Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre métricas críticas do Funcional Curvatura Escalar Total

Matheus Hudson Gama dos Santos

Manaus - AM
Maio de 2019

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre métricas críticas do Funcional Curvatura Escalar Total

por

Matheus Hudson Gama dos Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Antonio Airton Freitas Filho

Manaus - AM
Maio de 2019

Sobre métricas críticas do Funcional Curvatura Escalar Total

por

Matheus Hudson Gama dos Santos [1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 10 de Maio de 2019.

Banca Examinadora:

Antonio Airton Freitas Filho

Prof. Dr. Antonio Airton Freitas Filho - (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes - (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Allan George de Carvalho Freitas

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas - (Membro Externo)
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237s

Santos, Matheus Hudson Gama dos
Sobre métricas críticas do funcional curvatura escalar total / Matheus Hudson Gama dos Santos. 2019
49 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Antonio Airton Freitas Filho
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Equação do ponto crítico. 2. Curvatura escalar. 3. Funcionais Riemannianos. 4. Variedades Einstein. I. Freitas Filho, Antonio Airton II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedico este trabalho aos meus pais Jorge Hudson Souza Santos e Maria Lucilene Gama Teixeira Santos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, a minha mãe Maria Lucilene e a meu pai Jorge pelo apoio, pelo carinho, pela confiança, pelo amor incondicional.

Agradeço aos meus amigos de Graduação em Matemática: Albert Amaral, André Matos, Davi Misturini, Erivelta, Fábio Henrique, Umbelito, Patrick Sena, Rafhael Aguiar, Sérgio Kardec, Yasmin Brilhante, Wington Vital e os demais nos quais formei amizades ao longo do curso.

Aos professores de Graduação em Matemática da UFAM: Alfredo Wagner, Inês Padilha, Mário Salvatierra, Michel Pinho, Nilomar Oliveira, Raul Mesquita, Sandro Bitar, Stefan Ehbauer, Valtemir por conhecimentos transmitidos. Agradeço também ao professor Michel Pinho Rebouças por ter me orientado no PIBIC durante a minha graduação, com o qual foi de grande relevância no meu crescimento na Matemática, o que me fez estudar a Matemática no nível mais elevado, adquirindo novos conhecimentos, novas ferramentas.

Ao professor Antonio Airton Freitas Filho pela orientação, pela ajuda na elaboração deste trabalho e por ter me acompanhado ao longo do Mestrado.

Agradeço aos professores José Nazareno Vieira Gomes e Allan George de Carvalho Freitas por terem aceitado participar da minha banca.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática: Dragomir Tsonev, Inês Padilha, Jorge Fernandes, José Nazareno, Marcos Aurélio, Mikhail Neklyudov, Rosilene, Thiago Rodrigo que contribuiram para a minha formação acadêmica e o meu desenvolvimento na Matemática, no qual me ajudou a obter ferramentas para a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos de Mestrado: André Matos, Ayana Santana, Cristiano Souza, Davi Misturini, Edfram, Fábio Henrique, Flávia, Fernando, Gabriel Araújo, Maristela Barbosa, Wington Vital.

Agradeço também a quem não citei nessa lista de agradecimentos, que contribuiram também para minha formação na Matemática.

À Capes pelo apoio financeiro.

"Conhecereis a verdade, e a verdade vos libertará".

(Bíblia Sagrada)

Resumo

Esta dissertação tem como propósito explicar as métricas críticas do funcional curvatura escalar total (CPE) e detalhar os resultados principais obtidos nos artigos intitulados "A note on critical point metrics of the total scalar curvature" devido a Leandro Benedito [Math. Anal. Appl. Vol 424, 1544-1548 (2015)] e "Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature" devido a Francisco B. Filho [Math. Arch. Vol 104, 463-470 (2015)]. No primeiro foi provado que se uma determinada função, em termos da função potencial, de uma CPE é constante então a variedade é Einstein. Já no segundo foi demonstrado que sob algumas fórmulas integrais adequadas da esfera canônica, a variedade é isométrica a uma esfera padrão de algum raio e sua função potencial é uma primeira autofunção do Laplaciano.

Palavras-chave: Equação do Ponto Crítico, Curvatura Escalar, Funcionais Riemannianos, Variedades Einstein.

Abstract

This dissertation aims to explain the critical metrics of the total scalar curvature functional (CPE) and to detail the main results obtained in the articles entitled "A note on critical point metrics of the total scalar curvature" due to Leandro Benedito [Math. Anal. Appl. Vol. 424, 1544-1548 (2015)] and " Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature" due to Francisco B. Filho [Math. Arch. Vol 104, 463-470 (2015)]. In the first, it has been proved that if a given function in terms of the potential function of a CPE is constant then the manifold is Einstein. Already in the second, it has been shown that under some suitable integral conditions of the canonical sphere, the manifold is isometric to a standard sphere of some ray and its potential function is a first autofunction of the Laplacian.

Keywords: Critical Point Equation, Scalar curvature, Riemannian Functionals, Einstein manifolds.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Tensores em Variedades Riemannianas 3

1.2 Operadores Diferenciais 6

2 O Funcional Curvatura Escalar Total **16**

2.1 Variação da curvatura 16

2.2 Métricas críticas do Funcional Curvatura Escalar Total 18

2.3 Conjectura dos campos conformes 23

3 Rigidez de métricas CPE **25**

Referências Bibliográficas **37**

Introdução

Um tema recorrente em geometria é encontrar métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável M^n com certas propriedades, como por exemplo, com curvatura escalar constante. Neste sentido, é interessante estudar os pontos críticos do funcional curvatura escalar total. Sejam M^n uma variedade diferenciável compacta orientada de dimensão $n \geqslant 3$ e $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as métricas Riemannianas em M^n. O funcional curvatura escalar total é definido por

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g dM_g$$

onde R_g e dM_g são, respectivamente, a curvatura escalar e a forma volume da métrica g. Na literatura corrente este funcional é também conhecido como Einstein-Hilbert. Ressaltamos que os pontos críticos do funcional $\mathcal{S}$ são Ricci-flat.

Por outro lado, a solução do problema de Yamabe nos mostra que qualquer variedade compacta M^n admite uma métrica Riemanniana com curvatura escalar constante. Desta maneira, podemos considerar o conjunto das métricas Riemannianas em M^n com curvatura escalar constante e volume 1, isto é,

$$\widetilde{\mathcal{M}_1} = \{g \in \mathcal{M} \mid R_g \text{ constante e } \mathrm{vol}(g) = 1\} \neq \emptyset.$$

Koiso [18] mostrou que, sob condições genéricas, $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ é uma variedade de dimensão infinita. Em Besse [5], foi conjecturado que os pontos críticos de $\mathcal{S}$ restrito a $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ são Einstein. A equação de Euler-Lagrange agindo sobre o funcional Einstein-Hilbert restrito a variedade $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ é dada por

$$Ric_g - \frac{R_g}{n} g = \nabla^2 f - f\left(Ric_g - \frac{R_g}{n-1} g\right), \tag{1}$$

em que $f \in C^\infty(M)$ é denominada função potencial, Ric_g, R_g e $\nabla^2 f$ são o tensor de Ricci, curvatura escalar e o hessiano de f na métrica g, respectivamente. Sendo assim, dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) de curvatura escalar constante R_g é uma métrica CPE (*Critical Point Equation*) se existir uma função f, denominada função potencial, para a qual é satisfeita a equação (1).

Note que tomando o traço em (1), obtemos

$$\Delta_g f + \frac{R_g}{n-1} f = 0 \tag{2}$$

Em particular, f é uma autofunção do Laplaciano Δ_g. Logo, $\frac{R_g}{n-1}$ pertence ao espectro positivo do Laplaciano de (M^n, g).

Esta dissertação se baseia nos artigos de [4] denominado "*A note on critical point metrics of the total scalar curvature*", e [12], intitulado "*Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature functional*". Em [4], Benedito verificou que a conjectura CPE é verdadeira se a função $h = |\nabla f|^2 + \frac{R_g}{n(n-1)} f^2$ for constante em M. Já em [12], Filho notou que as seguintes fórmulas integrais são verdadeiras na esfera padrão $(\mathbb{S}^n, g_0)$ com a função altura h_v

$$\int_M h_v^3 \, d\mathbb{S}^n_{g_0} = 0$$

e

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla h_v|^4 \, d\mathbb{S}^n_{g_0} = \frac{n(n+2)}{3} \int_M h_v^4 \, d\mathbb{S}^n_{g_0}.$$

Filho [12] mostrou que a conjectura é verdadeira sob as hipóteses integrais dadas a seguir.

Teorema 1. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE satisfazendo*

1. $\displaystyle\int_M |\nabla f|^4 dM_g = \frac{(n+2)R_g^2}{3n(n-1)^2} \int_M f^4 dM_g,$
2. $\displaystyle\int_M f^3 dM_g \geqslant 0.$

Então (M^n, g) é Einstein.

Além disso, observou-se que o resultado obtido por Benedito [4] pode ser melhorado.

Corolário 1. *A mesma conclusão do Teorema 1 é verdadeira assumindo que $h = |\nabla f|^2 + \frac{R_g}{n(n-1)} f^2$ seja constante ao longo do fluxo de ∇f.*

O trabalho está organizado em três capítulos. No Capítulo 1, se encontra a seção de Preliminares, a qual estabelece notações, algumas definições e resultados de Geometria Riemanniana.

No Capítulo 2, explanaremos brevemente as Fórmulas de Variação da Curvatura visando estudar as métricas críticas do Funcional Curvatura Escalar Total $\mathcal{S}$. Mencionaremos também o clássico Teorema de Obata em [25] e a conjectura dos campos conformes.

No Capítulo 3, enunciaremos e provaremos os resultados auxiliares e, consequentemente, os teoremas principais dos artigos [4] e [12] serão demonstrados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo exibiremos definições, resultados e exemplos da teoria básica geral de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer desta dissertação. Façamos uma revisão dos conceitos de tensores, curvaturas e operadores diferenciais. Nossa maior preocupação será detalhar os resultados obtidos por Benedito [4] e Filho [12], por isso omitiremos alguns conceitos que já são bem conhecidos na presente teoria, contudo se o leitor achar necessário recomendamos os livros [1, 6, 7, 8, 20, 21, 22, 26, 29]. Em tudo que segue, M^n denotará uma variedade diferenciável de dimensão $n \geqslant 3$, $g = \langle , \rangle$ uma métrica Riemanniana em M^n com conexão de Levi-Civita ∇, $\mathfrak{X}(M)$ e $C^\infty(M)$ designarão o conjunto de campos de vetores diferenciáveis e funções suaves em M^n, respectivamente.

1.1 Tensores em Variedades Riemannianas

Um $(1, r)$–tensor em uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel das funções diferenciáveis $C^\infty(M)$. Enquanto que, num $(0, r)$–tensor, o contradomínio é $C^\infty(M)$. Além disso, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(U)$, pede-se que $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ seja uma função diferenciável em um aberto $U \subset M^n$ e T seja $C^\infty(U)$-linear em cada variável, isto é,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $f, h \in C^\infty(U)$.

Exemplo 1.1. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M^n$ e a cada par $X, Y \in T_pM^n$, o produto interno de X e Y na métrica Riemanniana de M^n, isto é, $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_p$, é um $(0, 2)$–tensor e suas* *componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Definimos $S^2(M)$ como sendo o conjunto de todos os $(0,2)$–tensores simétricos em M^n. É claro que a métrica $g \in S^2(M)$.

Exemplo 1.2. *Toda k–forma diferencial ω em M^n é um $(0,k)$–tensor em M^n.*

Observação 1.1. *Em uma variedade Riemanniana a métrica Riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma forma diferencial $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por*

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Neste sentido, um campo de vetores diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser identificado com um $(0,1)$–tensor $X : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado por

$$X(Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \textit{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante ∇ a tensores como veremos agora.

Definição 1.1. *A derivada covariante de um $(1,r)$–tensor T é um $(1,r+1)$–tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r). \tag{1.1}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0,r)$–tensor T é um $(0,r+1)$–tensor ∇T dado por (1.1).

Definição 1.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$–tensor*

$$\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$\mathrm{Rm}(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$–tensor

$$\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

dado por

$$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) = \langle \mathrm{Rm}(X,Y)Z, W\rangle.$$

A seguir, listamos algumas propriedades.

Proposição 1.1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) = -\mathrm{Rm}(Y,X,Z,W) = \mathrm{Rm}(Y,X,W,Z)$.
2. $\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) = \mathrm{Rm}(Z,W,X,Y)$.
3. $\mathrm{Rm}(X,Y)Z + \mathrm{Rm}(Y,Z)X + \mathrm{Rm}(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi).*
4. $(\nabla_X \mathrm{Rm})(Y,Z)W + (\nabla_Y \mathrm{Rm})(Z,X)W + (\nabla_Z \mathrm{Rm})(X,Y)W = 0$ *(segunda identidade de Bianchi).*

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

Definição 1.3. *Definimos o tensor curvatura de Ricci de uma variedade Riemanniana (M^n, g) como o traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é, se $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM^n$ é uma base ortonormal, então para todo $x, y \in T_pM^n$*

$$Ric_g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Rm}(e_i, x)e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Rm}(e_i, y)e_i, x\rangle,$$

em que a última igualdade segue do item (ii) da Proposição 1.1. Portanto, Ric_g é um $(0,2)$–tensor simétrico em M^n.

Definição 1.4. *A curvatura escalar de uma variedade Riemanniana (M^n, g) é a função $R_g : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$R_g = \mathrm{tr}_g Ric_g. \tag{1.2}$$

Este trabalho gira em torno da seguinte definição.

Definição 1.5. *Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é Einstein se existir uma função suave $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ tal que $Ric_g = \lambda g$.*

Quando $n \geqslant 3$, o Lema de Schur nos permite concluir que λ é constante em M^n, (para maiores detalhes veja Petersen [26, Lema 3.1.4, p. 87]).

Ao longo desta dissertação usaremos a convenção da soma de Einstein. A qual diz que se uma variável de índices aparece duas vezes em um único termo, um subescrito e o outro sobrescrito, isso significa que estamos somando sobre todos os seus possíveis valores.

1.2 Operadores Diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Façamos uma exposição de alguns destes operadores.

Definição 1.6. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M^n por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X), \tag{1.3}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M^n$. Então, pela definição de gradiente, teremos em U

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i f e_i. \tag{1.4}$$

Num referencial coordenado $\{\partial_i\}$, teremos

$$\nabla f = g^{ij} \nabla_j f \partial_i = \nabla^i f \partial_i, \tag{1.5}$$

em que $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}). Além disso, é imediato das propriedades de derivação o seguinte fato: Se $f, \ell : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então vale a regra da soma $\nabla(f + \ell) = \nabla f + \nabla \ell$ e a regra do produto $\nabla(f\ell) = \ell \nabla f + f \nabla \ell$.

Definição 1.7. *Seja X um campo de vetores suave em M^n. A divergência de X é a função diferenciável $\mathrm{div}_g X : M^n \to \mathbb{R}$, definida por*

$$(\mathrm{div}_g X)(p) = \mathrm{tr}_g\{v \in T_p M^n \mapsto \nabla_v X\}, \tag{1.6}$$

onde tr_g denota o traço do operador linear $v \in T_p M^n \mapsto \nabla_v X$.

Lembremos da Álgebra Linear que $\nabla_{\partial_j|_p} X = a^{ij}(p) \partial_i|_p$ para todo $i = 1, \cdots, n$, para cada $p \in M$, em que $(a^{ij}(p))$ representa a matriz na base $\{\partial_1|_p, \cdots, \partial_n|_p\}$ de $T_p M^n$. Assim

$$\langle \nabla_{\partial_i|_p} X, \partial_k|_p\rangle = a^{ij}(p) \langle \partial_j|_p, \partial_k|_p\rangle = a^{ij}(p) g_{jk}. \tag{1.7}$$

Multiplicando pelo elemento inverso g^{ik} em ambos os membros da igualdade acima, teremos

$$g^{ik} \langle \nabla_{\partial_i|_p} X, \partial_k|_p\rangle = a^{ij}(p) \left(g_{jk}(p) g^{ki}(p)\right) = a^{ij}(p) \delta^i_j = a^{ii}(p).$$

Logo, a divergência de X em $p \in M^n$ é dada por

$$(\mathrm{div}_g X)(p) = \sum_{i=1}^{n} a^{ii}(p) = g^{ij}\langle \nabla_{\partial_i|_p} X, \partial_j|_p\rangle. \tag{1.8}$$

Proposição 1.2. *Seja X um campo diferenciável em M^n e $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ um referencial coordenado em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = a^k\partial_k$ em U, então*

$$\mathrm{div}_g X = \partial_i(a^i) - g^{ij}\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, X\rangle.$$

Em particular, num referencial geodésico $\{E_i\}$ em $p \in U$, temos que

$$\mathrm{div}_g X(p) = E_i(a^i). \tag{1.9}$$

Demonstração. Pela definição de divergência de um campo vetorial, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_g X &= g^{ij}\langle \nabla_{\partial_i} X, \partial_j\rangle = g^{ij}\big(\partial_i\langle X, \partial_j\rangle - \langle X, \nabla_{\partial_i}\partial_j\rangle\big) \\
&= g^{ij}\big(\partial_i\langle a^k\partial_k, \partial_j\rangle - \langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, X\rangle\big) \\
&= \big(g^{ij}g_{jk}\big)\partial_i(a^k) - g^{ij}\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, X\rangle \\
&= \partial_i(a^i) - g^{ij}\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, X\rangle.
\end{aligned}$$

□

Mais uma vez é imediato das propriedades de derivação que, para campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e para qualquer função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$, são válidas as propriedades: $\mathrm{div}_g(X+Y) = \mathrm{div}_g X + \mathrm{div}_g Y$ e $\mathrm{div}_g(fX) = f\mathrm{div}_g X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Definição 1.8. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$–tensor, dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.10}$$

Ou como $(0,2)$–tensor, dado por

$$(\nabla^2 f)(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle.$$

Neste caso, $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é um $(0,2)$–tensor simétrico. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla^2 f)(X), Y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\
&= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Analogamente,

$$\langle (\nabla^2 f)(Y), X\rangle = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f). \tag{1.12}$$

Agora basta subtrair as equações (1.11) e (1.12) para comprovar a nossa assertiva.

Definição 1.9. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f é a função $\Delta_g f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta_g f = \mathrm{div}_g(\nabla f). \tag{1.13}$$

Aplicando esta definição ao produto de duas funções suaves $f, \ell : M^n \to \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} \Delta_g(f\ell) &= \mathrm{div}_g(\nabla(f\ell)) = \mathrm{div}_g(\ell\nabla f) + \mathrm{div}_g(f\nabla\ell) \\ &= \ell\mathrm{div}_g(\nabla f) + \langle\nabla\ell, \nabla f\rangle + f\mathrm{div}_g(\nabla\ell) + \langle\nabla f, \nabla\ell\rangle \\ &= \ell\Delta_g f + f\Delta_g\ell + 2\langle\nabla f, \nabla\ell\rangle. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ademais, seja $p \in M$ e considere $U \subset M^n$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$\mathrm{tr}_g(\nabla^2 f)_p = \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla^2 f)_p(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = \mathrm{div}_g(\nabla f)(p) = \Delta_g f(p),$$

donde

$$\Delta_g f = \mathrm{tr}_g(\nabla^2 f).$$

Exemplo 1.3. *Uma função altura h_v na esfera padrão $(\mathbb{S}^n, g_0)$ relativa a um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, é dada por $h_v = \langle\cdot, v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Geometricamente, $h_v(p)$ para algum $p \in \mathbb{S}^n$ é a altura de p relativa a um plano normal a v e passando pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então o hessiano da função altura é dado por $\nabla^2 h_v = -h_v g_0$ e $-\Delta_{g_0} h_v = n h_v$, ou seja, a função altura é uma primeira autofunção na esfera padrão (ver, por exemplo, o apêndice da dissertação [28]).*

Seja $\varphi : M^n \to M^n$ um difeomorfismo, o pull-back de um $(0,2)$–tensor T é um tensor do mesmo tipo que a cada ponto $p \in M^n$ associa

$$(\varphi^*T)_p(X_p, Y_p) := T_{\varphi(p)}(d\varphi_p(X_p), d\varphi_p(Y_p)).$$

Assim a derivada de Lie de T, com respeito ao campo X, é:

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^* T)_p,$$

onde $\varphi_t : U \to V$ é o fluxo de X. Sua relação com o Colchete de Lie é bem conhecida pela propriedade

$$(\mathcal{L}_X T)(Y, Z) = \mathcal{L}_X T(Y, Z) - T([X, Y], Z) - T(Y, [X, Z]). \tag{1.15}$$

Em particular, tomando $T = g$, teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle. \tag{1.16}$$

Proposição 1.3. *Seja g um $(0,2)$–tensor métrico em uma variedade diferenciável M^n, então vale que*

$$\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f. \tag{1.17}$$

Demonstração. Pela equação (1.16), para qualquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle \\
&= \nabla^2 f(X, Y) + \nabla^2 f(Y, X) \\
&= 2\nabla^2 f(X, Y).
\end{aligned}$$

□

De agora em diante, T e S denotarão $(0,2)-$ tensores em M^n.

Definição 1.10. *Definimos o produto interno de Hilbert-Schmidt de tensores T e S como sendo*

$$\langle T, S \rangle = \mathrm{tr}_g(TS^*),$$

em que $\mathrm{tr}_g(\cdot)$ denota o traço de tensores. Facilmente a definição acima satisfaz as propriedades de produto interno. Observe que num referencial ortonormal em um aberto U de M contendo p, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_g(TS^*) &= \sum_{i=1}^{n} \langle TS^*(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S^*(e_i), T^*(e_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j=1}^{n} \langle S^*(e_i), e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^{n} \langle T^*(e_i), e_k \rangle e_k \rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle e_i, S(e_j) \rangle \langle e_i, T(e_k) \rangle \delta_{jk} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, S(e_j) \rangle \langle e_i, T(e_j) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, S(e_j) \rangle e_i, T(e_j) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle T(e_j), S(e_j) \rangle.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\langle T, g \rangle = \mathrm{tr}_g(Tg^*) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_i), I(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_i), e_i \rangle = \mathrm{tr}_g(T).$$

Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Definimos a parte sem traço de um *tensor T por*

$$\mathring{T} := T - \frac{\mathrm{tr}_g(T)}{n} g. \tag{1.18}$$

O nome se justifica, pois T se decompõe na soma de dois tensores sendo que $\mathring{T}$ tem traço nulo, isto é,

$$\mathrm{tr}_g(\mathring{T}) = \langle \mathring{T}, g\rangle = \left\langle T - \frac{\mathrm{tr}_g(T)}{n} g, g \right\rangle = \mathrm{tr}_g(T) - \frac{\mathrm{tr}_g(T)\langle g, g\rangle}{n} = 0.$$

Em particular, tomando $S = T$ na Definição 1.10, temos que $|T|^2 \geqslant \frac{(\mathrm{tr}_g(T))^2}{n}$ valendo a igualdade se, e só se, $T = \frac{\mathrm{tr}_g(T)}{n} g$.

Proposição 1.4. *Para todo campo de vetores diferenciável X e Y em uma variedade Riemanniana (M^n, g), vale a seguinte fórmula*

$$Ric_g(X, Y) = \mathrm{div}_g(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\mathrm{div}_g Y)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla Y\rangle, \tag{1.19}$$

em que ${}^*\nabla Y$ representa o operador adjunto formal de ∇Y. Em particular, quando $Y = \nabla f$ para alguma função diferenciável f em M, vale

$$Ric_g(X, \nabla f) = \mathrm{div}_g(\nabla^2 f(X)) - \langle X, \nabla(\Delta_g f)\rangle - \langle \nabla X, \nabla^2 f\rangle. \tag{1.20}$$

Demonstração. Veja [15, Proposição 2.5, p. 32]. □

Já foi definido acima a divergência de campos de vetores em M^n, o próximo passo é definir a divergência de um $(0,2)$–tensor T em uma variedade Riemanniana (M^n, g). Com efeito, considere um referencial ortonormal local $\{e_1, \cdots, e_n\}$ em torno de algum aberto $U \subset M^n$ e o $(1,1)$–tensor correspondente a T. Assim, o $\mathrm{div}_g T$ é um $(0,1)$–tensor que satisfaz, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}_g T)(Z) &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} T)(Z), e_i) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} T(Z) - T(\nabla_{e_i} Z), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (g(\nabla_{e_i} T(Z), e_i) - g(T(\nabla_{e_i} Z), e_i)) = \mathrm{div}_g(T(Z)) - \sum_{i=1}^n g(T(\nabla_{e_i} Z), e_i)) \\
&= \mathrm{div}_g(T(Z)) - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} Z, T^*(e_i)) = \mathrm{div}_g(T(Z)) - \langle \nabla Z, T^*\rangle.
\end{aligned}$$

Ademais, em coordenadas,

$$(\mathrm{div}_g T)(\partial_i) = g^{kj} \nabla_k T_{ij}.$$

Note que pelo item 4 da Proposição 1.1 temos

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

Contraindo a equação acima pelos índices m e k (o que é equivalente a multiplicar o termo g^{mk} em ambos os lados da igualdade), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i g^{mk} R_{jklm} + \nabla_j g^{mk} R_{kilm} + g^{mk} \nabla_k R_{ijlm} \\ &= \nabla_i R_{jl} - \nabla_j g^{mk} R_{iklm} + g^{mk} \nabla_k R_{ijlm}. \end{aligned}$$

Agora contraindo por g^{jl} na equação acima, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i g^{jl} R_{jl} - g^{jl} \nabla_j R_{il} + g^{mk} \nabla_k g^{jl} R_{ijlm} \\ &= \nabla_i R_g - g^{jl} \nabla_j R_{il} - g^{mk} \nabla_k g^{jl} R_{ijml} \\ &= \nabla_i R_g - g^{jl} \nabla_j R_{il} - g^{mk} \nabla_k R_{im}. \end{aligned}$$

Portanto, a seguinte equação é chamada de 2ª identidade de Bianchi contraída 2 vezes, dada em coordenadas

$$dR_g(\partial_i) = \nabla_i R_g = 2 g^{jl} \nabla_j R_{il}. \tag{1.21}$$

Em forma tensorial, podemos expressá-la como

$$dR_g = 2\mathrm{div}_g Ric_g. \tag{1.22}$$

Proposição 1.5. *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana, então*

$$\mathrm{div}_g \mathring{Ric}_g = \frac{n-2}{2n} dR_g. \tag{1.23}$$

Demonstração. Note que para todo $(0,2)$–tensor simétrico T em M^n e para todo campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale $(\mathrm{div}_g T)(Z) = \mathrm{div}_g(T(Z)) - \langle \nabla Z, T \rangle$. Em particular, para o tensor $\mathring{Ric}_g$, temos

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}_g \mathring{Ric}_g)(Z) &= \mathrm{div}_g(\mathring{Ric}_g(Z)) - \langle \mathring{Ric}_g, \nabla Z \rangle \\ &= \mathrm{div}_g(Ric_g(Z)) - \frac{1}{n}\mathrm{div}_g(R_g Z) - \langle Ric_g - \frac{R_g}{n} g, \nabla Z \rangle \\ &= \mathrm{div}_g(Ric_g(Z)) - \langle Ric_g, \nabla Z \rangle - \frac{1}{n}\mathrm{div}_g(R_g Z) + \frac{R_g}{n}\langle g, \nabla Z \rangle \\ &= \mathrm{div}_g Ric_g(Z) - \frac{R_g}{n}\mathrm{div}_g(Z) - \frac{1}{n}\langle \nabla R_g, Z \rangle + \frac{R_g}{n}\mathrm{tr}_g(\nabla Z) \\ &= \frac{1}{2} dR_g(Z) - \frac{1}{n} dR_g(Z) = \frac{n-2}{2n} dR_g(Z). \end{aligned}$$

$\square$

Em particular, se a curvatura escalar R_g for constante, então (1.23) nos dá a informação

$$\mathrm{div}_g \mathring{Ric}_g = \frac{n-2}{2n} dR_g = 0. \tag{1.24}$$

Lema 1.1. *Seja T um $(0,2)$–tensor simétrico em uma variedade Riemanniana (M^n, g). Então, para qualquer campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função $\varphi \in C^\infty(M)$*

$$\mathrm{div}_g(\varphi T(Z)) = \varphi((\mathrm{div}_g T)(Z) + \langle \nabla Z, T\rangle) + T(\nabla\varphi, Z). \tag{1.25}$$

Em particular, se $Z = \nabla f$ para alguma função $f \in C^\infty(M)$, temos

$$\mathrm{div}_g(\varphi T(\nabla f)) = \varphi((\mathrm{div}_g T)(\nabla f) + \langle \nabla^2 f, T\rangle) + T(\nabla\varphi, \nabla f). \tag{1.26}$$

Demonstração. Considere φ uma função suave em M^n, segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_g(T(\varphi Z)) = \mathrm{div}_g(\varphi T(Z)) &= \varphi \mathrm{div}_g(T(Z)) + \langle \nabla\varphi, T(Z)\rangle \\ &= \varphi((\mathrm{div}_g T)(Z) + \langle \nabla Z, T\rangle) + T(\nabla\varphi, Z). \end{aligned}$$

$\square$

O próximo lema terá grande importância no desenvolvimento das fórmulas integrais expressas no próximo capítulo. Às vezes, iremos chamá-las de fórmulas de Bochner tensoriais.

Lema 1.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Então para quaisquer campo de vetores diferenciável X em M^n e u função suave em M^n, as seguintes equações são válidas:*

1. $(\mathrm{div}_g \nabla^2 u)(X) = Ric_g(\nabla u, X) + d(\Delta_g u)(X)$.
2. $(\mathrm{div}_g \mathring{\nabla}^2 u)(X) = Ric_g(\nabla u, X) + \dfrac{n-1}{n} d(\Delta_g u)(X)$.

Demonstração. Observe que reagrupando os termos de (1.20) e pela definição do operador divergente, temos

$$Ric_g(X, \nabla u) + d(\Delta_g u)(X) = \mathrm{div}_g(\nabla^2 u(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 u\rangle = (\mathrm{div}_g \nabla^2 u)(X),$$

o que prova 1. Como $\operatorname{div}_g(X) = \operatorname{tr}_g(\nabla X) = \langle \nabla X, g\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}_g \mathring{\nabla}^2 u)(X) &= \operatorname{div}_g(\mathring{\nabla}^2 u(X)) - \langle \nabla X, \mathring{\nabla}^2 u\rangle \\
&= \operatorname{div}_g\left(\nabla^2 u(X) - \frac{\Delta_g u}{n}\mathrm{I}(X)\right) - \left\langle \nabla X, \nabla^2 u - \frac{\Delta_g u}{n} g\right\rangle \\
&= \operatorname{div}_g(\nabla^2 u(X)) - \frac{1}{n}\operatorname{div}_g(\Delta_g u \cdot X) - \langle \nabla X, \nabla^2 u\rangle - \frac{\Delta_g u}{n}\langle \nabla X, g\rangle \\
&= \operatorname{div}_g(\nabla^2 u(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 u\rangle - \frac{\Delta_g u}{n}\operatorname{div}_g(X) - \langle X, \nabla\Delta_g u\rangle + \frac{\Delta_g u}{n}\langle \nabla X, g\rangle \\
&= (\operatorname{div}_g \nabla^2 u)(X) - \frac{1}{n} d(\Delta_g u)(X) \\
&= Ric_g(\nabla u, X) + \frac{n-1}{n} d(\Delta_g u)(X).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.4. *Se* $-\Delta_g u = \frac{R_g}{n-1}u$, *então*

$$\operatorname{div}_g \mathring{\nabla}^2 u = \mathring{Ric}_g(\nabla u, \cdot). \tag{1.27}$$

Demonstração. De fato, pelo item (2) do Lema 1.2, segue

$$(\operatorname{div}_g \mathring{\nabla}^2 u)(X) = Ric_g(\nabla u, X) - \frac{R_g}{n} g(\nabla u, X) = \mathring{Ric}_g(\nabla u, X), \text{ para qualquer } X \in \mathfrak{X}(M).$$

□

Apresentaremos uma fórmula muita usada em Análise Geométrica, denominada fórmula de Bochner

Proposição 1.6. *Sejam* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana e* $f \in C^\infty(M)$. *Então*

$$\frac{1}{2}\Delta_g |\nabla f|^2 = Ric_g(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta_g f\rangle. \tag{1.28}$$

Demonstração. Veja [15, Proposição 2.6, p. 34] □

Observação 1.2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana orientável de dimensão* n. *O elemento de volume (ou forma volume) de* M^n *é a* n*-forma diferencial* ω *definida em cada ponto* $p \in M^n$ *por*

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_n) = det(\langle v_i, e_j\rangle) \quad (\textit{volume do paralelepípedo orientado } [v_1, \ldots, v_n]),$$

onde cada $v_i \in T_pM^n$ *e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base ortonormal positiva de* T_pM^n. *Também denotamos* ω *por* dM.

Suponha agora que M^n *é uma variedade com bordo* ∂M^n. *Denotamos por* ν *o campo unitário normal exterior a* M^n *ao longo de* ∂M^n. *A orientação de* M^n *induz uma orienta-*

ção em ∂M^n da maneira seguinte: dado $p \in \partial M^n$ e dada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subset T_p\partial M^n$, dizemos que β é positiva se $\{\nu, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base positiva de T_pM^n.

Definição 1.11. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O produto interior de uma k-forma ω na direção de X é a $(k-1)$-forma $\iota_X\omega$ definida por*

$$(\iota_X\omega)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_p(X_p, v_1, \dots, v_{k-1}), \tag{1.29}$$

para todo $p \in M^n$ e $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_pM^n$. Também denotamos $\iota_X\omega$ por $X \lrcorner \omega$.

Por exemplo, seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada com forma volume dM_g e bordo ∂M^n. Seja ν o normal unitário exterior a ∂M^n, segue da Observação 1.2 que $\nu \lrcorner dM_g$ é a forma volume de ∂M^n induzida por M^n. Denotamos $\nu \lrcorner dM_g = d\sigma$.

Proposição 1.7. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada com elemento de volume dM_g. Então*

$$d(X \lrcorner dM_g) = \operatorname{div}_g X dM_g, \tag{1.30}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. ver [8]. □

Precisaremos da seguinte versão do teorema da divergência:

Teorema 1.1. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M^n é munido com a orientação e a métrica induzida por M^n e ν denota o normal unitário exterior a M^n ao longo de ∂M^n, então*

$$\int_M \operatorname{div}_g X dM_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\sigma. \tag{1.31}$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.7 e do Teorema de Stokes [20, Teorema 16.11, p. 411], que

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}_g X dM_g &= \int_M d(X \lrcorner dM_g) = \int_{\partial M} X \lrcorner dM_g = \int_{\partial M} (X^\top + X^\perp) \lrcorner dM_g \\ &= \int_{\partial M} (\langle X, \nu \rangle \nu) \lrcorner dM_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \nu \lrcorner dM_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

em que $X^\top$ e $X^\perp$ denotam a parte tangente e normal de X, respectivamente. Note que no caso de ν ser o normal unitário interior a M^n ao longo de ∂M^n, o segundo membro da igualdade (1.31) muda de sinal. □

As fórmulas da proposição a seguir são conhecidas como as *identidades de Green.*

Proposição 1.8. *Sejam $f, \ell : M^n \to \mathbb{R}$ funções suaves e ν o campo de vetores normais unitários exterior a M^n ao longo de ∂M^n, então:*

(a) (Primeira identidade de Green)

$$\int_M \ell \Delta_g f dM_g = -\int_M \langle \nabla f, \nabla \ell \rangle dM_g + \int_{\partial M} \ell \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma. \tag{1.32}$$

(b) (Segunda identidade de Green)

$$\int_M (\ell \Delta_g f - f \Delta_g \ell) dM_g = \int_{\partial M} \Big(\ell \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial \ell}{\partial \nu} \Big) d\sigma. \tag{1.33}$$

Demonstração. Para o item (a) aplicamos o Teorema da Divergência ao campo $X = \ell \nabla f$. O item (b) segue agora imediatamente de (a), trocando ℓ por f em (a) e subtraindo membro a membro as duas identidades obtidas. □

Capítulo 2

O Funcional Curvatura Escalar Total

Este capítulo destina-se ao estudo de pontos críticos do funcional curvatura escalar total $\mathcal{S}$. Em tudo o que segue, M^n denota uma variedade compacta orientada de dimensão $n \geqslant 3$ e $\mathcal{M}$ o conjunto das métricas Riemannianas de M^n, isto é, $\mathcal{M} = \{g \in S^2(M) \mid g \text{ é métrica Riemanniana em } M^n\}$. Ao longo deste capítulo, denotemos $\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_M uvdM_g$ o produto interno de funções em M^n e $\big(T, S\big)_{L^2} = \int_M \langle T, S\rangle dM_g$ o produto interno de $S^2(M)$. Por simplicidade de notação, e desde que não tenhamos perigo de imbróglio, omitiremos o índice "L^2".

2.1 Variação da curvatura

Nesta seção, introduzimos as fórmulas de variação da curvatura que podem ser encontradas, por exemplo, no livro de Andrews e Hopper [1]. Neste tópico, $g(t)$ é uma família diferenciável a 1–parâmetro de métricas Riemannianas em M^n (em que omitiremos a variável t por simplicidade) e a variação dos coeficientes da métrica será denotada por $\partial g_{ij}/\partial t = h_{ij}$, tendo em vista apresentar a variação do funcional curvatura escalar total, a qual abordaremos na próxima seção.

Inicialmente, note que $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Derivando com respeito a t ambos os lados da igualdade, teremos

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = -g^{ik}g^{jl}h_{kl}. \tag{2.1}$$

Lema 2.1. *Seja $g(t)$ uma família diferenciável a 1–parâmetro de métricas Riemannianas em M^n. Então a variação do tensor de Ric na métrica g é dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ik} = \frac{1}{2}g^{pq}\left(\nabla_q\nabla_k h_{ip} - \nabla_i\nabla_k h_{qp} + \nabla_q\nabla_i h_{kp} - \nabla_q\nabla_p h_{ik}\right). \tag{2.2}$$

Demonstração. Veja, por exemplo, [1]. □

Proposição 2.1. *Considere $g(t)$ uma família diferenciável a 1–parâmetro de métricas Riemannianas em M. A variação da curvatura escalar R na métrica g é dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t}R_g = -\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h^\sharp) - \langle h, Ric_g\rangle\,, \tag{2.3}$$

em que $\mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h^\sharp) = g^{ij}g^{pq}\nabla_q\nabla_j h_{ip}$ exprime o termo divergente e $\mathrm{div}_g h^\sharp$ é o campo associado ao $(0,1)$–tensor $\mathrm{div}_g h$.

Demonstração. Pela definição de curvatura escalar R_g, e das equações (2.2) e (2.1), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_g &= \frac{\partial}{\partial t}\big(R_{ik}g^{ik}\big)\\
&= R_{ik}\frac{\partial}{\partial t}g^{ik} + g^{ik}\frac{\partial}{\partial t}R_{ik}\\
&= -g^{ij}g^{kl}h_{jl}R_{ik} + \frac{1}{2}g^{ik}g^{pq}\big(\nabla_q\nabla_k h_{ip} - \nabla_i\nabla_k h_{qp} + \nabla_q\nabla_i h_{kp} - \nabla_q\nabla_p h_{ik}\big)\\
&= -g^{ij}g^{kl}R_{ik}h_{jl} + \frac{1}{2}g^{pq}\nabla_q g^{ik}\nabla_k h_{ip} + \frac{1}{2}g^{pq}\nabla_q g^{ik}\nabla_i h_{kp} - \frac{1}{2}g^{ik}\nabla_i\nabla_k g^{pq}h_{qp}\\
&\quad - \frac{1}{2}g^{pq}\nabla_q\nabla_p g^{ik}h_{ik}\\
&= -g^{ij}g^{kl}R_{ik}h_{jl} + g^{pq}\nabla_q g^{ij}\nabla_j h_{ip} - g^{ij}\nabla_i\nabla_j g^{pq}h_{pq}\\
&= -g^{ij}g^{kl}R_{ik}h_{jl} + g^{pq}\nabla_q(\mathrm{div}_g h)_p - g^{ij}\nabla_i\nabla_j \mathrm{tr}_g h\\
&= -\langle Ric_g, h\rangle + \mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h^\sharp) - \Delta_g \mathrm{tr}_g h.
\end{aligned}$$

□

Sabemos que, para cada $g \in \mathcal{M}$, R_g é uma função diferenciável em M^n. Assim podemos, de forma natural, considerar a aplicação $\mathbf{L} : \mathcal{M} \to C^\infty(M)$ que a cada métrica Riemanniana g associa sua função curvatura escalar R_g. Uma forma mais conveniente de trabalhar com a aplicação $\mathbf{L}$ é encontrar sua linearização. Mais precisamente, seja $\mathfrak{L}_g : S^2(M) \to C^\infty(M)$ a aplicação linear do espaço vetorial dos $(0,2)$– tensores simétricos no espaço vetorial das funções diferenciáveis de M^n, definida como $\mathfrak{L}_g(h) = \frac{\partial}{\partial t}R_g$, chamada linearização de $\mathbf{L}$ em g, deduzimos agora seu adjunto formal, isto é, $\mathfrak{L}_g^* : C^\infty(M) \to S^2(M)$ tal que $\langle f, \mathfrak{L}_g(h)\rangle_{L^2} = (\mathfrak{L}_g^*(f), h)_{L^2}$. Com efeito, usando a definição de integral e a primeira identidade de Green, resulta de (1.32) que

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathfrak{L}_g(h)\rangle_{L^2} &= \int_M f\mathfrak{L}_g(h)dM_g\\
&= -\int_M f\Delta_g \mathrm{tr}(h)dM_g + \int_M f\mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h^\sharp)dM_g - \int_M f\langle Ric_g, h\rangle dM_g\\
&= \int_M -\Delta_g f\langle g, h\rangle dM_g - \int_M \langle \nabla f, \mathrm{div}_g h^\sharp\rangle dM_g - \int_M \langle fRic_g, h\rangle dM_g.
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$
\begin{aligned}
&= \int_M \langle -\Delta_g f g, h\rangle dM_g - \int_M \big(\mathrm{div}_g h\big)(\nabla f) dM_g - \int_M \langle f Ric_g, h\rangle dM_g \\
&= \int_M \langle -\Delta_g f g, h\rangle dM_g + \int_M \langle \nabla^2 f, h\rangle dM_g - \int_M \langle f Ric_g, h\rangle dM_g \\
&= \int_M \langle \nabla^2 f - \Delta_g f g - f Ric_g, h\rangle dM_g = \int_M \langle \mathfrak{L}_g^*(f), h\rangle dM_g = \big(\mathfrak{L}_g^*(f), h\big)_{L_2},
\end{aligned}
$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ e todo $h \in S^2(M)$. Portanto, $\mathfrak{L}_g^*(f) = \nabla^2 f - \Delta_g f g - f Ric_g$. Em que usamos

$$\big(\mathrm{div}_g h\big)(\nabla f) = \mathrm{div}_g(h(\nabla f)) - \langle h, \nabla^2 f\rangle.$$

Como M^n é compacta ($\partial M^n = \emptyset$), segue do Teorema 1.31 que

$$\int_M \big(\mathrm{div}_g h\big)(\nabla f) dM_g = \int_M \mathrm{div}_g(h(\nabla f)) dM_g - \int_M \langle h, \nabla^2 f\rangle dM_g,$$

finalizando a observação.

2.2 Métricas críticas do Funcional Curvatura Escalar Total

Nesta seção, estudaremos as métricas críticas do funcional curvatura escalar total restrito a certas condições, situado nos livros *Einstein Manifolds*, de Besse [5], e *The Ricci Flow in Riemannian Geometry*, de Andrews e Hopper [1].

Definição 2.1. *Seja M^n uma variedade diferenciável compacta orientada, definimos o funcional curvatura escalar total $\mathcal{S} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ por*

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g dM_g.$$

A próxima proposição nos mostra que o funcional curvatura escalar total $\mathcal{S}$ é diferenciável.

Proposição 2.2. *Para qualquer variedade Riemanniana compacta (M^n, g), o funcional $\mathcal{S}$ é diferenciável e*

$$\mathcal{S}_g'(h) = \left(\left(\frac{R_g}{2}\right) g - Ric_g, h\right). \tag{2.4}$$

Demonstração. Como sabemos pela Proposição 2.1, a variação de $\mathcal{S}$ em g na direção de

$h = \dfrac{\partial}{\partial t} g$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}'_g(h) &= \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t}(R_g) dM_g + R_g \frac{\partial}{\partial t}(dM_g) \right) \\
&= \int_M \left(-\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h^\sharp) - \langle h, Ric_g \rangle \right) dM_g + \int_M \frac{R_g}{2} \mathrm{tr}_g(h) dM_g \\
&= \int_M \left(\frac{R_g}{2} \mathrm{tr}(h) - \langle h, Ric_g \rangle \right) dM_g \\
&= \int_M \left(\frac{R_g}{2} \langle g, h \rangle - \langle h, Ric_g \rangle \right) dM_g \\
&= \int_M \left\langle \left(\frac{R_g}{2} \right) g - Ric_g, h \right\rangle dM_g.
\end{aligned}
$$

□

De maneira natural, definimos:

Definição 2.2. *Uma métrica Riemanniana g é crítica para o funcional curvatura total $\mathcal{S} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ se $\mathcal{S}'_g(h) = 0$ para todo $h \in S^2(M)$.*

Observação 2.1. *Se g é um ponto crítico de $\mathcal{S}$, então a equação (2.4) é nula para todo $h \in S^2(M)$ e, pela não degenerescência da métrica, $Ric_g - \dfrac{R_g}{2} g = 0$. O caso $n = 2$ é desinteressante, visto que o Teorema de Gauss-Bonnet nos garante que a integral da curvatura Gaussiana é um invariante topológico e, portanto, a variação do funcional curvatura escalar total é nula. Já para $n \geqslant 3$, (M^n, g) é Ricci-flat, pois se não o fosse teríamos (tomando o traço) $R_g \left(1 - \dfrac{n}{2}\right) = 0$, acarretando em $n = 2$. Absurdo, sendo assim, ressaltamos que as métricas críticas para o funcional $\mathcal{S}$ são Ricci-flat.*

Um caminho natural, a se considerar agora, é restringir $\mathcal{M}$ a uma classe menor de métricas, isto é, considere o subconjunto $\mathcal{M}_1$ de métricas cujo volume de M^n é unitário, desta maneira, o próximo passo é exibir as métricas críticas do funcional curvatura total $\mathcal{S}$ restrito a $\mathcal{M}_1$. Para este fim, defina o seguinte funcional $\mathcal{R} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dado por $\mathcal{R}(g) = \mathrm{vol}(g)^{-1} \int_M R_g dM_g$. Observe que $\mathcal{R}|_{\mathcal{M}_1} = \mathcal{S}|_{\mathcal{M}_1}$. Com efeito, para $g \in \mathcal{M}_1$ temos

$$\mathcal{R}(g) = \mathrm{vol}(g)^{-1} \int_M R_g dM_g = \int_M R_g dM_g = \mathcal{S}(g).$$

Seja $\overline{g}(t) = V(t)^{-\frac{2}{n}} g(t)$ uma família diferenciável a 1–parâmetro de métricas Riemannianas normalizadas, em que $V(t) = \mathrm{vol}(g + th)$.

Isto nos permite estudar a variação do funcional $\mathcal{R}$ restrito a $\mathcal{M}_1$. Note que para $n \geqslant 3$, temos

$$\mathcal{R}(\overline{g}(t)) = \mathrm{vol}(\overline{g})^{-1} \int_M R_{\overline{g}(t)} \; dM_{\overline{g}(t)} = V(t)^{\frac{2-n}{n}} \int_M R_{g(t)} \; dM_{g(t)}.$$

Desta maneira, tomando a derivada com respeito a t de $\mathcal{R}(\overline{g})$, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'_g(h) &= \frac{d}{dt}\mathcal{R}(\overline{g}(t))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{2-n}{n}V(t)^{\frac{2-n}{n}}\dot{V}(t)V(t)^{-1}\int_M R_{g(t)}\ dM_{g(t)} + V(t)^{\frac{2-n}{n}}\int_M \langle \frac{R_{g(t)}}{2}g(t) - Ric_{g(t)}, h\rangle\ dM_{g(t)}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{2-n}{n}V(t)^{\frac{2-n}{n}}\mathcal{R}(g(t))\int_M \mathrm{tr}_{g(t)}h\ dM_{g(t)} + V(t)^{\frac{2-n}{n}}\int_M \langle \frac{R_{g(t)}}{2}g(t) - Ric_{g(t)}, h\rangle\ dM_{g(t)}\Big|_{t=0} \\
&= -V(t)^{\frac{2-n}{n}}\int_M \langle h, \frac{n-2}{n}\mathcal{R}(g(t))g(t)\rangle\ dM_{g(t)} - V(t)^{\frac{2-n}{n}}\int_M \langle (Ric_{g(t)} - \frac{R_{g(t)}}{2}g(t), h\rangle\ dM_{g(t)}\Big|_{t=0} \\
&= -V(t)^{\frac{2-n}{n}}\int_M \langle h, Ric_{g(t)} + \frac{n-2}{n}\mathcal{R}(g(t))g(t) - \frac{R_{g(t)}}{2}g(t)\rangle\ dM_{g(t)}\Big|_{t=0} \\
&= -\int_M \langle h, Ric_g + \frac{n-2}{n}\mathcal{R}(g)g - \frac{R_g}{2}g\rangle dM_g.
\end{aligned}$$

Como estamos interessados nas métricas críticas, então $\mathcal{S}'_g(h) = 0$ para todo $h \in S^2(M)$ e, pela não degenerescência da métrica, tem-se

$$Ric_g + \frac{n-2}{n}\mathcal{R}(g)g - \frac{R_g}{2}g = 0,$$

isto é, $Ric_g = \lambda g$, em que $\dfrac{R_g}{n} = \lambda = \dfrac{R_g}{2} - \dfrac{n-2}{n}\mathcal{R}(g)$. Portanto, variedades Einstein são pontos críticos para o funcional curvatura escalar total $\mathcal{S}$ restrito ao subconjunto $\mathcal{M}_1$. Logo, obtemos $\mathcal{R}(g) = R_g$ e, pelo Lema de Schur, a curvatura escalar R_g é constante em M^n. Agora podemos considerar o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}_1$

$$\widetilde{\mathcal{M}_1} = \{g \in \mathcal{M}_1 \mid R_g \text{ é constante em } M^n\}. \tag{2.5}$$

Koiso [18] mostrou que $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ é uma variedade diferenciável de dimensão infinita. Observe que $g \in \widetilde{\mathcal{M}_1}$ se, e somente se, $R_g = \mathcal{S}(g)$. Como para cada $g \in \widetilde{\mathcal{M}_1}$ temos que R_g é constante, isto implica $\Delta_g R_g = 0$. Agora considere $h \in S^2(M)$ e $\varepsilon > 0$ de tal forma que $g(t) = g + th$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ seja uma família diferenciável a 1–parâmetro de métricas Riemannianas, então

$$0 = \frac{d}{dt}\Delta_{g(t)}R_{g(t)}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\Delta_{g(t)})R_{g(t)} + \Delta_{g(t)}\frac{d}{dt}R_{g(t)}\Big|_{t=0} = \Delta'_g(h)R_g + \Delta_g\mathfrak{L}_g(h).$$

Isto é, $\Delta_g\mathfrak{L}_g(h) = 0$. Desta forma, podemos considerar a aplicação $\alpha_g : S^2(M) \to C^\infty(M)$ dada por $\alpha_g(h) = \Delta_g(\mathfrak{L}_g h)$. Podemos encontrar sua forma adjunta $\alpha_g^* : C^\infty(M) \to S^2(M)$

da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\langle f, \alpha_g(h)\rangle_{L^2} &= \int_M f\alpha_g(h)dM_g = \int_M f\Delta_g(\mathfrak{L}_g h)dM_g \\
&= \int_M (\Delta_g f)(\mathfrak{L}_g h)dM_g = \langle \Delta_g f, \mathfrak{L}_g h\rangle_{L^2} = (\mathfrak{L}_g^*(\Delta_g f), h)_{L_2}.
\end{aligned}$$

onde foi usado na terceira igualdade a segunda identidade de Green (1.33). Desta maneira, defina $\alpha_g^*(f) = \mathfrak{L}_g^*(\Delta_g f)$. Koiso [18] também mostrou que o espaço tangente na métrica g em $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ pode ser restrito ao espaço tangente de $T_g\mathcal{M}_1$ e é dado por

$$T_g\widetilde{\mathcal{M}_1} = (\mathrm{Ker}\ \alpha_g \cap T_g\mathcal{M}_1) \cap \mathrm{Im}\ \alpha_g^*. \tag{2.6}$$

Proposição 2.3. *Seja g uma métrica crítica do funcional curvatura escalar total $\mathcal{S}$ restrito a $\widetilde{\mathcal{M}_1}$, então existe uma função suave $f := \Delta_g\phi$ em M tal que*

$$\mathring{Ric}_g = \nabla^2 f - (\Delta_g f)g - fRic_g. \tag{2.7}$$

Demonstração. Se g é ponto crítico de $\mathcal{S}$, então $0 = \mathcal{S}_g'(h) = (h, Ric_g - \frac{R_g}{n}g) = (h, \mathring{Ric}_g)$ para todo h em $T_g\mathcal{M}_1$, como g é ponto crítico para $\mathcal{S}$ restrito a $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ juntamente com a decomposição de $T_g\widetilde{\mathcal{M}_1}$ dado em (2.6) temos $\mathcal{S}_g'\big|_{T_g\widetilde{\mathcal{M}_1}}(h) = 0$, então existe uma função suave $\phi \in C^\infty(M)$ tal que

$$\mathcal{S}_g'(h) = (h, \mathring{Ric}_g) = (h, \alpha_g^*(\phi)) = 0,\ \forall\ h \in T_g\widetilde{\mathcal{M}_1}.$$

Pela não degenerescência da métrica $(\cdot,\cdot)$, resulta

$$\mathring{Ric}_g = \nabla^2 f - (\Delta_g f)g - fRic_g,$$

em que $f := \Delta_g\phi$. $\square$

Observação 2.2. *Se $\frac{R_g}{n-1} \notin \mathrm{Sp}^+\Delta_g$, então pela Proposição 2.3, obtemos ainda, ao tomar o traço na equação (2.7), $0 = \Delta_g f - n\Delta_g f - R_g f = \Delta_g f + \frac{R_g}{n-1}f$. Integrando em M^n a função $\Delta_g f^2$, teremos $0 \leqslant \int_M |\nabla f|^2 dM_g = \frac{R_g}{n-1}\int_M f^2 dM_g \leqslant 0$, logo $f = c$ é constante em M^n. Mas, $0 = \int_M \Delta_g\phi dM_g = c\int_M dM_g = c$. Assim, $f = 0$, donde (M^n, g) é Einstein por (2.7). Por outro lado, se assumirmos que $\frac{R_g}{n-1} \in \mathrm{Sp}^+\Delta_g$, na hipótese da proposição acima, não garantimos que (M^n, g) é Einstein.*

A observação anterior motiva a seguinte definição de métrica CPE.

Definição 2.3. *Uma variedade Riemanniana compacta orientável* (M^n, g) *de dimensão* $n \geqslant 3$ *é uma métrica CPE, se existe uma função suave não constante* $f \in C^\infty(M)$, *denominada função potencial, de modo que*

$$Ric_g - \frac{R_g}{n} g = \nabla^2 f - f\left(Ric_g - \frac{R_g}{n-1} g\right). \tag{2.8}$$

Sempre que nos referimos a uma variedade Riemanniana (M^n, g) como sendo CPE, já estamos assumindo que f é sua função potencial, salvo mencionado de outra forma. Note que a definição acima está bem definida, no sentido que ambos membros da equação (2.8) são $(0,2)$–tensores definidos em M^n. Ademais, passando o divergente na equação acima, conseguimos concluir que a curvatura escalar R_g é constante, pelo simples fato de f ser não constante em M^n.

Agora nosso questionamento é o seguinte: Toda métrica CPE é Einstein? Observe que, pelo príncipio do máximo, $\frac{R_g}{n-1} \in \mathrm{Sp}^+\Delta_g$. Ademais, a única solução conhecida até o presente momento é uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$ juntamente com uma função altura h_v como potencial. Então apresentamos agora a presente conjectura situada no livro de Besse [5].

Conjectura 2.1. *Toda métrica CPE é Einstein.*

Por uma simples manipulação da equação de uma métrica CPE nos informa que

$$\mathring{Ric}_g = \nabla^2 f - f\left(\mathring{Ric}_g + \frac{R_g}{n} g - \frac{R_g}{n-1} g\right).$$

Evidenciando o tensor $\mathring{Ric}_g$, temos uma definição análoga

$$(1+f)\mathring{Ric}_g = \nabla^2 f + \frac{R_g f}{n(n-1)} g = \mathring{\nabla}^2 f. \tag{2.9}$$

Agora é oportuno enunciar o teorema devido a Obata [25].

Teorema 2.1 (Obata)**.** *Seja* (M^n, g) *uma variedade compacta de dimensão* $n \geqslant 2$. *Existe uma função suave* ψ *tal que*

$$\nabla^2 \psi = -c^2 \psi g,$$

para alguma constante $c > 0$ *se, e somente se,* (M^n, g) *é isométrica a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^n(\frac{1}{c})$. *Além disso, a função* f *é exatamente uma função altura* h_v, *com* v *vetor unitário de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observe que a conjectura pode ser expressa como um problema de rigidez, no seguinte sentido: Se a conjectura é verdadeira, pela equação (2.9), temos que $\nabla^2 f = -\frac{R_g}{n(n-1)} f g$. Invocando o Teorema 2.1, segue que (M^n, g) é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{R_g}}\right)$. Então, a Conjectura 2.1 pode ser expressa como abaixo.

Conjectura 2.2. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE. Então, (M^n, g) é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$ com função potencial f sendo uma função altura h_v, para algum v unitário.*

Nos últimos anos, muitas respostas parciais foram dadas em torno da Conjectura CPE. Por exemplo, Lafontaine [19] verificou que a conjectura é verdadeira supondo que (M^n, g) é localmente conformemente flat. Enquanto que, em 2000, Hwang [16] provou a conjectura com a condição adicional $f \geqslant -1$. Em 2010, Chang [9] et al. obtiveram o mesmo resultado para variedades de dimensão 3 supondo que o segundo grupo de homologia satisfaz $\mathrm{Ker}\mathfrak{L}_g^*(f) \neq 0$. Em 2013, Quig-Yuan [27] mostrou a conjectura com a hipótese de (M^n, g) ser Bach flat. No mesmo ano, Barros e Ribeiro Jr [2], provaram a conjectura em dimensão 4 quando a parte autodual do tensor de Weyl é nula. No ano seguinte, os autores em [3] mostram sob a hipótese do divergente da parte autodual do tensor de Weyl ser nula em dimensão 4. Veremos no próximo capítulo a prova de duas respostas parciais envolvendo a conjectura CPE, devidas a [4] e [12].

2.3 Conjectura dos campos conformes

Neste capítulo descreveremos a Conjectura dos campos conformes, a resposta negativa de Ejiri [10], bem como as contribuições de alguns autores.

Definição 2.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$. O campo X é dito conforme, se existir uma função diferenciável ρ em M^n, tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Se ρ for constante, X é chamado trivial.*

Observação 2.3. *Tomando o traço em* (1.16), *temos* $\mathrm{tr}_g\big(\mathcal{L}_X g\big) = 2\mathrm{div}_g(X)$. *Com efeito, para um referencial ortonormal* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *em* M^n, *temos*

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_g\big(\mathcal{L}_X g\big) &= \sum_{i=1}^{n}\big(\mathcal{L}_X g\big)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_i} X\rangle \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = 2\mathrm{div}_g X.\end{aligned}$$

Passando o traço na equação de um campo conforme X, segue que

$$2\mathrm{div}_g X = \mathrm{tr}_g\big(\mathcal{L}_X g\big) = 2\rho n,$$

donde $\rho = \frac{\mathrm{div}_g X}{n}$ e

$$\mathcal{L}_X g = 2\frac{\mathrm{div}_g X}{n} g.$$

Sejam $C_0(M^n, g)$ o maior grupo conexo de transformações conformes de (M^n, g) e $I_0(M^n, g)$ o maior grupo conexo de isometrias de (M^n, g).

Conjectura 2.3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta, satisfazendo*

(i) $n > 2$;

(ii) Curvatura escalar constante R_g;

(iii) $C_0(M^n, g) \neq I_0(M^n, g)$.

Então, (M^n, g) *é isométrica a uma esfera* $\mathbb{S}^n(r)$ *e* $C_0(M^n, g) \neq I_0(M^n, g)$ *é composto de transformações conformes não triviais.*

Em [30] Yano e Nagano mostraram a conjectura supondo (M^n, g) Einstein. Em 1959, Nagano [24] retirou a condição (ii) e provou a conjectura com a hipótese adicional de o tensor de Ricci de (M^n, g) ser paralelo. Por outro lado os autores Goldberg e Kobayashi [13, 14] obtiveram o resultado no caso $n > 3$, supondo $I_0(M^n, g)$ transitiva em (M^n, g), ao invés de (i) e (iii), respectivamente. Lichnerowicz [23] mostrou a conjectura, se ao invés de (ii), $(ii)_D$ a curvatura escalar R_g e a norma do tensor de Ricci de (M^n, g) são constantes. Enquanto Hsiung [17] obteve o resultado, ao invés de (ii), $(ii)_E$ a curvatura escalar e o comprimento do tensor curvatura de (M^n, g) são constantes. Por fim, Obata [25] mostrou a conjectura, em vez de (iii), com a hipótese adicional $(iii)_F$ $C_0(M^n, g) \neq I_0(M^n, e^{2\phi} g)$ para alguma função diferenciável ϕ de M^n.

Por fim, Ejiri [10] mostrou a não validade da conjectura conforme o teorema abaixo.

Teorema 2.2. *A conjectura 2.3 não é verdadeira. Ademais, seja* F^n *variedade Riemanniana compacta de dimensão* n *com curvatura escalar positiva constante. Então existe uma função positiva* f *definida no círculo* $\mathbb{S}^1$ *tal que o produto deformado* $\mathbb{S}^1 \times_f F^n$ *satisfaz todas as hipóteses da conjectura.*

Capítulo 3

Rigidez de métricas CPE

Começamos o capítulo pela proposição de Hwang em [16], a qual será útil para conclusão de dois resultados principais devido a [4] e [12]. Relembremos que um subconjunto A de M^n tem medida nula em M^n, se para qualquer carta (U, φ) de M^n tivermos que $\varphi(A \cap U)$ é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^n$. Para mais detalhes, veja em [20, Capítulo 6, p. 125].

Proposição 3.1. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE. Então $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in M^n \mid f(x) = -1\}$ possui medida nula em M^n.*

Demonstração. Considere B' o conjunto de pontos críticos de f em $f^{-1}(\{-1\})$. Então $f^{-1}(\{-1\}) \backslash B'$ é união de hipersuperfícies, donde tem medida nula em M^n. Seja $p \in B'$, então por (2.9), temos

$$\nabla^2 f(\xi, \xi) = \frac{R_g}{n(n-1)} g(\xi, \xi) > 0.$$

para todo vetor não nulo $\xi \in T_p M^n$. Logo, p é um ponto crítico não degenerado e, além disso, é ponto mínimo local de f. Segue que tais pontos críticos não degenerados são isolados, e pela compacidade de M^n, estão em quantidade finita e assim, tem medida nula. Portanto, podemos escrever $f^{-1}(\{-1\}) = B' \cup \left(f^{-1}(\{-1\}) \backslash B'\right)$ como a união de dois conjuntos de medida nula em M^n, donde $f^{-1}(\{-1\})$ tem medida nula. $\square$

Observação 3.1. *Sejam u e v funções contínuas definidas em M^n tais que $u^{-1}(\{0\})$ tem medida nula em M^n e $u(p)v(p) = 0$ para todo $p \in M^n$. Então a função v é identicamente nula em M^n. Para este fim, note que (M^n, g) tem uma estrutura de espaço métrico, sendo a métrica dado pelo ínfimo do comprimento das curvas diferenciáveis por partes que ligam dados dois pontos em M^n. Ademais, a topologia natural de M^n coincide com a topologia gerada pela métrica acima (ver, por exemplo, [26, Teorema 3.5.8, p.179]). Agora, se $u^{-1}(\{0\})$ tem medida nula em M^n, logo $u^{-1}(\{0\})^c$ é denso em M^n, i. e., $\overline{u^{-1}(\{0\})^c} = M^n$, desta maneira, para qualquer $p \in M^n$, existe uma sequência de pontos*

$(p_k)_{k\geqslant 1} \subseteq u^{-1}(\{0\})^c$ tais que $p_k \xrightarrow{k\to\infty} p$. Por conseguinte, pelo continuidade das funções u e v, temos

$$v(p) = v\left(\lim_{k\to\infty} p_k\right) = \lim_{k\to\infty} v(p_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0,$$

para cada $p \in M^n$, visto que $u(p_k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O que nos garante $v \equiv 0$.

Para motivar o próximo teorema, sabemos que o hessiano de uma função altura em $(\mathbb{S}^n, g_0)$ é expressa como $\nabla^2 h_v + h_v g_0 = 0$, então $\tilde{h} := |\nabla h_v|^2 + h_v^2$ é constante, visto que

$$\begin{aligned}\nabla\tilde{h} &= 2\nabla^2 h_v(\nabla h_v) + 2h_v \nabla h_v\\ &= 2\left(\nabla^2 h_v + h_v \mathrm{I}\right)(\nabla h_v) = 0.\end{aligned}$$

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE. Então (M^n, g) é Einstein se, e somente se,*

$$h := |\nabla f|^2 + \frac{R_g f^2}{n(n-1)}, \tag{3.1}$$

é constante em M^n.

Demonstração. Faremos uma demonstração distinta da proposta pelo autor em [4]. Suponha que h é constante em M^n, então

$$\begin{aligned}0 = \nabla h &= \nabla(|\nabla f|^2) + \frac{R_g \nabla f^2}{n(n-1)}\\ &= 2\nabla^2 f(\nabla f) + \frac{2R_g f\nabla f}{n(n-1)} = (1+f)\mathring{Ric}_g(\nabla f).\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1 e a Observação 3.1, temos que $\mathring{Ric}_g(\nabla f) = 0$. Por outro lado, tomando a divergência do campo $\mathring{Ric}_g(\nabla f) = 0$, obtemos

$$0 = \mathrm{div}_g(\mathring{Ric}_g(\nabla f)) = (\mathrm{div}_g \mathring{Ric}_g)(\nabla f) + \langle \mathring{Ric}_g, \nabla^2 f\rangle.$$

Logo,

$$(1+f)|\mathring{Ric}_g|^2 = \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle = \langle \mathring{Ric}_g, \nabla^2 f\rangle = 0,$$

visto que

$$(\mathrm{div}_g \mathring{Ric}_g)(\nabla f) = \frac{n-2}{2n} dR_g(\nabla f) = 0,$$

em virtude da curvatura escalar R_g ser constante. Portanto, novamente recorrendo à Proposição 3.1 e à Observação 3.1, concluimos que $|\mathring{Ric}_g| = 0$, donde (M^n, g) é Einstein. Reciprocamente, suponha que (M^n, g) seja Einstein, então pela equação (2.9), obtemos

$$0 = (1+f)\mathring{Ric}_g = \nabla^2 f + \frac{R_g f}{n(n-1)} g.$$

Uma conta análoga a feita com a função altura dará a conclusão desejada, isto é, a função h em 3.1 é constante em M^n.

$\square$

Nesta segunda parte serão apresentadas as ferramentas desenvolvidas por Filho em [12] que nos permitirão responder ao seguinte questionamento: Dada (M^n, g) uma métrica CPE, quais condições devem ser satisfeitas para que esta variedade seja Einstein? Com essa questão em mente, ele investigou algumas fórmulas integrais geradas a partir da equação $h := |\nabla f|^2 + \frac{R_g f^2}{n(n-1)} = \tau$, em que τ é constante. Com efeito, no lema abaixo verificamos que as fórmulas integrais a seguir são verdadeiras:

$$\int_M f^3 dM_g = 0 \tag{3.2}$$

e

$$\int_M |\nabla f|^4 \, dM_g = \frac{R_g^2(n+2)}{3n(n-1)^2} \int_M f^4 \, dM_g. \tag{3.3}$$

Mais geralmente, Filho [12] observou que, assumir as hipóteses 2. e 3. do Lema 3.1 abaixo, é mais fraco que supor $|\nabla f|^2 + \kappa f^2 = \tau$, onde f é a função potencial de uma métrica CPE e $\kappa = \frac{R_g}{n(n-1)}$.

Vamos desenvolver agora fórmulas integrais, em uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g), para uma autofunção f do Laplaciano com autovalor associado λ.

Lema 3.1. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e f uma autofunção do Laplaciano Δ_g. Suponha que para κ, τ constantes a equação abaixo vale:*

$$|\nabla f|^2 + \kappa f^2 = \tau. \tag{3.4}$$

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. $\displaystyle\int_M f^{m+2} dM_g = \frac{\tau(m+1)}{\lambda + \kappa(m+1)} \int_M f^m dM_g$, *para todo* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
2. *Em particular,* $\int_M f^{2m-1} dM_g = 0$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$.
3. $\displaystyle\int_M |\nabla f|^4 dM_g = \frac{\lambda(\lambda + 2\kappa)}{3} \int_M f^4 dM_g$.

Demonstração. Veja [11]. $\square$

Proposição 3.2. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$ uma autofunção do Laplaciano Δ_g. Então*

$$\frac{1}{m}\Delta_g f^m = -\lambda f^m + (m-1) f^{m-2} |\nabla f|^2 \quad \textit{para todo } m \geqslant 2. \tag{3.5}$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução para $m \geqslant 2$. Com efeito, para $m = 2$, temos que pela equação (3.5)

$$\Delta_g(f^2) = 2f\Delta_g f + 2\langle \nabla f, \nabla f\rangle = -2\lambda f^2 + 2|\nabla f|^2.$$

Suponha que vale (3.5) para algum $m = k \in \mathbb{N}$. Observe ainda que aplicando sucessivamente a regra de Leibniz para o gradiente de funções em M obtemos $\nabla f^l = \lambda f^{l-1}\nabla f$ sempre que $l \geqslant 2$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} \Delta_g(f^{k+1}) & = & \Delta_g(f^k f) \\ & = & f\Delta_g f^k + f^k\Delta_g f + 2\langle \nabla f, \nabla f^k\rangle \\ & = & f\left(-\lambda k f^k + k(k-1)f^{k-2}|\nabla f|^2\right) + f^k(-\lambda f) + 2\langle \nabla f, kf^{k-1}\nabla f\rangle \\ & = & -\lambda k f^{k+1} + k(k-1)f^{k-1}|\nabla f|^2 + -\lambda f^{k+1} + 2kf^{k-1}|\nabla f|^2 \\ & = & -\lambda(k+1)f^{k+1} + k(k+1)f^{k-1}|\nabla f|^2. \end{array}$$

Isto é,

$$\frac{1}{k+1}\Delta_g f^{k+1} = -\lambda f^{k+1} + kf^{k-1}|\nabla f|^2.$$

Portanto, a equação (3.5) vale para todo natural $m \geqslant 2$. $\square$

Proposição 3.3. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e f uma autofunção do Laplaciano Δ_g. Então valem as seguintes fórmulas integrais:*

1. $\displaystyle\int_M \Delta_g f^m|\nabla f|^2 dM_g = -2m\int_M f^{m-1}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f)dM_g$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$.
2. $\displaystyle\int_M f^m|\nabla f|^2 dM_g = \frac{\lambda}{(m+1)}\int_M f^{m+2}\, dM_g$, *para todo* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Demonstração. Para mostrar a equação (1) basta usar o fato de que $\nabla(|\nabla f|^2) = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f$, assim

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_M \Delta_g f^m|\nabla f|^2 dM_g & \overset{(1.32)}{=} & \displaystyle -\int_M \langle \nabla(|\nabla f|^2), \nabla f^m\rangle dM_g \\ & = & \displaystyle -\int_M \langle 2\nabla_{\nabla f}\nabla f, mf^{m-1}\nabla f\rangle dM_g \\ & = & \displaystyle -2m\int_M f^{m-1}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f)dM_g, \end{array}$$

onde foi usado na última igualdade o $(1,1)$–tensor associado ao hessiano de f. Mostraremos agora a equação 2. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_M f^m|\nabla f|^2 dM_g &= \int_M \langle f^m \nabla f, \nabla f\rangle dM_g \\
&= \frac{1}{(m+1)}\int_M \langle (m+1) f^m \nabla f, \nabla f\rangle dM_g \\
&= \frac{1}{(m+1)}\int_M \langle \nabla f^{m+1}, \nabla f\rangle dM_g \\
&\overset{(1.32)}{=} -\frac{1}{(m+1)}\int_M f^{m+1}\Delta_g f dM_g \\
&= \frac{\lambda}{(m+1)}\int_M f^{m+2}\, dM_g,
\end{aligned}$$

o que prova o segundo item. □

A demonstração do Teorema 3.3 é baseada na seguinte fórmula integral.

Proposição 3.4. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e f uma autofunção do Laplaciano Δ_g. Então para todo $m \geqslant 2$, vale a seguinte fórmula integral:*

$$(m-1)\int_M f^{m-2}|\nabla f|^4 dM_g = \frac{(2+n)\lambda^2}{n(m+1)}\int_M f^{m+2} dM_g - 2\int_M f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g.$$

Demonstração. Multiplicando (3.5) por $|\nabla f|^2$, usando Lema 3.3 e pela definição do Hessiano de f sem traço $\mathring{\nabla}^2 f$, resulta em

$$\begin{aligned}
(m-1)\int_M f^{m-2}|\nabla f|^4 dM_g &= \frac{1}{m}\int_M \Delta_g f^m |\nabla f|^2 dM_g + \lambda \int_M f^m |\nabla f|^2 dM_g \\
&= \frac{1}{m}\left(-2m\int_M f^{m-1}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g\right) \\
&\quad + \lambda\left(\frac{\lambda}{(m+1)}\int_M f^{m+2} dM_g\right) \\
&= -2\int_M f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g - \frac{2}{n}\int_M f^{m-1}\Delta_g f |\nabla f|^2 dM_g. \\
&+ \frac{\lambda^2}{(m+1)}\int_M f^{m+2} dM_g
\end{aligned}$$

Usando o item 2. do Lema 3.3 no penúltimo termo da igualdade abaixo, segue que

$$\begin{aligned}(m-1)\int_M f^{m-2}|\nabla f|^4 dM_g &= -2\int_M f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f,\nabla f)dM_g + \frac{2\lambda}{n}\int_M f^m|\nabla f|^2 dM_g\\ &+ \frac{\lambda^2}{(m+1)}\int_M f^{m+2}dM_g\\ &= -2\int_M f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f,\nabla f)dM_g + \frac{2\lambda^2}{n(m+1)}\int_M f^{m+2}dM_g\\ &+ \frac{\lambda^2}{(m+1)}\int_M f^{m+2}dM_g\\ &= \frac{(2+n)\lambda^2}{n(m+1)}\int_M f^{m+2}dM_g - 2\int_M f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f,\nabla f)dM_g.\end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Sejam (M^n,g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave em M tal que $-\Delta_g f = \frac{R_g}{n-1}f$. Valem as seguintes equações:*

1. $\frac{1}{2}\Delta_g h = \mathring{Ric}_g(\nabla f,\nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2$.

2. $\frac{1}{2}\langle\nabla\psi,\nabla h\rangle = \mathring{\nabla}^2 f(\nabla\psi,\nabla f)$,

em que $\psi\in C^\infty(M)$ e $h = |\nabla f|^2 + \frac{R_g}{n(n-1)}f^2$.

Demonstração. Usando a equação (1.26) do Lema 1.1 e pelo fato que f é uma autofunção do Laplaciano Δ_g, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_g(\varphi\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f)) &= \varphi(\mathrm{div}_g(\mathring{\nabla}^2 f)(\nabla f) + \langle\nabla^2 f,\mathring{\nabla}^2 f\rangle) + \mathring{\nabla}^2 f(\nabla\varphi,\nabla f)\\ &= \varphi(\mathrm{div}_g(\mathring{\nabla}^2 f)(\nabla f) + \langle\mathring{\nabla}^2 f + \frac{R_g}{n}g,\mathring{\nabla}^2 f\rangle) + \mathring{\nabla}^2 f(\nabla\varphi,\nabla f)\\ &\overset{(1.27)}{=} \varphi(\mathring{Ric}_g(\nabla f,\nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2 + \frac{R_g}{n}\langle g,\mathring{\nabla}^2 f\rangle) + \mathring{\nabla}^2 f(\nabla\varphi,\nabla f)\\ &= \varphi(\mathring{Ric}_g(\nabla f,\nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2) + \mathring{\nabla}^2 f(\nabla\varphi,\nabla f),\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde usamos o fato que $\mathrm{div}_g(\mathring{\nabla}^2 u) = \mathring{Ric}_g(\nabla u,\cdot)$ do Exemplo 1.4. Por outro lado, o gradiente de h é da forma $\nabla h = 2\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f)$. Note que fazendo $\varphi = 1$ na equação (3.6) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_g h &= \mathrm{div}_g\left(\frac{1}{2}\nabla h\right) = \mathrm{div}_g(\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f)) = \mathring{Ric}_g(\nabla f,\nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2 + \mathring{\nabla}^2 f(\nabla\varphi,\nabla f)\\ &= \mathring{Ric}_g(\nabla f,\nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Passemos a prova do segundo item 2. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathring{\nabla}^2 f(\nabla\psi, \nabla f) &= \nabla^2 f(\nabla\psi, \nabla f) - \frac{\Delta_g f}{n}\langle\nabla\psi, \nabla f\rangle \\
&= \nabla^2 f(\nabla\psi, \nabla f) + \frac{R_g f}{n(n-1)}\langle\nabla\psi, \nabla f\rangle \\
&= \langle\nabla^2 f(\nabla f), \nabla\psi\rangle + \langle\nabla\psi, \frac{R_g f}{n(n-1)}\nabla f\rangle \\
&\overset{(3.7)}{=} \langle\frac{1}{2}\nabla h, \nabla\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\nabla h, \nabla\psi\rangle,
\end{aligned}$$

completando a prova do lema. □

De posse desse lema será possível demonstrar o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 3.2. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE. Suponha que*

$$\int_M Ric_g(\nabla f, \nabla f)dM_g \geqslant \frac{R_g}{n}\int_M |\nabla f|^2 dM_g, \tag{3.8}$$

então (M^n, g) é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$.

Demonstração. Integrando o item 1. do Lema 3.2, obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta_g h dM_g = \int_M \left(\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2\right) dM_g.$$

Assim

$$\int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = -\int_M \mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f)dM_g. \tag{3.9}$$

Logo, usando a hipótese (3.9), segue

$$0 \leqslant \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = \int_M \left(\frac{R_g}{n}|\nabla f|^2 - Ric_g(\nabla f, \nabla f)\right) dM_g \leqslant 0. \tag{3.10}$$

Como $|\mathring{\nabla}^2 f|^2$ é não negativa, desta maneira $\mathring{\nabla}^2 f = 0$ e assim $\nabla^2 f = -\frac{R_g}{n(n-1)}fg$. Portanto, usando o Teorema 2.1, em que $c^2 := \frac{R_g}{n(n-1)} > 0$, seque que (M^n, g) é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{R_g}}$. □

Prosseguindo, pela hipótese de compacidade de M^n, usando o item 2. do Lema 3.2 e fazendo $m = 2$ no item 1. da Proposição 3.3, deduzimos que

$$\int_M \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f)dM_g = \frac{(n+2)R_g^2}{4n(n-1)^2}\int_M f^3 dM_g. \tag{3.11}$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\int_M \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g &= \int_M \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla h\rangle dM_g \overset{(3.3)}{=} -\frac{1}{2}\int_M h\Delta_g f dM_g \\
&= -\frac{1}{2}\int_M |\nabla f|^2 \Delta_g f dM_g - \frac{R_g}{2n(n-1)}\int_M f^2 \Delta_g f dM_g \\
&= \frac{R_g^2}{4(n-1)^2}\int_M f^3 dM_g + \frac{R_g^2}{2n(n-1)^2}\int_M f^3 dM_g \\
&= \frac{(n+2)R_g^2}{4n(n-1)^2}\int_M f^3 dM_g.
\end{aligned}
$$

Além disso, considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e tomando $\varphi = f^m$ em (1.26), temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_g(f^m \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f)) &= f^m(\operatorname{div}_g(\mathring{\nabla}^2 f)(\nabla f) + \langle \nabla^2 f, \mathring{\nabla}^2 f\rangle) + \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f^m, \nabla f) \\
&= f^m(\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2) + m f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f).
\end{aligned}
$$

Integrando sobre M^n temos pelo Teorema 1.31 que

$$
0 = \int_M (f^m(\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2) + m f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f)) dM_g,
$$

donde

$$
\int_M f^m(\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2) dM_g = -m\int_M f^{m-1}\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g. \tag{3.12}
$$

Por outro lado, invocando novamente (1.26), no Lema 1.1, e por (1.24) segue que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_g(f^m \mathring{Ric}_g(\nabla f)) &= f^m(\operatorname{div}_g(\mathring{Ric}_g(\nabla f)) + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}_g\rangle) + \mathring{Ric}_g(\nabla f^m, \nabla f) \\
&= f^m \langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{Ric}_g\rangle + m f^{m-1}\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f).
\end{aligned}
$$

O último ingrediente que nos falta são as seguintes fórmulas integrais.

Lema 3.3. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE. Então valem*

1. *(M^n, g) é Einstein se, e somente se, ∇f é um campo de vetores conforme.*
2. $\int_M f^m \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g = -m\int_M f^{m-1}\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) dM_g.$
3. $\int_M (f+1)|\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = -2\int_M \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g.$
4. $\int_M f^m \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\int_M f^{m-i}|\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g$ *para todo natural $m \geqslant 1$.*

Demonstração. Suponha que (M^n, g) seja Einstein, então $Ric_g = \frac{R_g}{n} g$, a saber $\mathring{Ric}_g = 0$, segue que $\mathring{\nabla}^2 f = 0$, assim usando a equação da Proposição 1.3 ∇f é conforme. Reciprocamente, como

$$(1+f)^2 |\mathring{Ric}_g|^2 = |\mathring{\nabla}^2 f|^2,$$

se ∇f é um campo conforme, segue que novamente pela Proposição 1.3, $\nabla^2 f = \frac{\Delta_g f}{n} g$. Isto é, $\mathring{\nabla}^2 f = 0$. Logo, $(1+f)^2 |\mathring{Ric}_g|^2 = 0$. Como o conjunto $f^{-1}(\{-1\})$ tem medida nula, temos que $\mathring{Ric}_g = 0$. Portanto, (M^n, g) é Einstein. Completando a prova do primeiro item.

Observe que $\mathrm{div}_g(f^m \mathring{Ric}_g(\nabla f)) = f^m \langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{Ric}_g \rangle + m f^{m-1} \mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f)$. Integrando em M^n, obtemos

$$0 = \int_M \mathrm{div}_g(f^m \mathring{Ric}_g(\nabla f)) dM_g = \int_M f^m \langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{Ric}_g \rangle dM_g + \int_M m f^{m-1} \mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) dM_g.$$

Com isto, obtemos o item 2. Passemos a prova do terceiro item 3. Usando o item anterior e o Lema 3.2, segue

$$\begin{aligned}
\int_M \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g &= -\int_M f \left(\mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + |\mathring{\nabla}^2 f|^2 \right) dM_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M f^2 \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g - \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M f \langle f \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g - \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M f \langle \mathring{\nabla}^2 f - \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g - \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M (f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 - \langle f \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle) dM_g - \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M (-\langle \mathring{\nabla}^2 f - \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g - f |\mathring{\nabla}^2 f|^2) dM_g \\
&= -\frac{1}{2} \int_M (1+f) |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g - \frac{1}{2} \int_M \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g \\
&= -\frac{1}{2} \int_M (1+f) |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g.
\end{aligned}$$

O cancelamento da última parcela na penúltima linha é devido a definição do operador divergente, ou seja

$$0 = (\mathrm{div}_g \mathring{Ric}_g)(\nabla f) = \mathrm{div}_g(\mathring{Ric}_g(\nabla f)) + \langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{Ric}_g \rangle.$$

Integrando em M^n a equação acima e usando o Teorema 1.31

$$0 = \int_M \mathrm{div}_g(\mathring{Ric}_g(\nabla f))dM_g + \int_M \langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{Ric}_g \rangle dM_g.$$

Para finalizar resta-nos mostrar a identidade integral por indução para $m \geqslant 1$. Para $m = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M f\langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g &= \int_M \langle f\mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g \\
&= \int_M \langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g - \int_M \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g \\
&= \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g.
\end{aligned}$$

Suponha que seja verdade para algum $m = k$. Afirmamos que é verdade para $m = k+1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_M f^{k+1}\langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g &= \int_M f^k\langle f\mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g \\
&= \int_M f^k\langle \mathring{\nabla}^2 f, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g - \int_M f^k\langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f\rangle dM_g \\
&= \int_M f^k|\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\int_M f^{k-i}|\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\int_M f^{k+1-i}|\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g.
\end{aligned}$$

□

Passemos a demonstração do segundo resultado principal deste capítulo, onde em [12], Filho provou que sobre algumas fórmulas integrais generalizadas da esfera canônica $\mathbb{S}^n$ juntamente com sua função altura são suficiente para que uma métrica CPE seja Einstein. O leitor já deve ter percebido que a ideia é provar que ∇f é conforme, e pelo item 1 do Lema 3.3, segue o resultado.

Teorema 3.3. *Seja (M^n, g) uma métrica CPE. Se valem as seguintes fórmulas integrais:*

1. $\int_M |\nabla f|^4 dM_g = \dfrac{(n+2)R_g^2}{3n(n-1)^2}\int_M f^4 dM_g$ *e*
2. $\int_M f^3 dM_g \geqslant 0$,

então (M^n, g) é Einstein.

Demonstração. Escolhendo $m = 2$ e $\lambda = \frac{R_g}{n-1}$ na Proposição 3.4, obtemos

$$\int_M |\nabla f|^4 dM_g = \frac{(n+2)R_g^2}{3n(n-1)^2} \int_M f^4 dM_g - 2 \int_M f \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g. \tag{3.13}$$

Pela hipótese 1., segue que $\int_M f \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g = 0$. Agora usando a equação (3.12) e os itens 2. e 4. do Lema 3.3, segue que

$$\begin{aligned}
\int_M f^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g &\overset{(3.12)}{=} - \int_M f^2 \mathring{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) dM_g = \frac{1}{3} \int_M f^3 \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g \\
&= \frac{1}{3} \int_M f^2 \langle f \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g = \frac{1}{3} \int_M f^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g - \frac{1}{3} \int_M f \langle f \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle \, dM_g \\
&= \frac{1}{3} \int_M f^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g - \frac{1}{3} \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g + \frac{1}{3} \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&\quad - \frac{1}{3} \int_M \langle \mathring{Ric}_g, \mathring{\nabla}^2 f \rangle dM_g.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos obtemos

$$\int_M f^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = \frac{1}{2} \int_M (1-f) |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g. \tag{3.14}$$

Desta maneira, podemos deduzir que

$$\int_M (f+1)^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = -\frac{3(n+2)R_g^2}{4n(n-1)^2} \int_M f^3 dM_g.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_M (f+1)^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g &= \int_M f^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g + 2 \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g + \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M (1-f) |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g + 2 \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g + \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= \frac{3}{2} \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g + \frac{3}{2} \int_M f |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = \frac{3}{2} \int_M (f+1) |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g \\
&= -3 \int_M \mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) dM_g \overset{(3.11)}{=} -\frac{3(n+2)R_g^2}{4n(n-1)^2} \int_M f^3 dM_g.
\end{aligned}$$

Pela hipótese 2., temos

$$0 \leqslant \int_M (f+1)^2 |\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = -\frac{3(n+2)R_g^2}{4n(n-1)^2} \int_M f^3 dM_g \leqslant 0.$$

Isto é,

$$\int_M (f+1)^2|\mathring{\nabla}^2 f|^2 dM_g = 0.$$

Como o integrando é não negativo, temos

$$(f+1)^2|\mathring{\nabla}^2 f|^2 \ = 0. \tag{3.15}$$

Já que $f^{-1}(\{-1\})$ possui medida nula em M^n, concluímos que $\mathring{\nabla}^2 f = 0$, ou seja, ∇f é um campo de vetores conforme. Portanto, pelo item 1. do Lema 3.3, segue o resultado. □

O próximo corolário generaliza o Teorema 3.1 no seguinte sentido: basta impor que a função definida em (3.1) seja constante ao longo do fluxo do gradiente de f.

Corolário 3.1. *Se $h = |\nabla f|^2 + \frac{R_g}{n(n-1)} f^2$ é constante ao longo do campo de vetores ∇f, então teremos a mesma conclusão do Teorema 3.3.*

Demonstração. Como h é constante ao longo do fluxo ∇f, então $0 = dh(\nabla f) = \langle \nabla h, \nabla f\rangle$. Pelo item 2. do Lema 3.2, obtemos $\mathring{\nabla}^2 f(\nabla f, \nabla f) = 0$. Usando a equação (3.11), segue

$$0 = \frac{(n+2)R_g^2}{4n(n-1)^2}\int_M f^3 dM_g.$$

Ou seja, $\int_M f^3 dM_g = 0$. Por outro lado, a equação (3.13), nos informa que $\int_M |\nabla f|^4\, dM_g = \frac{(n+2)R_g^2}{3n(n-1)^2}\int_M f^4 dM_g$. Pelo Teorema 3.3, segue a nossa assertiva. □

Referências Bibliográficas

[1] ANDREWS, B. and HOPPER, C. *The Ricci Flow in Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 2011.

[2] BARROS, A. and RIBEIRO Jr., E.: *Critical point equation on four-dimensional compact manifolds* . Math. Nachr. 287, N. 14-15, (2014) 1618-1623.

[3] BARROS, A., LEANDRO, B. and RIBEIRO Jr, E.: *Critical metrics of the total scalar curvature functional on 4-manifolds*, Math. Nachr. Volume 288, Issue 16, (2015) 1814-1821.

[4] BENEDITO, L. *A note on critical point metrics of the total scalar curvature functional*, J. Math. Anal. Appl., 424 (2015), 1544-1548.

[5] BESSE, A. L. *Einstein Manifolds*, Springer, Germany, 1987.

[6] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[7] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[8] CARMO, M. P. *O Método do Referencial Móvel*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[9] CHANG, J., HWANG, S. and YUN, G.: *Critical point metrics of the total scalar curvature*. Bull. Korean Math. Soc., 49 (2012) 655-667.

[10] EJIRI N. *A negative answer to a conjecure of conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc., Japan, 1981.

[11] FILHO, F. B. *A partial answer to the CPE conjecture, diameter estimates and manifolds with constant energy*, tese de doutorado, UFC (2015).

[12] FILHO, F. B. *Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature functional*, Arch. Math., 104 (2015), 463-470.

[13] GOLDBERG, S. and KOBAYASHI, S. *The conformal transformation group of a compact Riemannian manifold*, Amer. J. Math., 84 (1962), 170-174.

[14] GOLDBERG, S. and KOBAYASHI, S. *The conformal transformation group of a compact homogeneous Riemannian manifold*, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 378-381.

[15] GOMES, J. N. *Operadores diferenciáveis em variedades Riemannianas, Notas de Aula*, USP, São Paulo, 2015.

[16] HWANG, S. *Critical point of the total scalar curvature functional on the space of metrics of constant scalar curvature.* J. Manusc. Math., 103 (2000), 135-142.

[17] HSIUNG, C. *On the group of conformal transformal transformation of a compact Riemannian manifold*, J. Differential Geometry, 2 (1968), 185-190.

[18] KOISO, N. *A decomposition of the space $\mathcal{M}$ of Riemannian metrics on a manifolds.* O. J. of Math. 16 (1979), 423-429.

[19] LAFONTAINE, J. *Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata.* J. Math. Pures Appliquées, 62 (1983), 63-72.

[20] LEE, J. M. *Introduction to smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[21] LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2011.

[22] LEE, J. M. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[23] LICHNEROWICZ, A. *Sur les transformations conformes d'une variété riemannienne compacte*, C. R . Acad. Sci, 259 (1964), 697-700.

[24] NAGANO, T. *The conformal transformation on a space with parallel Ricci tensor*, J. Math. Soc., 11 (1959), 10-14.

[25] OBATA, M. *The conjecture on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry, 6 (1971), 247-258.

[26] PETERSEN, P. *Riemannian Geometry*, 3ª edição, Springer, New York, 2016.

[27] QING, J. and YUAN, W.: *A note on static spaces and related problems.* Journal of Geometry and Physics 74(2013) 18-27.

[28] SOUSA, G. A. *Rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente*, Dissertação de mestrado, UFAM (2019).

[29] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1979.

[30] YANO, K. and NAGANO, T. *Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformation*, Ann. of Math., 69 (1959), 451-461.