

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**APLICAÇÃO DE GAUSS HIPERBÓLICA E SUPERFÍCIES
CMC EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

José Luís Tavares dos Santos

Manaus - 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**APLICAÇÃO DE GAUSS HIPERBÓLICA E SUPERFÍCIES
CMC EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Orientadora: Profa. Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha

Manaus - 2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237a Santos, José Luís Tavares dos
Aplicação de Gauss Hiperbólica e Superfícies CMC em $H^2 \times R$ /
José Luís Tavares dos Santos. 2019
83 f.: il. color; 31 cm.

Orientadora: Inês Silva de Oliveira Padilha
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Imersão. 2. Espaço de Lorentz. 3. Curvatura Média. 4.
Aplicação de Gauss Hiperbólica. I. Padilha, Inês Silva de Oliveira II.
Universidade Federal do Amazonas III. Título

APLICAÇÃO DE GAUSS HIPERBÓLICA E SUPERFÍCIES CMC EM
 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

por

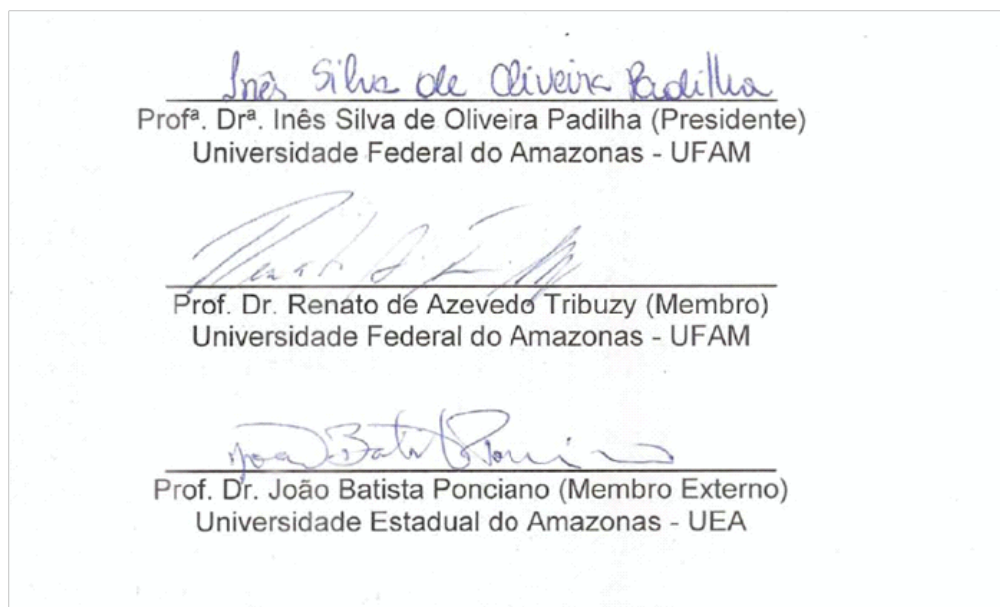
José Luís Tavares dos Santos¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito necessário para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 5 de Abril de 2019.

Banca Examinadora:



¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço as boas decisões que tomei, fruto da confiança de pessoas que acreditaram em mim sem exigir qualquer garantia.

À CAPES, financiadora deste trabalho.

Aos colegas e amigos.

Agradecimento especial à professora Dra. Inês Padilha por todo apoio e total confiança.

Resumo

Neste trabalho estudamos propriedades geométricas de superfícies com projeção vertical regular e curvatura média constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$. Para o caso especial em que a curvatura média constante é igual $1/2$, é construída uma certa aplicação sobre o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , chamada Aplicação de Gauss Hiperbólica e posteriormente é obtida a harmonicidade da mesma. Outro ponto chave abordado é que sob certas condições impostas à superfície Σ , sempre é possível a partir de uma aplicação harmônica $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada, recuperar uma superfície de curvatura média $H = 1/2$, tal que G é a sua Aplicação de Gauss Hiperbólica e cuja parametrização é dada em termos de G . Tais resultados foram obtidos por Isabel Fernández e Pablo Mira em “*Harmonic Maps and Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* ”. As demonstrações destes resultados fazem uso de parâmetros conformes e da utilização de técnicas conhecidas na teoria de superfícies de curvatura média constante. Isso permite encontrarmos condições iniciais para recuperar uma superfície a partir de um sistema de equações diferenciais parciais.

Palavras Chaves: Imersão, Espaço de Lorentz, curvatura média, aplicação de Gauss hiperbólica.

Abstract

In this work we studied geometric properties of surfaces with regular vertical projection and constant mean curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$. For the special case in which the constant mean curvature is $1/2$, a certain map is constructed on the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 , called Hyperbolic Gauss Map and the harmonicity of it is subsequently obtained. Another key point is that under certain conditions imposed on the Σ surface, it is always possible from a given harmonic map $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$, to recover a mean curvature surface $H = 1/2$, such that G is its Hyperbolic Gauss Map and whose parameterization is given in terms of G . These results were obtained by Isabel Fernández and Pablo Mira in “*Harmonic Maps and Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* ”. The demonstrations of these results make use of conformal parameters and the use of techniques known in the theory of constant mean curvature surfaces. This allows you to find initial conditions for recovering a surface from a system of partial differential equations.

Key words: Imersion, Lorentz space, mean curvature, hiperbolic Gauss map.

Sumário

Introdução	6
1 Preliminares	9
1.1 Forma bilinear simétrica	9
1.2 Espaços de Lorentz L^{n+1}	14
1.3 Variedades Semi-Riemannianas	16
1.3.1 A conexão de Levi-Civita	16
1.3.2 Variedades produto	19
1.3.3 O espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	20
2 Imersões Isométricas	23
2.1 Segunda forma fundamental	23
2.2 Aplicação de Gauss de uma superfície	27
2.3 Primeira e Segunda formas complexificadas	30
3 Equações fundamentais	32
3.1 As Equações de Compatibilidade	32
3.2 Aplicações Harmônicas no plano Hiperbólico	44
4 Superfícies de curvatura média $H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	49
4.1 A aplicação de Gauss Hiperbólica	49
4.2 Superfícies com aplicação de Gauss hiperbólica prescrita	54
5 Casos Especiais	70
5.1 Superfície com aplicação de Gauss hiperbólica singular	70
5.2 Superfície paralela	74

Introdução

Em 1951, Heinz Hopf [6] mostrou que toda superfície imersa em \mathbb{R}^3 homeomorfa a esfera com curvatura média constante é isométrica a esfera \mathbb{S}^2 . Na demonstração deste resultado, Hopf introduziu análise complexa como ferramenta básica, além de definir a partir da segunda forma fundamental da superfície uma diferencial quadrática complexa. Um ponto importante a ser observado é que esta diferencial está definida globalmente na superfície e quando a curvatura média é constante, a diferencial de Hopf é holomorfa. Essas técnicas são bem conhecidas no estudo de superfícies de curvatura média constante (CMC) não nula, e representam o marco inicial na pesquisa de tais superfícies.

Esse resultado de Hopf foi generalizado para outros espaços ambientes, como por exemplo os espaços homogêneos (Veja [2, 3]). Em [1], Abresch e Rosenberg observaram que a diferencial de Hopf para superfícies CMC em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ não é holomorfa. Além disso, tais pesquisadores definem uma certa perturbação da diferencial de Hopf, e mostram a holomorfia da mesma para quaisquer superfícies nesses espaços produto. Este trabalho propiciou pesquisas importantes em Geometria, dentre as quais destacamos [2, 11, 15, 22, 23, 27, 26].

Para superfícies CMC em \mathbb{R}^3 , sabemos que a aplicação de Gauss é harmônica sobre \mathbb{S}^2 . Além disso, se $h : S \rightarrow (M^2, \langle, \rangle)$ é uma aplicação harmônica de uma superfície de Riemann S sobre uma superfície Riemanniana M^2 , então vale que $\langle h_z, h_z \rangle dz^2$ é uma diferencial quadrática holomorfa em S (Veja [6]). Assim, qualquer aplicação harmônica sobre \mathbb{S}^2 está relacionada a uma diferencial holomorfa. Uma questão natural a ser analisada é se a diferencial quadrática holomorfa encontrada por Abresch e Rosenberg provém de alguma aplicação harmônica definida geometricamente sobre qualquer superfície CMC em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Neste trabalho, temos como objetivo estudar as propriedades geométricas de superfícies com projeção vertical regular e curvatura média constante $H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$. Os resultados que serão aqui apresentados foram obtidos em 2007, por Isabel Fernández e Pablo Mira no artigo “*Harmonic Maps and Constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* ”, [18].

Em trabalhos anteriores sobre superfícies CMC em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tornou-se claro que a classe $H = 1/2$ é um caso limite. Por exemplo, superfícies CMC mergulhadas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são

compactas apenas se $H > 1/2$, veja [21] e [27]. Nesse sentido, as superfícies de curvatura média um meio em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ correspondem as superfícies com $H = 1$ em \mathbb{H}^3 , conhecidas como superfícies de Bryant. Tais superfícies possuem uma forma bem explícita em termos de dados holomorfos que não são compartilhados em geral para superfícies CMC em \mathbb{H}^3 . Outra similaridade entre superfícies de curvatura média um meio e superfícies de Bryant é descrita em [15] em termos de uma correspondência tipo Lawson para superfícies CMC em espaços homogêneos.

Como iremos trabalhar com superfícies imersas no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$, iniciamos a dissertação apresentando no capítulo 1 definições e resultados importantes de formas bilineares simétricas, que estão diretamente relacionados ao estudo de Variedades semi-Riemannianas. Neste capítulo também abordamos o estudo do espaço de Lorentz e posteriormente veremos que análogo ao caso Riemanniano é possível definir uma única conexão de Levi-Civita associada à uma métrica semi-Riemanniana. Terminamos o capítulo com algumas notas sobre variedades produtos.

No capítulo 2 falaremos sobre imersões isométricas entre variedades semi-Riemannianas, apresentando a definição da segunda forma fundamental. Introduzimos algumas terminologias, a definição de caráter causal de uma superfície e apresentamos alguns exemplos relevantes. Finalizamos obtendo expressões em coordenadas para as curvaturas média e de Gauss, além de adotar o uso das variáveis complexas.

O capítulo 3 é dedicado a obtenção das equações de compatibilidade para uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Nele, enunciamos o teorema fundamental que garante a existência de uma superfície imersa neste espaço produto mediante condições impostas a mesma. Em seguida, relacionamos superfícies de curvatura média constante em L^3 com aplicações harmônicas. Definimos ainda dados de Weierstrass e terminamos com alguns resultados que garantem a harmonicidade e unicidade da aplicação de Gauss de uma superfície tipo-espaço em L^3 .

No capítulo 4 serão mostrados os resultados principais deste trabalho. No caso em que a superfície tem projeção vertical regular e curvatura média $H = 1/2$ será construída geometricamente uma aplicação sobre o plano hiperbólico, chamada Aplicação de Gauss hiperbólica G e mostrada a harmonicidade da mesma. Também é provado que neste contexto, $\langle G_z, G_z \rangle dz^2$ coincide, a menos de um sinal, com a diferencial holomorfa de Abresch-Rosenberg. O problema inverso também é analisado, ou seja, verificamos que sob certas condições impostas à superfície Σ , podemos a partir de uma aplicação harmônica $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada, recuperar uma superfície de curvatura média $H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tal que G é a sua aplicação de Gauss hiperbólica e cuja parametrização é dada em termos de G .

Por fim, o capítulo 5 tem como finalidade tratar dois casos especiais: O primeiro está relacionado a não regularidade da aplicação de Gauss hiperbólica G , onde investigamos o

que acontece quando G é singular em um conjunto aberto na superfície. O segundo caso trata de relações geométricas envolvendo superfícies paralelas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

A teoria de superfícies em \mathbb{R}^3 alcançou sua forma clássica no trabalho de Gauss, que mostrou em 1827 que a geometria intrínseca de uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ depende apenas do produto interno de \mathbb{R}^3 aplicado a vetores tangentes à Σ . Logo depois, em 1854, Riemann viu que era preciso generalizar esse caso especial e introduziu uma geometria em variedades suaves de dimensão arbitrária. Para esses casos, a métrica definida em cada espaço tangente é positiva definida, a qual é chamada *métrica Riemanniana*. Quando enfraquecida essa condição, exigindo apenas que seja não-degenerada, lidamos com o caso das variedades *pseudo-Riemannianas*, ou *semi-Riemannianas*. Dessa forma, começamos definindo forma bilinear simétrica, em seguida lidamos com os espaços de Lorentz para em seguida introduzirmos os análogos à teoria de variedades Riemannianas. Para mais detalhes recomendamos as referências [28] e [29].

1.1 Forma bilinear simétrica

Uma métrica numa variedade diferenciável é uma forma quadrática definida em cada espaço tangente à variedade. Por esse motivo, iniciamos a seção definindo forma bilinear. Em seguida apresentamos alguns resultados relevantes para finalmente chegarmos a definição do índice de uma forma bilinear e finalizamos a seção com um teorema que relaciona o índice com sua assinatura.

Definição 1.1.1. *Sejam E, F espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{R} . Uma forma bilinear $\mathbf{b} : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $\mathbf{b}(u, v)$, linear em cada entrada. Mais precisamente, para quaisquer $u, u' \in E, v, v' \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ devem valer:*

- $\mathbf{b}(u + u', v) = \mathbf{b}(u, v) + \mathbf{b}(u', v)$
- $\mathbf{b}(u, v + v') = \mathbf{b}(u, v) + \mathbf{b}(u, v')$
- $\mathbf{b}(\alpha u, v) = \mathbf{b}(u, \alpha v) = \alpha \mathbf{b}(u, v)$

Considere as bases $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ e $\tilde{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset F$. Para $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$, os números $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}(u_i, v_j)$ definem uma matriz $A = [\mathbf{b}_{ij}] \in M(n \times m)$. Assim, conhecidos os valores \mathbf{b}_{ij} , a forma bilinear $\mathbf{b} : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada. Com efeito, basta observar que

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbf{b}(u_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_{ij} a_i b_j, \quad \forall u \in E, v \in F. \quad (1.1)$$

Quando $E = F$, dizemos que a forma bilinear $\mathbf{b} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é *simétrica* se $\mathbf{b}(u, v) = \mathbf{b}(v, u)$, para quaisquer $u, v \in E$. Uma condição suficiente para que \mathbf{b} seja simétrica é que sua matriz em relação a uma base $\mathcal{B} \subset E$ seja simétrica. De fato, sejam $u, v \in E$ e uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Se $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{ji}$ denotam as entradas da matriz simétrica associada à \mathbf{b} , então

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ji} a_j b_i = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \mathbf{b}_{\beta\alpha} b_\beta a_\alpha = \mathbf{b}(v, u).$$

O teorema a seguir relaciona as formas bilineares simétricas com os operadores auto-adjuntos. Este resultado será de grande utilidade no estudo de superfícies que será feito mais adiante.

Teorema 1.1.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita provido de produto interno. Para cada forma bilinear $\mathbf{b} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único operador linear $B : E \rightarrow E$ tal que*

$$\langle u, Bv \rangle = \mathbf{b}(u, v) \quad \forall u, v \in E.$$

A forma bilinear \mathbf{b} é simétrica se, e somente se, o operador B é auto-adjunto.

Demonstração. Veja em [28]. □

O estudo das formas quadráticas está intimamente relacionado ao estudo de formas bilineares, mais adiante veremos que uma determina a outra.

Definição 1.1.2. *Uma função $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma forma quadrática quando existe uma forma bilinear $\mathbf{b} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(v) = \mathbf{b}(v, v)$, $\forall v \in E$.*

Se \mathbf{b} é simétrica, então todos os valores $\mathbf{b}(u, v)$ podem ser determinados a partir da forma quadrática φ através da *fórmula de polarização*:

$$\mathbf{b}(u, v) = \frac{1}{2} [\varphi(u + v, u + v) - \varphi(u, u) - \varphi(v, v)].$$

Definição 1.1.3. *A forma quadrática $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é*

- *positiva [negativa] definida se, e somente se, $\varphi(v) > 0$ [< 0], $\forall v \neq 0$,*

- positiva [negativa] semi-definida se, e somente se, $\varphi(v) \geq 0$ [≤ 0], $\forall v \neq 0$,
- indefinida se existem $u, v \in E$ tais que $\varphi(u) < 0$ e $\varphi(v) > 0$.

Teorema 1.1.2. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno. Dada uma forma bilinear simétrica $\mathbf{b} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma base ortonormal $\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset E$ tal que $\mathbf{b}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$ se $i \neq j$.*

Demonstração. Veja em [28]. □

Observamos que se $u = \sum_{i=1}^n a_i \bar{e}_i$ e $v = \sum_{j=1}^n b_j \bar{e}_j$, então esse teorema nos diz que a expressão (1.1) na base ortonormal \mathcal{B}' é da forma

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbf{b}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \sum_i \lambda_i a_i b_i.$$

Em particular, a forma quadrática $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^2 = \lambda_1 b_1^2 + \dots + \lambda_n b_n^2.$$

Além disso, dada uma forma quadrática φ definida no espaço vetorial E , com produto interno, seja $B : E \rightarrow E$ o operador auto-adjunto dado por $\varphi(v) = \langle v, B(v) \rangle$. Então existe uma base ortonormal \mathcal{B}' de E , tal que $B(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$, para $i = 1, \dots, n$. Portanto, a forma quadrática φ é não-negativa, positiva, não-positiva, negativa ou indefinida, conforme os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sejam todos ≥ 0 , todos > 0 , todos ≤ 0 , todos < 0 , ou $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ respectivamente.

Vimos acima que num espaço vetorial de dimensão finita E , a forma quadrática indefinida φ tem um sinal, ou seja, existem vetores $u, v \in E$ tais que $\varphi(u) < 0$ e $\varphi(v) > 0$. No decorrer do texto, veremos que dada qualquer base ortonormal de E o número de sinais negativos em sua assinatura é o mesmo. Ao final desta seção, relacionaremos esse fato com o índice da forma quadrática.

Definição 1.1.4. *O índice ν de uma forma quadrática φ em E é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset E$ sobre o qual $\varphi|_W : W \rightarrow \mathbb{R}$ é negativa definida.*

Assim $0 \leq \nu \leq \dim E$, e $\nu = 0$ se, e somente se, φ é semi-definida positiva.

Teorema 1.1.3. *Seja E um espaço vetorial. Uma forma bilinear simétrica $\mathbf{b} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é não-degenerada se, e somente se, sua matriz relativa a qualquer base é invertível.*

Demonstração. Veja em [29]. □

Definição 1.1.5. *Um produto escalar g definido no espaço vetorial E é uma forma bilinear simétrica não-degenerada.*

Definição 1.1.6. Se W é um subespaço de E , o conjunto

$$W^\perp = \{v \in E ; v \perp W\}$$

é um subespaço de E chamado W perp.

Observação 1.1.1. Considere o espaço vetorial E munido com um produto escalar g . Dado um subespaço $W \subset E$, se g é indefinida não podemos chamar o conjunto W^\perp de complemento ortogonal de W , já que, em geral, $W + W^\perp$ não é igual a E .

Isso pode ser melhor entendido com o exemplo abaixo, para o qual não é difícil verificar que $W \neq W^\perp$, logo $W + W^\perp$ não é igual a E .

Exemplo 1.1.1. Sejam $E = \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(u, v) = u_1v_1 - u_2v_2,$$

em que $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Tomando $W = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u = v\}$. Então W^\perp não é o complemento ortogonal de W .

Dado um subespaço de um espaço vetorial E com produto escalar g , embora nem sempre o conjunto W^\perp seja o complemento ortogonal, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.1. Se W é um subespaço de um espaço vetorial E com produto escalar, então

- $\dim W + \dim W^\perp = \dim E$,
- $(W^\perp)^\perp = W$,
- W é não-degenerado $\Leftrightarrow W^\perp$ é não-degenerado.

Demonstração. Veja [29]. □

Um subespaço $W \subset E$ é não-degenerado se $g|_W$ é não-degenerado. Além disso, a não-degenerescência de g no espaço vetorial E é equivalente à $E^\perp \equiv \{0\}$.

Vimos na Observação 1.1.1 que nem sempre $E = W + W^\perp$, para algum subespaço W de E . Uma condição necessária e suficiente para que isso seja verdade é dada pelo lema seguinte:

Lema 1.1.1. Um subespaço $W \subset E$ é não-degenerado se, e somente se, $E = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. Veja [29]. □

Nem sempre é fácil determinar o índice de uma forma bilinear a partir da definição dada acima. Dessa maneira, definimos abaixo o sinal associado a um vetor, para em seguida definir a assinatura.

Definição 1.1.7. *Seja g um produto escalar em E . Para todo vetor $v \in E$ tal que $g(v, v) \neq 0$, temos*

- *O sinal $\varepsilon_v \in \{-1, +1\}$ é dado por $\varepsilon_v = \frac{g(v, v)}{|g(v, v)|}$,*
- *A norma $\|v\| = \sqrt{\varepsilon_v g(v, v)}$,*
- *$v \in E$ é unitário se $\|v\| = 1$.*

A matriz de um produto escalar g numa base ortonormal $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ do espaço vetorial E é uma matriz diagonal. De fato, basta observar que

$$g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \text{tal que } \varepsilon_i = \pm 1.$$

A assinatura de uma base ortonormal é o número de sinais negativos dos vetores da base, ordenados pondo $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, em que os primeiros ε_i são os sinais negativos seguido dos positivos.

Proposição 1.1.2. *Seja $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset E$ uma base ortonormal, com $\varepsilon_i = g(\bar{e}_i, \bar{e}_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Então todo $v \in E$ é unicamente escrito como*

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, \bar{e}_i) \bar{e}_i.$$

Demonstração. Mostraremos que $w = v - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, \bar{e}_i) \bar{e}_i$ é ortogonal a cada \bar{e}_j . Com efeito, para $j = 1, \dots, n$ tem-se

$$\begin{aligned} g(w, \bar{e}_j) &= g(v, \bar{e}_j) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, \bar{e}_i) g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \\ &= g(v, \bar{e}_j) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 g(v, \bar{e}_i) \delta_{ij} \\ &= g(v, \bar{e}_j) - g(v, \bar{e}_j) = 0. \end{aligned}$$

Como $\bar{e}_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, a não-degenerescência do produto escalar termina a prova. □

Teorema 1.1.4. *Qualquer que seja a base ortonormal $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset E$, o número de sinais negativos na assinatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ é o índice ν de E .*

Demonstração. Veja [29]. □

Com isso, finalizamos a seção observando que para todo subespaço $W \subset E$ não-degenerado tem-se

$$\text{ind } E = \text{ind } W + \text{ind } W^\perp. \quad (1.2)$$

1.2 Espaços de Lorentz L^{n+1}

Os resultados que serão apresentados neste trabalho usam algumas propriedades do espaço de Lorentz de dimensão 4. Nesta seção apresentamos propriedades e terminologias para o espaço de Lorentz de dimensão qualquer. Para isso, começamos com a definição de espaço de Lorentz, seguido do caráter causal de um vetor nesse espaço. Por fim, destacamos três importantes subconjuntos disjuntos de L^{n+1} e finalizamos a seção definindo o caráter causal de um subespaço do espaço de Lorentz.

Definição 1.2.1. *O espaço de Lorentz, denotado por L^{n+1} , é o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} munido com a forma bilinear $g : L^{n+1} \times L^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g(u, v) = -u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_{n+1}v_{n+1}, \quad (1.3)$$

em que $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) \in L^{n+1}$.

O sinal negativo que aparece na definição da forma bilinear g , o qual diferencia g do produto interno usual de \mathbb{R}^{n+1} poderia ter sido colocado em qualquer posição na soma em (1.3). Adotamos ele na primeira parcela apenas para que esteja de acordo com as referências adotadas.

Como a forma bilinear definida em (1.3) tem índice 1, o espaço L^{n+1} pode ser visto como a união de três regiões, onde para cada região os vetores tem a classificação dada pela definição a seguir, chamada o *caráter causal* do vetor.

Definição 1.2.2. *Um vetor $v \in L^{n+1}$ é dito*

- *tipo espaço, se $g(v, v) > 0$ ou $v = 0$,*
- *tipo tempo, se $g(v, v) < 0$,*
- *tipo luz, se $g(v, v) = 0$ e $v \neq 0$.*

Assim, qualquer que seja $v \in L^{n+1}$, seu caráter causal é ser *tipo espaço*, *tipo tempo* ou *tipo luz*. A partir disso, observamos que o espaço de Lorentz L^{n+1} é a união de três regiões disjuntas, as quais destacamos abaixo.

- a. O **cone temporal** é o conjunto de todos os vetores tipo tempo, i.e.

$$\mathcal{T} = \{v \in L^{n+1}; -v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n+1}^2 < 0\}.$$

- b. O **cone de luz** é o conjunto de todos os vetores tipo luz,

$$\mathbb{N} = \{v \in L^{n+1}; -v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n+1}^2 = 0\} \setminus \{0\}.$$

c. O conjunto dos vetores tipo espaço é dado por

$$\mathcal{S} = L^{n+1} \setminus (\mathcal{T} \cup \mathbb{N}^n).$$

As figuras abaixo indicam as regiões citadas acima, para o caso L^3 . Para o qual o eixo vertical (o eixo do cone) é a primeira coordenada do sistema e a direção temporal.

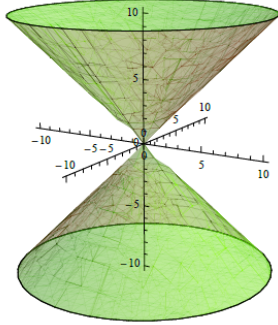


Figura 1.1: Tipo tempo

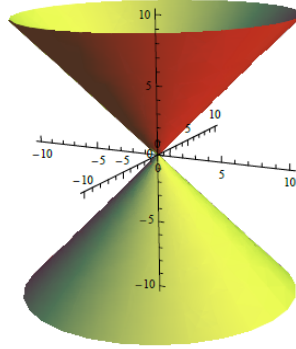


Figura 1.2: Tipo luz

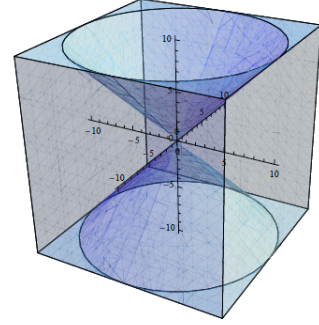


Figura 1.3: Tipo espaço

Definição 1.2.3. O comprimento de $v \in L^{n+1}$ é dado por $\|v\|_L = \sqrt{|g(v, v)|}$. Além disso,

- a) Um vetor v de L^{n+1} é dito unitário se $\|v\|_L = 1$,
- b) Os vetores $u, v \in L^{n+1}$ são ortogonais se $g(u, v) = 0$.

Como g tem índice 1, essa definição não é uma norma em L^{n+1} , pois existem vetores diferentes do vetor nulo cujo comprimento é zero, os vetores tipo luz. Porém, vale a seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. Dados $v \in L^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\|\lambda v\|_L = |\lambda| \|v\|_L$.

Demonstração. Segue direto da Definição 1.2.3, ou seja,

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_L &= \sqrt{|g(\lambda v, \lambda v)|} = \sqrt{\lambda^2 |g(v, v)|} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{|g(v, v)|} = |\lambda| \|v\|_L. \end{aligned}$$

□

De modo análogo a definição de caráter causal de um vetor, podemos definir o caráter causal de um subespaço vetorial.

Definição 1.2.4. Dizemos que um subespaço $W \subset L^{n+1}$ é:

- i) tipo espaço, se $g|_W$ é positiva definida,

ii) tipo tempo, se $g|_W$ é indefinida, não-degenerada e índice 1,

iii) tipo luz, se $g|_W$ é semi-positiva.

Essa definição irá nos auxiliar na classificação do caráter causal de uma superfície, o qual está relacionada ao plano tangente em cada ponto. Para um estudo mais completo da geometria do espaço de Lorentz indicamos [24] e [29].

1.3 Variedades Semi-Riemannianas

As variedades semi-Riemannianas generalizam o conceito de variedade Riemanniana. Um tipo especial de variedades semi-Riemannianas são as variedades de Lorentz, cujo interesse está relacionado à teoria da relatividade geral. No estudo de variedades diferenciáveis, uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável dotada com um tensor métrico diferenciável simétrico, o qual é não-degenerado em cada ponto da variedade. O tensor métrico semi-Riemanniano generaliza o tensor métrico Riemanniano, já que exigimos apenas que o tensor métrico seja não-degenerado.

Definição 1.3.1. *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um 2-tensor covariante e simétrico, tal que para cada $p \in M$ a forma bilinear simétrica g_p em cada espaço tangente T_pM é não-degenerada e tem índice constante em M , isto é, o índice de g_p não depende de p . Uma variedade semi-Riemanniana M é um par (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável e g um tensor métrico de índice constante em M .*

Para cada $p \in M$, o valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana é chamado o índice de M , logo $0 \leq \nu \leq \dim M$. Se $\nu = 0$, então M é uma variedade Riemanniana e cada g_p é um produto interno em T_pM . No caso em que $\nu = 1$ e $n \geq 2$, dizemos que M é uma variedade de Lorentz.

Usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como notação alternativa para g , escrevendo $g(u, v) = \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ para vetores $u, v \in T_pM$, e $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ para campos de vetores diferenciáveis $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3.1 A conexão de Levi-Civita

Analogamente ao estudo de variedades Riemannianas, o teorema de Levi-Civita é válido para variedades semi-Riemanniana, garantido assim a existência de uma única conexão simétrica e compatível com a métrica da variedade semi-Riemanniana. Sejam X, Y campos em uma variedade semi-Riemanniana M . O objetivo desta seção é mostrar como definir um campo de vetores $\nabla_X Y$ em M cujo valor em cada ponto p é a taxa de variação do campo Y na direção X_p .

Definição 1.3.2. *Seja (\mathbf{x}, U) um sistema de coordenadas em L^{n+1} . Dados X e $Y = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \partial_i$ campos de vetores diferenciáveis em L^{n+1} , em que $\partial_1, \dots, \partial_n, \partial_{n+1}$ são os campos coordenados associados a (\mathbf{x}, U) , definimos o campo $D_X Y$ por*

$$D_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} X(y_i) \partial_i,$$

o qual é chamado a derivada covariante natural de Y com respeito a X .

Para uma variedade semi-Riemanniana, podemos definir um operador que atua de maneira semelhante a derivada definida acima. Este será a chamada conexão da variedade semi-Riemanniana. Seguindo com a notação, o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ é o espaço dos campos de vetores diferenciáveis da variedade semi-Riemanniana M e $C^\infty(M)$ o anel das funções diferenciáveis definidas na variedade.

Definição 1.3.3. *Uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável M é a aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que*

- 1) $\nabla_X Y$ é $C^\infty(M)$ linear em X
- 2) $\nabla_X Y$ é \mathbb{R} linear em Y
- 3) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, \quad \forall f \in C^\infty(M)$

Para que ∇ seja uma derivada ideal para se trabalhar em variedades semi-Riemannianas, precisamos que ela esteja de alguma forma relacionada com o tensor métrico definido na variedade. O teorema abaixo diz quais propriedades auxiliares devemos ter para que ∇ , como definida acima seja única.

Teorema 1.3.1. *Em uma variedade semi-Riemanniana M , existe uma única conexão ∇ tal que para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale:*

- i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$
- ii) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$

Demonstração. Veja em [29]. □

A conexão ∇ é chamada conexão de Levi-Civita de M e é caracterizada pela fórmula de Koszul,

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = Y\langle Z, X \rangle + Z\langle X, Y \rangle - X\langle Y, Z \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle.$$

Definição 1.3.4. Considere um sistema de coordenadas locais (\mathbf{x}, U) em torno do ponto p da variedade semi-Riemanniana M^n e sejam $\partial_1, \dots, \partial_n$ os campos coordenados associados ao sistema de coordenadas. Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são funções definidas em U tais que

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad 0 \leq i, j, k \leq n \quad (1.4)$$

Proposição 1.3.1. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com sistema de coordenadas (\mathbf{x}, U) . Se $\partial_1, \dots, \partial_n$ são os campos coordenados associados, então

$$\begin{aligned} i) \quad \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right\} g^{lk}, \\ ii) \quad \nabla_X Y &= \sum_{k=1}^n \left(X(y_k) + \sum_{i,j} x_i y_i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \end{aligned}$$

Demonstração. Vejamos como determinar os símbolos Γ_{ij}^k . Tomando em (1.4) o produto escalar com ∂_l , obtemos

$$g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g(\partial_k, \partial_l) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl}. \quad (1.5)$$

Agora denotando g^{lp} como o lp -elemento da matriz inversa de g , tomamos o produto da expressão acima com g^{lp} e fazemos a soma em l em ambos os lados de (1.5). Assim

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{lp} &= \sum_{l=1}^n g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) g^{lp} \\ \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \delta_{kp} &= \sum_{l=1}^n g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) g^{lp} \\ \Gamma_{ij}^p &= \sum_{l=1}^n g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) g^{lp}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Usando a compatibilidade da conexão simétrica ∇ com a métrica g obtemos

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) &= \partial_j g(\partial_i, \partial_l) - g(\partial_i, \nabla_{\partial_l} \partial_j) \\ &= \partial_j g(\partial_i, \partial_l) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j) + g(\nabla_{\partial_i} \partial_l, \partial_j) \\ &= \partial_j g(\partial_i, \partial_l) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j) + \partial_i g(\partial_j, \partial_l) - g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l). \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) = \frac{1}{2} \{ \partial_j g(\partial_i, \partial_l) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j) + \partial_i g(\partial_j, \partial_l) \}. \quad (1.7)$$

Substituindo a equação (1.7) em (1.6) resulta

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\} g^{lp}.$$

Para mostrar *ii*), basta tomar campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, escrevê-los como combinação dos vetores coordenados e usar as propriedades da conexão. □

A partir disso obtemos que a conexão na Definição 1.3.2 é a conexão de Levi-Civita de L^{n+1} e em relação ao sistema de coordenadas usuais, vale

- 1) $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ onde $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_i = 1$, para $i = 2, 3, \dots, n, n+1$
- 2) $\Gamma_{ij}^k = 0$,

para todo $0 \leq i, j, k \leq n+1$.

Definição 1.3.5. *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva regular na variedade semi-Riemanniana M . Dizemos que γ é uma **geodésica** se $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ para todo $t \in I$, em que $\frac{D}{dt}$ é a conexão de M ao longo da curva γ .*

1.3.2 Variedades produto

Seguindo de modo análogo ao caso de variedades Riemannianas, definimos a variedade produto a partir de duas variedades semi-Riemannianas. Os resultados para variedades produto semi-Riemannianas são análogos. Aqui destacamos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.2. *A variedade produto $M \times N$, em que M e N são variedades semi-Riemannianas, é uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $\dim M + \dim N$.*

Demonstração. Veja em [29]. □

Sejam $(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)$ e $(\mathbf{y}_\beta, V_\beta)$ um sistema de coordenadas em M e N , respectivamente. Considere $(\mathbf{z}_{\alpha\beta}, U_\alpha \times V_\beta)$ um sistema de coordenadas em $M \times N$. A partir disso é possível verificar os seguintes fatos:

- a) As seguintes projeções

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\rightarrow M, & \sigma : M \times N &\rightarrow N \\ (p, q) &\mapsto p, & (p, q) &\mapsto q \end{aligned}$$

são aplicações suaves, mais precisamente submersões.

- b) A aplicação $\phi : P \rightarrow M \times N$ é diferenciável se, e somente se, ambas as aplicações $\pi \circ \phi$ e $\sigma \circ \phi$ são diferenciáveis.

c) Para cada $(p, q) \in M \times N$ os conjuntos

$$M \times q = \left\{ (r, q) \in M \times N ; r \in M \right\}, \quad p \times N = \left\{ (p, r) \in M \times N ; r \in N \right\}$$

são subvariedades de $M \times N$.

d) Para cada $(p, q) \in M \times N$ as aplicações

$$\pi|_{M \times q} : M \times q \rightarrow M, \quad \sigma|_{p \times N} : p \times N \rightarrow N$$

são difeomorfismos.

Observe que por b) os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times q), \quad T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$$

são subespaços vetoriais de $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN$.

Lema 1.3.1. *Seja $M \times N$ o espaço produto das variedades semi-Riemannianas M e N . Então o espaço tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$ é a soma direta dos subespaços T_pM e T_qN , isto é, cada elemento de $T_{(p,q)}(M \times N)$ é unicamente escrito como*

$$x + y, \text{ onde } x \in T_pM \text{ e } y \in T_qN.$$

Demonstração. Veja em [29]. □

Proposição 1.3.3. *Sejam M e N variedades semi-Riemannianas com tensores métricos g_M e g_N , respectivamente. Se π e σ são as projeções, então o tensor métrico dado por*

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N), \tag{1.8}$$

é uma métrica em $M \times N$.

Sejam M e N variedades semi-Riemannianas. Considere o produto $M \times N$ com a métrica dada pela proposição anterior e seja ∇^M a conexão de M e ∇^N a conexão de N . Então a conexão ∇ de $M \times N$ é dada por

$$\nabla_{(X_1+X_2)}(Y_1 + Y_2) = \nabla_{X_1}^M Y_1 + \nabla_{X_2}^N Y_2,$$

em que $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$.

1.3.3 O espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

A partir do que vimos na seção anterior, destacaremos alguns resultados importantes do espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Começamos com a definição abaixo.

Definição 1.3.6 (Plano Hiperbólico). *Definimos \mathbb{H}^2 como o conjunto de L^3 dado por*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in L^3; -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}$$

Mais detalhes sobre esse conjunto veremos no próximo capítulo. Prosseguimos definindo o espaço que é objeto deste estudo, o espaço produto de L^4 como segue.

Definição 1.3.7. *O subconjunto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ do espaço de Lorentz-Minkowski L^4 é definido como*

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in L^4; -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0 \right\},$$

em que L^4 é o espaço Euclidiano \mathbb{R}^4 dotado com a métrica de Lorentz $\langle, \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, em coordenadas canônicas.

Se considerarmos na variedade produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ suas projeções naturais π e σ , então de acordo com a expressão (1.8) temos $\langle, \rangle = \pi^*(g_{\mathbb{H}^2}) + \sigma^*(dt^2)$, em que dt^2 é a métrica usual de \mathbb{R} .

Para cada $(p, q) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a seção horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{q\}$ e a seção vertical $\{p\} \times \mathbb{R}$ são ortogonais em (p, q) .

Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, temos que

$$X(p, q) = (X^h(p), X^v(q)) \in T_{(p,q)}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \equiv T_p\mathbb{H}^2 \times T_q\mathbb{R},$$

em que $X^h = d\pi(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ e $X^v = d\sigma(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ é um campo horizontal se $X^v = 0$ e vertical se $X^h = 0$.

Se X é um campo horizontal, então $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, o qual continuamos denotando por X visto como um campo em \mathbb{H}^2 . Analogamente, se $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ é um campo vertical, seguiremos denotando por Y como um campo de \mathbb{R} .

Denotamos por $\bar{\nabla}$, $\nabla^{\mathbb{H}^2}$ e $\nabla^{\mathbb{R}}$ as conexões associadas as métricas \langle, \rangle , $g_{\mathbb{H}^2}$ e dt^2 , respectivamente. Para saber como atua a conexão do espaço produto, basta saber como atua em campos verticais e horizontais.

Proposição 1.3.4. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Então*

- 1) $\bar{\nabla}_X Y$ é um campo horizontal e $(\bar{\nabla}_X Y)^h = \nabla_X^{\mathbb{H}^2} Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$,
- 2) $\bar{\nabla}_V W$ é um campo vertical e $(\bar{\nabla}_V W)^v = \nabla_V^{\mathbb{R}} W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$,
- 3) $\bar{\nabla}_V X = 0 = \bar{\nabla}_X V$.

Demonstração. Veja em [17]. □

Dado um campo horizontal $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, temos

$$\langle grad(\sigma), X \rangle = d\sigma(X) = 0,$$

logo, o gradiente $grad(\sigma) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$, o qual denotaremos por ∂t , é uma base de $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Além disso, $\langle \partial t, \partial t \rangle = 1$. Então, dado um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, temos

$$X^h = X - \langle X, \partial t \rangle \partial t, \quad X^v = \langle X, \partial t \rangle \partial t.$$

Resulta da Proposição 1.3.4 e da igualdade abaixo que $grad(\sigma)$ é um campo paralelo.

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial t} \partial t, \partial t \rangle = \frac{1}{2} \partial t \langle \partial t, \partial t \rangle.$$

Com efeito, se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, temos

$$\bar{\nabla}_X \partial t = \bar{\nabla}_{X^h} \partial t + \langle X, \partial t \rangle \bar{\nabla}_{\partial t} \partial t.$$

Logo, ∂t é um campo paralelo.

Capítulo 2

Imersões Isométricas

Dada uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ de uma variedade diferenciável M de dimensão n , na variedade diferenciável semi-Riemanniana \overline{M} de dimensão $m = n + k$, é possível obter de maneira natural uma métrica em M . Nesse contexto, f passa a ser uma imersão isométrica de M em \overline{M} . Veremos a seguir como relacionar a geometria de M e de \overline{M} . Começamos definindo imersão isométrica e em seguida a segunda forma fundamental.

2.1 Segunda forma fundamental

Veremos que as relações entre as métricas de M e \overline{M} se exprimem por meio da segunda forma fundamental. No que segue, admitiremos que as variedades diferenciáveis M e \overline{M} são orientáveis. Como de costume, denotamos o espaço tangente em p de M por $T_p M$.

Definição 2.1.1. *Dada uma aplicação diferenciável $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ de uma variedade diferenciável M na variedade semi-Riemanniana \overline{M} , dizemos que f é uma **imersão isométrica** se para todo ponto $p \in M$ sua diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_p \overline{M}$ é injetiva e a métrica em M é a métrica dada pelo pullback, isto é, $g_M = f^* g_{\overline{M}}$.*

Introduziremos a seguir a noção de subvariedade tipo espaço, tipo tempo e tipo luz. Uma subvariedade não-degenerada é tipo espaço ou tipo tempo. Neste trabalho lidamos apenas com as subvariedade tipo espaço, porém os três tipos são definidos abaixo.

Definição 2.1.2. *Sejam M^n e \overline{M}^{n+k} variedades semi-Riemannianas. Uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ é dita **tipo espaço** se para todo ponto $p \in M$, o espaço tangente $T_p M$ com a métrica induzida é tipo espaço, ou seja, a métrica induzida em M é Riemanniana. Nesse caso, $\Sigma = f(M)$ é dita uma subvariedade tipo espaço em \overline{M} . De maneira análoga, definimos subvariedade **tipo tempo** e **tipo luz**.*

Considere $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão tipo tempo ou tipo espaço, em que M e \overline{M} são variedades semi-Riemannianas. Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M tal

que $f(U) = \bar{U}$ é uma subvariedade de \bar{M} e a métrica induzida é não-degenerada. Dessa forma, para cada $p \in M$, podemos considerar o espaço tangente $T_p M$ como um subespaço vetorial de $T_{f(p)}\bar{M}$. Portanto, pelo Lema 1.1.1, a métrica de \bar{M} decompõe $T_{f(p)}\bar{M}$ na soma direta,

$$T_{f(p)}\bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_{f(p)}\bar{M}$. Observamos que $(T_p M)^\perp$ é um subespaço vetorial de dimensão k . O índice da métrica de $T_{f(p)}\bar{M}$ restrita à $(T_p M)^\perp$ é chamado o *coíndice*. Então, pelo comentário feito após o Teorema 1.1.4 e usando a equação (1.2) temos que $ind \bar{M} = ind M + coind M$.

Dessa decomposição obtemos o fibrado vetorial $TM^\perp = \bigcup_{p \in M} T_p M^\perp$, chamado o fibrado normal de M . Nesse sentido,

$$T\bar{M}|_{f(M)} = \left\{ X \in T\bar{M}; \pi(X) \in f(M), \text{ onde } \pi : T\bar{M} \rightarrow \bar{M} \text{ é a projeção sobre a base} \right\}$$

é a soma de Whitney do fibrado tangente TM com TM^\perp , isto é,

$$T\bar{M}|_{f(M)} = TM \oplus_W TM^\perp.$$

Com respeito a essa decomposição temos as projeções

$$(\cdot)^\top : T\bar{M}|_{f(M)} \rightarrow TM \quad (\cdot)^\perp : T\bar{M}|_{f(M)} \rightarrow (TM)^\perp$$

a qual são chamadas tangente e normal, respectivamente.

Seja $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica e denote por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos tangentes à M em \bar{M} . Considere $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos diferenciáveis. Se $\bar{\nabla}$ é a conexão de \bar{M} , então tomando extensões \bar{X}, \bar{Y} temos a seguinte decomposição,

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\perp. \quad (2.1)$$

Dessa forma podemos definir uma conexão em M , como mostra a proposição abaixo.

Proposição 2.1.1. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos diferenciáveis em M . Se \bar{X}, \bar{Y} são extensões de X e Y em \bar{M} , então $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\perp$ é a conexão de M induzida pela imersão f .*

Demonstração. Veja [25] □

Assim, a conexão na variedade semi-Riemanniana M nada mais é do que a projeção tangente ortogonal da conexão de \bar{M} sobre M . A projeção normal da conexão de \bar{M} dada na equação (2.1) revela propriedades importantes e não deve ser descartada.

Definição 2.1.3 (Fórmula de Gauss). *Sejam X, Y campos locais em M . A aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$, dada por*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é chamada a segunda forma fundamental.

Das propriedades da conexão de Levi-Civita concluímos que α é bilinear e simétrica sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis sobre M . Em particular, para cada ponto $p \in M$ e campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação $\alpha_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ dada por $\alpha_p(X, Y) = \alpha(X, Y)(p)$, depende apenas de X e Y no ponto p de M .

Considere $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo diferenciável e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ um campo de vetores normais. Denote por $\mathcal{A}_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$\mathcal{A}_\xi = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Como $Y \in \mathfrak{X}(M)$, usando a compatibilidade da métrica com a conexão obtemos

$$0 = \overline{X} \langle \xi, \overline{Y} \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, \overline{Y} \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X \overline{Y} \rangle.$$

Portanto, a fórmula de Gauss fica

$$\langle \mathcal{A}_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Em particular, a aplicação $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $\mathcal{A}(X, \xi) = \mathcal{A}_\xi X$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Logo, a aplicação $\mathcal{A}_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e também simétrica, isto é, $\langle \mathcal{A}_\xi X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{A}_\xi Y \rangle$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação \mathcal{A}_ξ é chamado *operador Weingarten*, ou por abuso de linguagem, a segunda forma fundamental na direção normal ξ .

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, o qual denotamos $\nabla_X^\perp \xi$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal TM^\perp . Dizemos que ∇^\perp é a conexão normal de f . Dessa maneira obtemos

$$\nabla_X^\perp \xi = \overline{\nabla}_X \xi + \mathcal{A}_\xi X,$$

chamada *fórmula de Weingarten*.

Quando a codimensão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, a imagem $f(M^n) \subset \overline{M}^{n+1}$ é denominada uma *hipersuperfície*. Destacamos abaixo duas importantes hipersuperfícies do espaço de Lorentz L^{n+1} .

Exemplo 2.1.1 (O espaço hiperbólico). *Definimos \mathbb{H}^n como o conjunto de L^{n+1} dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in L^{n+1}; -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1, x_0 > 0\}$$

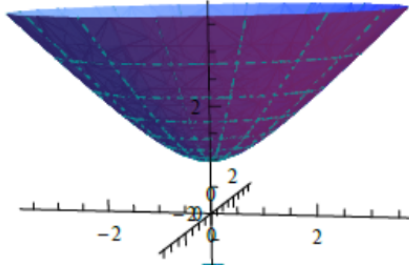


Figura 2.1: Plano Hiperbólico \mathbb{H}^2

Veja que para cada ponto $p \in \mathbb{H}^n$, o vetor com início na origem de L^{n+1} e fim no ponto p , é normal a \mathbb{H}^n e do tipo tempo. Portanto, seu complemento ortogonal é tipo espaço e tangente a esta hipersuperfície. Logo \mathbb{H}^n é uma hipersuperfície tipo espaço. Quando $n = 2$ chamaremos \mathbb{H}^2 de *plano hiperbólico*.

Veremos agora que toda geodésica de \mathbb{H}^n é a interseção de um plano de L^{n+1} que contém a origem com \mathbb{H}^n . Dado $p \in \mathbb{H}^n$ e $v \in T_p\mathbb{H}^n$. Considere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^n$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Suponha que γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\gamma'(s)\|_L = 1$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Como $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = -1$, temos que

$$\langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (2.2)$$

Já que, $\gamma'(s)$ é tangente a \mathbb{H}^n . Vemos a partir de (2.2) que $\gamma(s)$ é normal e $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Portanto, considerando o plano gerado pelos vetores $\{p, v\}$, obtemos uma base ortonormal para este plano no ponto $p \in \mathbb{H}^n$. Então, todo vetor unitário w nesse plano pode ser escrito como $w = p \cosh t + v \sinh t$, onde t é o ângulo entre w e p . Em particular, como $\|\gamma(s)\|_L = 1$, temos

$$\gamma(s) = p \cosh s + v \sinh s.$$

Se mostrarmos que γ é uma geodésica de \mathbb{H}^n que parte de p com velocidade v , então segue da unicidade que toda geodésica é desse tipo para a condição inicial dada. Assim, considere $\bar{\nabla}$ a conexão em L^{n+1} e ∇ a conexão em \mathbb{H}^n . Da relação

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \frac{D\gamma'}{ds} = \left(\frac{\bar{D}\gamma'}{ds} \right)^\top = (\bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma')^\top$$

temos que

$$\frac{D\gamma'}{ds} = \frac{\bar{D}\gamma'}{ds} + \left\langle \left(\frac{\bar{D}\gamma'}{ds} \right)^\perp, \gamma \right\rangle \gamma = \gamma'' + \langle (\gamma'')^\perp, \gamma \rangle \gamma$$

donde obtemos

$$\frac{D\gamma'}{ds} = \gamma + \langle \gamma'', \gamma \rangle \gamma = \gamma + \langle \gamma, \gamma \rangle \gamma = \gamma - \gamma = 0$$

Portanto, o campo de vetores γ' é paralelo. Como a geodésica parte de p com velocidade v , pela unicidade temos que todas as geodésicas de \mathbb{H}^n são desse tipo.

Exemplo 2.1.2 (O espaço de De Sitter). Definimos \mathbb{S}_1^n como o conjunto de L^{n+1} dado por

$$\mathbb{S}_1^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in L^{n+1}; -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Analogamente, vemos que o espaço tangente em cada ponto $p \in \mathbb{S}_1^n$ é um subespaço vetorial tipo tempo, logo o espaço de De Sitter é uma hipersuperfície de tipo tempo em L^{n+1} . Também usaremos a terminologia pseudoesfera para nos referir ao espaço de De Sitter.

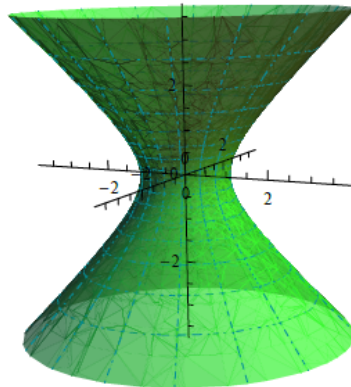


Figura 2.2: Espaço de De Sitter \mathbb{S}_1^2

2.2 Aplicação de Gauss de uma superfície

Os resultados e definições abaixo tem como objetivo relembrar algumas terminologias e notações. Não faremos uma exposição detalhada sobre esse tópico. Caso o leitor tenha interesse recomendamos as referências [24] e [29].

Definição 2.2.1. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow M$, em que U é um aberto de \mathbb{R}^2 tal que*

1. \mathbf{x} é diferenciável.
2. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\mathbf{x}(q)}M$ é injetiva.

O subconjunto $\Sigma = \mathbf{x}(U)$ de M obtido como imagem pela parametrização \mathbf{x} é chamado o traço da aplicação. O caráter causal de \mathbf{x} é por definição o caráter causal da superfície regular Σ .

Definição 2.2.2 (Caráter causal). *Seja $\Sigma \subset M$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que:*

- Σ é tipo espaço se para todo $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ for um plano tipo espaço,
- Σ é tipo tempo se para todo $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ for um plano tipo tempo,
- Σ é tipo luz se para todo $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ for um plano tipo luz.

Definição 2.2.3 (*Primeira forma fundamental*). Seja $\Sigma \subset M$ uma superfície parametrizada regular, para a qual temos uma forma bilinear g definida em cada plano tangente $T_p\Sigma$. A primeira forma fundamental de Σ no ponto $p \in \Sigma$ é dada por

$$\begin{aligned} I : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto I(v) = g(v, v) \end{aligned}$$

Os conceitos que dependem apenas da primeira forma fundamental são intrínsecos à superfície, isto é, não dependem do espaço ambiente em que a superfície se encontra e nem da parametrização que escolhemos.

Assim, dizemos que Σ é de tipo espaço se I é positiva definida para todo p em Σ . Da mesma forma, Σ é de tipo tempo se I é não-degenerada e de índice 1 para todo p em Σ . Por fim, Σ é de tipo luz se I é positiva e degenerada para todo p em Σ .

Seja Σ uma superfície tipo tempo ou tipo espaço. Denote por $\mathfrak{X}(\Sigma)$ o espaço dos campos de vetores tangentes diferenciáveis em Σ e $\bar{\nabla}$ a conexão de M . Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, usaremos os resultados da Seção 2.1, para deduzirmos a segunda forma de uma superfície.

Tome $\xi = N$ nas fórmulas obtidas na Seção 2.1. Denote por $\langle N, N \rangle = \varepsilon$ o sinal da aplicação de Gauss, ou seja,

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo espaço} \\ +1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo tempo.} \end{cases}$$

Como $\langle N, N \rangle$ é constante, temos $\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = 0$ e a fórmula de Weingarten fica

$$\mathcal{A}_N(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^\top.$$

Escolhida uma direção normal N de Σ , temos por (2.1) que α é proporcional à N . Portanto, dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos que

$$\alpha(X, Y) = \varepsilon \langle \alpha(X, Y), N \rangle N = \varepsilon \langle \mathcal{A}_N X, Y \rangle N$$

Dada uma hipersuperfície não-degenerada em L^{n+1} temos duas situações a considerar. Se a imersão é tipo espaço, então a aplicação de Gauss é definida como $G : M^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. No caso em que a imersão é tipo tempo, então a aplicação de Gauss é dada por $G : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^n$. Para cada $p \in M$ a aplicação de Gauss translada a origem do campo N para a origem do L^{n+1} . Em particular temos a seguinte definição.

Definição 2.2.4. *Seja $\Sigma \subset L^3$ uma superfície não-degenerada. A aplicação de Gauss de Σ é o campo de vetores normais unitários que define a orientação de Σ .*

- $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$, se $\Sigma \subset L^3$ é tipo espaço,
- $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^2$, se $\Sigma \subset L^3$ é tipo tempo.

Proposição 2.2.1. *Dada uma superfície regular $\Sigma \subset L^3$, e fixada uma orientação N de Σ . Então, a aplicação $-dN : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ é auto-adjunta para todo $p \in \Sigma$.*

Demonstração. Veja [24]. □

Definição 2.2.5 (Segunda forma fundamental). *Considere uma superfície regular $\Sigma \subset L^3$ e N uma orientação. A segunda forma fundamental de Σ em p é a aplicação $II : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$II(u, v) = -\varepsilon g(dN(u), v), \quad u, v \in T_p\Sigma$$

onde ε é o sinal associado à superfície que pode ser tipo tempo ou tipo espaço.

Considerando uma imersão tipo espaço $\mathbf{x} : \Sigma \rightarrow L^3$, com coordenadas locais (s, t) , temos que nestas coordenadas a primeira e segunda forma fundamental são dadas, respectivamente por

$$I = E ds^2 + 2F ds dt + G dt^2, \quad II = eds^2 + 2f ds dt + g dt^2.$$

Recorde que para uma imersão tipo espaço, a aplicação de Gauss é dada por $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$. Não é difícil ver que o operador de Weingarten para uma superfície desse tipo é

$$\mathcal{A}_p(v) = -(\nabla_v N)^\top = -(dN)_p(v), \quad v \in T_p\Sigma$$

Proposição 2.2.2. *Seja $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ uma parametrização local em torno do ponto p de Σ , onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Se E, F, G denotam os coeficientes da primeira forma fundamental e e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental, então*

$$2H = \varepsilon \frac{Eg - 2fF + eG}{EG - F^2}, \quad K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

são respectivamente a curvatura média e a curvatura de Gauss de Σ .

Demonstração. Dado $p \in \Sigma$, basta determinar $-dN_p$ na base $\{\partial_s, \partial_t\}$. Por simplicidade usaremos a notação $\partial_s = \partial_1, \partial_t = \partial_2$ e $N_s = N_1, N_t = N_2$. Considere a combinação

$$N_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} \partial_j, \tag{2.3}$$

onde os ∂_j para $j = 1, 2$ constituem uma base para o espaço tangente à Σ no ponto p .

Agora vamos determinar os coeficientes a_{ij} de (2.3). Para isso, tomamos o produto interno desta com ∂_k e usamos que $g(\partial_j, \partial_k) = g_{jk}$. Dessa forma,

$$g(N_i, \partial_k) = g\left(\sum_{j=1}^2 a_{ij} \partial_j, \partial_k\right) = \sum_{j=1}^2 a_{ij} g(\partial_j, \partial_k) = \sum_{j=1}^2 a_{ij} g_{jk}.$$

Se $\pi_{ik} = -g(N_i, \partial_k)$ são os coeficientes da segunda forma fundamental e g^{kl} as entradas da matriz inversa de g , então

$$-\sum_{k=1}^2 \pi_{ik} g^{kl} = \sum_{j,k=1}^2 a_{ij} g_{jk} g^{kl} = \sum_{j=1}^2 a_{ij} \delta_{jl} = a_{il}. \quad (2.4)$$

Assim, $a_{ij} = -\sum_{k=1}^2 \pi_{ik} g^{kj}$, portanto

$$N_i = -\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \pi_{ik} g^{kj} \partial_j.$$

Como $2H = \text{tr}(-dN)$ e $K = \det(-dN)$ e a matriz dessa transformação foi obtida acima. Então, o resultado decorre imediatamente de (2.4). \square

2.3 Primeira e Segunda formas complexificadas

Para simplificar nossos cálculos introduziremos agora a variável complexa em uma superfície. Isto é sempre possível, uma vez que toda superfície pode ser localmente vista como uma superfície de Riemann, ou seja, sempre existem os parâmetros conformes locais em Σ .

Seja $((s, t), U)$ um sistema de coordenadas, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto. Identificando \mathbb{R}^2 com o plano complexo \mathbb{C} , denote por $z = s + it$ o parâmetro complexo, associado ao sistema de coordenadas U .

Se $\{\partial_s, \partial_t\}$ formam uma base para o espaço tangente $T_p \Sigma$, então podemos associar a estes os seguintes campos

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_s - i\partial_t), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_s + i\partial_t). \quad (2.5)$$

Para cada ponto $p \in \Sigma$ o conjunto $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$ é uma base para o espaço tangente complexificado $T_p^{\mathbb{C}} \Sigma$. Além disso, se denotarmos por $dz = ds + idt$, $d\bar{z} = ds - idt$ as 1-formas duais de ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$, temos que $\{dz \otimes dz, dz \otimes d\bar{z}, d\bar{z} \otimes dz, d\bar{z} \otimes d\bar{z}\}$ constituem uma base para o espaço das aplicações \mathbb{C} -bilineares $I : T_p^{\mathbb{C}} \Sigma \times T_p^{\mathbb{C}} \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$. Portanto, em termos dessa base I é escrita como

$$I = Adz^2 + \lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2, \quad (2.6)$$

onde $|dz|^2 = dzd\bar{z}$ e os valores $A, \lambda/2, \bar{A}$ são os coeficientes da primeira forma fundamental complexificada. Da mesma maneira, obtemos a segunda forma complexificada

$$II = pdz^2 + \rho|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2. \quad (2.7)$$

Em termos dos parâmetros locais s, t seus coeficientes são dados por,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(E - G - iF), & \lambda &= \frac{1}{2}(E + G), & \bar{A} &= \frac{1}{4}(E - G + iF) \\ p &= \frac{1}{4}(e + g + if), & \rho &= \frac{1}{2}(e + g), & \bar{p} &= \frac{1}{4}(e + g - if). \end{aligned} \quad (2.8)$$

De fato, se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma imersão e $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$ os campos coordenados associados, segue direto das equações (2.5) que

$$\begin{aligned} A = \langle \psi_z, \psi_z \rangle &= \frac{1}{4} \langle \psi_s - i\psi_t, \psi_s - i\psi_t \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\langle \psi_s, \psi_s \rangle - 2i \langle \psi_s, \psi_t \rangle - \langle \psi_t, \psi_t \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF). \end{aligned}$$

Do mesmo modo obtemos os outros coeficientes.

Observação 2.3.1. Usaremos a notação $\langle d\psi, d\psi \rangle$ como alternativa para designar a primeira forma fundamental I . Isso se deve ao fato que não faremos as identificações como costumeiramente é feito quando se trabalha com uma imersão. Nesse sentido, a notação introduzida acima terá para nós o seguinte significado: Dado uma imersão $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a métrica dada pela imersão é $\langle d\psi, d\psi \rangle : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle d\psi(X), d\psi(Y) \rangle = \psi^* \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Ou equivalentemente, para cada $p \in \Sigma$, $\langle d\psi, d\psi \rangle_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

Seguindo a terminologia escrevemos a primeira forma e segunda forma como

$$\begin{aligned} \langle d\psi, d\psi \rangle &= Adz^2 + \lambda|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2, \\ -\langle d\psi, d\eta \rangle &= pdz^2 + \rho|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Equações fundamentais

Com os resultados e notações fixadas nos capítulos anteriores, iremos agora obter as condições necessárias e suficientes para determinar uma superfície de curvatura média constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, sujeita a algumas condições que serão exibidas na Proposição 3.1.3. Começamos deduzindo algumas igualdades, para em seguida obtermos as equações de compatibilidade. Ao longo de todo este trabalho, a menos que seja mencionado no contexto, Σ denotará uma superfície de Riemann imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$, simplesmente conexa e aberta.

3.1 As Equações de Compatibilidade

Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma superfície simplesmente conexa Σ . Escrevemos $\psi = (N, h)$ para denotar a *projeção vertical* $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ e a *função altura* $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ da imersão ψ . Além disso, se h é constante em um subconjunto aberto $U \subset \Sigma$, então $\psi|_U$ é um pedaço de uma seção horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Dessa forma, consideraremos apenas superfícies em que h nunca é localmente constante.

A aplicação $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset L^4$ denota a normal unitária de ψ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Nesse sentido, vale as condições métricas $\langle d\psi, \eta \rangle = \langle N, \eta \rangle = 0$ e o par $\{\eta, N\}$ é um referencial ortonormal do fibrado normal de ψ em L^4 .

Lema 3.1.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma imersão tal que $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ é a projeção vertical e $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura de ψ . Então vale a seguinte relação*

$$\langle d\psi, d\psi \rangle = \langle d\psi, dN \rangle + dh^2. \quad (3.1)$$

Além disso, se $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ é a normal unitária de ψ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, então

$$-\langle d\eta, N \rangle = \langle \eta, dN \rangle = -udh, \quad (3.2)$$

onde u é a função ângulo.

Demonstração. Com efeito, dada uma imersão ψ , para quaisquer $v, w \in T_p\Sigma$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle d\psi, d\psi \rangle_p(v, w) &= \langle d\psi_p(v), (dN_p(w), dh_p(w)) \rangle \\
&= \langle d\psi_p(v), (dN_p(w), 0) \rangle + \langle (dN_p(v), dh_p(v)), (0, 0, 0, dh_p(w)) \rangle \\
&= \langle d\psi_p(v), dN_p(w) \rangle + dh_p(v)dh_p(w) \\
&= \langle d\psi, dN \rangle_p(v, w) + dh^2(v, w),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos as identificações $dN = (dN, 0)$ e $dh = (0, 0, 0, dh)$. De forma similar é mostrado (3.2). \square

Procedendo de maneira análoga ao estudo de superfícies em \mathbb{R}^3 , vamos associar a cada ponto de uma superfície imersa em L^4 uma quádrupla e estudar as derivadas de seus vetores.

Sejam ψ_z e $\psi_{\bar{z}}$ os campos tangentes associados a imersão ψ com parâmetro complexo z . Pelo que vimos acima, o conjunto $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N\}$ é um referencial de L^4 . Iremos determinar os coeficientes da conexão $\bar{\nabla}^{\mathbb{C}}$ de L^4 nesse referencial. Para isso, considere as seguintes combinações

$$\psi_{zz} = \bar{\nabla}_{\psi_z}^{\mathbb{C}} \psi_z = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \psi_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \psi_{\bar{z}} + \alpha \eta + aN,$$

$$\psi_{z\bar{z}} = \bar{\nabla}_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_z = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \psi_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \psi_{\bar{z}} + \beta \eta + bN,$$

$$\psi_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\nabla}_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_{\bar{z}} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \psi_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \psi_{\bar{z}} + \gamma \eta + cN.$$

Observe que, se $p, \rho/2$ e \bar{p} são os coeficientes da segunda forma fundamental na direção η , então

$$\begin{aligned}
\alpha &= \langle \psi_{zz}, \eta \rangle = -\langle \psi_z, \eta_z \rangle = p, \\
\beta &= \langle \psi_{z\bar{z}}, \eta \rangle = -\langle \psi_z, \eta_{\bar{z}} \rangle = -\langle \psi_{\bar{z}}, \eta_z \rangle = \frac{\rho}{2}, \\
\gamma &= \langle \psi_{\bar{z}\bar{z}}, \eta \rangle = -\langle \psi_{\bar{z}}, \eta_{\bar{z}} \rangle = \bar{p}.
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.1) do lema anterior obtemos as seguintes expressões

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\langle \psi_z, N_z \rangle = -A + h_z^2, \\
-\langle \psi_z, N_{\bar{z}} \rangle = -\frac{\lambda}{2} + h_z h_{\bar{z}} = -\frac{\lambda}{2} + |h_z|^2, \\
-\langle \psi_{\bar{z}}, N_{\bar{z}} \rangle = -\bar{A} + h_{\bar{z}}^2.
\end{array} \right.$$

Por outro lado, segue que

$$\begin{aligned}
a &= \langle \psi_{zz}, N \rangle = -\langle \psi_z, N_z \rangle = A - h_z^2, \\
b &= \langle \psi_{z\bar{z}}, N \rangle = -\langle \psi_{\bar{z}}, N_z \rangle = \frac{\lambda}{2} - |h_z|^2, \\
c &= \langle \psi_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle = -\langle \psi_{\bar{z}}, N_{\bar{z}} \rangle = \bar{A} - h_{\bar{z}}^2.
\end{aligned}$$

Agora vamos determinar os símbolos da conexão $\nabla^{\mathbb{C}}$ de Σ no referencial $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}\}$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\psi_z}^{\mathbb{C}} \psi_z &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \psi_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \psi_{\bar{z}}, \\
\nabla_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_z &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \psi_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \psi_{\bar{z}}, \\
\nabla_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_{\bar{z}} &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \psi_z + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \psi_{\bar{z}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando a compatibilidade da conexão com a métrica temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\psi_z}^{\mathbb{C}} \psi_z, \psi_z \rangle &= \frac{1}{2} \partial_z \langle \psi_z, \psi_z \rangle = \frac{A_z}{2}, \\
\langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_z, \psi_z \rangle &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} \langle \psi_z, \psi_z \rangle = \frac{A_{\bar{z}}}{2}, \\
\langle \nabla_{\psi_z}^{\mathbb{C}} \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2} \partial_z \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{\bar{A}_z}{2}, \\
\langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{\bar{A}_{\bar{z}}}{2}, \\
\langle \nabla_{\psi_z}^{\mathbb{C}} \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \partial_z \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle - \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} \langle \psi_z, \psi_z \rangle = \frac{1}{2} (\lambda_z - A_{\bar{z}}), \\
\langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}}^{\mathbb{C}} \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle &= \partial_{\bar{z}} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle - \frac{1}{2} \partial_z \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} (\lambda_{\bar{z}} - \bar{A}_z).
\end{aligned}$$

Tomando o produto escalar em cada equação de (3.3) por ψ_z e $\psi_{\bar{z}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \frac{\lambda}{2} &= \frac{A_z}{2}, \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \frac{\lambda}{2} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \bar{A} &= \frac{1}{2} (\lambda_z - A_{\bar{z}}), \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{\lambda}{2} &= \frac{A_{\bar{z}}}{2}, \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{\lambda}{2} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \bar{A} &= \frac{\bar{A}_z}{2}, \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 A + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\lambda}{2} &= \frac{1}{2} (\lambda_z - A_{\bar{z}}), \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \frac{\lambda}{2} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \bar{A} &= \frac{\bar{A}_{\bar{z}}}{2}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, os símbolos da conexão $\nabla^{\mathbb{C}}$ são dados por

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 &= \frac{2\bar{A}A_z - \lambda\lambda_z + \lambda A_{\bar{z}}}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\
\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 &= -\frac{2AA_{\bar{z}} - 2A\lambda_z + \lambda A_z}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\
\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 &= \frac{2\bar{A}A_{\bar{z}} - \lambda\bar{A}_z}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\
\mathbb{C}\Gamma_{12}^2 &= \frac{2AA_z - \lambda A_{\bar{z}}}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\
\mathbb{C}\Gamma_{22}^1 &= -\frac{2\bar{A}\bar{A}_z - 2\bar{A}\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{A}_{\bar{z}}}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\
\mathbb{C}\Gamma_{22}^2 &= \frac{2A\bar{A}_{\bar{z}} - \lambda\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{A}_z}{4|A|^2 - \lambda^2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Segue que

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \mathbb{C}\bar{\Gamma}_{22}^2, \quad \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 = \mathbb{C}\bar{\Gamma}_{12}^2, \quad \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = \mathbb{C}\bar{\Gamma}_{22}^1.$$

Nosso objetivo agora é determinar as componentes de $\eta_z, \eta_{\bar{z}}$ no referencial $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N\}$. Para isso, usaremos a equação (3.2) do Lema 3.1.1. Seja η a normal unitária de Σ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e z o parâmetro complexo. Considere as seguintes combinações

$$\begin{aligned}
\eta_z &= a_{11}\psi_z + a_{12}\psi_{\bar{z}} + a_{13}N, \\
\eta_{\bar{z}} &= a_{21}\psi_z + a_{22}\psi_{\bar{z}} + a_{23}N.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Vejamos que essas combinações não possui componente na direção η , pois $\langle \eta, \eta \rangle = 1$.

Para determinar os coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} , tomamos o produto escalar das expressões em (3.5) com ψ_z e $\psi_{\bar{z}}$, conseqüentemente

$$\begin{aligned}
\langle \eta_z, \psi_z \rangle &= Aa_{11} + \frac{\lambda}{2}a_{12} = -p, \\
\langle \eta_z, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{\lambda}{2}a_{11} + \bar{A}a_{12} = -\frac{\rho}{2}, \\
\langle \eta_{\bar{z}}, \psi_z \rangle &= Aa_{21} + \frac{\lambda}{2}a_{22} = -\frac{\rho}{2}, \\
\langle \eta_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{\lambda}{2}a_{21} + \bar{A}a_{22} = -\bar{p}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$-\begin{pmatrix} p & \rho/2 \\ \rho/2 & \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \lambda/2 \\ \lambda/2 & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Como Σ é uma superfície não-degenerada, sabemos que $4|A|^2 - \lambda^2 \neq 0$. Daí,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{4}{4|A|^2 - \lambda^2} \begin{pmatrix} p & \rho/2 \\ \rho/2 & \bar{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & A \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o produto de matrizes do lado direito obtemos como solução

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\rho\lambda - 4p\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\ a_{12} &= -\frac{2(p\lambda - \rho A)}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\ a_{21} &= \frac{2(\bar{p}\lambda - \rho\bar{A})}{4|A|^2 - \lambda^2}, \\ a_{22} &= \frac{\rho\lambda - 4\bar{p}A}{4|A|^2 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

Para determinar os coeficientes a_{13} e a_{23} , recorde que $\langle \eta, N \rangle = 0$ e pelo Lema 3.1.1 temos a igualdade

$$\langle d\eta, N \rangle = -\langle \eta, dN \rangle = -udh.$$

Do lado esquerdo temos

$$\begin{aligned} -\langle d\eta, N \rangle &= -\langle \eta_z dz + \eta_{\bar{z}} d\bar{z}, N \rangle \\ &= -\langle \eta_z, N \rangle dz - \langle \eta_{\bar{z}}, N \rangle d\bar{z}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$-udh = -uh_z dz - uh_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Como consequência obtemos,

$$\langle \eta_z, N \rangle = uh_z, \quad \langle \eta_{\bar{z}}, N \rangle = uh_{\bar{z}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{13} &= -\langle \eta_z, N \rangle = \langle \eta, N_z \rangle = -uh_z, \\ a_{23} &= -\langle \eta_{\bar{z}}, N \rangle = \langle \eta, N_{\bar{z}} \rangle = -uh_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \eta_z &= \frac{\rho\lambda - 4p\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2} \psi_z + \frac{2(p\lambda - \rho A)}{4|A|^2 - \lambda^2} \psi_{\bar{z}} - uh_z N, \\ \eta_{\bar{z}} &= \frac{2(\bar{p}\lambda - \rho\bar{A})}{4|A|^2 - \lambda^2} \psi_z + \frac{\rho\lambda - 4\bar{p}A}{4|A|^2 - \lambda^2} \psi_{\bar{z}} - uh_{\bar{z}} N. \end{aligned}$$

Dada uma imersão $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com a notação estabelecida no início desta seção, a projeção vertical $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ é normal a ψ em L^4 . Portanto, a segunda forma fundamental na direção N pode ser determinada de modo análogo ao feito acima. Dessa maneira, se

$$\begin{aligned} N_z &= b_{11}\psi_z + b_{12}\psi_{\bar{z}} + b_{13}\eta, \\ N_{\bar{z}} &= b_{21}\psi_z + b_{22}\psi_{\bar{z}} + b_{23}\eta, \end{aligned}$$

seus coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{4}{4|A|^2 - \lambda^2} \left(\bar{A}(A - h_z^2) - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - |h_z|^2 \right) \right), \\
b_{12} &= \frac{2\lambda}{4|A|^2 - \lambda^2} (h_z^2 - A|h_z|^2), \\
b_{21} &= \frac{2\lambda}{4|A|^2 - \lambda^2} (h_{\bar{z}}^2 - \bar{A}|h_z|^2), \\
b_{22} &= \frac{4}{4|A|^2 - \lambda^2} \left(-\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - |h_z|^2 \right) + A(\bar{A} - h_{\bar{z}}^2) \right), \\
b_{13} &= -uh_z, \\
b_{23} &= -uh_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Para determinar b_{13} e b_{23} usamos a equação (3.2) dada pelo Lema 3.1.1.

Proposição 3.1.1. *Sejam Σ uma superfície tipo espaço, $A, \lambda/2, \bar{A}$ os coeficientes da primeira forma fundamental complexificada e $p, \rho/2, \bar{p}$ os coeficientes da segunda forma fundamental complexificada. Então*

$$H = \frac{2\bar{p}A - \rho\lambda + 2p\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2}, \quad K = \frac{4|p|^2 - \rho^2}{4|A|^2 - \lambda^2} \quad (3.6)$$

são respectivamente, a curvatura média e a curvatura de Gauss de Σ .

Demonstração. Segue dos resultados obtidos no capítulo anterior. Por definição, as curvaturas média e curvatura de Gauss na direção η são dadas por

$$2H = \text{tr}(-d\eta), \quad K = \det(-d\eta)$$

e usando que

$$-2H = a_{11} + a_{22}, \quad K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

onde a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} foram calculados anteriormente, as expressões são obtidas.

Temos

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ \left(\frac{\rho\lambda - 4p\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2} \right) \left(\frac{\rho\lambda - 4\bar{p}A}{4|A|^2 - \lambda^2} \right) - 4 \left(\frac{p\lambda - \rho A}{4|A|^2 - \lambda^2} \right) \left(\frac{\bar{p}\lambda - \rho\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{(4|A|^2 - \lambda^2)^2} (\rho^2\lambda^2 + 16|p|^2|A|^2 - 4|p|^2\lambda^2 - 4\rho^2|A|^2) \\
&= \frac{1}{(4|A|^2 - \lambda^2)^2} (4|p|^2(4|A|^2 - \lambda^2) - \rho^2(4|A|^2 - \lambda^2)) \\
&= \frac{4|p|^2 - \rho^2}{4|A|^2 - \lambda^2}.
\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho\lambda - 4p\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2} + \frac{\rho\lambda - 4\bar{p}A}{4|A|^2 - \lambda^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2\rho\lambda - 4p\bar{A} - 4\bar{p}A}{4|A|^2 - \lambda^2} \right) \\
&= \frac{2\bar{p}A - \rho\lambda + 2p\bar{A}}{4|A|^2 - \lambda^2}.
\end{aligned}$$

□

Definição 3.1.1 (Parâmetro Conforme). *Dado um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) em Σ , quando $E = G > 0$ e $F = 0$, dizemos que a parametrização \mathbf{x} é conforme e o sistema de coordenadas associados são parâmetros isotérmicos.*

Com a definição dada acima junto com as expressões dos coeficientes da primeira forma complexificada em termos dos coeficientes E, F e G dados em (2.8), inferimos que $z = s + it$ é um parâmetro conforme se $A = \bar{A} = 0$. Visto isso, em termos do parâmetro conforme z , as expressões que obtemos simplificam. Portanto, no restante desta dissertação assumiremos que o parâmetro complexo z será conforme. Assim, a proposição abaixo nos diz como ficam algumas expressões neste sistema de coordenadas.

Proposição 3.1.2. *Se z é um parâmetro conforme para a superfície Σ , então*

$$\begin{aligned}
\langle d\psi, d\psi \rangle &= \lambda|dz|^2, \\
-\langle d\psi, d\eta \rangle &= pdz^2 + H\lambda|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2.
\end{aligned}$$

Além disso valem as relações

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\rho}{\lambda}, \\
K &= H^2 - \frac{4|p|^2}{\lambda^2}, \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_z}{\lambda} = (\log \lambda)_z, \\
{}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 &= {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. Basta usar que $A = \bar{A} = 0$ nas equações em (3.6), (3.4) e fazer algumas manipulações para determinar as demais relações. □

Dada uma imersão $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$, com parâmetro conforme z , se consideramos o referencial móvel $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N\}$, as derivadas dos vetores $\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta$ e N nessa base são

dadas por

$$\begin{aligned}
\psi_{zz} &= (\log \lambda)_z \psi_z + p\eta - h_z^2 N, \\
\psi_{z\bar{z}} &= \frac{H\lambda}{2} \eta + \frac{(\lambda - 2|h_z|^2)}{2} N, \\
\psi_{\bar{z}\bar{z}} &= (\log \lambda)_{\bar{z}} \psi_{\bar{z}} + \bar{p}\eta - h_{\bar{z}}^2 N, \\
\eta_z &= -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda} \psi_{\bar{z}} - uh_z N, \\
\eta_{\bar{z}} &= -\frac{2\bar{p}}{\lambda} \psi - H\psi_{\bar{z}} - uh_{\bar{z}} N, \\
N_z &= \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda} \psi_{\bar{z}} - uh_z \eta, \\
N_{\bar{z}} &= -\frac{2h_{\bar{z}}^2}{\lambda} \psi_z + \left(1 - \frac{2|h_{\bar{z}}|^2}{\lambda}\right) \psi_{\bar{z}} - uh_{\bar{z}} \eta.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Denotaremos por $\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ nosso referencial associado a Σ e $D = -uh_z$. Dessa maneira, em notação matricial podemos reescrever as equações em (3.7) como

$$\sigma_z = \mathcal{U}\sigma, \quad \sigma_{\bar{z}} = \mathcal{V}\sigma, \tag{3.8}$$

em que

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (\log \lambda)_z & 0 & p & -h_z^2 \\ 0 & 0 & H\lambda/2 & (\lambda - 2|h_z|^2)/2 \\ -H & -2p/\lambda & 0 & D \\ 1 - 2|h_z|^2/\lambda & -2h_z^2/\lambda & D & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H\lambda/2 & (\lambda - 2|h_z|^2)/2 \\ 0 & (\log \lambda)_{\bar{z}} & \bar{p} & -h_{\bar{z}}^2 \\ -2\bar{p}/\lambda & -H & 0 & \bar{D} \\ -2h_{\bar{z}}^2/\lambda & 1 - 2|h_{\bar{z}}|^2/\lambda & \bar{D} & 0 \end{pmatrix}$$

são as matrizes dos coeficientes das relações em (3.7).

Disso deduzimos as seguintes relações entre os coeficientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C.1) \quad h_{zz} = \lambda_z h_z / \lambda + pu, \\ (C.2) \quad h_{z\bar{z}} = \lambda H u / 2, \\ (C.3) \quad u_z = -H h_z - 2p h_{\bar{z}} / \lambda, \\ (C.4) \quad \frac{4|h_z|^2}{\lambda} = 1 - u^2. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Por outro lado, a condição de integrabilidade do sistema (3.8) é dado por

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0, \tag{3.10}$$

onde $[\mathcal{U}, \mathcal{V}] = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$.

Se $\mathcal{U}_{ij}, \mathcal{V}_{ij}$ denotam as entradas das matrizes \mathcal{U} e \mathcal{V} , respectivamente, então vamos determinar as entradas da matriz \mathcal{W} para obter as equações de compatibilidade, ou seja,

$$\mathcal{W}_{ij} = (\mathcal{U}_{ij})_{\bar{z}} - (\mathcal{V}_{ij})_z + \sum_{k=1}^4 \left\{ (\mathcal{U}_{ik})(\mathcal{V}_{kj}) - (\mathcal{V}_{ik})(\mathcal{U}_{kj}) \right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{11} &= (\mathcal{U}_{11})_{\bar{z}} - (\mathcal{V}_{11})_z + \sum_{k=1}^4 \left\{ (\mathcal{U}_{1k})(\mathcal{V}_{k1}) - (\mathcal{V}_{1k})(\mathcal{U}_{k1}) \right\} \\ &= (\log \lambda)_{z\bar{z}} - \frac{2|p|^2}{\lambda} + \frac{2|h_z|^4}{\lambda} + \frac{H^2\lambda}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) (\lambda - 2|h_z|^2) \\ &= (\log \lambda)_{z\bar{z}} - \frac{2|p|^2}{\lambda} + \frac{2|h_z|^4}{\lambda} + \frac{H^2\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2|h_z|^2 - \frac{2|h_z|^4}{\lambda} \\ &= (\log \lambda)_{z\bar{z}} - \frac{2}{\lambda} \left(|p|^2 - \frac{\lambda^2}{4}(H^2 - 1) - \lambda|h_z|^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{13} &= p_{\bar{z}} - \left(\frac{H\lambda}{2} \right)_z + \frac{H\lambda}{2} (\log \lambda)_z - h_z^2 \bar{D} - \frac{D}{2} (\lambda - 2|h_z|^2) \\ &= p_{\bar{z}} - \frac{H_z\lambda}{2} - \frac{H\lambda_z}{2} + \frac{H\lambda_z}{2} + uh_z|h_z|^2 - \frac{D\lambda}{2} - uh_z|h_z|^2 \\ &= p_{\bar{z}} - \frac{\lambda}{2} (H_z + D), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{14} &= -(h_z^2)_{\bar{z}} - \frac{1}{2} (\lambda - 2|h_z|^2)_z + \frac{1}{2} (\log \lambda)_z (\lambda - 2|h_z|^2) + p\bar{D} - \frac{DH\lambda}{2} \\ &= -(h_z^2)_{\bar{z}} - \frac{\lambda_z}{2} + (|h_z|^2)_z + \frac{\lambda_z}{2} - \frac{\lambda_z}{\lambda} |h_z|^2 + p\bar{D} - \frac{DH\lambda}{2} \\ &= -(h_z^2)_{\bar{z}} + (|h_z|^2)_z - \frac{\lambda_z}{\lambda} |h_z|^2 + p\bar{D} - \frac{DH\lambda}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{34} &= D_{\bar{z}} - \bar{D}_z - \frac{H}{2} (\lambda - 2|h_z|^2) + \frac{2ph_{\bar{z}}^2}{\lambda} - \frac{2\bar{p}h_z^2}{\lambda} + \frac{H}{2} (\lambda - 2|h_z|^2) \\ &= D_{\bar{z}} - \bar{D}_z + \frac{2}{\lambda} (ph_{\bar{z}}^2 - \bar{p}h_z^2) \\ &= D_{\bar{z}} - \bar{D}_z - \frac{4i}{\lambda} \text{Im}(\bar{p}h_z^2). \end{aligned}$$

Dada a condição de integrabilidade do sistema (3.8) em (3.10), temos que $\mathcal{W} = 0$. Portanto, as entradas $\mathcal{W}_{11}, \mathcal{W}_{13}, \mathcal{W}_{14}$ e \mathcal{W}_{34} fornecem as equações de Gauss, Codazzi e

Ricci, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\text{Gauss :} \quad & \lambda(\log \lambda)_{z\bar{z}} = 2(|p|^2 - \lambda^2(H^2 - 1)/4 - \lambda|h_z|^2) \\
\text{Codazzi :} \quad & 2p_{\bar{z}} = \lambda(H_z + D) \\
\text{Codazzi (bis) :} \quad & -(h_z^2)_{\bar{z}} + (|h_z|^2)_z = DH\lambda/2 - \bar{D}p + \lambda_z|h_z|^2/\lambda \\
\text{Ricci :} \quad & D_{\bar{z}} - \bar{D}_z = \frac{4i}{\lambda} \text{Im}(\bar{p}h_z^2)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Afirmação 3.1.1. *Todas as entradas da matriz \mathcal{W} fornecem relações que são triviais, ou que seguem de (3.11). Portanto, as equações em (3.11) são as condições necessárias e suficientes para a integrabilidade do sistema (3.8).*

De fato, determinando as outras entradas de \mathcal{W} obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{12} &= \mathcal{W}_{21} = \mathcal{W}_{33} = \mathcal{W}_{44} = 0 \\
\mathcal{W}_{22} &= -(\log \lambda)_{z\bar{z}} - \frac{2}{\lambda} \left(-|p|^2 + \frac{\lambda^2}{4}(H^2 - 1) + \lambda|h_z|^2 \right) \\
\mathcal{W}_{23} &= \mathcal{W}_{31} = -\bar{p}_z + \frac{\lambda}{2}(H_{\bar{z}} + \bar{D}) \\
\mathcal{W}_{24} &= \mathcal{W}_{41} = -(|h_z|^2)_{\bar{z}} + (h_z^2)_z + \frac{\bar{D}H\lambda}{2} + \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}|h_z|^2 - D\bar{p} \\
\mathcal{W}_{32} &= -\frac{2p_{\bar{z}}}{\lambda} + H_z + D \\
\mathcal{W}_{42} &= \frac{2}{\lambda} \left(-(h_z^2)_{\bar{z}} + (|h_z|^2)_z - \frac{\lambda_z|h_z|^2}{\lambda} - \frac{DH\lambda}{2} + p\bar{D} \right) \\
\mathcal{W}_{43} &= D_{\bar{z}} - \bar{D}_z - \frac{4i}{\lambda} \text{Im}(\bar{p}h_z^2).
\end{aligned}$$

Proposição 3.1.3. *Seja Σ uma superfície de Riemann, simplesmente conexa. O sistema (3.8) admite uma solução $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times L^4 \times L^4$ se, e somente se, as funções $\lambda, H, u, h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ verificam (C.2), (C.3), (C.4) e (3.14).*

Demonstração. Mostraremos apenas que as equações são condições necessárias, que são suficientes pode ser visto no trabalho de Daniel Benoit [15]. Assim, admitindo que o sistema (3.8) tem solução, as equações da imersão foram obtidas em (3.11). Então, basta mostrar que podemos recuperá-las a partir de (C.2), (C.3), (C.4) e (3.14), e portanto estas serão as equações de estrutura.

A equação de Ricci segue diretamente de (C.3),

$$\begin{aligned}
D_{\bar{z}} - \bar{D}_z &= (-uh_z)_{\bar{z}} - (-uh_{\bar{z}})_z = -u_{\bar{z}}h_z - uh_{z\bar{z}} + u_z h_{\bar{z}} + uh_{\bar{z}z} \\
&= -\left(-Hh_{\bar{z}} - \frac{2\bar{p}}{\lambda}h_z\right)h_z + \left(-Hh_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}\right)h_{\bar{z}} \\
&= H|h_z|^2 + \frac{2\bar{p}}{\lambda}h_z^2 - H|h_z|^2 - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}^2 = \frac{2\bar{p}}{\lambda}h_z^2 - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}^2 \\
&= \frac{2}{\lambda}(\bar{p}h_z^2 - ph_{\bar{z}}^2) = \frac{2}{\lambda}2i\text{Im}(\bar{p}h_z^2) = \frac{4i}{\lambda}\text{Im}(\bar{p}h_z^2).
\end{aligned}$$

A equação de Codazzi (bis) é obtida juntando (C.1) e (C.2).

$$\begin{aligned}
-(h_z^2)_{\bar{z}} + (|h_z|^2)_z &= -2h_z h_{z\bar{z}} + h_{z\bar{z}}h_{\bar{z}} + h_z h_{\bar{z}z} = h_{z\bar{z}}h_{\bar{z}} - h_z h_{\bar{z}z} \\
&= \left(\frac{\lambda_z}{\lambda}h_z + pu\right)h_{\bar{z}} - \frac{\lambda H}{2}uh_z = \frac{\lambda_z}{\lambda}|h_z|^2 + puh_{\bar{z}} - \frac{\lambda H}{2}uh_z \\
&= \frac{DH\lambda}{2} - \bar{D}p + \frac{\lambda_z}{\lambda}|h_z|^2.
\end{aligned}$$

A equação de Gauss pode ser obtida de (C.1), (C.2), (C.3), (C.4) e Codazzi. De fato, para verificar essa afirmação, observamos que $h_{z\bar{z}\bar{z}} = h_{z\bar{z}z}$.

Por um lado, calculando $h_{z\bar{z}\bar{z}}$ conseguimos,

$$\begin{aligned}
h_{z\bar{z}\bar{z}} &= \left(\frac{\lambda_z}{\lambda}\right)_{\bar{z}} h_z + \frac{\lambda_z}{\lambda}h_{z\bar{z}} + p_{\bar{z}}u + pu_{\bar{z}} \\
&= \left(\frac{\lambda_z}{\lambda}\right)_{\bar{z}} h_z + \frac{\lambda_z}{\lambda}\left(\frac{\lambda H}{2}u\right) + p_{\bar{z}}u + pu_{\bar{z}} \\
&= (\log \lambda)_{z\bar{z}}h_z + p_{\bar{z}}u + p\left(-Hh_{\bar{z}} - \frac{2\bar{p}}{\lambda}h_z\right) \\
&= (\log \lambda)_{z\bar{z}}h_z + p_{\bar{z}}u - \frac{2|p|^2}{\lambda}h_z \\
&= (\log \lambda)_{z\bar{z}}h_z + \frac{u}{2}(\lambda H_z - uh_z\lambda) - \frac{2|p|^2}{\lambda}h_z
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
h_{z\bar{z}z} &= \frac{\lambda_z H + \lambda H_z}{2}u + \frac{\lambda H}{2}u_z \\
&= \frac{\lambda_z H u + \lambda H_z u}{2} + \frac{\lambda H}{2}\left(-Hh_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}\right) \\
&= \frac{\lambda_z H}{2}u + \frac{\lambda H_z}{2}u - \frac{\lambda H^2}{2}h_z - Hph_{\bar{z}} \\
&= \frac{\lambda H_z}{2}u - \frac{\lambda H^2}{2}h_z - Hph_{\bar{z}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Igualando as equações (3.12), (3.13) e efetuando mais algumas manipulações obtemos,

$$\begin{aligned}
(\log \lambda)_{z\bar{z}} h_z - \frac{u^2 \lambda}{2} h_z &= \frac{2|p|^2}{\lambda} h_z - \frac{\lambda H^2}{2} h_z \\
(\log \lambda)_{z\bar{z}} &= \frac{u^2 \lambda}{2} + \frac{2|p|^2}{\lambda} - \frac{\lambda H^2}{2} \\
(\log \lambda)_{z\bar{z}} &= \left(1 - \frac{4|h_z|^2}{\lambda}\right) \frac{\lambda}{2} + \frac{2|p|^2}{\lambda} - \frac{\lambda H^2}{2} \\
\lambda(\log \lambda)_{z\bar{z}} &= \frac{\lambda^2}{2} - 2|h_z|^2 + 2|p|^2 - \frac{\lambda^2 H^2}{2} \\
\lambda(\log \lambda)_{z\bar{z}} &= 2(|p|^2 - \frac{\lambda^2}{4}(H^2 - 1) - |h_z|^2)
\end{aligned}$$

Por último, (C.1) pode ser obtida de (C.2), (C.3) e (C.4). Com efeito, derivando a equação (C.4) temos que

$$\begin{aligned}
\partial_z \left(\frac{4|h_z|^2}{\lambda} \right) &= \partial_z (1 - u^2) \\
\frac{4h_{\bar{z}}}{\lambda} h_{zz} + \frac{4h_z}{\lambda} h_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{4|h_z|^2 \lambda_z}{\lambda^2} &= -2uu_z \\
\frac{4h_{\bar{z}}}{\lambda} h_{zz} + \frac{4h_z}{\lambda} \left(\frac{\lambda H}{2} u \right) - \frac{4|h_z|^2 \lambda_z}{\lambda^2} &= -2u \left(-Hh_z - \frac{2p}{\lambda} h_{\bar{z}} \right) \\
\frac{4h_{\bar{z}}}{\lambda} h_{zz} + 2Huh_z - \frac{4|h_z|^2 \lambda_z}{\lambda^2} &= 2Huh_z + \frac{4pu}{\lambda} h_{\bar{z}} \\
\frac{4h_{\bar{z}}}{\lambda} h_{zz} &= \frac{4|h_z|^2 \lambda_z}{\lambda^2} + \frac{4pu}{\lambda} h_{\bar{z}} \\
h_{zz} &= \frac{\lambda_z}{\lambda} h_z + pu
\end{aligned}$$

A recíproca consiste na escolha de uma condição inicial adequada $\sigma(z_0) = \sigma_0$. Não fazemos detalhes deste argumento aqui. A prova dessa última afirmação pode ser obtida em [15] e [19]. Portanto, (C.2), (C.3), (C.4) e (3.14) são condições suficientes para integrabilidade do sistema (3.8). □

Definição 3.1.2. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície imersa com curvatura média constante H . Definimos a diferencial de Abresch-Rosenberg como*

$$Qdz^2 = (2Hp + h_z^2)dz^2,$$

onde z é um parâmetro conforme para a primeira forma, p é a diferencial de Hopf usual e h é a função altura.

Com essa definição, observamos que por (C.2), a equação de Codazzi é escrita como

$$\text{Codazzi : } Q_{\bar{z}} = 2pH_{\bar{z}} + \lambda HH_z. \quad (3.14)$$

Com efeito, derivando $Q = 2Hp + h_z^2$ em relação a \bar{z} , obtemos

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{z}} &= 2H_{\bar{z}}p + 2Hp_{\bar{z}} + 2h_z h_{z\bar{z}} \\
&= 2H_{\bar{z}}p + H\lambda(H_{\bar{z}} + D) + 2h_z \left(\frac{\lambda H}{2} u \right) \\
&= 2H_{\bar{z}}p + \lambda H H_{\bar{z}} - \lambda H u h_z + \lambda H u h_z \\
&= 2pH_{\bar{z}} + \lambda H H_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Corolário 3.1.1. (Abresch-Rosenberg) *A diferencial quadrática Qdz^2 é holomorfa em qualquer superfície com curvatura média constante H em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. É uma consequência direta de (3.14). □

Observação 3.1.1. *Chamaremos a diferencial quadrática holomorfa Qdz^2 de Diferencial de Abresch-Rosenberg de uma superfície de curvatura média constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Um ponto importante aqui é que a holomorfia de Qdz^2 não implica que a curvatura média é constante. Existem exemplos de superfícies cuja Diferencial de Abresch-Rosenberg é holomorfa, mas a superfície não tem curvatura média constante (veja [19]).*

3.2 Aplicações Harmônicas no plano Hiperbólico

Nesta seção iremos relacionar as aplicações harmônicas em \mathbb{H}^2 com superfícies em L^3 . Para isso, consideraremos $f : \Sigma \rightarrow L^3$ uma superfície tipo espaço em L^3 , orientada de modo que seu normal unitário G toma valores em \mathbb{H}^2 , i.e., na folha superior do hiperboloide $\mathcal{H} = \{x \in L^3; \langle x, x \rangle = -1\}$. Denotamos por $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ sua curvatura média.

Definição 3.2.1. *Seja $g : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão conforme e $z = s + it$ um parâmetro conforme local. O operador de Laplace-Beltrami em Σ , com respeito a métrica induzida $\langle dg, dg \rangle = \lambda^2(ds^2 + dt^2) = \lambda^2|dz|^2$, é dado por*

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

em que λ^2 é o fator conforme da métrica. Dizemos que g é harmônica se $\Delta g = 0$.

Lema 3.2.1. *Seja $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma aplicação suave, em que Σ é uma superfície de Riemann simplesmente conexa e aberta. Então G é harmônica se, e somente se, a $(2,0)$ -parte da sua primeira forma fundamental complexificada, i.e. $Q_0 dz^2 := \langle G_z, G_z \rangle dz^2$, é uma diferencial quadrática holomorfa.*

Demonstração. De fato, derivando a igualdade $Q_0 = \langle G_z, G_z \rangle$ em relação a \bar{z} temos

$$(Q_0)_{\bar{z}} = 2\langle G_{z\bar{z}}, G_z \rangle.$$

Portanto, G é harmônica se, e somente se, $(Q_0)_{\bar{z}} = 0$. □

A diferencial $Q_0 dz^2$ será chamada a Diferencial de Hopf da aplicação harmônica G .

Observação 3.2.1. Dada a aplicação $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$. Seja $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$ uma função suave tal que

$$\langle dG, dG \rangle = Q_0 dz^2 + \mu |dz|^2 + \bar{Q}_0 d\bar{z}^2. \quad (3.15)$$

Então temos as seguintes afirmações:

- Como $\langle dG, dG \rangle$ é riemanniana, temos que $\mu^2 - 4|Q_0|^2 \leq 0$ e a igualdade ocorre exatamente nos pontos singulares de G .
- Um ponto $z_0 \in \Sigma$ é um “branch point” de G (i.e. $dG(z_0) = 0$) se, e somente se, $\mu(z_0) = Q_0(z_0) = 0$.
- $Q_0(z_0) = 0$ em algum ponto $z_0 \in \Sigma$ se, e somente se, G é conforme em z_0 . Além disso, qualquer aplicação conforme de Σ em \mathbb{H}^2 é trivialmente uma aplicação harmônica com $Q_0 = 0$.

Proposição 3.2.1. Sejam $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ a aplicação de Gauss de uma superfície tipo espaço Σ e H sua curvatura média. Então H é constante se, e somente se, a aplicação de Gauss G é uma aplicação harmônica.

Demonstração. Veja em [9] □

Afirmção 3.2.1. Suponha que $H = 1/2$ e $\langle df, df \rangle = \tau_0 |dz|^2$ a métrica conforme, em que τ_0 é uma função positiva diferenciável. Então a diferencial de Hopf de G coincide com a diferencial de Hopf de f em L^3 , isto é,

$$-\langle f_z, G_z \rangle dz^2 = \langle G_z, G_z \rangle dz^2$$

De fato, como Σ é uma superfície tipo espaço orientada, sabemos que a aplicação normal de Gauss toma valores em $\mathbb{H}^2 \subset L^3$. Então, a segunda forma fundamental de Σ fica

$$\begin{aligned} -\langle df, dG \rangle &= -\langle f_z, G_z \rangle dz^2 - 2\langle f_z, G_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 - \langle f_{\bar{z}}, G_{\bar{z}} \rangle d\bar{z}^2 \\ &= p' dz^2 + \rho' |dz|^2 + \bar{p}' d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos a relação da terceira forma fundamental com a primeira e segunda:

$$\langle dG, dG \rangle = 2H \langle df, dG \rangle - K \langle df, df \rangle.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle dG, dG \rangle &= 2H(p' dz^2 + \rho' |dz|^2 + \bar{p}' d\bar{z}^2) - K\tau_0 |dz|^2 \\ &= 2Hp' dz^2 + (2H\rho' - K\tau_0) |dz|^2 + 2H\bar{p}' d\bar{z}^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comparando a equação (3.15) com (3.16) e usando que $H = 1/2$, finalizamos a prova.

Temos ainda que $\{Q_0, \tau_0\}$ verifica a seguinte equação de Gauss para f em L^3 ,

$$(\log \tau_0)_{z\bar{z}} = \tau_0/8 - 2|Q_0|^2/\tau_0. \quad (3.17)$$

De fato, dada uma imersão $f : \Sigma \rightarrow L^3$, analogamente ao que foi feito em (3.11) obtemos

$$(\log \tau_0)_{z\bar{z}} + \frac{2}{\tau_0}|p|^2 - \frac{\tau_0}{2}H^2 = 0.$$

Dessa forma,

$$(\log \tau_0)_{z\bar{z}} = \frac{\tau_0}{2}H^2 - \frac{2}{\tau_0}|p|^2.$$

Como a diferencial de Hopf de f é igual a diferencial de G para $H = 1/2$, o resultado segue. Além disso, a métrica da aplicação de Gauss G é dada por

$$\langle dG, dG \rangle = Q_0 dz^2 + \mu |dz|^2 + \bar{Q}_0 d\bar{z}^2, \quad \mu = \frac{\tau_0}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0}. \quad (3.18)$$

Basta comparar os coeficientes na igualdade (3.16) e lembrar que $\rho' = H\tau_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mu &= 2\langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle = 2H\rho' - K\tau_0 \\ &= 2H\rho' - \tau_0 \left(\frac{\rho'^2}{\tau_0^2} - \frac{4|p'|^2}{\tau_0^2} \right) \\ &= 2H\rho' - \frac{\rho'^2}{\tau_0} + \frac{4|p'|^2}{\tau_0} \\ &= 2H^2\tau_0 - H^2\tau_0 + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0} \\ &= H^2\tau_0 + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0} \\ &= \frac{\tau_0}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0}. \end{aligned}$$

Afirmção 3.2.2. *Seja Σ uma superfície tipo espaço em L^3 , dada pela imersão f , com aplicação de Gauss G . Considere a aplicação $f^\sharp := f - 2G : \Sigma \rightarrow L^3$, que é uma superfície paralela de f . Então*

- i) f^\sharp tem a mesma estrutura conforme que f ,
- ii) $Q^\sharp = -Q_0$,
- iii) $H^\sharp = -1/2$.

Seja τ^\sharp o fator conforme da métrica de f^\sharp , i.e. $\langle df^\sharp, df^\sharp \rangle = \tau^\sharp |dz|^2$. A afirmação diz que Q_0, τ^\sharp verificam a equação de Gauss (3.17). Dessa forma

$$\mu = \frac{\tau_0}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0} = \frac{\tau^\sharp}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau^\sharp}. \quad (3.19)$$

Veremos qual a relação entre τ_0 e τ^\sharp . Resolvendo a equação (3.19) para τ^\sharp , obtemos

$$(\tau^\sharp)^2\tau_0 - (16|Q_0|^2 + \tau_0^2)\tau^\sharp + 16\tau_0|Q_0|^2 = 0,$$

cuja solução é dada por

$$\tau^\sharp = \frac{16|Q_0|^2 + \tau_0^2 \pm (16|Q_0|^2 - \tau_0^2)}{2\tau_0},$$

donde tiramos que $\tau^\sharp = \tau_0$ ou $\tau^\sharp = 16|Q_0|^2/\tau_0$. Daí inferimos que os pontos singulares de f^\sharp estão localizados nos pontos umbílicos de f .

Definição 3.2.2. *Seja $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma aplicação harmônica em \mathbb{H}^2 com diferencial de Hopf $Q_0 dz^2$. Dizemos que G admite dados de Weierstrass, se existe uma função suave positiva $\tau_0 : \Sigma \rightarrow (0, +\infty)$ que verifica a equação (3.18). Neste caso, o par $\{Q_0, \tau_0\}$ será chamado dados de Weierstrass para G .*

Como consequência da discussão anterior, os exemplos mais óbvios de aplicações harmônicas que admitem dados de Weierstrass são as aplicações de Gauss de superfícies tipo espaço com $H = 1/2$ em L^3 . Assim, podemos enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2.1. *Se $\{Q_0, \tau_0\}$ são os dados de Weierstrass para uma aplicação harmônica $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$, então eles satisfazem a equação de Gauss (3.17).*

Demonstração. Se G é uma aplicação conforme sem “branch points” e $\tau_0 := 8\langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle > 0$, então $\{Q_0 = 0, \tau_0\}$ são dados de Weierstrass para G . De fato, se $\langle dG, dG \rangle$ é conforme, então $Q_0 = 0$, logo por (3.17) segue que $\mu = 2\langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle = \tau_0/4$.

Agora suponha que G não é conforme. Isso significa que Q_0 tem apenas zeros isolados em Σ . Seja $\mathcal{Z} \subset \Sigma$ o conjunto de zeros de Q_0 e tome $z \in \Sigma \setminus \mathcal{Z}$. Então é conhecido que (veja [10]) em torno de z , G é a aplicação de Gauss de uma superfície tipo espaço Σ em L^3 com curvatura média constante $H = 1/2$, única a menos de translações.

Denote por τ o fator conforme da métrica de f . Então pelas discussões anteriores, o par $\{Q_0, \tau_0\}$ são dados de Weierstrass para G em torno de z , daí temos $\tau = \tau_0$ ou $\tau = 16|Q_0|^2/\tau_0$.

Afirmção: Seja δ uma função suave positiva arbitrária definida em Σ . Então δ verifica a equação de Gauss (3.17) com respeito a Q_0 se, e somente se, $16|Q_0|^2/\delta$ também a verifica. A prova dessa afirmação segue os mesmos passos feitos em (3.19).

Assim, (3.17) segue para os dados de Weierstrass originais $\{Q_0, \tau_0\}$ em todo ponto $z \in \Sigma \setminus \mathcal{Z}$. Como \mathcal{Z} é discreto, concluímos por continuidade que $\{Q_0, \tau_0\}$ satisfaz (3.17) globalmente em Σ , o que conclui a prova. □

Proposição 3.2.2. *Seja $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma aplicação harmônica que é singular em um conjunto aberto de Σ . Então $G(\Sigma)$ está em uma geodésica de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Inicialmente, observe que pela analiticidade G é singular em toda parte em Σ . Então pela Observação 3.2.1, temos que $\mu^2 = 4|Q_0|^2$ em todo lugar. Assim, se Q_0 é identicamente nula, então G é constante e o resultado segue.

Caso contrário, se Q_0 tem apenas zeros isolados, tome z_0 com $Q(z_0) \neq 0$. Então, mudando localmente o parâmetro complexo z em torno de z_0 , podemos assumir que $Q_0 dz^2 = (1/4)dz^2$, e portanto $\mu = 1/2$. Denotando $z = s + ti$, temos por (3.18) que $\langle G_t, G_t \rangle = \langle G_s, G_t \rangle = 0$. Logo $G = G(s)$. E como G é harmônica temos que G_{ss} é colinear com G . Assim, G parametriza localmente um pedaço de geodésica em \mathbb{H}^2 . Por analiticidade, $G(\Sigma)$ está nessa geodésica. \square

Proposição 3.2.3. *Sejam $G, \tilde{G} : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ duas aplicações harmônicas para as quais (3.15) ocorre para as mesmas funções μ, Q_0 . Escolha $z_0 \in \Sigma$ um ponto regular de G , e assumamos que $G(z_0) = \tilde{G}(z_0)$ e $G_z(z_0) = \tilde{G}_z(z_0)$. Então $G = \tilde{G}$.*

Demonstração. Pelas condições iniciais, ambas G, \tilde{G} são superfícies regulares em L^3 em torno de z_0 . Além disso, suas respectivas orientações concordam em z_0 . Por hipótese, ambas as superfícies tem a mesma primeira forma fundamental. Além disso, como ambas moram em \mathbb{H}^2 e suas orientações coincidem, suas segundas formas fundamentais também coincidem. Finalmente, como eles compartilham as mesmas condições iniciais em z_0 , G e \tilde{G} devem coincidir em torno de z_0 , e portanto globalmente por analiticidade. \square

Essas duas proposições, provam em particular que se $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma aplicação harmônica admitindo dados de Weierstrass $\{Q_0, \tau_0\}$, então qualquer outra aplicação harmônica em \mathbb{H}^2 que tem os mesmo dados de Weierstrass $\{Q_0, \tau_0\}$, difere de G apenas por uma isometria de \mathbb{H}^2 . Em outras palavras, os dados de Weierstrass determinam a aplicação harmônica a menos de movimentos rígidos.

Capítulo 4

Superfícies de curvatura média

$H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

4.1 A aplicação de Gauss Hiperbólica

Nesta seção vamos caracterizar a aplicação de Gauss hiperbólica G associada a uma superfície de curvatura média um meio. Para isso, começamos com um lema que nos garante a regularidade da projeção vertical N em termos da função ângulo u . Em seguida, vamos definir uma aplicação ξ da superfície Σ na folha positiva do cone de luz \mathbb{N}^3 . E esta dará suporte para nossa aplicação Gauss hiperbólica e obteremos alguns resultados sobre a harmonicidade de G . Portanto, nosso objetivo principal é estudar as superfícies de curvatura média um meio em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em termos da aplicação de Gauss hiperbólica e posteriormente recuperar uma superfície de curvatura média um meio a partir de tal aplicação.

Lema 4.1.1. *Sejam $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma imersão, com parâmetro conforme z e $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ a projeção vertical. Então dN é um isomorfismo linear em cada ponto se, e somente se, a função ângulo $u : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ nunca se anula.*

Demonstração. Pelas equações de estrutura dadas pela imersão em (3.7), temos que

$$\begin{aligned} \det(dN) &= \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)^2 - \frac{4|h_z|^4}{\lambda^2} \\ &= 1 + \frac{4|h_z|^2}{\lambda} + \frac{4|h_z|^4}{\lambda^2} - \frac{4|h_z|^4}{\lambda^2} \\ &= 1 + \frac{4|h_z|^2}{\lambda}, \end{aligned}$$

e por (C.4)

$$\det(dN) = 1 + \frac{4|h_z|^2}{\lambda} = u^2.$$

Portanto, o resultado segue. □

Com isso, obtemos uma orientação canônica para toda superfície. Portanto, ao longo das próximas seções Σ estará orientada de forma que sua função ângulo u seja positiva. Assim, para qualquer superfície em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com projeção vertical regular podemos definir a aplicação $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}^3$, dada por $\xi = \frac{1}{u}(\eta + N)$, em que

$$\mathbb{N}^3 = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in L^3; -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, x_0 > 0 \right\}.$$

Se $N_0 > 0$ é a primeira coordenada de N , então obtemos que $\xi_0 > 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \xi, N \rangle &= \left\langle \frac{1}{u}(\eta + N), N \right\rangle = \frac{1}{u} \langle \eta + N, N \rangle \\ &= \frac{1}{u} (\langle \eta, N \rangle + \langle N, N \rangle) = -\frac{1}{u} < 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, veja que a última coordenada de ξ é constantemente igual a 1. Daí, existe uma aplicação $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\xi = (G, 1) : \Sigma \rightarrow L^3 \times \mathbb{R} \equiv L^4$.

De fato, seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma imersão com projeção vertical regular N e normal η . Denotando a projeção vertical por $N = (N_0, N_1, N_2, 0)$ e normal unitária por $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, u)$, onde u é a função ângulo, temos

$$\xi = \frac{1}{u}(\eta + N) = \frac{1}{u}(\eta_0 + N_0, \eta_1 + N_1, \eta_2 + N_2, u).$$

Vejamos agora que $G = \frac{1}{u}(\eta_0 + N_0, \eta_1 + N_1, \eta_2 + N_2)$ toma valores em \mathbb{H}^2 , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle G, G \rangle &= \frac{1}{u^2} (-\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - N_0^2 + N_1^2 + N_2^2 - 2\eta_0 N_0 + \eta_1 N_1 + \eta_2 N_2) \\ &= \frac{1}{u^2} (1 - u^2 + 1) = -1, \end{aligned}$$

já que, $\langle \eta, \eta \rangle = 1$, $\langle N, N \rangle = -1$ e $\langle \eta, N \rangle = 0$.

Definição 4.1.1. *A aplicação $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ será chamada aplicação de Gauss hiperbólica da superfície $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com projeção vertical regular N .*

Esta terminologia foi motivada por sua similaridade com a construção clássica para superfícies em \mathbb{H}^3 . Veja em [12] e [16].

O resultado a seguir tem sua importância pelo fato que é a ferramenta chave para o resultado principal deste trabalho de superfícies com $H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. É o que garante a harmonicidade da aplicação de Gauss hiperbólica, uma das hipóteses principais do Teorema 4.2.1.

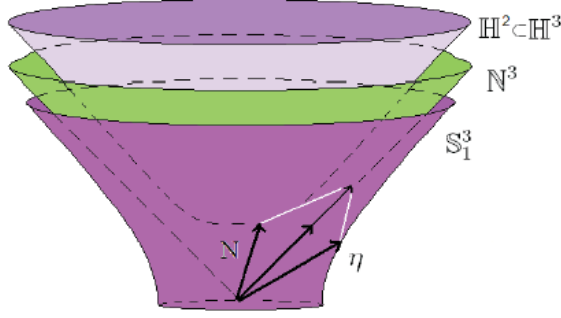


Figura 4.1: Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^3

Teorema 4.1.1. *A aplicação de Gauss hiperbólica de uma superfície de curvatura $H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com projeção vertical regular é harmônica.*

Demonstração. A verificação dessa afirmação segue de um calculo direto usando as equações (3.7) e (C.4) de ψ com curvatura média $H = 1/2$.

Vejamos que se η é o normal unitário da superfície Σ , obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \eta_z, \eta_z \rangle &= \left\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z N, -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z N \right\rangle \\
&= H^2 \langle \psi_z, \psi_z \rangle + \frac{4Hp}{\lambda} \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + 2Huh_z \langle \psi_z, N \rangle + \frac{4p^2}{\lambda^2} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle \\
&\quad + \frac{4puh_z}{\lambda} \langle \psi_{\bar{z}}, N \rangle + u^2 h_z^2 \langle N, N \rangle \\
&= \frac{4Hp}{\lambda} \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + u^2 h_z^2 \langle N, N \rangle \\
&= 2Hp - u^2 h_z^2.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \eta_z, N_z \rangle &= \left\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z N, \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z \eta \right\rangle \\
&= -H \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle \psi_z, \psi_z \rangle + \frac{2Hh_z^2}{\lambda} \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + Huh_z \langle \psi_z, \eta \rangle \\
&\quad - \frac{2p}{\lambda} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle + \frac{4ph_z^2}{\lambda^2} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle + \frac{2puh_z}{\lambda} \langle \psi_{\bar{z}}, \eta \rangle \\
&\quad - uh_z \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle N, \psi_z \rangle - \frac{2uh_z^3}{\lambda} \langle N, \psi_{\bar{z}} \rangle + u^2 h_z^2 \langle N, \eta \rangle \\
&= \frac{2Hh_z^2}{\lambda} \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle - \frac{2p}{\lambda} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle \\
&= Hh_z^2 - p \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle N_z, N_z \rangle = -2h_z^2 \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) + u^2 h_z^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\eta + N)_z, (\eta + N)_z \rangle &= \langle \eta_z, \eta_z \rangle + 2\langle \eta_z, N_z \rangle + \langle N_z, N_z \rangle \\ &= 2Hp - u^2 h_z^2 + 2 \left(Hh_z^2 - p \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) \right) - 2h_z^2 \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) + u^2 h_z^2 \\ &= 2Hp - u^2 h_z^2 + 2Hh_z^2 - 2p + \frac{4p|h_z|^2}{\lambda} - 2h_z^2 + h_z^2 \frac{4|h_z|^2}{\lambda} + u^2 h_z^2 \\ &= p(2H - 1 - u^2) + 2Hh_z^2 - 2h_z^2 + h_z^2 \frac{4|h_z|^2}{\lambda} \\ &= p(2H - 1 - u^2) + h_z^2(2H - 1 - u^2) \\ &= (p + h_z^2)(2H - 1 - u^2). \end{aligned}$$

Então, se Σ tem curvatura média constante $H = 1/2$ e Q é a sua diferencial de Abresch-Rosenberg, pela equação (3.14) temos

$$\begin{aligned} \langle \xi_z, \xi_z \rangle &= \frac{1}{u^2} \langle (\eta + N)_z, (\eta + N)_z \rangle \\ &= \frac{1}{u^2} (p + h_z^2)(2H - 1 - u^2) = -Q. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Disso segue que, se Q é holomorfa, então $\langle \xi_{z\bar{z}}, \xi_z \rangle = 0$, ou seja, $\langle G_{z\bar{z}}, G_z \rangle = 0$. Portanto, G é harmônica em \mathbb{H}^2 . □

Concluimos da equação (4.1) que se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma superfície com $H = 1/2$ e aplicação hiperbólica de Gauss G , então a diferencial de Abresch-Rosenberg Q de ψ e a diferencial de Hopf Q_0 de G estão relacionadas por $Q = -Q_0$.

Teorema 4.1.2. *Seja $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ a aplicação de Gauss hiperbólica de uma superfície de curvatura média um meio de $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com projeção vertical regular. Denote por Q, λ e u , a diferencial de Abresch-Rosenberg, o fator conforme da métrica e a função ângulo de ψ , respectivamente. Então $\{-Q, \lambda u^2\}$ são dados de Weierstrass para G . Em particular, a aplicação hiperbólica de Gauss de uma superfície com $H = 1/2$ sempre admite dados de Weierstrass.*

Demonstração. Para provar essa afirmação, devemos verificar que os dados $-Q, \lambda u^2$ satisfazem a condição (3.18), dada pela Definição 3.2.2. Inicialmente obteremos algumas igualdades com o auxílio das equações (3.7), em seguida determinaremos μ e usaremos $Q = -Q_0$, obtido via Teorema 4.1.1.

Primeiro observe que,

$$\begin{aligned}
\mu &= 2\langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle = 2\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle \\
&= \frac{2}{u^2} \langle (\eta + N)_z, (\eta + N)_{\bar{z}} \rangle \\
&= \frac{2}{u^2} (\langle \eta_z, \eta_{\bar{z}} \rangle + \langle \eta_z, N_{\bar{z}} \rangle + \langle N_z, \eta_{\bar{z}} \rangle + \langle N_z, N_{\bar{z}} \rangle).
\end{aligned}$$

Efetutando os cálculos,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_z, \eta_{\bar{z}} \rangle &= \left\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z N, -\frac{2\bar{p}}{\lambda}\psi_z - H\psi_{\bar{z}} - uh_{\bar{z}} N \right\rangle \\
&= \frac{2H\bar{p}}{\lambda} \langle \psi_z, \psi_z \rangle + H^2 \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + Huh_{\bar{z}} \langle \psi_z, N \rangle \\
&+ \frac{4|p|^2}{\lambda^2} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle + \frac{2Hp}{\lambda} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle + \frac{2puh_{\bar{z}}}{\lambda} \langle \psi_{\bar{z}}, N \rangle \\
&+ \frac{2\bar{p}uh_z}{\lambda} \langle N, \psi_z \rangle + uh_z H \langle N, \psi_{\bar{z}} \rangle + u^2|h_z|^2 \langle N, N \rangle \\
&= \frac{H^2\lambda}{2} + \frac{2|p|^2}{\lambda} - u^2|h_z|^2.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_z, N_{\bar{z}} \rangle &= \left\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z N, -\frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_z + \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_{\bar{z}} - uh_{\bar{z}}\eta \right\rangle \\
&= \frac{2Hh_z^2}{\lambda} \langle \psi_z, \psi_z \rangle - H \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + Huh_{\bar{z}} \langle \psi_z, \eta \rangle \\
&+ \frac{4ph_z^2}{\lambda^2} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle - \frac{2p}{\lambda} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle + \frac{2puh_{\bar{z}}}{\lambda} \langle \psi_{\bar{z}}, \eta \rangle \\
&+ \frac{2uh_z h_z^2}{\lambda} \langle N, \psi_z \rangle - uh_z \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle N, \psi_{\bar{z}} \rangle + u^2|h_z|^2 \langle N, \eta \rangle \\
&= -H \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + \frac{4ph_z^2}{\lambda^2} \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle \\
&= -\frac{H\lambda}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) + \frac{2ph_z^2}{\lambda}.
\end{aligned}$$

De um cálculo análogo obtemos as outras expressões,

$$\begin{aligned}
\langle N_z, \eta_{\bar{z}} \rangle &= -\frac{H\lambda}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) + \frac{2\bar{p}h_z^2}{\lambda}, \\
\langle N_z, N_{\bar{z}} \rangle &= \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)^2 + \frac{2|h_z|^4}{\lambda} + u^2|h_z|^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{2}{u^2} \left(\frac{H^2\lambda}{2} + \frac{2|p|^2}{\lambda} - u^2|h_z|^2 \right) + \frac{2}{u^2} \left(-\frac{H\lambda}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) + \frac{2ph_z^2}{\lambda} \right) \\
&+ \frac{2}{u^2} \left(-\frac{H\lambda}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) + \frac{2\bar{p}h_z^2}{\lambda} \right) + \frac{2}{u^2} \left(\frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right)^2 + \frac{2|h_z|^4}{\lambda} + u^2|h_z|^2 \right) \\
&= \frac{H^2\lambda}{u^2} + \frac{4|p|^2}{u^2\lambda} - 2|h_z|^2 - \frac{2H\lambda}{u^2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) + \frac{4ph_z^2}{u^2\lambda} + \frac{4\bar{p}h_z^2}{u^2\lambda} + \frac{\lambda}{u^2} \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right)^2 \\
&+ \frac{4|h_z|^4}{u^2\lambda} + 2|h_z|^2.
\end{aligned}$$

Fazendo mais algumas manipulações e simplificando as expressões obtidas, temos que

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\lambda}{u^2}(H^2 - 2H + 1) + \frac{\lambda}{u^2}(1 - u^2)\left(H - 1 + \frac{1}{4} - \frac{u^2}{4}\right) + \frac{|Q|^2}{u^2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{4u^2} + \frac{\lambda}{4u^2}(1 - u^2)(-1 - u^2) + \frac{|Q|^2}{u^2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{4u^2} - \frac{\lambda}{4u^2} + \frac{u^2\lambda}{4} + \frac{|Q|^2}{u^2\lambda} \\
&= \frac{u^2\lambda}{4} + \frac{|Q|^2}{u^2\lambda}.
\end{aligned}$$

Portanto, $-Q$, λu^2 são dados de Weierstrass e o teorema está demonstrado. □

Finalizamos essa seção observando que para superfícies de curvatura média um meio em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, o campo de vetores normais $\eta + N$ está no cone de luz e tem a propriedade que sua diferencial de Abresch-Rosenberg, ou seja, $-\langle \psi_z, (\eta + N)_z \rangle$ é holomorfa. O passo final foi observar que dividindo $\eta + N$ por u , a aplicação obtida toma valores em \mathbb{H}^2 e é harmônica.

4.2 Superfícies com aplicação de Gauss hiperbólica prescrita

Dada uma aplicação harmônica $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ de uma superfície de Riemann simplesmente conexa e aberta em \mathbb{H}^2 , será que é sempre possível que G seja vista como a aplicação de Gauss hiperbólica de uma superfície de curvatura $H = 1/2$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$? Na seção anterior vimos que o caso inverso é sempre possível. Para responder essa questão, a proposição seguinte é uma das ferramentas chaves.

Proposição 4.2.1. *Seja $\{-Q, 2\tau\}$ os dados de Weierstrass para uma aplicação harmônica de uma superfície de Riemann simplesmente conexa e aberta Σ em \mathbb{H}^2 . Seja $z_0 \in \Sigma$ um*

ponto arbitrário de Σ . Então para todo $\vartheta_0 \in \mathbb{C}$ o sistema diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} h_{zz} &= (\log \tau)_z h_z + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} \\ h_{z\bar{z}} &= 1/2 \sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)}, \end{cases} \quad (4.2)$$

tem uma solução $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida globalmente e que satisfaz a condição inicial $h_z(z_0) = \vartheta_0$, única a menos de uma constante positiva.

Demonstração. Fixado $\vartheta_0 \in \mathbb{C}$ queremos determinar uma função $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça o sistema (4.2) e $h_z(z_0) = \vartheta_0$. Defina $\vartheta(z) = h_z(z)$. Assim, o sistema (4.2) fica

$$\begin{cases} \vartheta_z &= (\log \tau)_z \vartheta + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}}, \\ \vartheta_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\tau(\tau + 2|\vartheta|^2)} = \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Uma condição necessária para que o sistema (4.3) tenha solução é que $\vartheta_{z\bar{z}} = \vartheta_{\bar{z}z}$. Vejamos a seguir que isso realmente ocorre. Da equação (3.17) e $Q_{\bar{z}} = 0$, obtemos por um lado

$$\begin{aligned} \vartheta_{z\bar{z}} &= (\log \tau)_{z\bar{z}} \vartheta + (\log \tau)_z \vartheta_{\bar{z}} + Q_{\bar{z}} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + Q \left(\sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} \right)_{\bar{z}} \\ &= (\log \tau)_{z\bar{z}} \vartheta + (\log \tau)_z \vartheta_{\bar{z}} + Q \left(\sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} \right)_{\bar{z}} \\ &= (\log \tau)_{z\bar{z}} \vartheta + \frac{1}{2} (\log \tau)_z \sqrt{\tau(\tau + 2|\vartheta|^2)} + Q \left(\sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} \right)_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Observando que

$$Q \left(\sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} \right)_{\bar{z}} = \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \left(\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau} \right)_{\bar{z}}.$$

Fazendo algumas operações obtemos

$$\left(\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau} \right)_{\bar{z}} = \frac{2\tau(|\vartheta|^2)_{\bar{z}} - 2\tau_{\bar{z}}|\vartheta|^2}{\tau^2}.$$

Dessa maneira

$$\begin{aligned}
Q \left(\sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} \right)_{\bar{z}} &= \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \left(\frac{2\tau(|\vartheta|^2)_{\bar{z}} - 2\tau_{\bar{z}}|\vartheta|^2}{\tau^2} \right) \\
&= \frac{Q(|\vartheta|^2)_{\bar{z}}}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} - \frac{Q\tau_{\bar{z}}|\vartheta|^2}{\tau^2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&= \frac{Q(\vartheta_{\bar{z}}\bar{\vartheta} + \vartheta\bar{\vartheta}_{\bar{z}})}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} - \frac{Q\tau_{\bar{z}}|\vartheta|^2}{\tau^2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&= \frac{Q\bar{\vartheta}\vartheta_{\bar{z}}}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} + \frac{Q\vartheta\bar{\vartheta}_{\bar{z}}}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} - \frac{Q\tau_{\bar{z}}|\vartheta|^2}{\tau^2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&= \frac{Q\bar{\vartheta}}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + \frac{Q\vartheta}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \bar{\vartheta}_{\bar{z}} \\
&\quad - \frac{Q\tau_{\bar{z}}|\vartheta|^2}{\tau^2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&= \frac{Q\bar{\vartheta}}{2} + \frac{|Q|^2\vartheta}{\tau}.
\end{aligned}$$

Então, usando $\vartheta_{\bar{z}}$ no sistema (4.3) e pela equação (3.17) com $\tau_0 = 2\tau$ e $Q_0 = -Q$, temos

$$\begin{aligned}
\vartheta_{z\bar{z}} &= \left(\frac{\tau}{4} - \frac{|Q|^2}{\tau} \right) \vartheta + (\log \tau)_z \vartheta_{\bar{z}} + \frac{Q\bar{\vartheta}}{2} + \frac{|Q|^2\vartheta}{\tau} \\
&= \frac{\tau\vartheta}{4} + \frac{\tau_z}{2} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + \frac{Q\bar{\vartheta}}{2}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\vartheta_{z\bar{z}} &= \frac{\tau_z}{2} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + \frac{\tau}{4} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \left(\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau} \right)_z \\
&= \frac{\tau_z}{2} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + \frac{(|\vartheta|^2)_z}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} - \frac{\tau_z|\vartheta|^2}{2\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&= \frac{\tau_z}{2} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + \frac{\bar{\vartheta}\vartheta_z}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} + \frac{\vartheta\bar{\vartheta}_z}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} - \frac{\tau_z|\vartheta|^2}{2\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&\quad - \frac{\tau_z|\vartheta|^2}{2\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\vartheta|^2}} \\
&= \frac{\tau_z}{2} \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} + \frac{\bar{\vartheta}Q}{2} + \frac{\vartheta\tau}{4}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Comparando (4.4) e (4.5) temos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left((\log \tau)_z \vartheta + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|\vartheta|^2}{\tau}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\tau(\tau + 2|\vartheta|^2)} \right).$$

Como Σ é simplesmente conexa, pelo teorema de Frobenius obtemos a existência de uma única solução $\vartheta : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ de (4.3) com condição inicial dada $\vartheta(z_0) = \vartheta_0$. Além disso,

vemos que de (4.3) temos $\vartheta_{\bar{z}} \in \mathbb{R}$. Portanto, existe uma função $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $h_z = \vartheta$, única a menos de uma constante positiva. □

Os resultados a seguir serão nossa base para provar o Teorema 4.2.1. Dessa forma, observamos que a partir de agora h não é a função altura, como anteriormente. Devemos ver a função $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ como solução do sistema (4.2) dada pela Proposição 4.2.1 com condição inicial $h_z(z_0) = \vartheta_0$. Além disso, definimos em Σ as seguintes funções:

$$u = \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2}}, \quad \lambda = 2\tau + 4|h_z|^2. \quad (4.6)$$

Lema 4.2.1. *As funções u, λ, h verificam as seguintes igualdades em Σ :*

$$h_{zz} = (\log \lambda)_z h_z + (Q - h_z^2)u \quad (4.7)$$

$$h_{z\bar{z}} = \frac{\lambda u}{4} \quad (4.8)$$

$$u_z = \frac{-1}{2}h_z - \frac{2Q - 2h_z^2}{\lambda}h_{\bar{z}} = \frac{-u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar{z}} \quad (4.9)$$

$$u^2 = 1 - \frac{4|h_z|^2}{\lambda}. \quad (4.10)$$

Demonstração. Iniciamos verificando a equação (4.10). Para isso, basta usarmos a definição de λ, u em (4.6) e h . Então, a equação (4.10) é

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2} = \frac{2\tau}{2\tau + 4|h_z|^2} = \frac{\lambda - 4|h_z|^2}{\lambda} \\ &= 1 - \frac{4|h_z|^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

A equação (4.7) segue de (4.2) e (4.10). De fato,

$$\begin{aligned} h_{zz} &= (\log \tau)_z h_z + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} = \left(\log \frac{\lambda u^2}{2} \right)_z h_z + Q \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda u^2}} \\ &= (\log \lambda u^2)_z h_z + \frac{Q}{u} = (\log \lambda)_z h_z + (\log u^2)_z h_z + \frac{Q}{u} \\ &= (\log \lambda)_z h_z - u h_z^2 - \frac{4Q|h_z|^2}{u\lambda} + \frac{Q}{u} \\ &= (\log \lambda)_z h_z - u h_z^2 - \frac{Q}{u} \left(\frac{4|h_z|^2}{\lambda} - 1 \right) \\ &= (\log \lambda)_z h_z + (Q - h_z^2)u. \end{aligned}$$

De maneira semelhante, obtemos (4.8)

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)} = \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{2\tau + 4|h_z|^2}{2\tau}} \\ &= \frac{\lambda u^2}{4} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda u^2}} \\ &= \frac{\lambda u}{4}. \end{aligned}$$

Por fim, derivando (4.10) mostramos (4.9). Vejamos:

$$\begin{aligned}(u^2)_z &= \left(\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2} \right)_z \\ 2uu_z &= \frac{\tau_z(\tau + 2|h_z|^2) - \tau(\tau + 2|h_z|^2)_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}2uu_z &= \frac{2\tau_z|h_z|^2 - 2\tau(|h_z|^2)_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \\ &= \frac{2\tau_z|h_z|^2}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} - \frac{2\tau(|h_z|^2)_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \\ &= \frac{2\tau_z|h_z|^2}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} - \frac{2\tau(h_{zz}h_{\bar{z}} + h_z h_{\bar{z}z})}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \\ &= \frac{2\tau_z|h_z|^2}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} - \frac{2\tau h_{\bar{z}}}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} h_{zz} - \frac{2\tau h_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} h_{\bar{z}z} \\ &= \frac{2\tau_z|h_z|^2}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} - \frac{2\tau h_{\bar{z}}}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \left((\log \tau)_z h_z + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} \right) \\ &\quad - \frac{\tau h_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)} \\ &= -\frac{2\tau h_{\bar{z}}}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \left(Q \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} \right) - \frac{\tau h_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)} \\ &= -\frac{2Q\tau h_{\bar{z}}}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} - \frac{\tau^2 h_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}}.\end{aligned}$$

Pela equação (4.6) obtemos

$$\begin{aligned}2u_z &= -\frac{2Q\tau h_{\bar{z}}}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} - \frac{\tau^2 h_z}{(\tau + 2|h_z|^2)^2} \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\ &= -\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau + 2|h_z|^2} - \frac{\tau h_z}{\tau + 2|h_z|^2} = -\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\lambda} - \frac{\tau h_z}{\lambda}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}u_z &= -\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\lambda} - \frac{h_z}{2} \frac{2\tau}{\lambda} = -\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\lambda} - \frac{h_z}{2} \left(\frac{\lambda - 4|h_z|^2}{\lambda} \right) \\ u_z &= -\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\lambda} - \frac{u^2 h_z}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, da forma como as funções u , λ e h foram definidas, obtemos relações análogas as de (3.11). □

Concluimos desse lema que as funções u , h e λ satisfazem as equações de integrabilidade (C.1), (C.2), (C.3) e (C.4) dadas em (3.9) para $H = 1/2$ e $p := Q - h_z^2$. Desta forma, pela discussão geral feita no Capítulo 3, inferimos que o sistema dado por (3.8) é integrável. Assim, (3.8) tem uma solução definida globalmente

$$\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N) : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times L^4 \times L^4,$$

em que $\psi : \Sigma \rightarrow L^4$. Além disso, ψ é única uma vez que fixamos os dados iniciais $\sigma(z_0) = \sigma_0$. Portanto, escolhendo uma condição inicial adequada σ_0 , a aplicação ψ produz uma superfície regular em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura média um meio e sua aplicação de Gauss hiperbólica coincide com G . Para isso, definimos a aplicação ξ dada por

$$\xi := \frac{1}{u}(N + \eta). \quad (4.11)$$

Para $H = 1/2$, obtemos a partir das equações de estruturas (3.7)

$$\begin{aligned} \eta_z &= -\frac{1}{2}\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z N, \\ N_z &= \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z \eta. \end{aligned}$$

Somando essas duas equações, e usando a equação (4.10) temos que

$$\begin{aligned} N_z + \eta_z &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2}{\lambda}(p + h_z^2)\psi_{\bar{z}} - uh_z(N + \eta) \\ &= \frac{u^2}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - u^2 h_z \xi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Derivando a equação (4.11), e usando (4.6), (4.9) e (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} \xi_z &= -\frac{u_z}{u^2}(N + \eta) + \frac{1}{u}(N_z + \eta_z) = -\frac{u_z}{u}\xi + \frac{1}{u}(N_z + \eta_z) \\ &= -\frac{1}{u}\left(-\frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar{z}}\right)\xi + \frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} - uh_z \xi \\ &= \frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} + \left(\frac{u}{2}h_z - uh_z + \frac{2Q}{\lambda u}h_{\bar{z}}\right)\xi \\ &= \frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} + \frac{1}{2}\left(-uh_z + \frac{4Qh_{\bar{z}}}{\lambda u}\right)\xi \\ &= \frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)\xi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \xi_{\bar{z}} &= -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u}\psi_z + \frac{u}{2}\psi_{\bar{z}} + \frac{1}{2}\left(-uh_{\bar{z}} + \frac{4\bar{Q}}{\lambda u}h_z\right)\xi \\ &= -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u}\psi_z + \frac{u}{2}\psi_{\bar{z}} - \frac{u}{2}\left(h_{\bar{z}} - \frac{2\bar{Q}h_z}{\tau}\right)\xi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Definição 4.2.1. Denotamos por $\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^T$ a única solução do sistema (3.8) com as seguintes condições iniciais:

$$\xi(z_0) = (G(z_0), 1), \quad \xi_z(z_0) = (G_z(z_0), 0),$$

$$N_3(z_0) = 0, \quad \langle N, \xi \rangle(z_0) = -\frac{1}{u(z_0)},$$

$$\langle N, \xi_z \rangle(z_0) = \frac{1}{2} \left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau} \right) (z_0).$$

Aqui $z_0 \in \Sigma$ é um ponto regular de G e N_3 denota a última função coordenada da aplicação N .

As expressões acima representam as condições iniciais para σ no ponto z_0 de Σ . Recorreremos a elas frequentemente. Também devemos nos referir a essas condições iniciais como dados iniciais.

Proposição 4.2.2. Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times L^4 \times L^4$ a aplicação descrita na Definição 4.2.1. As seguintes relações métricas são válidas em z_0 :

$$\begin{aligned} \langle \psi_z, \psi_z \rangle|_{z_0} &= 0, & \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle|_{z_0} &= \lambda(z_0)/2, \\ \langle N, N \rangle|_{z_0} &= -1, & \langle \eta, \eta \rangle|_{z_0} &= 1, \\ \langle N, \psi_z \rangle|_{z_0} &= 0, & \langle \eta, \psi_z \rangle|_{z_0} &= 0, \\ \langle N, \eta \rangle|_{z_0} &= 0, & & \end{aligned}$$

Demonstração. Omitimos o ponto z_0 para simplificar as contas. Note que por (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{cases} \langle \xi_z, \xi \rangle = \frac{u}{2} \langle \psi_z, \xi \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle = 0, \\ \langle \xi_{\bar{z}}, \xi \rangle = -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \xi \rangle + \frac{u}{2} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle = 0. \end{cases}$$

Daí segue que $\langle \psi_z, \xi \rangle = 0$. Assim, obtemos por um lado que

$$\langle G_z, G_z \rangle = \langle \xi_z, \xi_z \rangle = -Q.$$

Da equação (4.13), obtemos por outro lado que

$$\begin{aligned} \langle \xi_z, \xi_z \rangle &= \left\langle \frac{u}{2} \psi_z - \frac{2Q}{\lambda u} \psi_{\bar{z}} - \frac{u}{2} \left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau} \right) \xi, \xi_z \right\rangle \\ &= \frac{u}{2} \langle \psi_z, \xi_z \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{u}{2} \langle \psi_z, \xi_z \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = -Q. \quad (4.15)$$

Segue da Definição 4.2.1 e tomando $\tau = \lambda u^2/2$, obtemos

$$\langle G_{\bar{z}}, G_z \rangle = \langle \xi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{4|Q|^2}{\tau} + \tau \right).$$

Visto de outra maneira,

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle &= \left\langle -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \psi_z + \frac{u}{2} \psi_{\bar{z}} - \frac{u}{2} \left(h_{\bar{z}} - \frac{2\bar{Q}h_z}{\tau} \right) \xi, \xi_z \right\rangle \\ &= -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \xi_z \rangle + \frac{u}{2} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle - \frac{u}{2} \left(h_{\bar{z}} - \frac{2\bar{Q}h_z}{\tau} \right) \langle \xi, \xi_z \rangle \\ &= -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \xi_z \rangle + \frac{u}{2} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \xi_z \rangle + \frac{u}{2} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{4|Q|^2}{\tau} + \tau \right). \quad (4.16)$$

Juntando (4.15) e (4.16) obtemos o sistema,

$$\begin{cases} \frac{u}{2} \langle \psi_z, \xi_z \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = -Q, \\ -\frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \xi_z \rangle + \frac{u}{2} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{4|Q|^2}{\tau} + \tau \right). \end{cases} \quad (4.17)$$

Resolvendo (4.17), obtemos as soluções $\langle \psi_z, \xi_z \rangle = -Q/u$ e $\langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = \lambda u/4$. A partir disso e da equação (4.13), obtemos este outro sistema

$$\begin{cases} \frac{u}{2} \langle \psi_z, \psi_z \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = -\frac{Q}{4}, \\ \frac{u}{2} \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle - \frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \psi_z \rangle = \frac{\lambda u}{4}. \end{cases}$$

cujas soluções são $\langle \psi_z, \psi_z \rangle = 0$ e $\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = \lambda/2$.

Iremos mostrar agora que $\langle N, N \rangle|_{z_0} = -1$. De fato, escreva $N(z_0) = (n, 0) \in L^3 \times \mathbb{R} = L^4$. Como z_0 é um ponto regular para G , podemos escrever em L^3

$$n = \alpha G_z + \beta G_{\bar{z}} + \gamma G, \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

Tomando o produto escalar em (4.18) por G e recordando que $\langle G, G \rangle = -1$, dai obtemos por um lado,

$$\begin{aligned} \langle N, \xi \rangle &= \langle (n, 0), (G, 1) \rangle = \langle n, G \rangle \\ &= \alpha \langle G_z, G \rangle + \beta \langle G_{\bar{z}}, G \rangle + \gamma \langle G, G \rangle \\ &= -\gamma. \end{aligned}$$

E por (4.11) com a Definição(4.2.1), temos que

$$\gamma = -\langle N, \xi \rangle = \frac{1}{u}.$$

Agora, tomando o produto escalar de (4.18) por G_z e $G_{\bar{z}}$, chegamos ao sistema abaixo,

$$\begin{cases} \alpha \langle G_z, G_z \rangle + \beta \langle G_{\bar{z}}, G_z \rangle = \langle n, G_z \rangle, \\ \alpha \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle + \beta \langle G_{\bar{z}}, G_{\bar{z}} \rangle = \langle n, G_{\bar{z}} \rangle. \end{cases}$$

Assim, por (3.18) e a Definição 4.2.1, o sistema acima fica

$$\begin{cases} -Q\alpha + \frac{\mu}{2}\beta = \frac{1}{2} \left(h_z - \frac{2Q}{\tau} h_{\bar{z}} \right), \\ \frac{\mu}{2}\alpha - \bar{Q}\beta = \frac{1}{2} \left(h_{\bar{z}} - \frac{2\bar{Q}}{\tau} h_z \right). \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4}{4|Q|^2 - \mu^2} \left(-\frac{\bar{Q}}{2} \left(h_z - \frac{2Q}{\tau} h_{\bar{z}} \right) - \frac{\mu}{4} \left(h_{\bar{z}} - \frac{2\bar{Q}}{\tau} h_z \right) \right) \\ &= \frac{4}{4|Q|^2 - \mu^2} \left(-\frac{\bar{Q}}{2} h_z + \frac{|Q|^2}{\tau} h_{\bar{z}} - \frac{\tau}{8} h_{\bar{z}} + \frac{\bar{Q}}{4} h_z - \frac{|Q|^2}{2\tau} h_{\bar{z}} + \frac{|Q|^2 \bar{Q}}{\tau^2} h_z \right) \\ &= \frac{4}{4|Q|^2 - \mu^2} \left(-\frac{\bar{Q}}{4} h_z + \frac{|Q|^2}{2\tau} h_{\bar{z}} - \frac{\tau}{8} h_{\bar{z}} + \frac{|Q|^2 \bar{Q}}{\tau^2} h_z \right) \\ &= -\frac{16\tau^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \frac{1}{8\tau^2} (-2\tau^2 \bar{Q} h_z + 4\tau |Q|^2 h_{\bar{z}} - \tau^3 h_{\bar{z}} + 8|Q|^2 \bar{Q} h_z) \\ &= -\frac{16\tau^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \frac{1}{8\tau^2} (-\tau^2 (2\bar{Q} h_z + \tau h_{\bar{z}}) + 4|Q|^2 (2\bar{Q} h_z + \tau h_{\bar{z}})) \\ &= -\frac{2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} (-\tau^2 + 4|Q|^2) (2\bar{Q} h_z + \tau h_{\bar{z}}) \\ &= 2 \frac{2\bar{Q} h_z + \tau h_{\bar{z}}}{\tau^2 - 4|Q|^2}. \end{aligned}$$

Analogamente obtemos β . Assim,

$$\beta = 2 \frac{2Q h_{\bar{z}} + \tau h_z}{\tau^2 - 4|Q|^2} = \bar{\alpha}, \quad \text{e} \quad \gamma = 1/u. \quad (4.19)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \langle n, n \rangle \\ &= \langle \alpha G_z + \bar{\alpha} G_{\bar{z}} + \gamma G, \alpha G_z + \bar{\alpha} G_{\bar{z}} + \gamma G \rangle \\ &= \alpha^2 \langle G_z, G_z \rangle + 2|\alpha|^2 \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle + \bar{\alpha}^2 \langle G_{\bar{z}}, G_{\bar{z}} \rangle + \gamma^2 \langle G, G \rangle \\ &= -Q\alpha^2 - \bar{Q}\bar{\alpha}^2 + \frac{2|\alpha|^2}{4} \left(\tau + \frac{4|Q|^2}{\tau} \right) - \frac{1}{u^2}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
Q\alpha^2 + \bar{Q}\bar{\alpha}^2 &= \frac{16Q\bar{Q}^2h_z^2 + 16\tau|Q|^2|h_z|^2 + 4Q\tau^2h_z^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{16\bar{Q}Q^2h_z^2 + 16\tau|Q|^2|h_z|^2 + 4\bar{Q}\tau^2h_z^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&= \frac{16|Q|^2\bar{Q}h_z^2 + 16\tau|Q|^2|h_z|^2 + 4Q\tau^2h_z^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{16|Q|^2Qh_z^2 + 16\tau|Q|^2|h_z|^2 + 4\bar{Q}\tau^2h_z^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&= \frac{4\bar{Q}h_z^2(4|Q|^2 + \tau^2) + 32\tau|Q|^2|h_z|^2 + 4Qh_z^2(4|Q|^2 + \tau^2)}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&= \frac{(4\bar{Q}h_z^2 + 4Qh_z^2)(4|Q|^2 + \tau^2) + 32\tau|Q|^2|h_z|^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{2|\alpha|^2}{4} \left(\tau + \frac{4|Q|^2}{\tau} \right) &= \frac{2\tau|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{4\tau^2(\bar{Q}h_z^2 + Qh_z^2)}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&+ \frac{8|Q|^2|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{4|Q|^2(4\bar{Q}h_z^2 + 4Qh_z^2)}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&= \frac{2|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{4(\bar{Q}h_z^2 + Qh_z^2)(4|Q|^2 + \tau^2)}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2}
\end{aligned}$$

Pela equação (4.6), temos que

$$u = \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2}} \Rightarrow u^2 = \frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2} \Rightarrow 1/u^2 = \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle N, N \rangle &= -\frac{4(\bar{Q}h_z^2 + Qh_z^2)(4|Q|^2 + \tau^2) + 32\tau|Q|^2|h_z|^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&+ \frac{2|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{4(\bar{Q}h_z^2 + Qh_z^2)(4|Q|^2 + \tau^2)}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} \\
&- \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\
&= -\frac{32\tau|Q|^2|h_z|^2}{(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} + \frac{2|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} - \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\
&= \frac{2|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)^2 - 32\tau^2|Q|^2|h_z|^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} - \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\
&= \frac{2|h_z|^2(4|Q|^2 + \tau^2)^2 - 32\tau^2|Q|^2|h_z|^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} - \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\
&= \frac{2|h_z|^2(16|Q|^4 + 8\tau^2|Q|^2 + \tau^4) - 32\tau^2|Q|^2|h_z|^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} - \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\
&= \frac{2|h_z|^2(\tau^2 - 4|Q|^2)^2}{\tau(\tau^2 - 4|Q|^2)^2} - \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} \\
&= \frac{2|h_z|^2}{\tau} - \frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} = -1.
\end{aligned}$$

A partir disso e da Definição 4.2.1, também obtemos

$$\langle N, \eta \rangle|_{z_0}, \quad \langle \eta, \eta \rangle|_{z_0} = 1,$$

$$\langle N, \xi \rangle = \left\langle N, \frac{1}{u}(N + \eta) \right\rangle = \frac{1}{u}(\langle N, N \rangle + \langle N, \eta \rangle) = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u}\langle N, \eta \rangle.$$

Novamente pela Definição 4.2.1 temos que $\langle N, \xi \rangle(z_0) = -1/u(z_0)$. Logo,

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{u}\langle N, \eta \rangle = -\frac{1}{u} \implies \langle N, \eta \rangle = 0.$$

Conseqüentemente, por $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, u)$ e $\xi = (G, 1)$ temos

$$\langle \eta, \xi \rangle = \langle \eta, \frac{1}{u}(N + \eta) \rangle = \frac{1}{u}\langle \eta, N \rangle + \frac{1}{u}\langle \eta, \eta \rangle = \frac{1}{u}\langle \eta, \eta \rangle.$$

Portanto,

$$\langle \eta, \eta \rangle = 1.$$

Além disso, pela Definição 4.2.1 sabemos que por um lado

$$\langle N, \xi_z \rangle = \frac{h_z}{2} - \frac{Qh_{\bar{z}}}{\tau}. \quad (4.20)$$

e o outro lado segue de (4.13), pois

$$\begin{aligned} \langle N, \xi_z \rangle &= \langle N, G_z \rangle = \frac{u}{2}\langle N, \psi_z \rangle - \frac{2Q}{u\lambda}\langle \psi_{\bar{z}}, N \rangle - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)\langle N, \xi \rangle \\ &= \frac{u}{2}\langle N, \psi_z \rangle - \frac{2Q}{u\lambda}\langle N, \psi_{\bar{z}} \rangle - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)\left(-\frac{1}{u}\right) \\ &= \frac{u}{2}\langle N, \psi_z \rangle - \frac{2Q}{u\lambda}\langle N, \psi_{\bar{z}} \rangle + \frac{h_z}{2} - \frac{Qh_{\bar{z}}}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Então, igualando (4.20) e (4.21) obtemos

$$\frac{u}{2}\langle N, \psi_z \rangle - \frac{2Q}{u\lambda}\langle N, \psi_{\bar{z}} \rangle = 0,$$

daí segue $\langle \psi_z, N \rangle = 0$. Finalmente, por $\langle \psi_z, \xi \rangle = 0$, implica $\langle \psi_z, \eta \rangle = 0$. De fato,

$$\langle \psi_z, \xi \rangle = \frac{1}{u}\langle \psi_z, N + \eta \rangle = \frac{1}{u}\langle \psi_z, N \rangle + \frac{1}{u}\langle \psi_z, \eta \rangle = \frac{1}{u}\langle \psi_z, \eta \rangle \implies \langle \psi_z, \eta \rangle = 0$$

Portanto, a proposição está demonstrada. \square

Assim, já estamos em condições de estabelecer o teorema principal desta seção. Por razões técnicas, suporemos que o conjunto de pontos singulares da aplicação harmônica G tem interior vazio. O caso em que G é singular em um conjunto aberto será discutido no Capítulo 5.

Teorema 4.2.1. *Seja $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset L^3$ uma aplicação harmônica de uma superfície Riemanniana aberta simplesmente conexa sobre o plano hiperbólico admitindo dados de Weierstrass $\{-Q, 2\tau\}$. Assuma que o conjunto de pontos singulares de G tem interior vazio, escolha $z_0 \in \Sigma$ um ponto regular de G , e $\vartheta_0 \in \mathbb{C}$. Então, existe uma única (a menos de translação vertical) superfície de curvatura média um meio $\psi = (N, h) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset L^4$ tal que:*

i) G é a aplicação hiperbólica de Gauss de ψ

ii) $\tau = \lambda u^2/2$, onde $\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda |dz|^2$ e u é a função ângulo de ψ

iii) $dh(z_0) = \vartheta_0 dz + \bar{\vartheta}_0 d\bar{z}$.

Além disso, tal ψ pode ser recuperada em termos de G como

$$\psi = \left(\frac{4\operatorname{Re}(G_z(2\bar{Q}h_z + \tau h_{\bar{z}}))}{\tau^2 - 4|Q|^2} + G\sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}}, h \right). \quad (4.22)$$

Aqui $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é a única (a menos de uma constante positiva) solução para o sistema diferencial (4.2) com $h(z_0) = \vartheta_0$.

Demonstração. Faremos a demonstração em três etapas. Mostraremos primeiro a existência da imersão, isto é, que a aplicação $\psi : \Sigma \rightarrow L^4$ obtida via (3.8), (4.6) e a Definição 4.2.1 é uma superfície regular em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com as condições desejadas. Em seguida mostraremos que está em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e por fim a unicidade. Para facilitar a escrita, denotamos nosso referencial móvel $\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^T$ por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)^T$.

De (3.8) podemos deduzir que as funções $\Phi_{ij} := \langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, 4$, satisfazem o seguinte sistema linear de equações diferenciais parciais,

$$\begin{aligned} (\Phi_{ij})_z &= \sum_{k=1}^4 \left(U_{ik} \Phi_{kj} + U_{jk} \Phi_{ki} \right), \\ (\Phi_{ij})_{\bar{z}} &= \sum_{k=1}^4 \left(V_{ik} \Phi_{kj} + V_{jk} \Phi_{ki} \right). \end{aligned}$$

Observe que, $(\sigma_i)_z = \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{ik} \sigma_k$ e $(\sigma_i)_{\bar{z}} = \sum_{k=1}^4 \mathcal{V}_{ik} \sigma_k$, onde \mathcal{U}_{ij} e \mathcal{V}_{ij} denotam o (ij) -elemento das matrizes \mathcal{U} e \mathcal{V} , respectivamente. Assim usando a compatibilidade da derivada com a métrica, obtemos

$$\begin{aligned}
(\Phi_{ij})_z &= \langle (\sigma_i)_z, \sigma_j \rangle + \langle \sigma_i, (\sigma_j)_z \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{ik} \sigma_k, \sigma_j \right\rangle + \left\langle \sigma_i, \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{jk} \sigma_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{ik} \langle \sigma_k, \sigma_j \rangle + \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{jk} \langle \sigma_i, \sigma_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{ik} \Phi_{kj} + \sum_{k=1}^4 \mathcal{U}_{jk} \Phi_{ik}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$(\Phi_{ij})_z = \sum_{k=1}^4 \left(\mathcal{U}_{ik} \Phi_{kj} + \mathcal{U}_{jk} \Phi_{ki} \right).$$

De maneira análoga,

$$(\Phi_{ij})_{\bar{z}} = \sum_{k=1}^4 \left(\mathcal{V}_{ik} \Phi_{kj} + \mathcal{V}_{jk} \Phi_{ki} \right).$$

Além disso, as funções $\phi_{ij} = \phi_{ij}$ descritas por

$$\begin{aligned}
\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{13} = \phi_{23} = \phi_{14} = \phi_{24} = \phi_{34} &= 0, \\
\phi_{12} = \lambda/2 \quad \phi_{33} = -\phi_{44} &= 1
\end{aligned}$$

também fornecem uma solução para este sistema. Como estamos supondo as condições iniciais em z_0 dadas pelo Proposição 4.2.2, as soluções devem coincidir em qualquer ponto de Σ . Em particular, ψ é uma imersão tipo espaço regular em L^4 .

Agora mostraremos que

$$(\psi_z)_3 = h_z, \quad N_3 = 0 \quad \eta_3 = u. \quad (4.23)$$

Para isso, seja $\gamma := ((\psi_z)_3, (\psi_{\bar{z}})_3, \eta_3, N_3)^T$, em que as entradas são as últimas coordenadas dos vetores $\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta$ e N , respectivamente. Então

$$\gamma_z = \mathcal{U}_\gamma \quad \text{e} \quad \gamma_{\bar{z}} = \mathcal{V}_\gamma. \quad (4.24)$$

Por (C.1), (C.2), (C.3) e (C.4), obtemos uma outra solução $(h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)$ do sistema (4.24). Portanto, basta verificar que ambas as soluções coincidem em z_0 . De fato, pelas condições $N_3(z_0) = 0$ e $\xi_3(z_0) = 1$ dadas na Definição 4.2.1, obtemos $\eta_3(z_0) = u(z_0)$. Além disso, como $(\xi_z)_3(z_0) = 0$, examinando a última coordenada de (4.13) obtemos que $(\psi_z)_3(z_0) = h_z(z_0)$, como queríamos.

Vejamos a seguir que ψ é uma imersão em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Por (3.8) sabemos que

$$N_z = \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \right) \psi - \frac{2h_z^2}{\lambda} \psi_{\bar{z}} - uh_z \eta.$$

Por outro lado, denote $\tilde{h} = (0, 0, 0, h)$. Escreveremos \tilde{h}_z no referencial $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N\}$. Então considere a combinação abaixo

$$\tilde{h}_z = a\psi_z + b\psi_{\bar{z}} + c\eta + dN,$$

em que

$$a = \frac{2}{\lambda} \langle \tilde{h}_z, \psi_z \rangle, \quad b = \frac{2}{\lambda} \langle \tilde{h}_z, \psi_{\bar{z}} \rangle, \quad c = \langle \tilde{h}_z, \eta \rangle, \quad d = -\langle \tilde{h}_z, N \rangle.$$

Portanto, de (4.23) temos

$$\tilde{h}_z = \frac{2|h_z|^2}{\lambda} \psi_z + \frac{2h_z^2}{\lambda} \psi_{\bar{z}} + uh_z\eta.$$

Fazendo a soma $\psi_z = N_z + \tilde{h}_z = (N_z, h_z)$, concluímos por construção e de (3.8) que a menos de translações, $\psi = (N, h)$ está em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, tem curvatura média um meio, normal unitário η , $\tau = \lambda u^2/2$ e $dh(z_0) = \vartheta_0 dz + \bar{\vartheta}_0 d\bar{z}$. Como sua função ângulo nunca se anula, sua projeção vertical é regular.

Resta verificar se a aplicação de Gauss hiperbólica de ψ é G . Denotando por \mathcal{G} a aplicação de Gauss hiperbólica de ψ , ou seja, $\xi = (\mathcal{G}, 1)$. De (4.13) temos

$$\langle \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_{\bar{z}} \rangle = -Q = \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle$$

e

$$\langle \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{4|Q|^2}{\tau} \right) = \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle.$$

Segue da Definição 4.2.1 que $\mathcal{G}(z_0) = G(z_0)$ e $\mathcal{G}_z(z_0) = G_z(z_0)$. Como z_0 é um ponto regular de G , concluímos pela Proposição 3.2.3 que $\mathcal{G} = G$ em Σ . Isto termina a parte da existência.

Para mostrar a unicidade, suponha que $\tilde{\psi} = (\tilde{N}, \tilde{h}) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é outra superfície de curvatura média um meio nas condições do teorema. Sejam $\tilde{\lambda}$ o fator conforme da sua métrica, $\tilde{\eta}$ seu normal unitário, com a última coordenada $\tilde{u} > 0$ e assumamos que $dh(z_0) = d\tilde{h}(z_0)$.

Seguindo (3.9) temos para $\tilde{\psi}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_{zz} = \frac{\tilde{\lambda}_z}{\tilde{\lambda}} \tilde{h}_z + \tilde{p}\tilde{u}, \\ \tilde{h}_{z\bar{z}} = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{H}}{2} \tilde{u}, \\ \tilde{u}_z = -\tilde{H}\tilde{h}_z - \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\lambda}} \tilde{h}_{\bar{z}}, \\ \frac{4|\tilde{h}_z|^2}{\tilde{\lambda}} = 1 - \tilde{u}^2. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Mostraremos que \tilde{h}_z satisfaz o sistema de equações diferenciais (4.2), ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_{zz} = (\log \tau)_z \tilde{h}_z + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|\tilde{h}_z|^2}{\tau}}, \\ \tilde{h}_{z\bar{z}} = 1/2 \sqrt{\tau(\tau + 2|\tilde{h}_z|^2)}. \end{array} \right.$$

Por hipótese temos $\lambda u^2/2 = \tau = \tilde{\lambda} \tilde{u}^2/2$. Daí

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\lambda}_z \tilde{h}_z}{\tilde{\lambda}} &= \left(\frac{2\tau_z}{\tilde{\lambda} \tilde{u}^2} - \frac{4\tau \tilde{u}_z}{\tilde{\lambda} \tilde{u}^3} \right) \tilde{h}_z = \frac{2\tau_z}{\tilde{\lambda} \tilde{u}^2} \tilde{h}_z - \frac{4\tau}{\tilde{\lambda} \tilde{u}^3} \tilde{h}_z \left(-\frac{\tilde{h}_z}{2} - \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\lambda}} \tilde{h}_z \right) \\ &= \frac{2\tau_z}{\tilde{\lambda} \tilde{u}^2} \tilde{h}_z + \frac{2\tau}{\tilde{\lambda} \tilde{u}^3} \tilde{h}_z^2 + \frac{8\tau \tilde{p}}{\tilde{\lambda}^2 \tilde{u}^3} |\tilde{h}_z|^2 = \frac{\tau_z}{\tilde{\lambda}} \tilde{h}_z + \frac{\tilde{h}_z^2}{\tilde{u}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{u}} (1 - \tilde{u}^2) \\ &= \frac{\tau_z}{\tau} \tilde{h}_z + \frac{\tilde{h}_z^2 + \tilde{p}}{\tilde{u}} - \tilde{p} \tilde{u} = \frac{\tau_z}{\tau} \tilde{h}_z + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} - \tilde{p} \tilde{u}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{h}_{zz} = \frac{\tilde{\lambda}_z}{\tilde{\lambda}} \tilde{h}_z + \tilde{p} \tilde{u} = \frac{\tau_z}{\tau} \tilde{h}_z + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} = (\log \tau)_z \tilde{h}_z + Q \sqrt{\frac{\tau + 2|\tilde{h}_z|^2}{\tau}}.$$

De maneira análoga verifica-se $\tilde{h}_{z\bar{z}}$. Consequentemente $\tilde{h}_z = h_z$.

Usando a última equação em (4.25) obtemos

$$\tilde{u} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|\tilde{h}_z|^2}} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2}} = u,$$

e daí segue que $\tilde{\lambda} = \lambda$.

Assim as equações de estrutura para ψ e $\tilde{\psi}$ são as mesmas e seus respectivos referenciais móveis coincidem em z_0 . Isto implica que $\tilde{\psi} = \psi$ a menos de translações verticais em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Finalmente, por $\psi = (N, h)$ e repetindo os cálculos descritos em (4.18) temos

$$\begin{aligned} N &= 2 \frac{2\bar{Q}h_z + \tau h_{\bar{z}}}{\tau^2 - 4|Q|^2} G_z + 2 \frac{2Qh_{\bar{z}} + \tau h_z}{\tau^2 - 4|Q|^2} G_{\bar{z}} + \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} G, \\ &= \frac{2}{\tau^2 - 4|Q|^2} \left((2\bar{Q}h_z + \tau h_{\bar{z}}) G_z + (2Qh_{\bar{z}} + \tau h_z) G_{\bar{z}} \right) + \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} G \\ &= \frac{4\operatorname{Re}(G_z(2\bar{Q}h_z + \tau h_{\bar{z}}))}{\tau^2 - 4|Q|^2} + \sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}} G, \end{aligned}$$

em um ponto regular arbitrário $z \in \Sigma$, não apenas em z_0 . Como o conjunto dos pontos regulares de G é denso por hipótese, o resultado segue. □

Terminamos este capítulo com o corolário abaixo, que garante a existência e unicidade de uma superfície de Riemann, com as condições desejadas.

Corolário 4.2.1. *Seja $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma aplicação harmônica de uma superfície de Riemann, simplesmente conexa sobre o plano hiperbólico, admitindo dados de Weierstrass $\{-Q, 2\tau\}$. Assuma que o conjunto de pontos singulares de G tem interior vazio, escolha $z_0 \in \Sigma$ um ponto regular de G , e $\psi_0 \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então, existe uma única superfície de curvatura média um meio $\psi = (N, h) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que:*

i) G é aplicação de Gauss hiperbólica de ψ

ii) $2\tau = \lambda u^2$, onde $\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda |dz|^2$ e u é a função ângulo de ψ .

iii) $\psi(z_0) = \psi_0$.

Demonstração. Inicialmente observe que de (4.21) deduzimos que

$$h_z = \frac{2\tau(\tau\langle N, G_z \rangle + 2Q\langle N, G_{\bar{z}} \rangle)}{\tau^2 - 4|Q|^2}, \quad (4.26)$$

nos pontos regulares de G .

Seja $\psi_0 = (N_0, h_0) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$. Motivados por (4.26), considere o número complexo $\vartheta_0 \in \mathbb{C}$ dado por

$$\vartheta_0 = \frac{2\alpha_0\tau^2(z_0) + 4\tau(z_0)\bar{\alpha}_0Q(z_0)}{\tau^2(z_0) - 4|Q(z_0)|^2}, \quad (4.27)$$

onde $\alpha = \langle N_0, G(z_0) \rangle \in \mathbb{C}$. Usando a equação (4.27) obtemos para α o valor

$$\alpha_0 = \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{Q\bar{\vartheta}_0}{\tau}. \quad (4.28)$$

Seja $\psi = (N, h) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a superfície de curvatura média um meio obtida a partir do Teorema 4.2.1 em termos de G , dos dados $\{-Q, 2\tau\}$ e ϑ_0 , com $h(z_0) = h_0$.

Por (4.22) e (4.28) é imediato checar que

$$\langle N(z_0), G_z(z_0) \rangle = \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{Q\bar{\vartheta}_0}{\tau} = \alpha_0 = \langle N_0, G_z(z_0) \rangle. \quad (4.29)$$

Como z_0 é um ponto regular de G , ou seja, $\tau^2 - 4|Q|^2 \neq 0$ em z_0 dado $N_0 \in \mathbb{H}^2$, segue que $N(z_0) \in \mathbb{H}^2$. Portanto, $N(z_0) = N_0$. Isso completa a parte da existência. A unicidade é consequência do teorema anterior.

□

Capítulo 5

Casos Especiais

5.1 Superfície com aplicação de Gauss hiperbólica singular

Na demonstração do Teorema 4.2.1 do capítulo anterior, consideramos a regularidade da aplicação de Gauss hiperbólica em todo ponto de Σ . Porém, uma questão natural é investigar o que acontece nos pontos singulares de G . Isso será respondido logo abaixo.

Proposição 5.1.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície de curvatura média um meio cuja aplicação de Gauss hiperbólica $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ é singular em um conjunto aberto de Σ . Então $G(\Sigma)$ está em uma geodésica de \mathbb{H}^2 e ψ é um dos exemplos usuais de “screw motion hyperbolic” obtido por Sá Earp.*

Demonstração. Sejam $-Q$ e 2τ os dados de Weierstrass para G . Nessas condições, sabemos pela Proposição 3.2.2 que G parametriza parte de uma geodésica em \mathbb{H}^2 . Nosso objetivo a seguir é determinar uma expressão para a aplicação ψ nessas condições. Para isso, considere $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset L^3$ dada por

$$G(t) = (\cosh t, \sinh t, 0),$$

onde $z = s + it$ é um parâmetro conforme para ψ , globalmente definido. Em particular, $2Q = \tau = 1/2$, donde temos $\lambda u^2 = 2\tau = 1$. Com essas hipóteses, o sistema (4.2) pode ser escrito da seguinte forma

$$h_{zz} = h_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}\sqrt{1 + 4|h_z|^2}. \quad (5.1)$$

Vamos exibir esse sistema nas coordenadas locais (s, t) . Para isso, considere as expressões

$$h_z = \frac{1}{2}(h_s - ih_t), \quad h_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(h_s + ih_t), \quad |h_z|^2 = h_z h_{\bar{z}} = \frac{1}{4}(h_s^2 + h_t^2).$$

Com isso obtemos

$$h_{zz} = \frac{1}{4}[\partial_s - i\partial_t](h_s - ih_t) = \frac{1}{4}(h_{ss} - 2ih_{st} - h_{tt})$$

e

$$h_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(h_{ss} + h_{tt}).$$

Veja que por (5.1) vale $h_{zz} = h_{z\bar{z}}$ e em coordenadas locais (s, t) o sistema (4.2) é equivalente

a

$$\begin{cases} h_{ss} &= \sqrt{1 + h_s^2 + h_t^2}, \\ h_{st} &= 0, \\ h_{tt} &= 0. \end{cases}$$

Observe que de $h_{st} = h_{ts} = 0$ e $h_{tt} = 0$. Segue que $h_s = x(s)$ só depende de s e $h_t = y_0$ é constante. Assim, integrando h_t em relação a t

$$h(s, t) = \int h_t(s, t)dt + f(s) = \int y_0 dt + f(s) = y_0 t + f(s) + c_1. \quad (5.2)$$

Como $h_s = x(s)$, obtemos

$$h_s(s, t) = \int \partial_s(h_s(s, t))ds = \int h_{ss}(s, t)ds = \int \sqrt{1 + h_s^2 + h_t^2}ds.$$

Além disso, $x'(s) = h_{ss}$. Logo,

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 + x^2 + y_0^2}, \quad \text{donde} \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + y_0^2}}.$$

Por integração obtemos

$$\int ds = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + y_0^2}}.$$

Fazendo a substituição

$$\sinh \theta = \frac{x}{\sqrt{1 + y_0^2}}, \quad \text{temos que} \quad \cosh \theta d\theta = \frac{dx}{\sqrt{1 + y_0^2}}.$$

Daí,

$$s = \int ds = \int \frac{\cosh \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} d\theta = \int d\theta.$$

cuja solução é $\theta = s + s_0$.

Portanto,

$$\sinh(s + s_0) = \frac{h_s}{\sqrt{1 + y_0^2}}.$$

Usando isso obtemos uma nova expressão para h

$$h(s, t) = \int \partial_s(h) ds + g(t) = \int \sqrt{1 + y_0^2} \sinh(s + s_0) ds + g(t).$$

Assim,

$$h(s, t) = \sqrt{1 + y_0^2} \cosh(s + s_0) + g(t) + c_2. \quad (5.3)$$

Observando que $h_s(s, t)$ só depende de s e $h_t(s, t)$ é constante e comparando as expressões obtidas em (5.2) e (5.3), obtemos

$$h(s, t) = \sqrt{1 + y_0^2} \cosh(s + s_0) + y_0 t + c, \quad (5.4)$$

para constantes convenientes s_0, y_0 e c .

Dessa forma, se escrevemos $x(s)$ como

$$x(s) = \sqrt{1 + y_0^2} \cosh(s + s_0),$$

obtemos por (C.4), (5.4) e $\lambda u^2 = 1$ que

$$1 - u^2 = \frac{(1 + y_0^2) \sinh^2(s + s_0) + y_0^2}{\lambda}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda &= (1 + y_0^2) \sinh^2(s + s_0) + 1 + y_0^2 \\ &= (1 + y_0^2)(\sinh^2(s + s_0) + 1) \\ &= (1 + y_0^2) \cosh^2(s + s_0) \\ &= x(s)^2. \end{aligned}$$

Usando novamente que $\lambda u^2 = 1$, segue que

$$u = \frac{1}{x(s)}.$$

Considere (N_0, N_1, N_2) em L^3 , onde N_i , para $i = 0, 1, 2$, representam as funções coordenadas da projeção N . Observe ainda que

$$h_z = \frac{1}{2}(h_s - ih_t) = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + y_0^2} \sinh(s + s_0) - iy_0),$$

$$h_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(h_s - ih_t) = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + y_0^2} \sinh(s + s_0) + iy_0).$$

Lembre que,

$$G_z = \frac{1}{2}(G_s - iG_t), \quad G_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(G_s + iG_t)$$

Daí,

$$G_z = -\frac{i}{2}(\sinh(t), \cosh(t), 0), \quad G_{\bar{z}} = \frac{i}{2}(\sinh(t), \cosh(t), 0), \quad G(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 0).$$

Como $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ verifica as equações

$$\langle N, G \rangle = -\frac{1}{u}, \quad \langle N, G_z \rangle = \frac{1}{2} \left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau} \right), \quad \langle N, N \rangle = -1.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle N, G \rangle &= -x(s), \\ \langle N, G_z \rangle &= \frac{1}{2}(h_z - h_{\bar{z}}) = -\frac{ih_t}{2} = -\frac{iy_0}{2}, \\ \langle N, N \rangle &= -N_0^2 + N_1^2 + N_2^2 = -1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle N, G \rangle &= \langle (N_0, N_1, N_2), (\cosh(t), \sinh(t), 0) \rangle = -N_0 \cosh(t) + N_1 \sinh(t), \\ \langle N, G_z \rangle &= -\frac{i}{2} \langle (N_0, N_1, N_2), (\sinh(t), \cosh(t), 0) \rangle = \frac{i}{2} N_0 \sinh(t) - \frac{i}{2} N_1 \cosh(t). \end{aligned}$$

Portanto, temos o sistema

$$\begin{cases} -N_0 \cosh(t) + N_1 \sinh(t) &= -x(s), \\ N_0 \sinh(t) - N_1 \cosh(t) &= -y_0, \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} N_0 &= x(s) \cosh(t) + y_0 \sinh(t), \\ N_1 &= x(s) \sinh(t) + y_0 \cosh(t). \end{aligned}$$

Da equação $\langle N, N \rangle = -1$, determinamos N_2 como segue

$$-N_0^2 + N_1^2 + N_2^2 = -1, \quad \text{logo} \quad N_2 = \pm \sqrt{N_0^2 - N_1^2 - 1}.$$

Portanto, concluímos que a projeção vertical de ψ é dada por

$$\begin{aligned} N_0 &= x(s) \cosh(t) + y \sinh(t), \\ N_1 &= x(s) \sinh(t) + y \cosh(t), \\ N_2 &= \pm \sqrt{x(s)^2 - y^2 - 1}. \end{aligned}$$

Com isso obtemos para a imersão $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \psi(s, t) &= \left(x(s) \cosh(t) + y \sinh(t), x(s) \sinh(t) + y \cosh(t), \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{x(s)^2 - y^2 - 1}, \sqrt{1 + y_0^2} \cosh(s + s_0) + y_0 t + c \right). \end{aligned}$$

□

5.2 Superfície paralela

Veremos nesta seção algumas relações geométricas explícitas entre duas superfícies paralelas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Nosso objetivo é determinar para a superfície paralela sua projeção vertical, a curvatura média, estrutura conforme e aplicação de Gauss hiperbólica a partir de uma superfície com curvatura média $H = 1/2$ dada.

Definição 5.2.1. *Seja $f : \Sigma \rightarrow L^3$ uma superfície regular. Uma superfície regular φ paralela a f é dada por*

$$\varphi = f + \alpha\eta,$$

em que α denota a distância entre as superfícies e η a aplicação normal de Gauss de f .

Teorema 5.2.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície de curvatura média $H = 1/2$ com aplicação de Gauss hiperbólica $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ e assuma que sua diferencial de Abresch-Rosenberg Q nunca se anula. Se $u : \Sigma \rightarrow (0, \infty)$ denota a sua função ângulo, então*

$$\psi^\# = -\psi + \frac{2}{u}(G, 1) \quad \left(= -\psi + \frac{2}{u^2}(\eta + N) \right) \quad (5.5)$$

é uma superfície regular em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com projeção vertical regular, para a qual $H = 1/2$ na sua orientação canônica. Além disso, sua aplicação de Gauss hiperbólica é G , sua função ângulo é u e seu fator métrico conforme é

$$\lambda^\# = \frac{16|Q|^2}{\lambda u^4}. \quad (5.6)$$

Em particular, esse teorema afirma que $\psi^\#$ como em (5.5) é a superfície de curvatura média um meio construída de acordo com o Teorema 4.2.1 através de G e os dados de Weierstrass $\{-Q, \tau^\# = 16|Q|^2/\tau_0\}$, com condição inicial

$$(h^\#)_z(z_0) = \frac{4Q(z_0)\overline{h_0}}{\tau_0(z_0)}. \quad (5.7)$$

Demonstração. Escreva $\psi = (N, h) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e seja $\xi = (G, 1)$. As seguintes relações métricas abaixo, serão usadas repetidas vezes no que segue:

$$\langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi_z, \xi \rangle = \langle \psi_z, \xi \rangle = 0, \quad \langle G, N \rangle = \langle \xi, N \rangle = -\frac{1}{u}. \quad (5.8)$$

Denotamos $\psi^\# = (N^\#, h^\#)$ e usando a equação (5.5) obtemos

$$N^\# = -N + \frac{2}{u}G, \quad h^\# = -h + \frac{2}{u}. \quad (5.9)$$

Pela equação (5.8) e o fato que G, N tomam valores em \mathbb{H}^2 . Um cálculo direto mostra que $\langle N^\sharp, N^\sharp \rangle = -1$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle N^\sharp, N^\sharp \rangle &= \left\langle -N + \frac{2}{u}G, -N + \frac{2}{u}G \right\rangle \\ &= \langle N, N \rangle - \frac{4}{u}\langle N, G \rangle + \frac{4}{u^2}\langle G, G \rangle \\ &= -1 + \frac{4}{u^2} - \frac{4}{u^2} = -1.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\langle G, N^\sharp \rangle &= \langle G, -N + \frac{2}{u}G \rangle \\ &= -\langle G, N \rangle + \frac{2}{u}\langle G, G \rangle = \frac{1}{u} - \frac{2}{u} = -\frac{1}{u} < 0,\end{aligned}$$

o que assegura que N^\sharp toma valores em \mathbb{H}^2 . Logo, ψ^\sharp é de fato uma superfície em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, possivelmente com pontos singulares.

Agora, observe que novamente pela equação (5.5), temos que

$$\begin{aligned}(\psi^\sharp)_z &= -\psi_z + \left(\frac{2}{u}\right)_z \xi + \frac{2}{u}\xi_z \\ &= -\psi_z - \frac{2u_z}{u^2}\xi + \frac{2}{u}\xi_z.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Então, usando (4.1), (4.13), (5.8), (5.10) e $\langle \psi_z, \psi_z \rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle (\psi^\sharp)_z, (\psi^\sharp)_z \rangle &= \langle \psi_z, \psi_z \rangle - \frac{4}{u}\langle \psi_z, \xi_z \rangle + \frac{4u_z^2}{u^4}\langle \xi, \xi \rangle + \frac{4}{u^2}\langle \xi_z, \xi_z \rangle \\ &= \frac{4}{u^2}\langle \xi_z, \xi_z \rangle - \frac{4}{u}\langle \psi_z, \xi_z \rangle \\ &= -\frac{4}{u^2}\frac{2Q}{\lambda}\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle + \frac{4}{u}\frac{2Q}{\lambda u}\langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle \\ &= \frac{4}{u^2}(-Q + Q) = 0.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Em outras palavras, z é um parâmetro conforme para ψ^\sharp , isto é, as superfícies ψ e ψ^\sharp têm a mesma estrutura conforme.

Observe agora que $\langle (\psi^\sharp)_z, \xi \rangle = 0$ é obtido diretamente de (5.8) e (5.10). Então, ξ é um vetor tipo luz em L^4 , cuja última coordenada é igual a 1 e que é normal à ψ^\sharp . Dessa forma, se $\eta^\sharp : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ é o normal unitário de ψ^\sharp e u^\sharp é a sua última coordenada, ou seja, a função ângulo de ψ^\sharp , devemos ter

$$\xi = \frac{1}{u^\sharp}(\eta^\sharp + \varepsilon N^\sharp), \quad \varepsilon = \pm 1.\tag{5.12}$$

Conseqüentemente

$$\langle N^\sharp, \xi \rangle = \left\langle N^\sharp, \frac{1}{u^\sharp}(\eta^\sharp + \varepsilon N^\sharp) \right\rangle = -\frac{\varepsilon}{u^\sharp}.\tag{5.13}$$

Por outro lado, por (5.9) vemos que

$$\langle N^\sharp, \xi \rangle = \left\langle -N + \frac{2}{u}G, G \right\rangle = -\frac{1}{u}. \quad (5.14)$$

Então, comparando (5.13) e (5.14) temos $u^\sharp = \varepsilon u$. Em particular, segue do Lema 3.1.1 que ψ^\sharp tem projeção vertical regular. Logo, se dotarmos ψ^\sharp com sua orientação canônica, dada por $u^\sharp > 0$, temos

$$u^\sharp = u \quad \text{e} \quad \xi = \frac{1}{u^\sharp}(\eta^\sharp + N^\sharp). \quad (5.15)$$

Em outras palavras, $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ é a aplicação de Gauss hiperbólica de ψ^\sharp . O fator conforme λ^\sharp de ψ^\sharp é obtido diretamente de (5.8), (5.10) de (4.13), como segue:

$$\begin{aligned} \lambda^\sharp &= 2\langle (\psi^\sharp)_z, (\psi^\sharp)_{\bar{z}} \rangle = \lambda - \frac{8}{u}\langle \psi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle + \frac{8}{u^2}\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle \\ &= \lambda - \frac{8}{u} \frac{\lambda u}{4} + \frac{8}{u^2} \left(\frac{\lambda u^2}{8} + \frac{2|Q|^2}{\lambda u^2} \right) = \frac{16|Q|^2}{\lambda u^4}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

isto é, (5.6) segue. Além disso, como Q nunca se anula, ψ^\sharp é regular.

Finalmente, só precisamos checar que ψ^\sharp tem curvatura média constante H^\sharp . Para isso, observamos primeiro que por (C.3) com $H = 1/2$, (C.4), e usando que $Q = p + h_z^2$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u}\right)_z &= -\frac{u_z}{u^2} = -\frac{1}{u^2} \left(-Hh_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{2}h_z - \frac{2Q - 2h_z^2}{\lambda}h_{\bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2u^2}h_z + \frac{2Q}{\lambda u^2}h_{\bar{z}} - \frac{1}{2u^2} \frac{4|h_z|^2}{\lambda}h_z \\ &= \frac{1}{2u^2}h_z + \frac{2Q}{\lambda u^2}h_{\bar{z}} - \frac{1}{2u^2}(1 - u^2)h_z \\ &= \frac{h_z}{2} + \frac{2Q}{\lambda u^2}h_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Obtemos pela equação (5.9) que $h^\sharp = -h + 2/u$. Assim, derivando h^\sharp temos que

$$(h^\sharp)_z = -h_z + 2 \left(\frac{1}{u}\right)_z = \frac{4Q}{\lambda u^2}h_{\bar{z}}$$

Derivando novamente e usando a equação (C.1), obtemos

$$\begin{aligned} (h^\sharp)_{z\bar{z}} &= \left(\frac{4Q}{\lambda u^2}\right)_{\bar{z}} h_{\bar{z}} + \frac{4Q}{\lambda u^2} h_{\bar{z}\bar{z}} \\ &= \left(\frac{4Q}{\lambda u^2}\right)_{\bar{z}} h_{\bar{z}} + \frac{4Q}{\lambda u^2} \left(\frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} + \bar{p}u \right) \\ &= \left(\frac{4Q}{\lambda u^2}\right)_{\bar{z}} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2 u^2} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\ &= \frac{4Q_{\bar{z}}\lambda u^2 - 4Q(\lambda u^2)_{\bar{z}}}{\lambda^2 u^4} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2 u^2} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\ &= \frac{4Q_{\bar{z}}}{\lambda u^2} h_{\bar{z}} - \frac{4Q(\lambda_{\bar{z}}u^2 + 2\lambda u u_{\bar{z}})}{\lambda^2 u^4} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2 u^2} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u}. \end{aligned}$$

Assim, por (C.3), (C.4) e $Q = p + h_z^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
(h^\sharp)_{z\bar{z}} &= -\frac{4Q\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2 u^2} h_{\bar{z}} - \frac{8Qu_{\bar{z}}}{\lambda u^3} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2 u^2} h_z + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\
&= -\frac{8Qu_{\bar{z}}}{\lambda u^3} h_{\bar{z}} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\
&= -\frac{8Qh_{\bar{z}}}{\lambda u^3} \left(-\frac{h_{\bar{z}}}{2} - \frac{2\bar{p}h_z}{\lambda} \right) + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\
&= \frac{4Qh_{\bar{z}}^2}{\lambda u^3} + \frac{16Q\bar{p}|h_z|^2}{\lambda^2 u^3} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\
&= \frac{4Qh_{\bar{z}}^2}{\lambda u^3} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u^3} (1 - u^2) + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\
&= \frac{4Qh_{\bar{z}}^2}{\lambda u^3} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u^3} - \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u} \\
&= \frac{4Qh_{\bar{z}}^2}{\lambda u^3} + \frac{4Q\bar{p}}{\lambda u^3} \\
&= \frac{4Q}{\lambda u^3} (\bar{p} + h_z^2) \\
&= \frac{4|Q|^2}{\lambda u^3}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Por (C.2), a curvatura média H^\sharp de ψ^\sharp é

$$\begin{aligned}
H^\sharp &= \frac{2(h^\sharp)_{z\bar{z}}}{\lambda^\sharp u^\sharp} = \frac{2}{\lambda^\sharp u^\sharp} \frac{4|Q|^2}{\lambda u^3} \\
&= \frac{2}{\lambda^\sharp u^\sharp} \frac{4|Q|^2}{\lambda u^3} = \frac{8|Q|^2}{\lambda^\sharp \lambda u^4} \\
&= \frac{8|Q|^2}{\lambda u^4} \frac{\lambda u^4}{16|Q|^2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

em que também usamos (5.6), (5.15) e (5.17). Isso termina a prova. □

Referências Bibliográficas

- [1] U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Acta Math.* 193 (2004), 141–174.
- [2] U. Abresch, H. Rosenberg, Generalized Hopf differentials, *Mat. Contemp.* 28 (2005), 1–28.
- [3] U. Abresch, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in Riemannian 3-manifolds, in preparation.
- [4] J.A. Aledo, J.M. Espinar, J.A. Gálvez, Complete surfaces of constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, july 2007, Vol 29, pp 347–363.
- [5] H. Alencar, M.P. do Carmo, R. Tribuzy, A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality, *Communication in Analysis and Geometry*, 2007.
- [6] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Math., 1000. Springer, Berlin, 1983.
- [7] L.J. Alias, M. Dajczer, J. Ripoll, A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field, *Ann Glob Anal Geom* (2007) 31: 363.
- [8] R. Aiyama, On the Gauss map of complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space, *Tsukuba J. Math.* 16 (1992), 353–361.
- [9] K. Akutagawa, Harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane, *Trans. Amer. Math. Soc.* 342 (1994), 325–342.
- [10] K. Akutagawa, S. Nishikawa, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, *Tohoku Math. J.* 42 (1990), 67–82.
- [11] D.A. Berdinsky, I.A. Taimanov, Surfaces in three-dimensional Lie groups, *Siberian Math. J.* 46 (2005), 1005–1019.
- [12] R.L. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, *Astérisque*, 154-155 (1987), 321–347.

- [13] P. Collin, L. Hauswirth, H. Rosenberg, The geometry of finite topology Bryant surfaces, *Ann. of Math.* 153 (2001), 623–659.
- [14] Daniel, B. ; Isometric Immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ e aplicações to minimal surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(12):6255–6282, 2009.
- [15] Daniel, B. ; Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds, *Comment. Math. Helv.* 82 (2007), no. 1, 87-131.
- [16] C.L. Epstein, The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections, *J. Reine Angew. Math.* 372 (1986), 96–135.
- [17] J. M. Espinar, La ecuación de Codazzi en superficies. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, 2008.
- [18] I. Fernández, P. Mira, Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Amer. Journal of Math.*, 129 (2007), 1145–1181.
- [19] I. Fernández, P. Mira, A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds, *Diff. Geom. Appl.*, (2006).
- [20] L. Hauswirth, P. Roitman, H. Rosenberg, The geometry of finite topology Bryant surfaces quasi-embedded in a hyperbolic manifold, *J. Differential Geom.* 60 (2002), 55–101.
- [21] W.Y. Hsiang, W.T. Hsiang, On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces I, *Invent. Math.* 98 (1989), 39–58.
- [22] R. Sa Earp, Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 85(1), 113-143.
- [23] R. Sa Earp, E. Toubiana, Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Illinois J. Math.* 49 (2005), 1323–1362.
- [24] R. Lopez, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Mini-Curso ministrado no IME-USP, 2008.
- [25] M. P. do Carmo (segunda edição), *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, IMPA, Rio de Janeiro.
- [26] B. Nelli, H. Rosenberg, Global properties of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 226 (2006), No. 1, 137–152.

- [27] Simply connected constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Michigan Math. J. 54 (2006), no. 3, 537-544.
- [28] E. L. Lima, Álgebra Linear (sexta edição), Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2003.
- [29] Barrett O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press Limited, 1983.
- [30] M. Umehara, K. Yamada, Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space, Ann. of Math. 137 (1993), 611–638.