br/dissertações/funções afins e a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três/](https://www.proformat-sbm.org.br/dissertações/funções%20afins%20e%20a%20relação%20entre%20função%20linear,%20proporcionalidade%20e%20regra%20de%20três/) Acessado no dia 27/09/2018;

<https://www.conferencias.ultra.br/index.php/ciem/vi/paper/view>. Proporcionalidade: Uma análise de livros didáticos do ensino fundamental/ Acessado no dia 23/09/2018

BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto*. Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: SEB, 2006;

<https://www.todamateria.com.br/lei-de-proust/> Acessado no dia 22/10/2018 às 15:40 hs;

<https://www.todamateria.com.br/lei-de-lavoisier/> Acessado no dia 22/10/2018 às 16:20 hs;

<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/lei-dalton.htm/> Acessado no dia 23/10/2018 às 09:00 hs;

<https://www.todamateria.com.br/lei-de-hooke/> Acessado no dia 27/11/2018 as 09:08 hs;

FREIRE, Shirleidy de Sousa. **Educação e Tecnologia: os benefícios adquiridos no ensino e na aprendizagem com o uso na aprendizagem com o uso das novas tecnologias da informação**. [www.artigonal.com/educação](http://www.artigonal.com/educação). Acessado em 29/08/2018.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. D. A. **Mídias digitais na Educação Matemática**. In: (ORG), M. A. G. E. A. **Matemática**, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRG: [s.n.], 2012. p. 180. Disponível em: <[http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica\\_midiasdigitais\\_didatica.pdf](http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf)>. Acesso em: 12 Julho 2018.

SALUSTIANO, Geane Magalhães Monte. **Contribuição da mídia para o ensino de Biologia na educação de jovens e adultos – EJA**. Disponível em: [www.webartigos.com](http://www.webartigos.com). Acessado em 10 de outubro de 2018.

CORREIA, Edvania Santos. **As mídias no contexto escola**: [www.meuartigo.brasilecola.com/educação](http://www.meuartigo.brasilecola.com/educação). Acessado em 28/08/2018

FINGER, Johanna Emile; SILVEIRA, Jhonathan dos Santos da; PINHEIRO, Soraia Gracelides. **Recursos tecnológicos como estratégias de aprendizagem no ensino de Ciências e Matemática**. Disponível em: [www.webartigos.com](http://www.webartigos.com). Acessado em 10 de outubro de 2018.

[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3369246/mod\\_resource/content/1/Capítulo 10 - A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel – Teorias da aprendizagem – Moreira %2C M.A. pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3369246/mod_resource/content/1/Capítulo%2010-A%20teoria%20da%20aprendizagem%20significativa%20de%20Ausubel%20-%20Teorias%20da%20aprendizagem%20-%20Moreira%20M.A.%20.pdf). Acessado em 15/12/2018

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

PONTE, J. P.; SILVESTRE, A. I.; GARCIA, C.; COSTA, S. *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades*. Disponível em

[http://www.apm.pt/files/\\_Materiais\\_Proporcionalidade\\_\\_\(IMLNA\)\\_4cfc0dcb29b46.pdf](http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf). Acessado em Setembro de 2018.

CRESPO, Antônio Arnot. *Matemática comercial e financeira fácil*. 11. ed. São Paulo: Saraiva, 1996.

MERCHEDE, Alberto. *Matemática financeira para concursos: mais de 1.500 aplicações*. São Paulo: Atlas, 2003.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica*. São Paulo: PROEM, 2011.

IMENES, L.M. P. *Proporcionalidade um tratamento funcional*. Slides dos Seminários de Ensino de Matemática Sema, 2008. Disponível em <http://www.educared.org/educa/index>. Acessado do dia 21 de setembro de 2018.

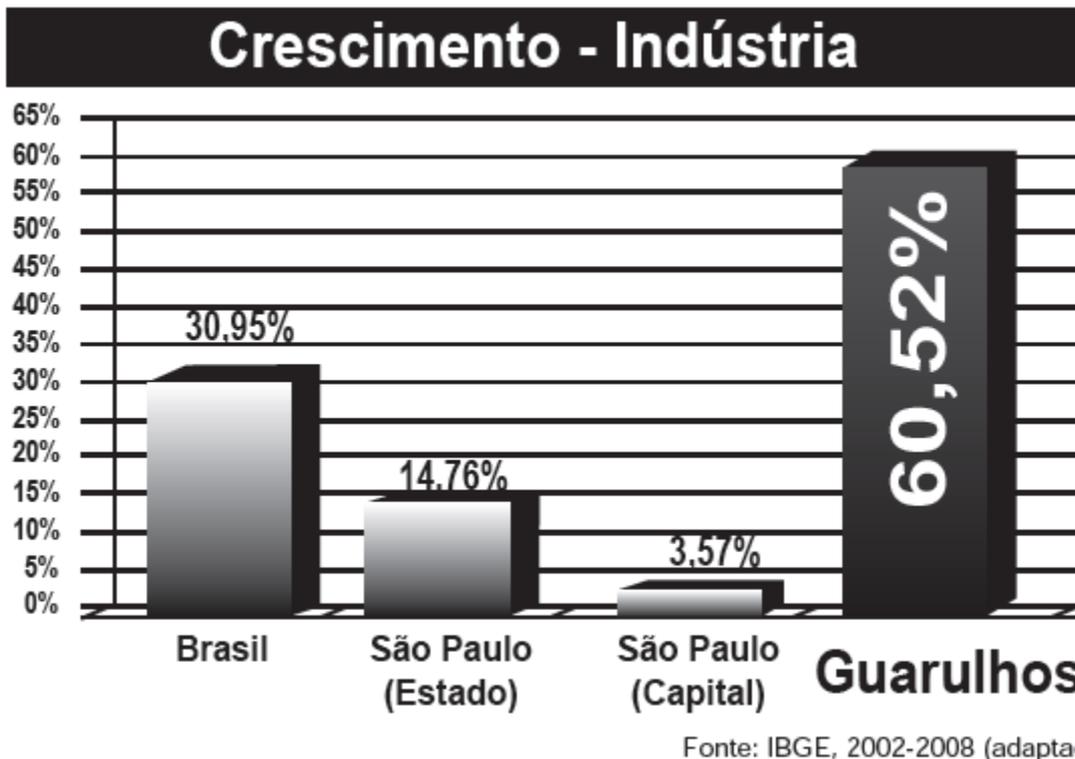
BRASIL, M. D. E. **PCN+ Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: [s.n.], 2002.

MOREIRA, M. A., MASINI, E. A. F. S. *Aprendizagem significativa: a teoria de Dm'ill Ausubel*. São Paulo, Moraes, 1982.

## **Anexo 1 questões Enem que nas suas resoluções possuem a ideia de proporcionalidade e regra de três, tendo como referência os anos de 2013 à 2017**

### **1.1 ENEM DE 2013**

**Questão 139** - A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



**Figura 25: Figura da questão 139 ENEM/2013**

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

**Questão 143** - Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para  $900 \text{ m}^3$ . Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de  $500 \text{ m}^3$ , cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a;

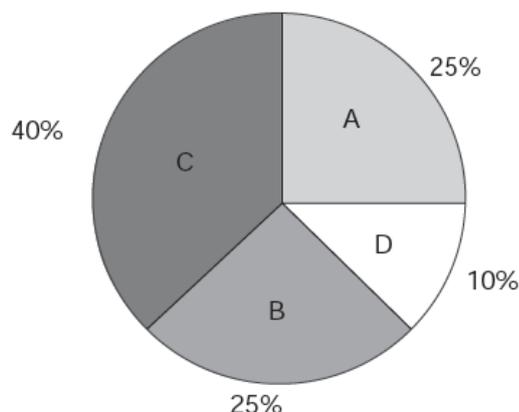
**Questão 146** - O contribuinte que vende mais de R\$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Um contribuinte que vende por R\$ 34 mil um lote de ações que custou R\$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de;

**Questão 147** - Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com  $14 \text{ m}^3$  de concreto.

Qual é o volume de cimento, em  $\text{m}^3$ , na carga de concreto trazido pela betoneira?

**Questão 150** - Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R\$ 200,00; B = R\$ 300,00; C = R\$ 400,00 e D = R\$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



**Figura 26: Figura da questão 150 ENEM/2013**

O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é;

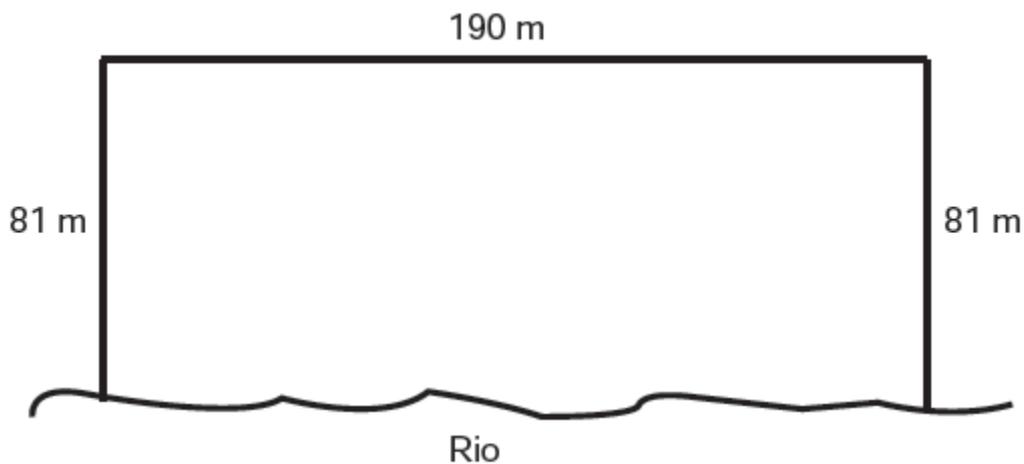
**Questão 151** - Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de

departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de;

**Questão 152** - Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



**Figura 27: Figura da questão 152 ENEM/2013**

A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é;

**Questão 153** - Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas

frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

**Questão 159** - Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d'água tem volume de 0,2 mL.

Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

**Questão 163** - Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

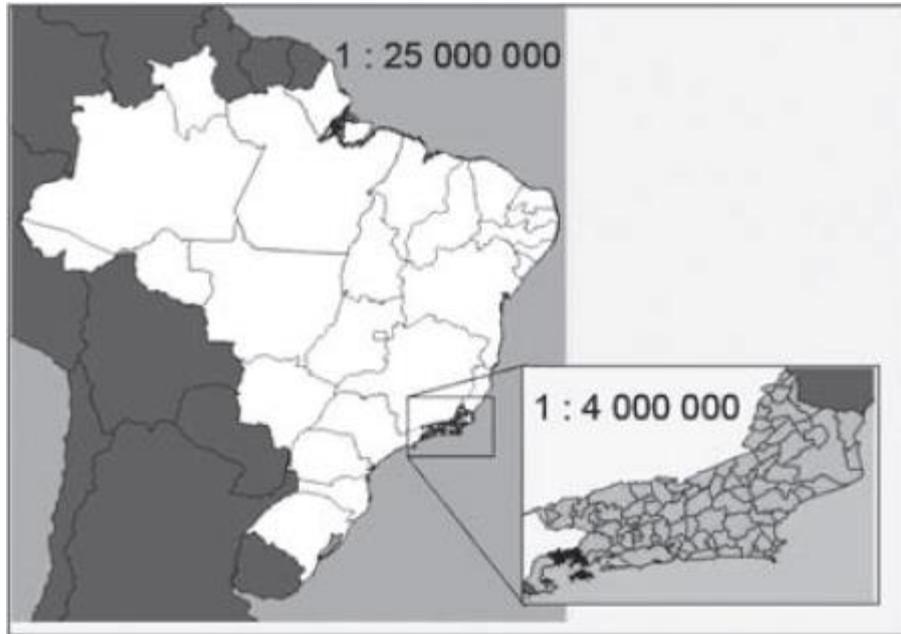
Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de;

**Questão 166** - O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número;

**Questão 167** - A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.

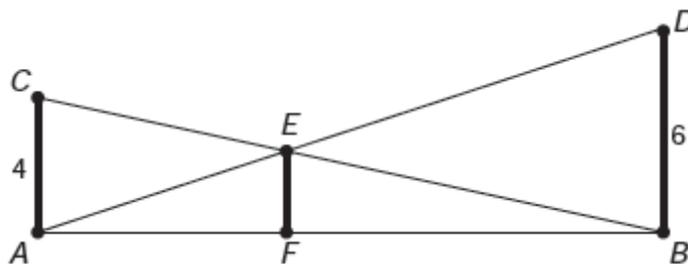


**Figura 28:** Figura da questão 167 ENEM/2013

Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é;

**Questão 172** - O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos  $AC$  e  $BD$  e a haste é representada pelo segmento  $EF$ , todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta  $AB$ . Os segmentos  $AD$  e  $BC$  representam cabos de aço que serão instalados.



**Figura 29:** Figura da questão 172 ENEM/2013

Qual deve ser o valor do comprimento da haste  $EF$ ?

**Questão 174** - A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: [www.arq.ufsc.br](http://www.arq.ufsc.br). Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em;

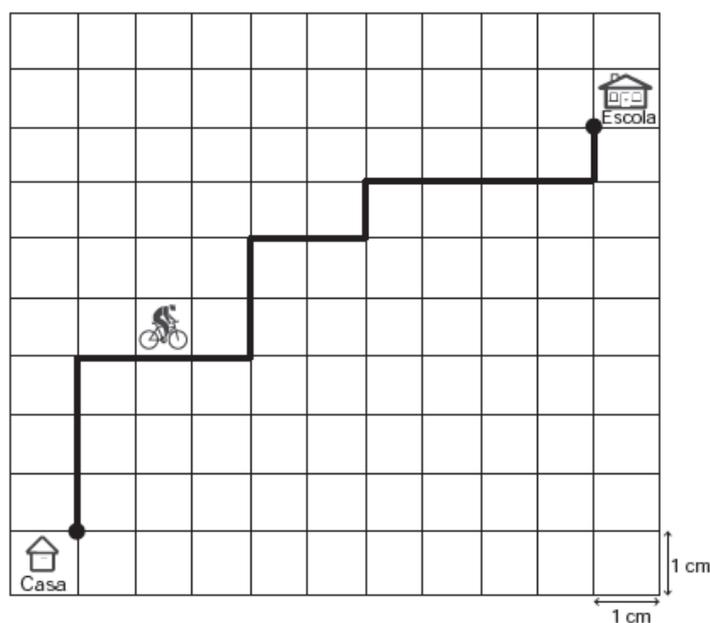
**Questão 177** - Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Figura 30: Figura da questão 177 ENEM/2013

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

**Questão 180** - A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1:25 000, por um período de cinco dias.

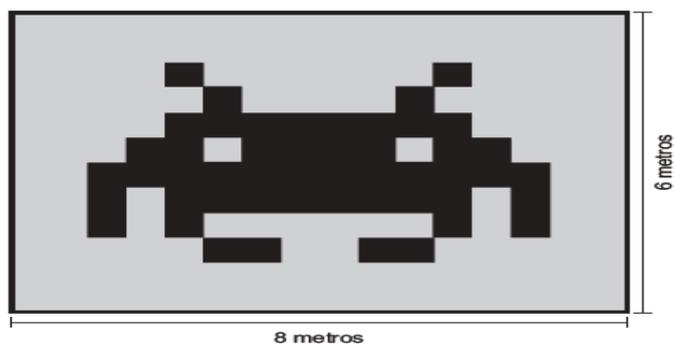


**Figura 31: Figura da questão 180 ENEM/2013**

Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

## 1.2 ENEM DE 2014

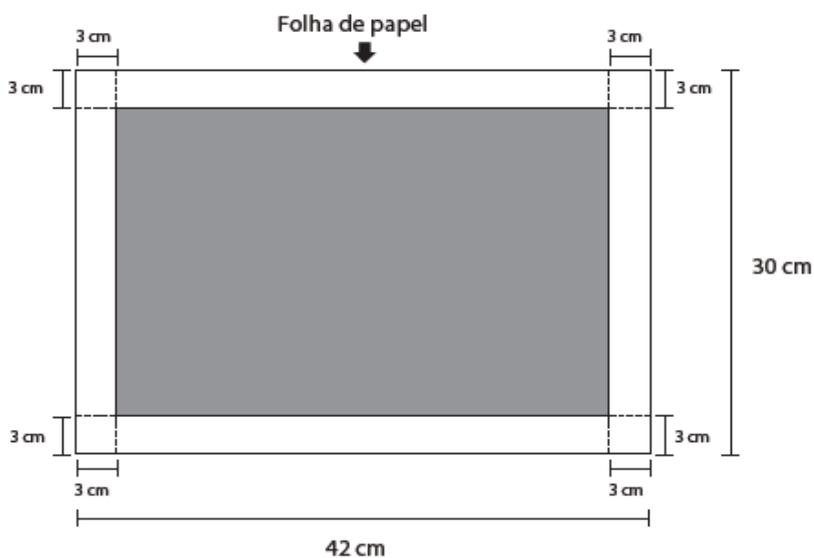
**Questão 136** - A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.



**Figura 1**

**Figura 32: Figura da questão 136 ENEM/2014**

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.



- Região disponível para reproduzir a gravura
- Região proibida para reproduzir a gravura

**Figura 2**

**Figura 33: Figura da questão 136 ENEM/2014**

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. **Superinteressante**, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é;

**Questão 137** - Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro  $d$  em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno do tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.



**Figura 34: Figura da questão 137 ENEM/2014**

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

**Questão 138** - Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

**Questão 142** - A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de

fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: [www.saladeimprensa.ibge.gov.br](http://www.saladeimprensa.ibge.gov.br). Acesso em: 31 jul. 2013.

**Figura 35: Figura da questão 142 ENEM/2014**

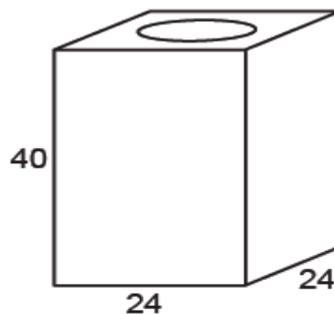
Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de;

**Questão 144** - Um *show* especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

**146** - Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



**Figura 36: Figura da questão 146 ENEM/2014**

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em;

**Questão 147** - Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas.

Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser;

**Questão 148** - Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R\$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para

2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no gráfico 2.

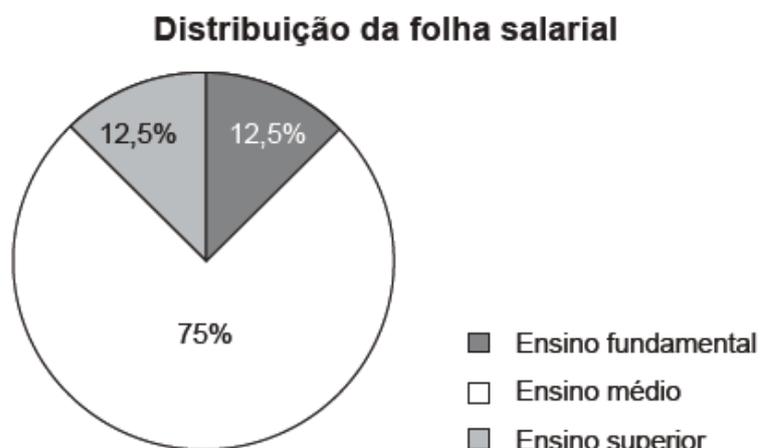


Gráfico 1

Figura 37: Figura da questão 148 ENEM/2014

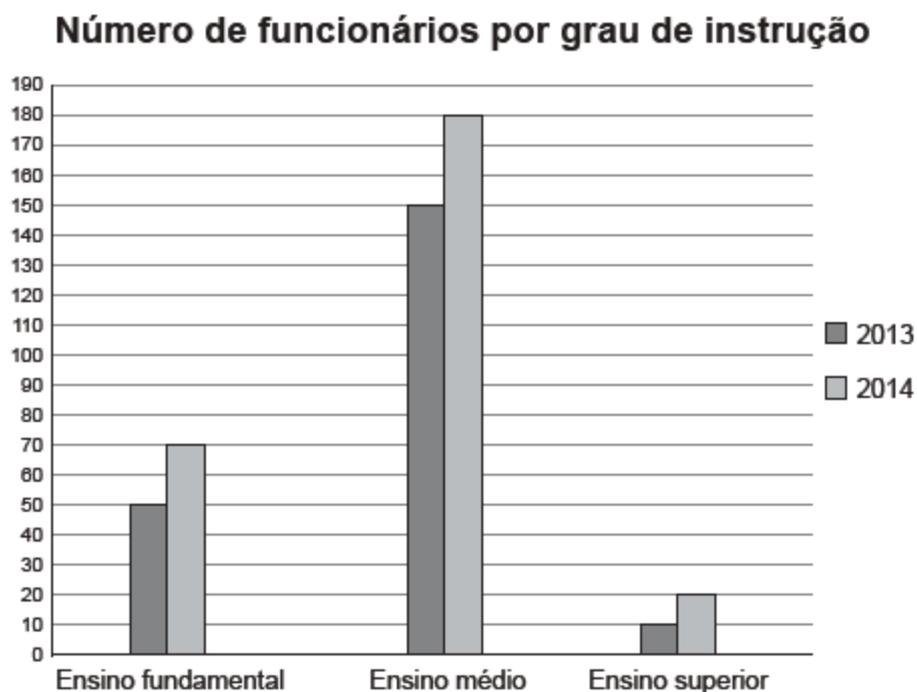


Gráfico 2

Figura 38: Figura da questão 148 ENEM/2014

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

**Questão 156** - Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica

é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

$$\text{Valor do kWh (com tributos)} \times \text{Consumo (em kWh)} + \text{Cosip}$$

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R\$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Figura 39: Figura da questão 156 ENEM/2014

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R\$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

**Questão 159** - O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos. **Folha de S. Paulo**, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área

utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de,

**Questão 160** - O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será;

**Questão 162** - Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

- 1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- 2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
- 3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- 4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

**Figura 40: Figura da questão 162 ENEM/2014**

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. **Epidemiologia**: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de;

**Questão 163** - Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhados paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é;

**Questão 168** - Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em  $\frac{1}{8}$ , preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é;

**Questão 169** - De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

- 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
- 33% são utilizados em descarga de banheiro.
- 27% são para cozinhar e beber.
- 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Figura 41: Figura da questão 169 ENEM/2014

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água;

**Questão 171** - Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.

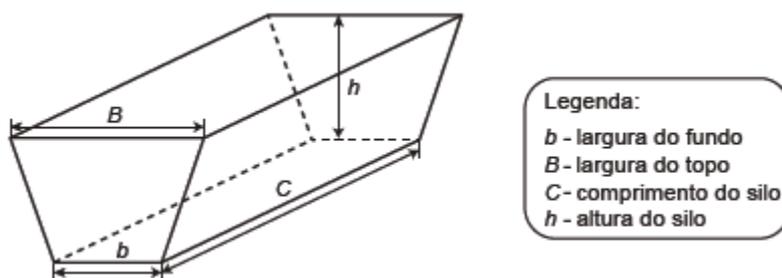


Figura 42: Figura da questão 171 ENEM/2014

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m<sup>3</sup> desse tipo de silo.

EMBRAPA. **Gado de corte**. Disponível em: [www.cnpqc.embrapa.br](http://www.cnpqc.embrapa.br). Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é;

**Questão 173** - Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado

por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

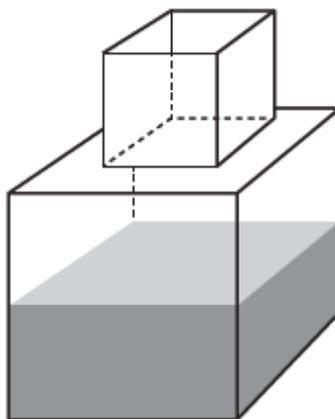


Figura 43: Figura da questão 171 ENEM/2014

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

**Questão 174** - Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

**Questão 175** - Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R\$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R\$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais

despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era;

**Questão 178** - A maior piscina do mundo, registrada no livro *Guinness*, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

**Questão 179** - Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- Recipiente I: 0,125 litro
- Recipiente II: 0,250 litro
- Recipiente III: 0,320 litro
- Recipiente IV: 0,500 litro
- Recipiente V: 0,800 litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

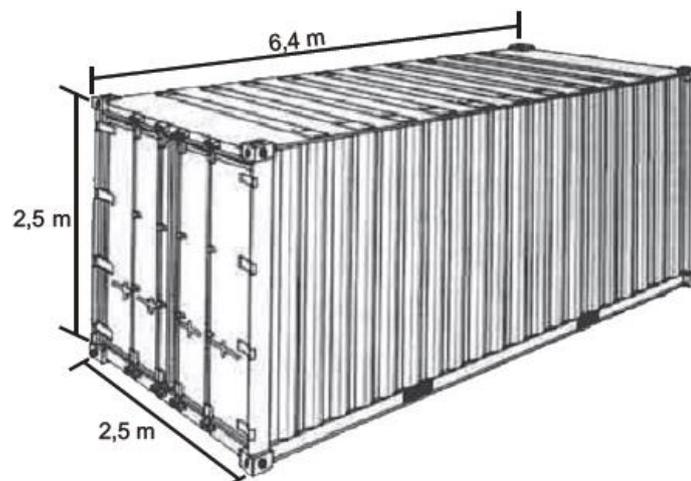
Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

**Questão 180** - Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem  $P$  da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de  $P$  é;

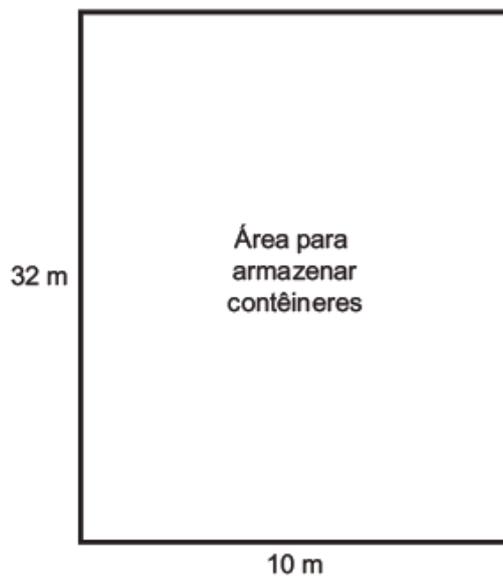
### 1.3 ENEM DE 2015

**Questão 143** - Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).



**Figura 1**

**Figura 44: Figura da questão 143 ENEM/2015**



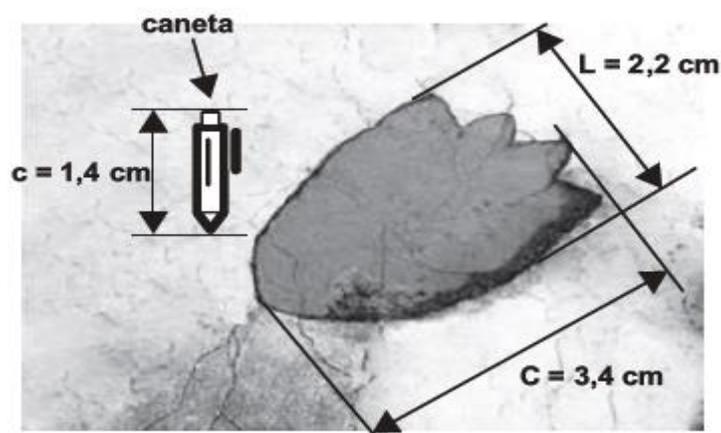
**Figura 2**

**Figura 45: Figura da questão 143 ENEM/2015**

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobraem espaços nem ultrapassem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é;

**Questão 144** – Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta ( $c$ ), a largura ( $L$ ) e o comprimento ( $C$ ) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.

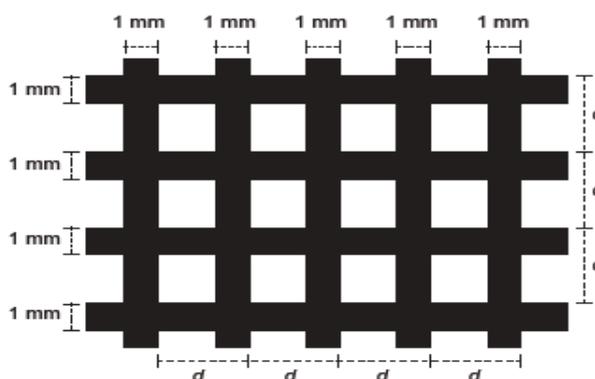


**Figura 46: Figura da questão 144 ENEM/2015**

A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a;

**Questão 145** - Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de  $(d - 1)$  milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



**Figura 47: Figura da questão 145 ENEM/2015**

Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.

A medida de  $d$ , em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é;

**Questão 147** - A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma “caneta” na qual pode ser inserido um refil contendo 3 ml de insulina, como mostra a imagem.



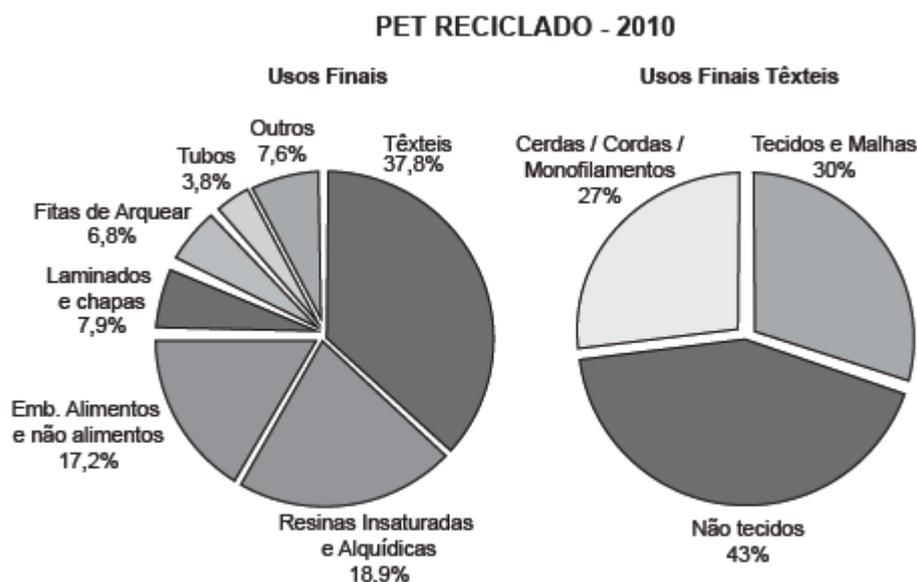
**Figura 48: Figura da questão 147 ENEM/2015**

Para controle das aplicações, definiu – se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite.

Qual o número máximo de aplicação por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

**Questão 150** - O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido á sua extensão gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: [www.abipet.org.br](http://www.abipet.org.br). Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

**Figura 49: Figura da questão 150 ENEM/2015**

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas

destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de;

**Questão 152** - Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180.000,00 a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuada o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de;

**Questão 155** - Segundo dados apurados no Censo 2010, para uma população de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em 2010, a renda média mensal apurada foi de R\$ 1.202,00. A soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres correspondeu a apenas 1,1% do total de rendimentos dessa população considerada, enquanto que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos correspondeu a 44,5% desse total.

Disponível em: [www.estadao.com.br](http://www.estadao.com.br). Acesso em: 16 nov. 2011(adaptado).

Qual foi a diferença, em reais, entre a renda média mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos e de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais pobres?

**Questão 163** - Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar  $81 \text{ m}^3$  de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para S.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

**Questão 164** - Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:

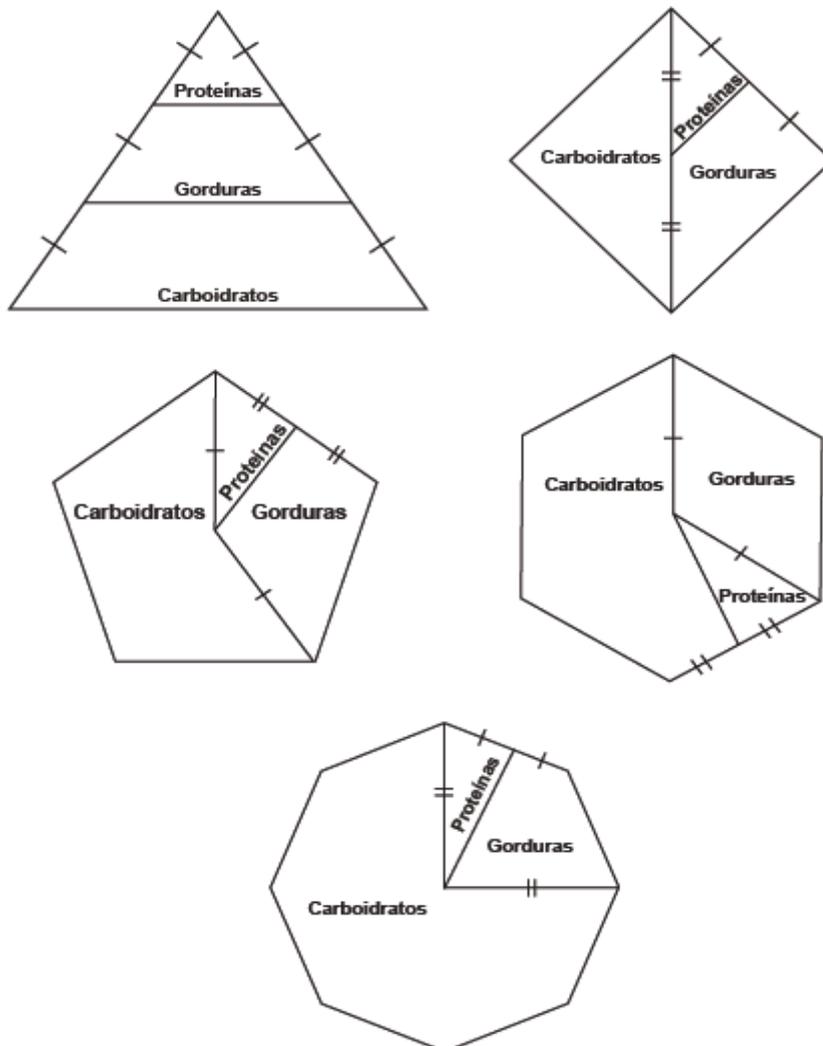


Figura 50: Figura da questão 164 ENEM/2015

Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o;

**Questão 167** - O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em  $1 \text{ m}^2$ , ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com  $1 \text{ m}^2$  de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para  $S$ .

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de;

**Questão 172** - Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

- 1) Garrafa I: 0,15 litro;
- 2) Garrafa II: 0,30 litro
- 3) Garrafa III: 0,75 litro
- 4) Garrafa IV: 1,50 litro
- 5) Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

**Questão 173** - Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

**Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal**

Massa (kg)	Área (m <sup>2</sup> )
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

**Figura 51: Figura da questão 173 ENEM/2015**

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de;

**Questão 174** - Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08 m<sup>3</sup> de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser;

**Questão 179** - Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do

sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

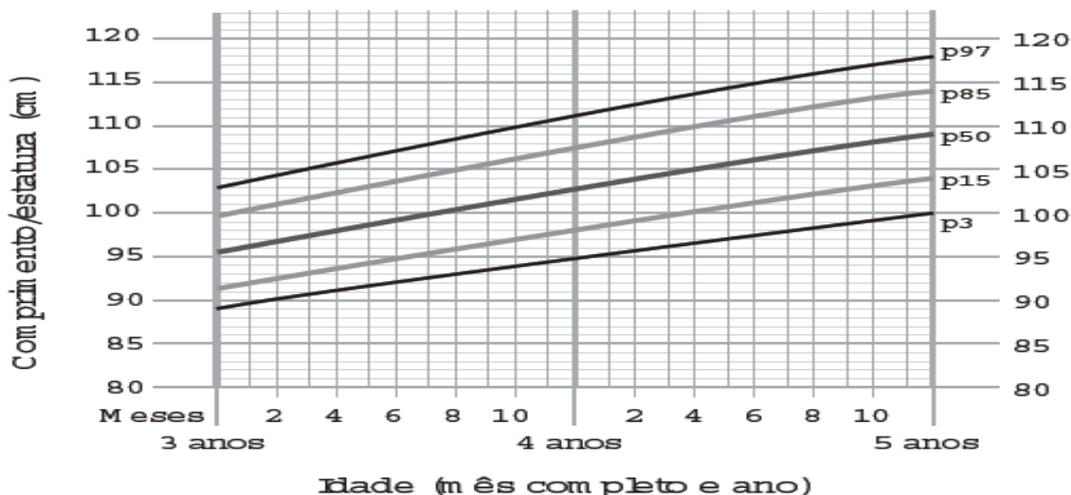
Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de  $1.000 \text{ cm}^3$  e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em  $\text{cm}^3$ , da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é;

#### 1.4 ENEM DE 2016

**Questão 138** - A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.

O gráfico apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Disponível em: [www.aprocura.com.br](http://www.aprocura.com.br). Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Figura 52: Figura da questão 138 ENEM/2016

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50.

Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

**Questão 140** - Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

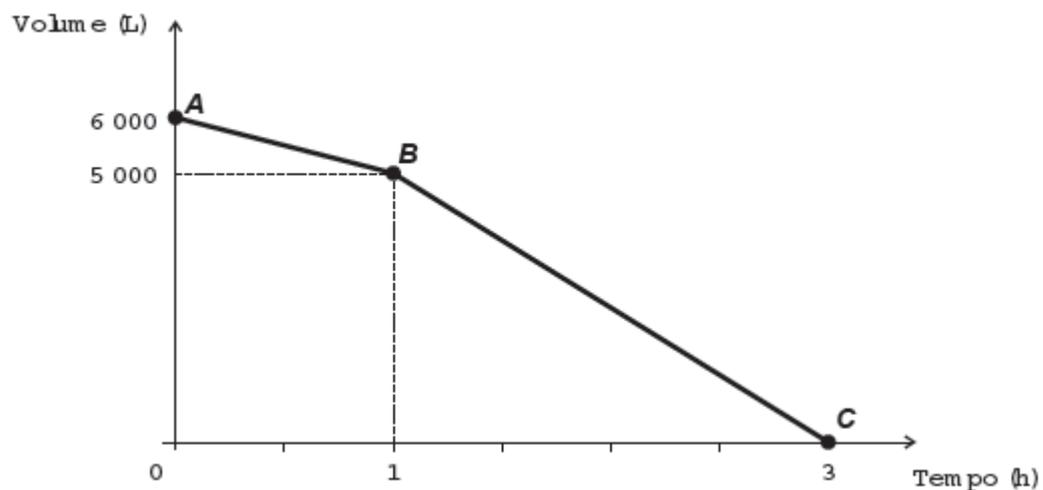
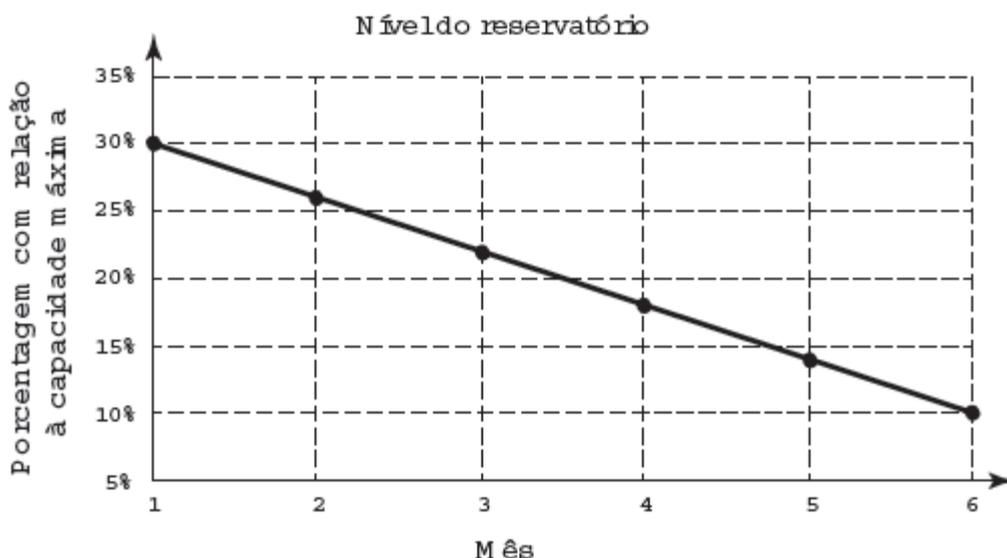


Figura 53: Figura da questão 140 ENEM/2016

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

**Questão 143** – Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



**Figura 54: Figura da questão 143 ENEM/2016**

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

**Questão 149** - Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: [www.blog.saude.gov.br](http://www.blog.saude.gov.br). Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é;

**Questão 151** – O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1994 e 2000, referentes à concentração da população total na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

**População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000.**

Grandes regiões	População residente					
	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1 632 917	12 900 704	368 528	3 895 400	1 264 389	9 005 304
Nordeste	14 434 080	47 741 711	1 270 729	10 162 346	13 163 351	37 579 365
Sudeste	18 278 837	72 412 411	3 346 991	18 822 986	14 931 846	53 589 425
Sul	5 735 305	25 107 616	459 659	3 290 220	5 275 646	21 817 396
Centro-Oeste	1 088 182	11 636 728	152 189	4 291 120	935 993	7 345 608

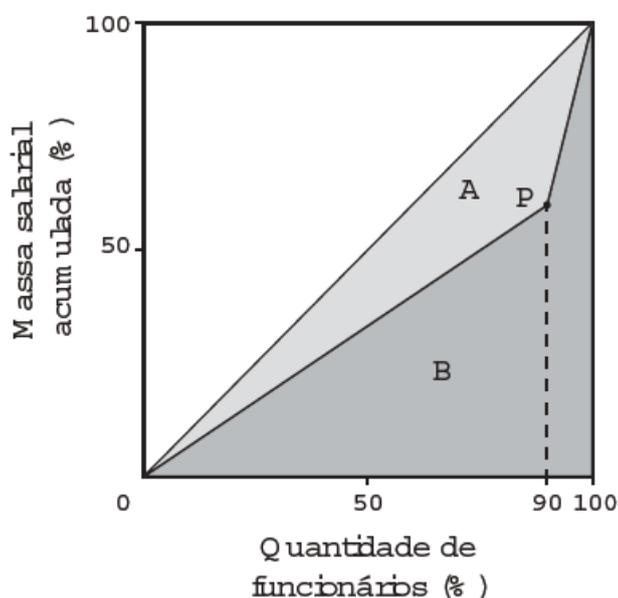
Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940/2000.

**Figura 55: Figura da questão 151 ENEM/2016**

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é;

**Questão 154** - A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto  $P$ , cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura.

No eixo horizontal do gráfico tem – se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.



**Figura 56: Figura da questão 154 ENEM/2016**

O índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão  $\frac{A}{A+B}$ , em que *A* e *B* são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Disponível em: [www.ipea.gov.br](http://www.ipea.gov.br). Acesso em: 4 maio 2016 (adaptado).

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser;

**Questão 155** - O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei nº 8.213/91, que dispõe:

*Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiências, habilitadas, na seguinte proporção:*

- I. Até 200 empregados .....2%
- II. De 201 a 500 empregados .....3%
- III. De 501 a 1000 empregados .....4%
- IV. De 1.001 em diante .....5%

Disponível em: [www.planalto.gov.br](http://www.planalto.gov.br). Acesso em: 3 fev. 2015.

Constatou-se que a empresa possui 1 200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados.

Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no art 93.

O número mínimo de empregados reabilitados ou com, deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é;

**Questão 156** - Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R\$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado à mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R\$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser;

**Questão 161** - Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 mL de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.

O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será;

**Questão 164** - O LIRAA, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por *Aedes aegypti*, consiste num mapeamento da infestação do mosquito *Aedes aegypti*. O LIRAA é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAA de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I - 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;

II - 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;

III - 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;

IV - 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;

V - 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAA.

Disponível em: <http://bvsmms.saude.gov.br>. Acesso em: 28 out. 2015

As ações de controle iniciarão pelo bairro;

**Questão 168** - Densidade absoluta ( $d$ ) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos:  $d_A$ ,  $d_B$ ,  $d_C$ . Os alunos verificaram que o corpo A possui 1,5 vezes a massa do corpo B e esse por sua vez, tinha  $\frac{3}{4}$  da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira;

**Questão 169** - No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

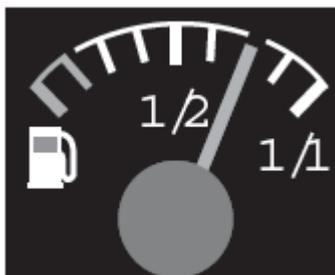


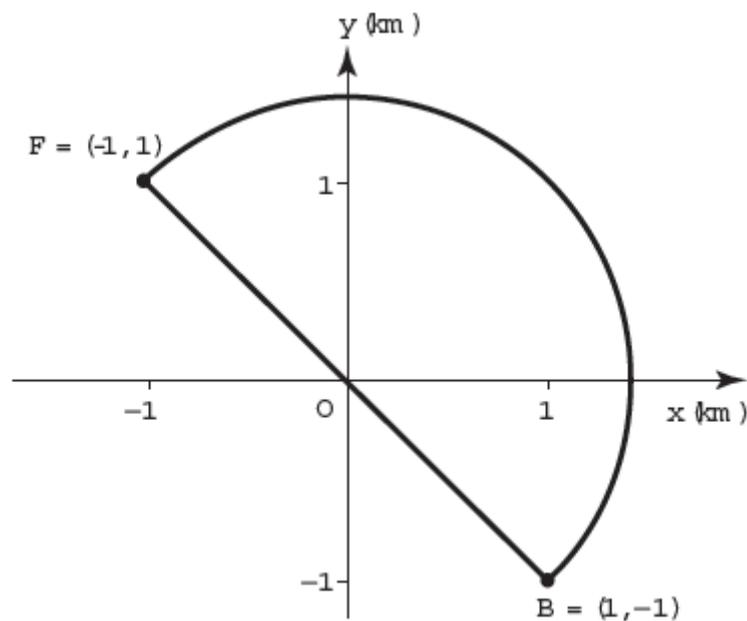
Figura 57: Figura da questão 169 ENEM/2016

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a eu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

**Questão 171** - Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte ( $F$ ) até o reservatório de um novo bairro ( $B$ ).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas  $xOy$  da figura, em que a unidade de medida dos eixos é o quilômetro.



**Figura 58:** Figura da questão 171 ENEM/2016

Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como a aproximação para  $\pi$  e 1,4 como aproximação para  $\sqrt{2}$ .

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de;

**Questão 173** - Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

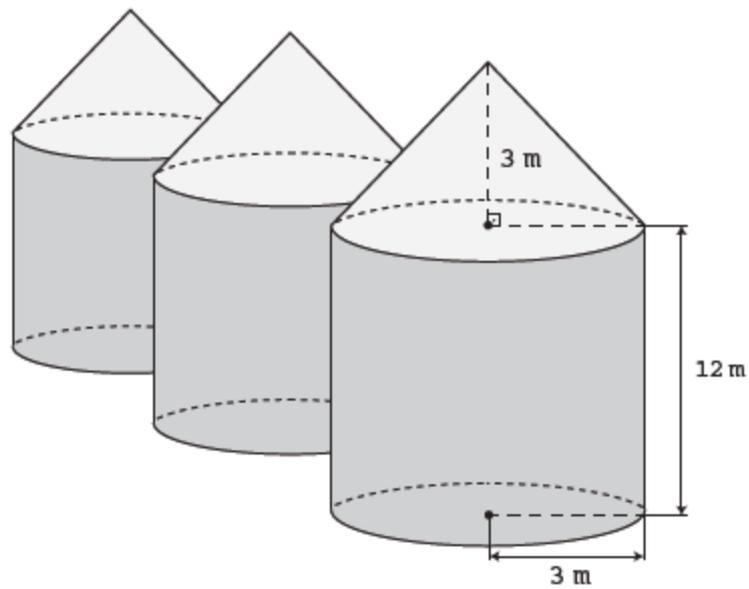
- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta – se, o filtro com maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

Disponível em: [www.redebrasilatual.com.br](http://www.redebrasilatual.com.br). Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é o;

**Questão 175** - Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m<sup>3</sup>. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



**Figura 59: Figura da questão 175 ENEM/2016**

Utilize 3 como aproximação para  $\pi$ .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é;

**Questão 176** - Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1:8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que, o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.

A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente,

**Questão 177** - A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da

Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.



**Figura 60: Figura da questão 175 ENEM/2016**

Disponível em: [www.mapadelondres.org](http://www.mapadelondres.org). Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista, ficou surpreso com o resultado obtido em metro.

Qual à medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

**Questão 179** - Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupado equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

## 1.5 ENEM DE 2017

**Questão 137** - Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculo de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente:



**Figura 61: Figura da questão 137 ENEM/2017**

A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a;

**Questão 138** – Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com  $\frac{2}{3}$  de polpa de morango e  $\frac{1}{3}$  de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R\$ 18,00 e a de acerola, R\$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R\$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução do preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de;

**Questão 139** - Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode

ser desmontado. Eles têm á disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm u 86 cm u 86 cm
- Caixa 2: 75 cm u 82 cm u 90 cm
- Caixa 3: 85 cm u 82 cm u 90 cm
- Caixa 4: 82 cm u 95 cm u 82 cm
- Caixa 5: 80 cm u 95 cm u 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número;

**Questão 143** - Às 17 h 15 min começa uma forte chuva, que cai com intensidade constante. Uma piscina em forma de um paralelepípedo retângulo, que se encontrava inicialmente vazia, começa a acumular a água da chuva e, às 18 horas, o nível da água em seu interior alcança 20 cm de altura. Nesse instante, é aberto o registro que libera o escoamento da água por um ralo localizado no fundo dessa piscina, cuja vazão é constante. Às 18 h 40 min a chuva cessa e, nesse exato instante, o nível da água na piscina baixou para 15 cm.

O instante em que a água dessa piscina terminar de escoar completamente está compreendido entre;

**Questão 148** – A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas ( $M$ )
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Figura 62: Figura da questão 148 ENEM/2017

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que obtiver avaliação “Bom” ou “Excelente” conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mais ainda não realizou a prova da disciplina I conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Figura 63: Figura da questão 148 ENEM/2017

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é;

**Questão 150** – Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d’água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é:

**Questão 152** - Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho A partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho B, que havia saído do topo da montanha.

Quantos segundos após a partida do bondinho B partiu o bondinho A?

**Questão 153** – Num dia de tempestade, a alteração de profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade  $h$ , registra às 13 horas, não foi anotado, e partir de  $h$ , cada unidade sobre o eixo vertical representa em metro.

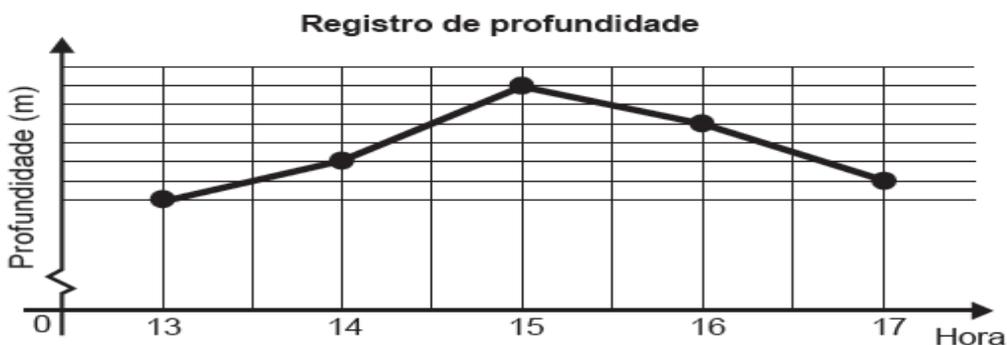


Figura 64: Figura da questão 153 ENEM/2017

Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

**Questão 159** – Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Figura 65: Figura da questão 159 ENEM/2017

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s).

**Questão 162** - A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira sua atenção e, por isso, deve evitada.

Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre “as cegas” (isto é, sem ter visão na pista) uma distancia proporcional ao tempo gasto ao olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça.

Suponha que dois motoristas (X e Y) dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X olhando para seu celular enquanto digita a mensagem correspondente a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

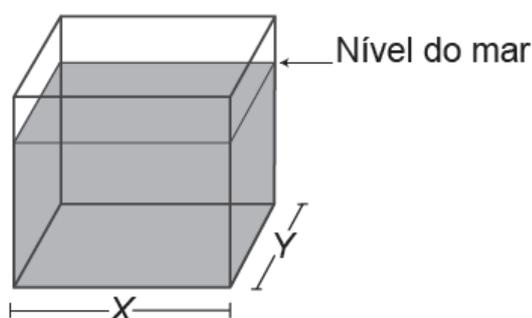
Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 21 jul. 2012 (adaptado).

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem é igual a;

**Questão 165** - Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1:400, e que seu volume é de  $25 \text{ cm}^3$ .

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de;

**Questão 168** – Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



**Figura 66: Figura da questão 168 ENEM/2017**

Quais devem ser os valores de  $X$  e de  $Y$ , em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

**Questão 169** - Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro a ser de 100 Kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: [www.superdaniolof1page.com.br](http://www.superdaniolof1page.com.br). Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento foi;

**Questão 172** – A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do campus de uma universidade Brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada na rede da companhia elétrica distribuidora de energia.

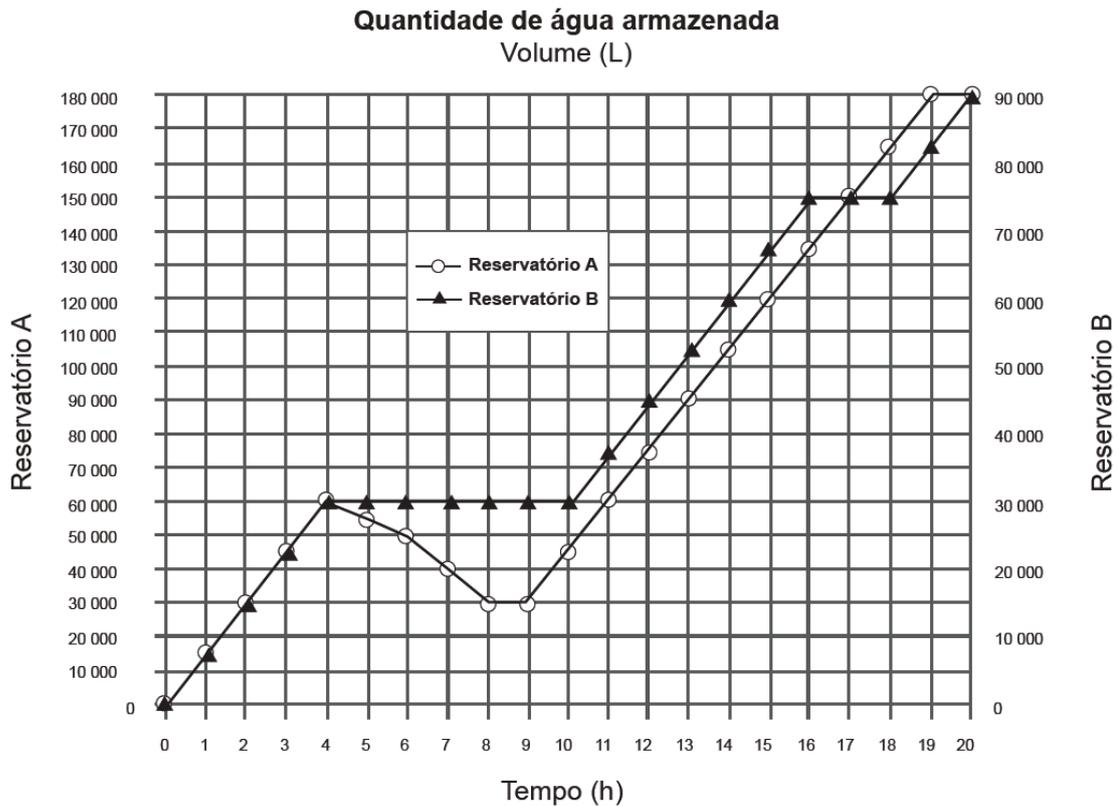
O projeto inclui  $100 \text{ m}^2$  de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital pediátrico serão colocados aproximadamente  $300 \text{ m}^2$  de painéis, sendo  $100 \text{ m}^2$  para gerar energia elétrica utilizada no campus, e  $200 \text{ m}^2$  para geração de energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de  $1 \text{ kWh}$  por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar  $0,7 \text{ kWh}$  por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentado em  $75\%$  a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica.

Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br>. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado, deverá ter o valor mais próximo de;

**Questão 173** – Dois reservatórios A e B são alimentados por bombas distintas por um período de 20 horas. A quantidade de água contida em cada reservatório nesse período pode ser visualizada na figura.



**Figura 67: Figura da questão 173 ENEM/2017**

O número de horas em que os dois reservatórios contêm a mesma quantidade de água é;

**Questão 175** – Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move – se com velocidade constante.



Figura 68: Figura da questão 175 ENEM/2017

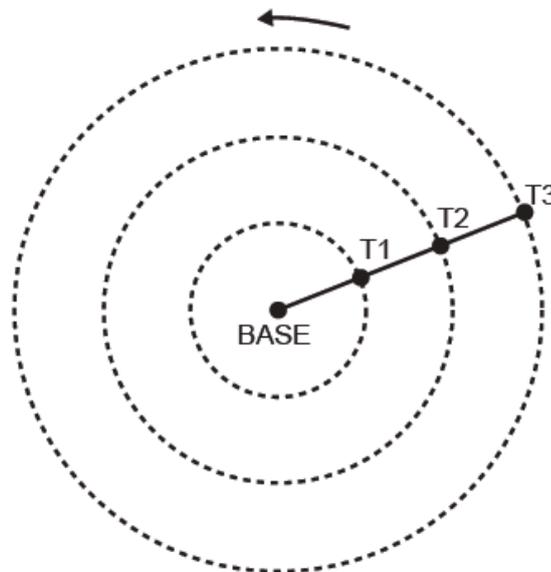
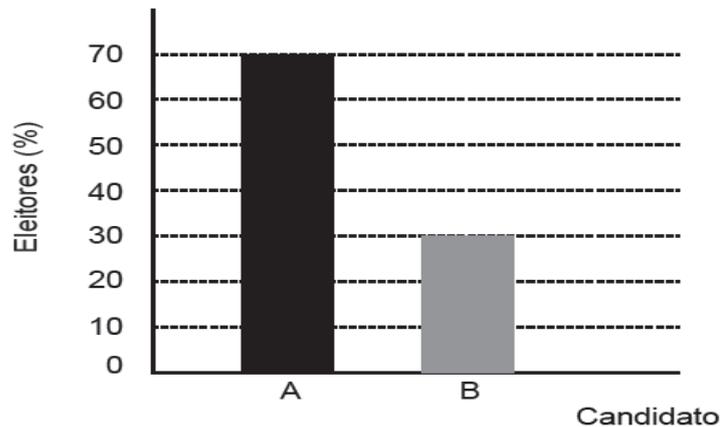


Figura 69: Figura da questão 175 ENEM/2017

Um pivô de três torres ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre  $T_1$  são iguais a 50 m. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em 25 horas. Use 3 como aproximação para  $\pi$ .

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , devem ser, em metro por hora, de;

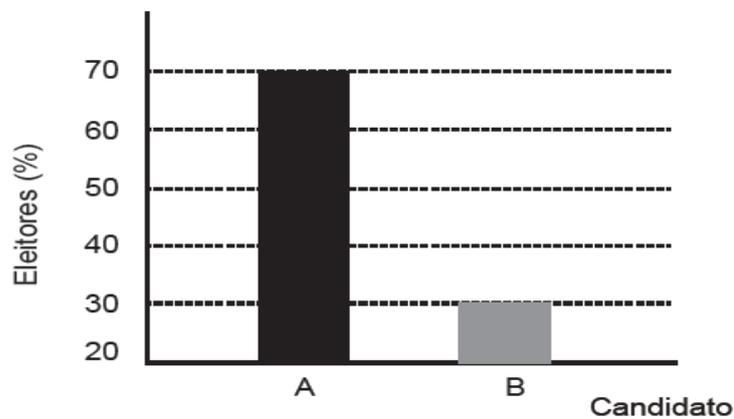
**Questão 178** – O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do gráfico 1.



**Gráfico 1**

**Figura 70: Figura da questão 178 ENEM/2017**

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.



**Gráfico 2**

**Figura 71: Figura da questão 178 ENEM/2017**

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é;

## **Anexo 2 questionários aplicados e lista de exercício sobre regra de três**

### **QUESTIONARIO 1 SOBRE PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS USANDO QUESTÕES DO ENEM**

## Enem 2014

**Questão 144** - Um *show* especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicadas.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

- A) 1 hora
- B) 1 hora e 15 minutos
- C) 5 horas
- D) 6 horas
- E) 6 horas e 15 minutos

## Enem 2014

**Questão 147** - Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas.

Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser;

- A) 72%
- B) 68%
- C) 64%
- D) 54%
- E) 18%

## Enem 2015

**Questão 172** - Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

- 6) Garrafa I: 0,15 litro;
- 7) Garrafa II: 0,30 litro
- 8) Garrafa III: 0,75 litro
- 9) Garrafa IV: 1,50 litro
- 10) Garrafa V: 3,00 litros

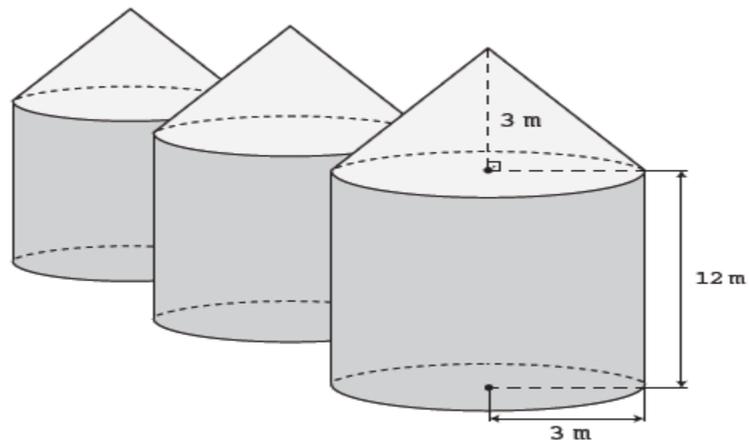
A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

## Enem 2016

**Questão 175** - Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m<sup>3</sup>. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para  $\pi$ .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é;

- A) 6
- B) 16
- C) 17
- D) 18
- E) 21

## QUESTIONARIO 2 SOBRE PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS USANDO QUESTÕES DO ENEM

### Enem 2017

**Questão 172** - A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do campus de uma universidade Brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada na rede da companhia elétrica distribuidora de energia.

O projeto inclui  $100 \text{ m}^2$  de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital pediátrico serão colocados aproximadamente  $300 \text{ m}^2$  de painéis, sendo  $100 \text{ m}^2$  para gerar energia elétrica utilizada no campus, e  $200 \text{ m}^2$  para geração de

energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar 0,7 kWh por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentado em 75% a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica.

Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br>. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado, deverá ter o valor mais próximo de;

- A) 231
- B) 431
- C) 472
- D) 523
- E) 672

#### **Enem 2014**

**Questão 159** - O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos.

Folha de S. Paulo, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de;

- A) 32,8%

- B) 28,6%
- C) 10,7%
- D) 9,4%
- E) 8,0%

### Enem 2016

**Questão 149** - Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: [www.blog.saude.gov.br](http://www.blog.saude.gov.br). Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é;

- A) A
- B) B
- C) C
- D) D
- E) E

### Enem 2014

**Questão 137** - Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro  $d$  em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno do tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

- A)  $\pi d$
- B)  $2\pi d$
- C)  $4\pi d$
- D)  $5\pi d$
- E)  $6\pi d$

### **Atividade de fixação sobre Regra de Três**

#### **1) Regra de Três Simples diretamente proporcional**

- a) Um operário recebe R\$ 920,00 por sua produção em 20 dias de trabalho. Sob as mesmas condições, quanto receberá pelo que produzir em 45 dias?
- b) Em uma fazenda, em 30 dias, são utilizadas 1,2 toneladas de ração para alimentar os animais. Qual é a quantidade necessária para alimentar os mesmos animais em 7 dias?
- c) Em uma empresa, 20 funcionários produzem 5.000 peças por semana. Quantas peças seriam produzidas semanalmente, se para essa produção contassem com 36 funcionários?
- d) Uma padaria produz 100 pães a cada quatro horas. Sabendo que ela fica aberta durante 16 horas, quantos pães ela produz durante um dia?

- e) Uma moto percorre 240 km utilizando 20 litros de gasolina. Quantos litros ela precisa para percorrer 360 km?

## 2) Regra de Três Simples Inversamente proporcional

- a) Para escrever um texto, usando 54 letras por linha, foram necessárias 15 linhas. Quantas linhas serão necessárias para 30 letras em cada linha?
- b) Se 15 operários levam 10 dias para completar um certo trabalho, quantos operários farão esse mesmo trabalho em 6 dias?
- c) Trabalhando 10 horas por dia, certa máquina faz um trabalho em 240 dias. Se a mesma máquina funcionar somente 8 horas por dia, em quantos dias fará o mesmo trabalho?
- d) Um carro percorre 120 km em duas horas se dirigir com velocidade constante de 60 km/h. Se esse mesmo carro percorrer esse trecho com velocidade constante de 40 km/h, quantas horas ele leva para completar o percurso?
- e) A uma velocidade média de 64 Km/h, um automóvel fez, em 5 horas, o percurso entre as cidades A e B. Qual seria o tempo gasto se a velocidade média do veículo nesse percurso fosse igual a 80 Km/h?
- f) O estoque de ração de uma avicultura é sempre abastecida com a mesma quantidade de ração a cada 15 dias. Essa quantidade de alimento é suficiente para alimentar, por todo período, suas 600 aves. Se fossem adquiridas mais 300 aves, essa mesma quantidade de alimento duraria quantos dias?

- g) Uma empreiteira contratou 24 homens para realizar uma obra que, segundo previsão da própria empresa, seria concluída em 15 dias. Antes do início da obra, 4 homens desistiram. A previsão do novo prazo de realização da obra passa a ser de quantos dias?

### 3) Regra de Três Composta

- a) Na perfuração de um poço de 160 m de profundidade, 40 operários de uma construtora levaram 21 dias. Para a perfuração de um poço de 200 metros, a construtora contratou 30 operários. Em quantos dias essa segunda equipe terá concluído esse outro poço?
- b) Quinze pedreiros realizam uma obra em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia. Quantos dias 20 pedreiros, trabalhando 4 horas por dia, levariam para realizar a mesma obra?
- c) Em 6 dias de trabalho, 12 confeitores fazem 90 tortas. Para fazer 40 tortas, 4 confeitores levariam quantos dias?
- d) Um trabalhador autônomo fabrica 50 objetos em 3 dias, trabalhando 2 horas por dia. Quantas horas por dia deve trabalhar para fabricar 100 objetos do mesmo tipo em 4 dias?
- e) 1. 20.000 caixas de um mesmo tipo foram embaladas por 20 máquinas, em 5 dias, funcionando um certo número de horas por dia. Quantas caixas do mesmo tipo serão embaladas por 8 máquinas, em 12 dias, funcionando no mesmo ritmo das outras?
- f) 3 caminhões, com a mesma capacidade de transporte, transportam 180 caixas do mesmo tipo em 5 dias, trabalhando um período por dia. Quantas caixas desse tipo serão transportadas por 5 caminhões, como os primeiros, em 8 dias, trabalhando no mesmo ritmo?

- g) Na alimentação de 3 cavalos durante 7 dias consumiram-se 1.470 kg de alfafa. Para alimentar 8 cavalos durante 10 dias, quantos quilos são necessários?
- h) Um bloco de mármore de 3 m de comprimento, 1,5 m de largura e 60 cm de espessura pesa 4.350 kg. Quanto pesará outro bloco do mesmo mármore com 2,2 m de comprimento, 1,2 m de largura e 75 cm de espessura?

### Anexo 3 applets trabalhados confeccionados no software Geogebra

Applet 01 Volume da caixa de acordo com sua largura, altura e comprimento.

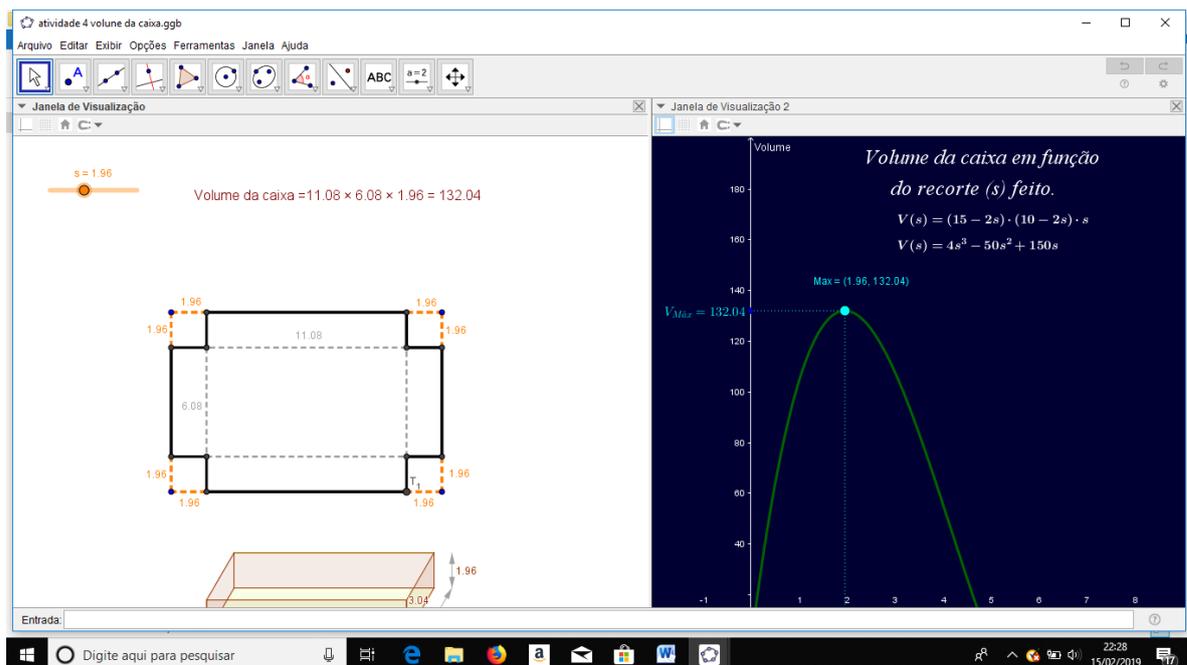


Figura 72: Applet 1 volume e planificação da caixa em relação aos seus respectivos lados

Applet 02 mostrando planificação e volume do prisma relacionando área da base e sua altura.

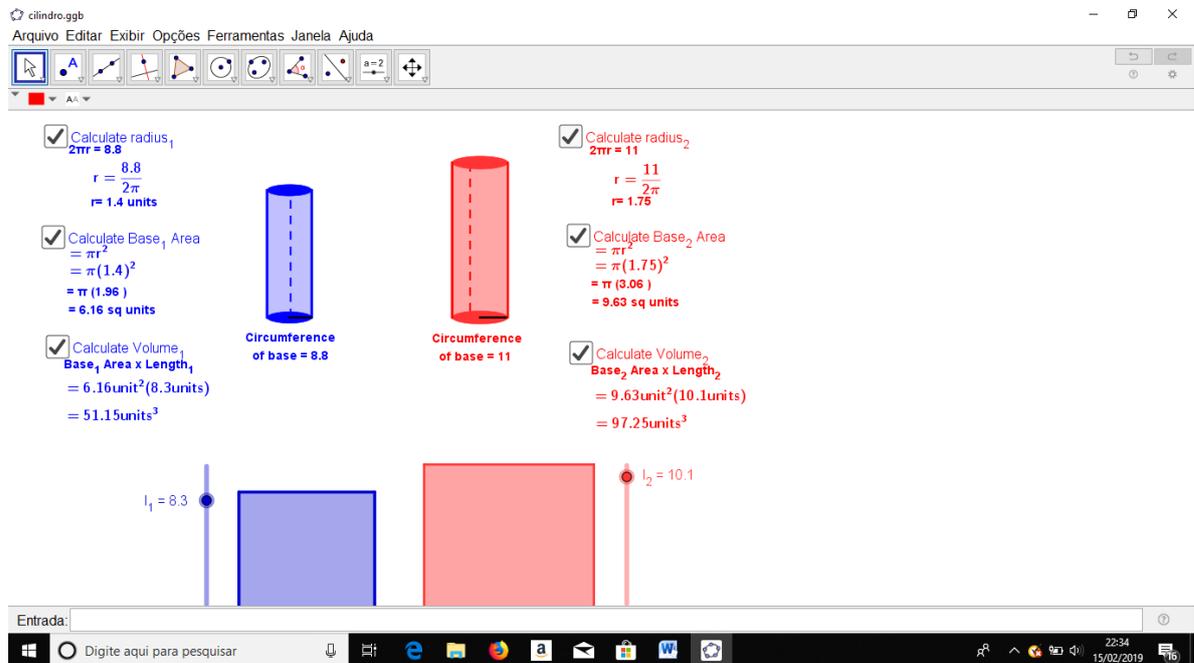


Figura 73: Applet 2 volume e planificação do cilindro em relação ao raio

Applet 03 encontrar a hipotenusa de um triângulo retângulo e sua respectiva área.

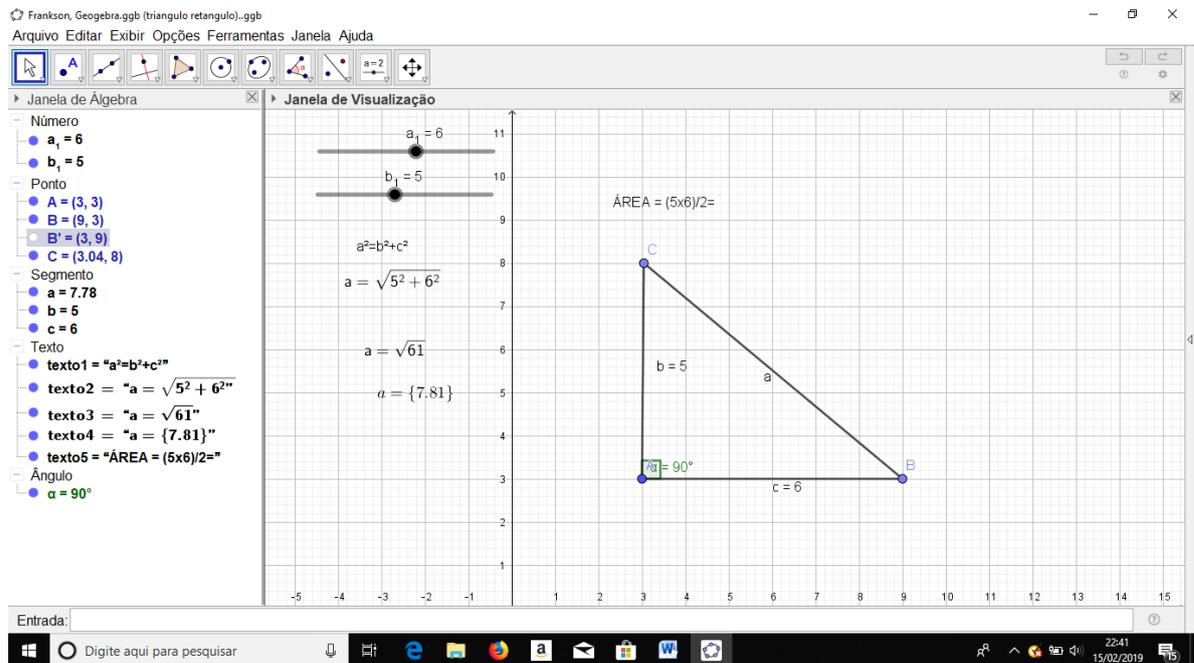


Figura 74: Applet 3 área do triângulo retângulo em relação aos seus lados

## Appllet 04 Quantidade de diagonais de acordo com seus vértices

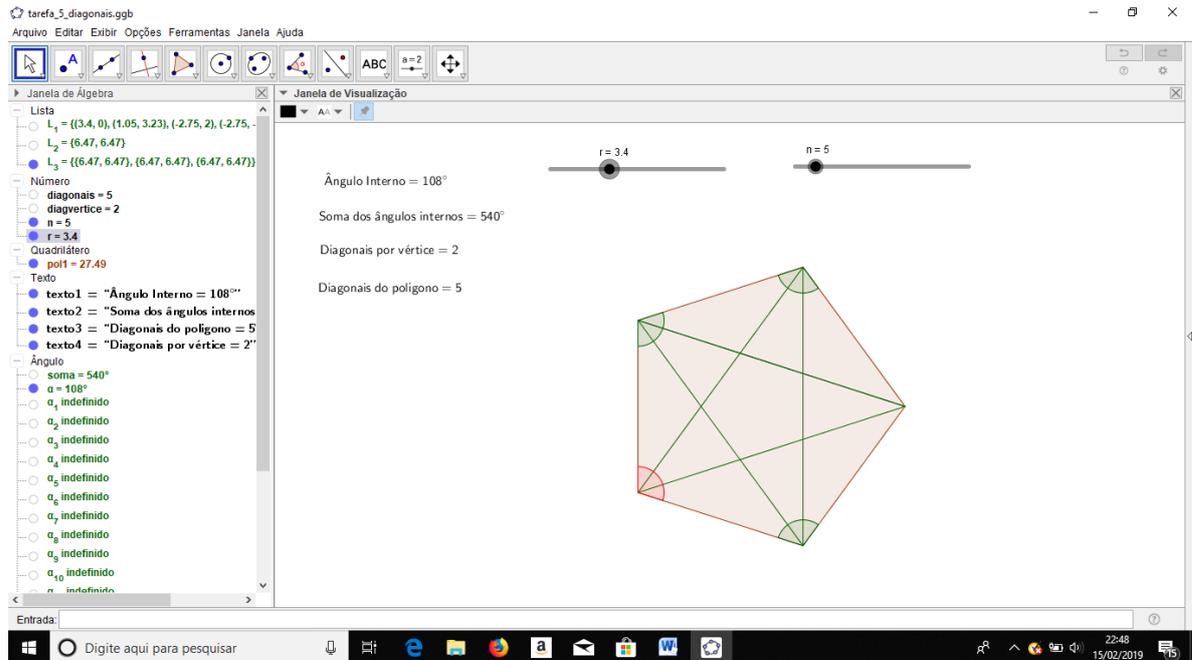


Figura 75: Appllet 4 quantidade de diagonais relacionado a quantidade de vértices

## Appllet 05 Volume do cilindro horizontalmente de acordo com o tamanho do diâmetro da circunferência.

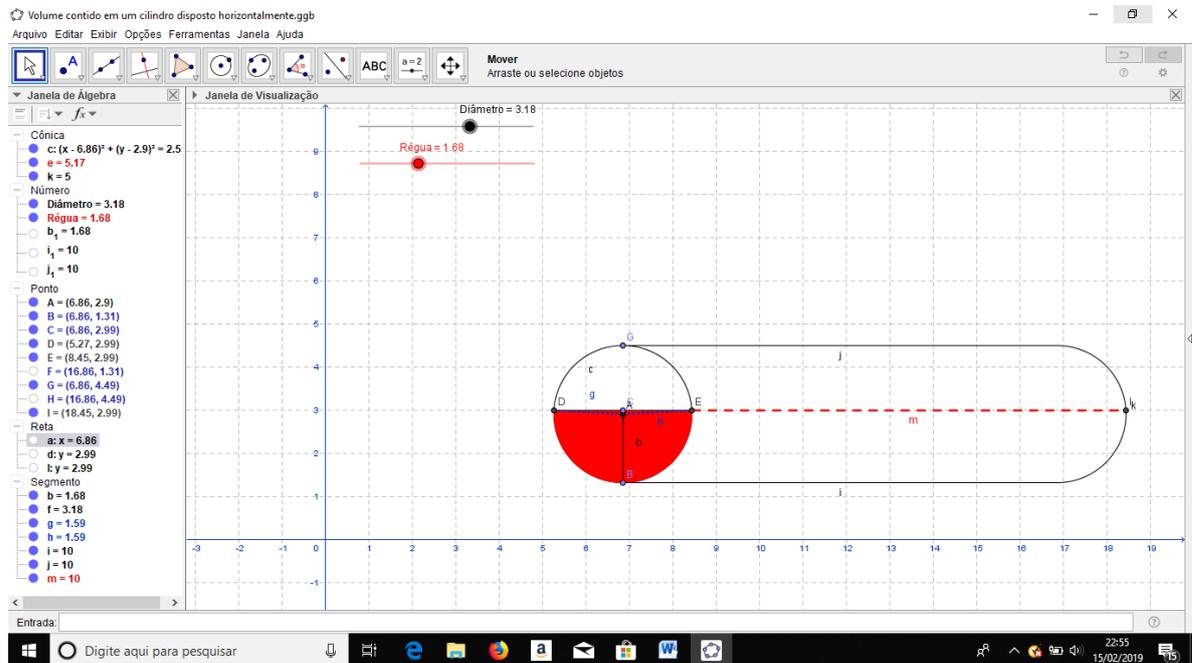


Figura 76: Appllet 5 volume do cilindro de acordo com o tamanho do diâmetro da circunferência