

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Computação
Programa de Pós-Graduação em Informática

Consenso em Sistemas Multiagentes Heterogêneos:
Uma Abordagem Robusta Aplicada a Veículos Robóticos

Carlos Raimundo Pereira dos Santos Junior

Manaus
2019

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Computação
Programa de Pós-Graduação em Informática

Consenso em Sistemas Multiagentes Heterogêneos:
Uma Abordagem Robusta Aplicada a Veículos Robóticos

Carlos Raimundo Pereira dos Santos Junior

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Informática.

Orientador: Prof. Dr. José Reginaldo Hughes Carvalho

Manaus

2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237c Santos Junior, Carlos Raimundo Pereira dos
Consenso em sistemas multiagentes heterogêneos : Uma
abordagem robusta aplicada a veículos robóticos / Carlos
Raimundo Pereira dos Santos Junior. 2019
114 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: José Reginaldo Hughes Carvalho
Tese (Doutorado em Informática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Consenso. 2. Sistemas multiagentes. 3. Veículos robóticos. 4.
Desigualdades matriciais lineares. I. Carvalho, José Reginaldo
Hughes II. Universidade Federal do Amazonas III. Título



PODER EXECUTIVO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA



UFAM

FOLHA DE APROVAÇÃO

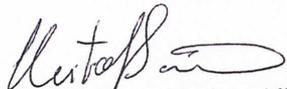
"Consenso em Sistemas Multiagentes Heterogêneos: Uma Abordagem Robusta Aplicada a Veículos Robóticos"

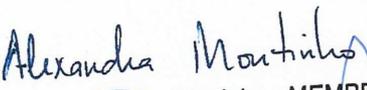
CARLOS RAIMUNDO PEREIRA DOS SANTOS JUNIOR

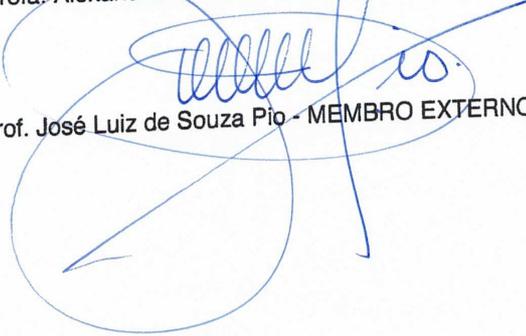
Tese de Doutorado defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Professores:


Prof. Raimundo da Silva Barreto - PRESIDENTE


Prof. José Raul Carreira Azinheira - MEMBRO EXTERNO


Prof. Heitor Judiss Savino - MEMBRO EXTERNO


Profa. Alexandra Moutinho - MEMBRO EXTERNO


Prof. José Luiz de Souza Pio - MEMBRO EXTERNO

Manaus, 17 de Abril de 2019

À memória dos meus avôs José Maria e Sebastião.

Agradecimentos

Vinte anos se passaram desde que eu coloquei os pés pela primeira vez em uma sala de aula. Foram oito anos de Ensino Fundamental, três anos de Ensino Médio, três anos de Graduação, dois anos de Mestrado e agora completam-se quatro anos de Doutorado. Qual a etapa mais difícil? Não sei. O que posso dizer é que nenhuma foi fácil e que de um jeito ou de outro as dificuldades sempre estiveram presentes. No entanto, o momento agora é de agradecer a todos aqueles que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização de mais esta etapa.

Inicialmente gostaria de agradecer a todos os meus familiares e em especial à minha mãe Orneia, meu pai Carlos, minha avó Lina e aos meus irmãos, Henrique, Maria Clara e Karol. Mesmo sem entender muito bem o que eu estava fazendo e ao que eu estava me dedicando por todo esse tempo, me apoiavam de forma incondicional e isso foi fundamental para que eu chegasse até aqui. Um agradecimento especial também para a Gessika, minha noiva, pela motivação, companheirismo e infinita paciência principalmente nos momentos em que eu estive distante por conta das atividades do doutorado.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Professor Reginaldo Hughes por aceitar o desafio de me orientar uma vez que a minha dedicação era dividida entre o doutorado e o trabalho. Sempre digo que tive muita sorte de ter sido orientado por ele e serei sempre muito grato por isso. Aprendi muito durante esse período com as nossas discussões sobre os mais diversos tópicos. Agradeço ainda ao Professor José Pinheiro, que foi meu orientador no início do doutorado e quem me deu todo o suporte necessário para que eu pudesse entrar no PPGI UFAM.

Agradeço ao Professor Heitor Savino da UFAL e ao Professor Fernando Souza da UFMG, que considero como meus co-orientadores nessa jornada, por todos os ensina-

mentos e apoio durante as discussões e definições do trabalho mesmo que a distância. A disponibilidade e o empenho de vocês foi determinante em várias etapas do desenvolvimento do trabalho.

Aos Professores José Raul Azinheira e Alexandra Moutinho e toda a equipe do Instituto Superior Técnico de Lisboa, aqui fica o meu muito obrigado por todo o apoio institucional e orientação que obtive durante o período que estive com vocês em Portugal finalizando a etapa de experimentos deste trabalho. Agradeço também ao João, Heitor e George que disponibilizaram o seu tempo e conhecimento para ajudar no desenvolvimento destes experimentos.

Sou grato também à todo o corpo técnico e docente do Instituto de Computação da UFAM, em especial aos professores Altigran, Edleno, Eulanda, Tanara, Alberto, Pio, Marco, Barreto e Reginaldo e aos colegas de turma e laboratório George, Ivanilse, Ana Carolina, Ralph, Hugo e Anderson por fazerem parte do processo de formação durante as disciplinas que serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao Instituto SENAI de Inovação em Microeletrônica e ao SENAI como um todo, em especial os professores Ilmar e Paulo Tiago que foram a base da minha formação em eletrônica, aos diretores Casarini, Aldemurpe e Rogério que entenderam, permitiram e garantiram a flexibilidade necessária em alguns períodos durante o desenvolvimento desta tese e aos amigos e colegas de trabalho Thiago, Márcia, Valtemar, Luciano, Klyssia, Paulo, Marcus, Kenneton, Gabriel, Álvaro e Jhonatan que nos momentos de distração contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

Um agradecimento especial à FAPEAM pelo apoio financeiro parcial do projeto durante os dois períodos de missão de estudos no Instituto Superior Técnico de Lisboa.

Por fim, à todos vocês, o meu muito obrigado.

*Quando mais aumenta o nosso conhecimento,
mais evidente fica a nossa ignorância.*

John F. Kennedy

Resumo

O termo consenso, quando associado a sistemas multiagentes, está relacionado a uma estratégia de controle que possibilite a esse grupo de agentes, por meio da troca de informações, chegar a um acordo sobre um determinado valor de interesse. Problemas como alinhamento de satélites, sensoriamento distribuído, ranqueamento de páginas e formação de robôs, por exemplo, podem ser modelados como um problema de consenso. Isso tem atraído cada vez mais a atenção de pesquisadores de diversas áreas do conhecimento. Considerando peculiaridades como atrasos e heterogeneidade de agentes, este trabalho, apresenta a proposta de métodos baseados em desigualdades matriciais lineares, para analisar se um determinado sistema multiagente atinge o consenso. A metodologia proposta para a formalização dos métodos consiste em reescrever o sistema multiagente como um sistema linear e, dessa forma, analisar o consenso por meio da teoria de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii. A eficiência dos métodos propostos é verificada por meio de simulações numéricas e de experimentos em um problema real de formação de veículos robóticos heterogêneos.

Palavras-chave: consenso, sistemas multiagentes heterogêneos, atraso no tempo, Lyapunov-Krasovskii, LMI, formação de robôs.

Abstract

The word consensus, when associated with multiagent systems, is related to a control strategy that allows this group of agents through the information exchange, reaches agreement on a certain interest value. Problems such as satellite alignment, distributed sensing, page ranking, and robot formation, for example, can be modeled as a consensus problem. This has attracted more and more attention from researchers in various fields of knowledge. Considering peculiarities such as delays and heterogeneity of agents, this work presents the proposal of methods based on linear matrix inequalities, to analyze if a certain multiagent system reaches consensus. Proposed methodology for the formalization of the methods consists in rewriting the multiagent system as a linear system and, thus, analyzing the consensus through the Lyapunov-Krasovskii stability theory. The efficiency of the proposed methods is verified by numerical simulations and experiments in a real problem of the formation of heterogeneous robotic vehicles.

Key-words: consensus, heterogeneous multiagent systems, time delay, Lyapunov-Krasovskii, LMI, robot formation.

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de um grafo não direcionado.	14
3.2	Exemplo de um grafo direcionado.	14
3.3	Exemplo de um multigrafo (ou grafo não simples).	15
3.4	Subgrafo do vértice 1 3.2.	16
3.5	Subgrafo do vértice 2 3.2.	16
3.6	Subgrafo do vértice 3 do grafo da Figura 3.2.	16
3.7	Exemplo de árvore geradora mínima direcionada na qual o nó 1 é a raiz. .	17
3.8	Exemplo de árvore geradora mínima direcionada na qual o nó 2 é a raiz. .	17
3.9	Exemplo de árvore geradora mínima direcionada na qual o nó 3 é a raiz. .	18
4.1	Exemplo do atraso considerando nesta tese ($\tau = 0,2$ e $\mu = 0,1$).	25
4.2	Grafo de um SMAH com topologia fixa, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) e composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e um agente com dinâmica de segunda ordem (agente 3).	25
4.3	Grafo de um SMAH com topologia fixa, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) e composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e dois agentes com dinâmica de segunda ordem (agentes 3 e 4).	28
5.1	Fluxograma Passo-a-Passo da Aplicação do Método para Análise do Consenso em SMAHs com Topologia Fixa e Atrasos Variantes	43

5.2	Topologia de comunicação do sistema multi-robôs composto por 2 robôs terrestres com dinâmica de primeira ordem integrador puro (robôs 1 e 2) e 2 robôs aéreos com dinâmica integrador puro de segunda ordem (robôs 3 e 4).	45
5.3	Formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$	49
5.4	Trajétórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$). Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.	49
5.5	Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.25) com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$). . .	50
5.6	Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.26) com condições iniciais, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$). . .	50
5.7	Trajétórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais. .	51
5.8	Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.25) com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$	52

5.9	Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.26) com condições iniciais, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$	52
5.10	Trecho de 5 segundos dos atrasos variantes nas ações de controle ($\tau = 0,400$ e $\mu = 0,018$) sofridos pelos robôs durante a execução da trajetória da Figura 5.7.	53
5.11	Trajetoórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,600$ com $\mu = 0,100$. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.	53
5.12	Trajetoória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.25) com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,600$ com $\mu = 0,100$	54
5.13	Trajetoória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.26) com condições iniciais, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,600$ com $\mu = 0,100$	54
5.14	Fluxograma Passo-a-Passo da Aplicação do Método para Análise do Consenso Com Taxa de Convergência Estimada em SMAHs com Topologia Fixa e Atrasos Variantes	61
5.15	Topologia de comunicação e formação desejada do sistema multi-robôs heterogêneo composto por 8 robôs terrestres (robôs de 1 a 8) com dinâmica integrador puro de primeira ordem e 8 robôs aéreos (robôs de 9 a 16) sujeitos a atrasos $\tau_i(t)$ variantes nas ações de controle.	63

5.16	Trajetórias do sistema multi-robôs da Figura 5.15 nas coordenadas \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} sob a taxa de convergência estimada $\delta = 0.202$ e atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0.150$ e $\mu = 0.060$. Os quadrados representam a posição inicial e os triângulos a posição final.	66
5.17	Trajetória temporal do sistema da Figura 5.15 considerando $\tau = 0.200$, $\mu = 0.070$, $\delta = 0.158$. Acima: trajetória temporal dos estados $x(t)$ (linhas sólidas) e uma função exponencial decrescente (linha tracejada), deslocada para o valor do consenso dos Robôs 1, 8, 9 e 16 dada por $(40 - x^*)e^{-\delta t} + x^*$. Abaixo: trajetória temporal das velocidades na coordenada \mathbf{x} $v^{\mathbf{x}}(t)$ e função exponencial decrescente $10e^{-\delta t}$	67
5.18	Trecho do atraso variante nas ações de controle aplicado na simulação temporal da Figura 5.17 $\tau_1^{\mathbf{x}}(t)$ com $\tau = 0.200$ e $\mu = 0.070$	67
6.1	Entrada principal do Campus Alameda do Instituto Superior Técnico de Lisboa (acima) e Entrada do Instituto de Engenharia Mecânica (abaixo).	69
6.2	Dependências do Laboratório de Controlo, Automação e Informática Industrial do Instituto de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico de Lisboa.	69
6.3	Vista superior (esquerda) e inferior (direita) do Omni-ANT.	70
6.4	Veículo robótico aéreo utilizado nos experimentos reais (AR.Drone 2.0).	71
6.5	Exemplo de uma captura realizada pelo Qualisys.	75
6.6	Arquitetura geral dos experimentos com veículos robóticos reais.	75
6.7	Omni-ANT adaptado para as aplicações desta tese.	76
6.8	AR.Drone adaptado para as aplicações desta tese.	77
6.9	Topologia de troca de informações de um sistema multiagente heterogêneo sujeito a atrasos variantes $\tau_i(t)$, composto por 3 agentes com dinâmica integrador puro de primeira ordem (agentes 1, 2 e 3), 1 agente com dinâmica integrador puro de segunda ordem (agente 4) e um agente virtual (agente 0).	78
6.10	Formação $\lambda^{\mathbf{x}} = [0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -2]^T$ e $\lambda^{\mathbf{y}} = [0 \ 0 \ 0,5 \ -0,5 \ 0]^T$ na qual existe um <i>Agente 0</i> (virtual) na mesma posição do <i>Agente 1</i>	79

6.11	Trajетórias do sistema definido em (6.7) e (6.8) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [1 \ 3,9 \ 2,8 \ -2,2 \ -2,0]^T$, $v^{\mathbf{x}}(0) = [0]^T$, $Y(0) = [0 \ -0,9 \ 0,8 \ -0,6 \ -0,7]^T$ e $v^{\mathbf{y}}(0) = [0]^T$, $k_5 = 2$, considerando a topologia da Figura 6.9, a formação da Figura 6.10 e que o sistema não está sujeito a atrasos. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.	80
6.12	<i>Arena</i> - espaço utilizado para a realização dos experimentos reais.	81
6.13	Condição inicial dos <i>Agentes</i> 1, 2, 3 e 4 no experimento com veículos reais.	82
6.14	Trajетórias do sistema de um sistema multiagente heterogêneo real composto por 3 veículos terrestres e 1 veículo aéreo, com condições iniciais $X(0) = [1 \ 3,9 \ 2,8 \ -2,2 \ -2,0]^T$, $v^{\mathbf{x}}(0) = [0]^T$, $Y(0) = [0 \ -0,9 \ 0,8 \ -0,6 \ -0,7]^T$ e $v^{\mathbf{y}}(0) = [0]^T$, $k_5 = 2$, considerando a topologia da Figura 6.9, a formação da Figura 6.10 e que os atrasos do sistema são desprezíveis. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.	82
6.15	Comparação das trajetórias das Figuras 6.11 e 6.14 na qual as linhas sólidas representam as trajetórias esperadas pela simulação e as linhas tracejadas as trajetórias realizadas pelo sistema real. Os círculos indicam a posição e inicial, os quadrados a posição final da trajetória tracejada e os triângulos a posição final da trajetória sólida.	83
6.16	Comparação temporal das trajetórias das Figuras 6.11 e 6.14 na qual as linhas sólidas representam as trajetórias esperadas pela simulação e as linhas tracejadas as trajetórias realizadas pelo sistema real.	83
6.17	Trajетória real dos veículos do sistema. De 0 a 12 segundos em 6 quadros.	84

Lista de Tabelas

5.1	Maior perturbação μ para diferentes atrasos τ com $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$, na qual o método proposto pelo Teorema 5.1 garante que o SMAH com topologia dada pelo grafo \mathcal{G} da Figura 5.2 atingirá o consenso.	48
5.2	Maior valor de taxa de convergência δ obtida a partir do Teorema 5.2 para um dado par de atraso médio e variação do atraso (τ, μ)	65

Lista de Abreviaturas

IST	Instituto Superior Técnico de Lisboa
LMI	Desigualdade Matricial Linear (do inglês: Linear Matrix Inequalities)
SMA	Sistema Multi-Agente
SMAH	Sistema Multi-Agente Heterogêneo
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

Sumário

Resumo	ix
Abstract	x
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvi
Lista de Abreviaturas	xvii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Motivação e Justificativa	3
1.3 Descrição do Problema	3
1.4 Objetivos	4
1.5 Metodologia	5
1.6 Organização da Tese	6
2 Revisão da Literatura	8
2.1 Perspectiva Histórica do Problema do Consenso em Sistemas Multi-Agentes	8
2.2 Consenso em Sistemas Multi-Agentes Sujeitos a Atrasos	10
2.3 Consenso em Sistemas Multi-Agentes Sujeitos a Topologia Variável	11
2.4 Consenso em Sistemas Multi-Agentes Heterogêneos	12
3 Ferramentas Matemáticas	13
3.1 Teoria dos Grafos	13

3.2	Desigualdades Matriciais Lineares	19
3.3	O Complemento de Schur	20
3.4	Sistemas Sujeitos a Atrasos no Tempo	21
3.4.1	Análise de Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii	22
3.4.2	Desigualdade de Jensen	22
4	Formulação do Problema	23
4.1	Modelagem do Sistema Multiagente Heterogêneo	23
4.2	Protocolo de Consenso	24
4.3	Consenso como Problema de Estabilidade	30
5	Métodos Propostos	36
5.1	SMAHs com Topologia Fixa e Atrasos Variantes	36
5.1.1	Exemplos Numéricos	44
5.2	Extensão para Análise com Estimção do Tempo de Consenso	55
5.2.1	Exemplos Numéricos	62
6	Consenso no Controle de Formação de Veículos Robóticos Heterogêneos	68
6.1	Modelagem do Sistema Multi-Robôs	70
6.1.1	Veículos Robóticos Terrestres	70
6.1.2	Veículos Robóticos Aéreos	71
6.1.3	Controle de Formação Baseado em Consenso	72
6.2	Arquitetura Experimental	74
6.3	Resultados Experimentais	77
7	Considerações Finais e Perspectivas	85
	Referências Bibliográficas	88

Introdução

Na vida, não existe nada a temer, mas a entender.

Marie Curie

Este capítulo trata da parte introdutória desta tese. Aqui serão apresentados todos conceitos fundamentais para um entendimento do problema e das soluções propostas. Inicialmente apresenta-se uma contextualização, onde são abordados os conceitos mais básicos como o de o que é um agente. Em seguida, apresenta-se a motivação e justificativa para o desenvolvimento do trabalho. Logo depois, o problema tratado pela tese é descrito, seguido pelos objetivos e pela metodologia. Por fim é apresentada uma visão global da tese com um breve resumo dos capítulos posteriores.

1.1 Contextualização

O termo agente pode ser classificado de diversas maneiras. Existe uma série de abordagens e pontos de vista que são adotados por diversas áreas de pesquisa. Normalmente, a definição de um agente está associada às funcionalidades e características apresentadas pelo sistema na qual esse agente faz parte. O dicionário Ferreira (2013) define um agente como uma pessoa que opera, agencia ou age e também como aquilo que produz, ou é capaz de produzir determinado efeito. Claramente, esta definição se aplica quando o agente se trata de um ser humano. Com uma outra visão, Russell & Norving (2003) dizem que um agente pode ser visto como tudo aquilo que percebe seu ambiente por meio de sensores e

que atua sobre ele por meio de atuadores, o que generaliza o termo também para agentes artificiais. Outra definição é a descrita por Ferber (1999) na qual um agente pode ser uma entidade física ou virtual; física quando o agente é concreto e atua no mundo real; virtual quando é uma entidade abstrata como uma rotina de software.

Sistemas multiagentes (SMAs) são sistemas compostos por múltiplos agentes que possuem duas características fundamentais: a capacidade de agir de forma autônoma tomando decisões para atingir seus próprios objetivos; e a capacidade de interagir com outros agentes do sistema (Russell & Norving 2003). Consideram-se os SMAs como sistema multiagentes heterogêneos (SMAHs), quando os agentes do sistema possuem características diferentes. Esta tese concentra seus resultados para problemas com SMAHs.

O controle de um SMA ou SMAH em geral é abordado a partir de duas vertentes, uma delas baseia-se em técnicas de controle centralizado na qual uma unidade central realiza o controle de todo os agentes do sistema; e a outra no controle distribuído (abordagem utilizada pelos métodos propostos por esta tese) onde cada agente possui sua própria unidade de controle. Em uma aplicação prática, as duas abordagens poderiam ser utilizadas, porém, a abordagem do controle distribuído possui mais vantagens dadas as restrições de equipamentos de comunicação e, além disso, geralmente possui menor custo operacional, maior robustez e melhor adaptabilidade. Mais informações sobre controle distribuído podem ser obtidas em D'Andrea & Dullerud (2003) e Massioni & Verhaegen (2009). Os métodos propostos nesta tese utilizam a abordagem de controle distribuído.

Dentre os problemas estudados no campo dos SMAs, um dos principais, é o da determinação de uma lei de controle (posteriormente chamada de protocolo de consenso) que possibilite ao grupo de agentes, por meio de troca de informações, chegar a um acordo sobre um determinado valor de interesse como, para o caso de veículos robóticos, posição, velocidade e aceleração. Esta situação é conhecida como problema de consenso. Atualmente, o consenso vem sendo estudado em diversos contextos: controle coordenado de veículos aéreos não tripulados (VANTs) (Beard, McLain, Goodrich & Anderson 2002, Jesus, Pimenta, Tôrres & Mendes 2013), formação em voo (Giulietti, Pollini & Innocenti 2000), controle cooperativo de agentes autônomos (Ren, Beard & Atkins 2007, Jadbabaie, Lin & Morse 2003, Olfati-Saber 2006), alinhamento de satélites (Mesbahi & Hadaegh 1999) e em outras áreas que podem ser vistas em Beard & Atkins (2005), Cao, Yu, Ren & Chen (2013), Qin, Ma, Shi & Wang (2017) e Dorri, Kanhere & Jurdak (2018).

1.2 Motivação e Justificativa

Recentemente, estudos envolvendo SMAs vêm despertando o interesse de pesquisadores de diversas áreas do conhecimento. Essa abrangência se deve à gama de aplicações e aos grandes avanços tecnológicos dos sistemas de comunicação que viabilizaram a forma na qual os agentes trocam informações.

Uma das motivações para pesquisas na área de SMA é o simples fato de que determinados sistemas, se compostos por vários agentes simples, teriam um melhor desempenho do que se fossem compostos por um único agente complexo. Imagine uma situação em que um agente (na forma de um grande robô) carregando um tanque de água é usado para combater um incêndio em um ambiente de destroços. Este agente não poderia falhar e ainda deveria gastar bastante tempo navegando em torno de todas as partes do incêndio para apagá-lo. Agora se considerarmos um grupo de agentes (na forma de pequenos robôs) com tanques, podemos distribuí-los em torno do incêndio e dividir os esforços até que todo o fogo se apague. Além disso, se um dos robôs falhar durante a operação, o grupo pode simplesmente se reorganizar, redistribuir os esforços e garantir o êxito da operação.

Outra motivação é o problema de busca e salvamento é uma aplicação típica em que a flexibilidade e redundância de um sistema multiagente (com múltiplos robôs) seria essencial para uma missão bem-sucedida. Há um certo tempo em que robôs vêm sendo utilizados durante operações de resgate. Em 2005, por exemplo, robôs teleguiados ajudaram a resgatar um submarino russo aprisionado no oceano pacífico (CNN 2005). Atualmente, e em aplicações futuras, podemos prever o uso de robôs autônomos colaborando em missões como esta, inclusive robôs autônomos heterogêneos.

É importante ressaltar que em determinadas aplicações (como por exemplo, o de mapeamento simultâneo e sincronizado feito por robôs terrestres e aéreos (Howard 2005)), alguns sistemas possuem limitações a respeito da capacidade dos agentes, o que gera uma real necessidade e motivação para o desenvolvimento de métodos para lidar com o controle de SMAHs.

1.3 Descrição do Problema

Em aplicações reais, sistemas multiagentes estão normalmente sujeitos a diversas peculiaridades tal como:

1. atrasos na comunicação: devido as limitações físicas e capacidade de transmissão dos sistemas de comunicação;
2. atrasos nas ações de controle: causados por atrasos na comunicação entre os agentes, tempo de processamento de informações e das ações dos atuadores;
3. mudanças de topologia de comunicação: causadas de forma proposital quando a aplicação necessita que forma em que os agentes se comunicam mude ou de forma não proposital causada pelas falhas nas trocas de informações entre os agentes;
4. heterogeneidade dos agentes: pois, mesmo agentes de mesma natureza podem possuir dinâmicas diferentes devido, por exemplo, ao desgaste diferenciado dos atuadores e, além disso, existem aplicações em que os agentes podem ser de natureza diferente, por exemplo, o problema de formação entre robôs terrestres e robôs aéreos.

Com exceção dos atrasos na comunicação e mudanças de topologia, todas as demais peculiaridades comentadas anteriormente serão detalhadas e tratadas nos modelos dos sistemas multiagentes considerados por esta tese. Neste sentido, resume-se a problemática tratada por esta na seguinte questão:

- Dadas as dinâmicas dos agentes e a forma como eles se comunicam, como verificar se este sistema multiagente heterogêneo com topologia fixa atingirá o consenso considerando que ele está sujeito a atrasos variantes nas ações de controle?

A formalização matemática e os métodos propostos como solução para esta problemática serão apresentados, respectivamente, nos Capítulos 4 e 5.

1.4 Objetivos

Esta tese possui como objetivo geral a elaboração de métodos, baseados em condições suficientes descritas em LMIs, capazes de verificar se um determinado sistema multiagente heterogêneo com topologia fixa atingirá o consenso considerando que ele está sujeito a atrasos variantes nas ações de controle. Este objetivo pode ser representado mais especificamente por três grandes marcos de resultados a serem alcançados:

- Marco 1: Um método para análise do consenso em SMAHs sujeitos a atrasos nas ações de controle.

- Marco 2: Um método para análise do consenso em SMAHs sujeitos a atrasos nas ações de controle com tempo de convergência estimado.
- Marco 3: Estudo de verificação da eficácia dos métodos propostos em experimentos com veículos robóticos reais.

É importante ressaltar que todos os marcos previstos foram alcançados. As etapas de desenvolvimento de cada um deles serão detalhadas nos próximos capítulos.

1.5 Metodologia

A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho seguiu os seguintes passos:

- Passo 1 - Revisão da literatura: nesta etapa, todo o estudo preliminar e a identificação do estado da arte sobre o estudo de consenso em SMAs foi realizado. A partir desta revisão, decidiu-se dedicar o foco deste trabalho para os casos de SMAHs. Essa é uma etapa que foi realizada ao longo de todo o desenvolvimento desta tese. Sempre que era necessário, uma consulta à literatura era realizada. A maior parte dos resultados obtidos com esta etapa foram apresentadas nas primeiras seções deste capítulo.
- Passo 2 - Modelagem matemática dos SMAHs: neste passo, a formulação matemática dos SMAHs foi elaborada e os detalhes estão descritos no Capítulo 4.
- Passo 3 - Elaboração de métodos para análise de consenso em SMAHs: esta etapa dedicou-se para elaboração dos métodos propostos por esta tese desde a fase da concepção até a fase de implementação. Os detalhes a respeito desta etapa da metodologia estão apresentados no Capítulo 5.
- Passo 4 - Validação experimental dos métodos propostos: nesta etapa foram realizados as validações dos métodos propostos em um SMAH composto por robôs terrestres e aéreos reais. Os detalhes desta validação estão expostos no Capítulo 6.

1.6 Organização da Tese

Com o intuito de facilitar o entendimento e organizar os conteúdos desenvolvidos, esta tese está dividida em sete capítulos. Abaixo segue uma breve descrição sobre o que cada um desses capítulos aborda.

No Capítulo 1 apresenta-se a parte introdutória da tese. Conceitos fundamentais, contextualização, motivação, problema, objetivos e a metodologia utilizada no desenvolvimento desta tese são os principais tópicos discutidos neste capítulo.

No entanto, o Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura relacionada ao consenso em SMAs. Este capítulo tem o objetivo de deixar claro o panorama evolutivo do consenso, passando pelo seu advento até as abordagens atuais com as peculiaridades que serão consideradas nos métodos propostos por esta tese como: atrasos e heterogeneidade de agentes.

Uma breve descrição das principais ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho são apresentadas no Capítulo 3. Conceitos referentes à teoria dos grafos, desigualdades matriciais lineares, o complemento de Schur e a métodos para análise de estabilidade via Lyapunov-Krasovskii.

A formulação matemática dos problemas tratados por esta tese é apresentada no Capítulo 4. Lá, o problema da análise de consenso em sistemas multiagentes heterogêneos é apresentado em duas vertentes: uma voltada apenas para análise do consenso e a outra possibilidade de verificar se o sistema atinge o consenso com uma determinada taxa de convergência.

O Capítulo 5 apresenta o desenvolvimento dos métodos propostos para análise do consenso. Inicialmente os métodos são formalizados como um teorema e em seguida é apresentado um algoritmo para simplificar a aplicação de cada método. Ao final, exemplos numéricos são apresentados para exemplificar a aplicação e avaliar o desempenho dos métodos propostos.

O Capítulo 6 apresenta a validação experimental dos métodos propostos por esta tese para resolver um problema real de controle de formação de veículos robóticos. Os métodos são implementados em um conjunto de veículos robóticos terrestres e aéreos e utilizados para determinar se antes mesmo de realizar os testes no sistema real, o sistema atingirá a formação desejada. O capítulo apresenta inicialmente a arquitetura experimental utilizada seguida da modelagem do problema de formação como um problema de consenso e ao

final são apresentados os resultados experimentais, permitindo comparar as trajetórias dos veículos reais com as trajetórias previstas pelos modelos.

O Capítulo 7 aborda as considerações finais do trabalho e as propostas para trabalhos futuros. Além disso, este capítulo também apresenta um sumário das contribuições gerais junto das publicações realizadas durante o período do doutorado.

Revisão da Literatura

Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.

Isaac Newton

Este capítulo apresenta uma revisão da literatura relacionada ao consenso em sistemas multiagente. O objetivo é explicitar o panorama histórico do consenso, passando pelo seu advento e evolução até as abordagens atuais com as peculiaridades consideradas nos métodos propostos por esta tese como: atrasos e em especial a heterogeneidade de agentes.

2.1 Perspectiva Histórica do Problema do Consenso em Sistemas Multi-Agentes

A origem do problema de consenso vem da estatística e surgiu por volta da década de 60. Nesta época, existia uma grande preocupação com o processo de aprendizagem social. Então, alguns métodos foram apresentados para descrever como um grupo de indivíduos chegava a um acordo sobre um determinado objetivo em comum. Esse problema foi discutido por diversos trabalhos dentre os quais podemos citar Eisenberg & Gale (1959), Stone (1961), Norvig (1967) e Winkler (1968). Logo depois, na década de 70, ainda no campo da estatística, podemos destacar o trabalho de DeGroot (1974) que descreveu um grupo de indivíduos atuando juntos como uma equipe, na qual cada indivíduo tinha sua própria distribuição de probabilidade subjetiva em relação à opinião sobre algum parâmetro dado. O autor descreveu um modelo sobre como a equipe alcança uma distribuição de

probabilidade subjetiva comum por meio da troca de informações e da combinação das crenças dos indivíduos, ponderando e calculando a média das opiniões, garantindo essas opiniões não fossem influenciadas por qualquer informação do ambiente.

Com o advento dos problemas na área de coordenação de sistemas multiagentes, um dos principais problemas passou a ser o de estabelecer leis de controle distribuído baseadas nas informações trocadas pelos agentes, de modo que um acordo pudesse ser alcançado sobre um valor comum de uma variável de interesse. Neste sentido, diversos resultados surgiram na física (Vicsek, Czirók, Ben-Jacob, Cohen & Shochet 1995) e na área dos algoritmos distribuídos (Lynch 1997), emprestando as ideias de consenso (troca de informações entre agentes) originadas no campo da estatística.

Em Vicsek et al. (1995) foi introduzida a dinâmica de interação entre vizinhos por meio da investigação do ordenamento de um sistema de partículas que se movimentam em um plano. Nesse trabalho é mostrado que uma lei de controle em tempo discreto é capaz de governar todos os agentes a uma direção comum mesmo sem a existência de um controle centralizado. A cada passo dessa lei de controle, ocorre a atualização da direção de cada partícula com o valor da sua direção somado ao valor da média da direção de seus vizinhos. Essa inspiração veio de avanços paralelos no campo da biologia e da computação gráfica como a descrição biológica da função de cardumes (Partridge 1982) e nos modelos comportamentais de bandos e rebanhos a partir de simulações gráficas computacionais (Reynolds 1987).

Posteriormente, utilizando conceitos da teoria algébrica dos grafos, Fax & Murray (2002) e Jadbabaie et al. (2003) remodelaram a ideia de consenso formulada por Vicsek et al. (1995), modificando a lei de controle proposta por uma regra onde a atualização dos valores dos agentes dependia agora apenas dos valores dos estados de seus vizinhos. A partir daí, a topologia da rede poderia ser descrita algebricamente, herdando propriedades da teoria dos grafos. Esta abordagem algébrica ajudou a esclarecer os impactos da topologia do sistema e a modelar a dinâmica multiagente de maneira mais simples. Assim, outros resultados surgiram, como os de Saber & Murray (2003), Olfati-Saber & Murray (2004) e Ren & Beard (2005). É válido ressaltar que os resultados propostos por esta tese também utilizam esta abordagem.

Outras peculiaridades do problema de consenso foram tratadas em Olfati-Saber & Murray (2004). Neste trabalho, o termo protocolo de consenso foi utilizado pela primeira

vez para nomear a lei de controle que possibilita ao grupo de agentes, através da troca de informações, chegar a um acordo sobre um determinado valor de uma grandeza de interesse. Além disso, neste trabalho são considerados SMA com características de topologia de rede fixa ou variável, redes direcionadas e não direcionadas e a presença de atrasos na interação dos agentes.

Adiante, diversos estudos foram desenvolvidos considerando as características apresentadas em Olfati-Saber (2006) por meio de diversas ferramentas matemáticas tais como desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e o método de análise de estabilidade de Lyapunov (Fax & Murray 2004, Beard & Atkins 2005, Zhiyun, Broucke & Francis 2003, Moreau 2004, Moreau 2005, Zhang & Tian 2009, Zhao, Xu & Yuan 2011).

2.2 Consenso em Sistemas Multi-Agentes Sujeitos a Atrasos

Em sistemas multi-agentes que buscam realizar uma tarefa em conjunto por meio de controle distribuído, um meio de comunicação e/ou sensoriamento entre seus agentes é indispensável. Entretanto, em aplicações reais, devido às limitações físicas e de processamento dos meios de comunicação e das ações de controle, sempre existirá atraso na interação dos agentes, o que pode reduzir o desempenho do sistema, fazendo-o oscilar em torno do valor de interesse, ou até mesmo levá-lo à instabilidade, tornando-o incapaz de atingir o consenso.

Com base nessa situação, foram realizados diversos trabalhos tratando do problema de consenso em sistemas sujeitos a atrasos. Dentre esses trabalhos, para as interações dos agentes, alguns consideram atrasos constantes no tempo e iguais (uniformes) (Lin, Jia & Li 2008, Seuret, Dimarogonas & Johansson 2008), outros consideram atrasos constantes no tempo e diferentes (não uniformes) (Lin, Jia, Du & Yu 2009, Zhang, Niu, Wang, Shen & Zhu 2011) e ainda existem trabalhos que consideram atrasos variantes no tempo e iguais (Sun & Wang 2009, Kecai, Chunxiang, Xiang & Yang 2011). Estudos recentes, mais especificamente em Bettoni, Souza & Pimenta (2012), é apresentado um método de análise de caráter suficiente baseado em LMIs capaz de verificar a existência do consenso em um sistema multi-agente em uma rede não direcionada, no qual os atrasos assumidos

são variantes no tempo e diferentes nas interações dos agentes. Em Savino, Cota, Souza, Pimenta, Mendes & Mozelli (2013) esses resultados foram refinados e uma análise de taxa de convergência foi adicionada. A abordagem de atrasos variantes analisada por meio de métodos com caráter suficiente baseado em LMIs também foi apresentada pelos trabalhos de Savino, Souza & Pimenta (2014a) Savino, Souza & Pimenta (2014b). Esta abordagem de atrasos variantes proposta por estes trabalhos será considerada nos modelos gerados por esta tese.

2.3 Consenso em Sistemas Multi-Agentes Sujeitos a Topologia Variável

Apesar de esta tese não apresentar resultados para os casos de topologia variável é necessário abordar esta peculiaridade pois também faz parte da evolução do problema de consenso.

Além dos atrasos, conforme comentado anteriormente, mudança de topologia também podem estar presentes em sistemas reais. Essas mudanças, estão associadas a falhas temporárias que podem ocorrer na comunicação entre os agentes ou nos próprios agentes e a mudanças desejadas na organização dos agentes.

Na literatura existem diversos trabalhos considerando essas mudanças mudanças de topologia. A descrição deste problema pode ser vista em Ren et al. (2007), Olfati-Saber (2006) e Yu & Wang (2010) sendo que nestes trabalhos a mudança de topologia é modelada com uma abordagem determinística. Atualmente, alguns trabalhos vêm tratando a mudança de topologia como uma cadeia de Markov (Zhang & Tian 2009, Zhao et al. 2011, Matei, Martins & Baras 2009). Recentemente, alguns trabalhos combinaram essas peculiaridades de atrasos variantes e topologia variável estocástica para os casos de SMAs homogêneos (dos Santos Junior, Souza & Savino 2014, dos Santos Junior, Souza & Savino 2015, Savino, dos Santos, Souza, Pimenta, de Oliveira & Palhares 2016).

2.4 Consenso em Sistemas Multi-Agentes Heterogêneos

Todos os trabalhos comentados até este ponto estudaram o problema do consenso em sistemas multiagentes considerando agentes homogêneos, isto é, todos os agentes do sistema possuem a mesma dinâmica. Porém, sabe-se que, em aplicações reais, além da presença de retardos na comunicação entre os agentes (devido às limitações físicas e de processamento dos sistemas de comunicação) e nas ações de controle (devido ao processamento da informação e ação dos atuadores), os agentes podem possuir dinâmicas diferentes devido a, por exemplo, restrições na construção ou, no caso de robôs, o desgaste diferenciado dos atuadores. Além disso, existem aplicações que podem ser modeladas diretamente para esta abordagem tal como o problema da formação de robôs terrestres com robôs aéreos na qual a dinâmica dos agentes é completamente diferente.

Na literatura, o estudo do consenso em sistemas multiagentes heterogêneos (SMAHs) foi iniciado por Zheng, Zhu & Wang (2011). Os autores propuseram um SMAH composto por agentes com dinâmica integrador puro de primeira e segunda ordem e discutiram o problema do consenso sob dois protocolos, um linear e outro com saturação. Como resultado, foram estabelecidas condições suficientes para análise do consenso para esta classe de sistemas. A partir do trabalho de Zheng et al. (2011), diversas pesquisas foram desenvolvidas considerando outras peculiaridades do problema do consenso em SMAHS tais como: consenso em tempo discreto (Liu & Liu 2011), análise sobre sistemas com topologia variável e retardos na comunicação e ações de controle (Dai, Liu & Liu 2014), análise do consenso com base na teoria de Lyapunov e LMIs (Wang & Sun 2015) e consideração de agentes com dinâmicas lineares e não lineares (Zhu, Guan & Luo 2014). Existem ainda trabalhos que consideram as abordagens de atrasos variantes e topologia variável estocástica para agentes heterogêneos, são eles dos Santos Junior, Carvalho, Souza & Savino (2016) e dos Santos Junior, Carvalho, Souza & Savino (2018). A abordagem apresentada por estes dois últimos trabalhos será utilizada nesta tese.

Ferramentas Matemáticas

Se as leis da matemática referem-se à realidade, elas não estão corretas; se estiverem corretas, não se referem à realidade.

Albert Einstein

Este capítulo apresenta uma breve descrição das principais ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. São apresentados conceitos referentes à teoria dos grafos, desigualdades matriciais lineares, o complemento de Schur e da teoria de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii. A teoria dos grafos é a base da representação algébrica dos sistemas multiagentes. Os demais conceitos servirão de suporte para o desenvolvimento e demonstração dos métodos propostos.

3.1 Teoria dos Grafos

Um grafo é uma representação abstrata de uma determinada estrutura. Ele é composto por um conjunto de nós (ou vértices), que representam os elementos desta estrutura, e um conjunto de arestas, que representam a ligação entre esses elementos. Geralmente é classificado como não direcionado ou direcionado.

Em um grafo não direcionado (veja a Figura 3.1 abaixo) as arestas que ligam os nós são bidirecionais, ou seja, considerando que as arestas representam canais para troca de informações entre os nós, se o nó 1 é capaz de receber informações do nó 2, logo, o nó 2 também recebe informações do nó 1 e o mesmo é válido para todos os outros nós que

compõem o grafo. Além disso, em grafos não direcionados, os pesos associados às informações trocadas entre os nós são iguais, isto é, se a_{ij} representa o peso da informação que o nó i recebe do nó vizinho j , podemos dizer que, com relação aos pesos das informações, grafos não direcionados obedecem a regra $a_{ij} = a_{ji}$ (Godsil & Royle 2001).

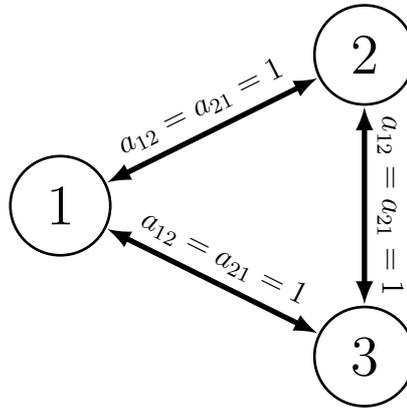


Figura 3.1: Exemplo de um grafo não direcionado.

Em um grafo direcionado (veja a Figura 3.2 abaixo) as arestas que ligam os nós são unidirecionais. O nó i recebe informações de um nó vizinho j e o oposto não é necessariamente verdadeiro. Porém, a troca de informações de maneira bidirecional, como em grafos não direcionados, ainda é possível. Neste caso, não é necessário que o peso das informações trocadas entre os agentes seja igual, ou seja, a_{ij} pode ser diferente de a_{ji} , como no exemplo da Figura 3.2 abaixo, onde as arestas que ligam os nós 2 e 3 possuem pesos diferentes. Deste modo, podemos dizer que os grafos não direcionados são um caso especial dos grafos direcionados (Godsil & Royle 2001).

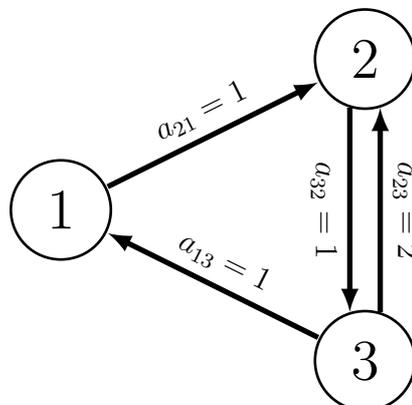


Figura 3.2: Exemplo de um grafo direcionado.

Para um melhor entendimento das etapas seguintes desta tese, além da classificação dos

grafos como não direcionados ou direcionados, também é importante conhecer as definições de grafos simples, subgrafos e árvore geradora mínima direcionada. Tais definições são apresentadas adiante.

Um grafo é considerado simples se ele não tem laços nem mais de uma aresta interligando dois vértices. As Figuras 3.1 e 3.2 são exemplos de grafos simples. A um grafo que não é simples, como o da Figura 3.3 abaixo, dá-se o nome de multigrafo (Szwarcfiter 1986).

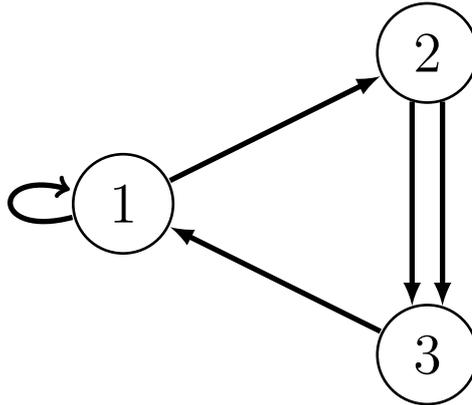


Figura 3.3: Exemplo de um multigrafo (ou grafo não simples).

Um subgrafo é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices do grafo original e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas do grafo original, de modo que a união de todos esses subgrafos resulte exatamente no grafo original. A partir de um grafo, existem diversas formas de se construir subgrafos. Para os problemas tratados nesta tese serão utilizados os conceitos dos subgrafos baseados nos vértices. Eles são compostos por vértices individuais e por todas as arestas direcionadas para estes vértices. As Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 ilustram os subgrafos baseados nos nós para o grafo da Figura 3.2 (Szwarcfiter 1986).

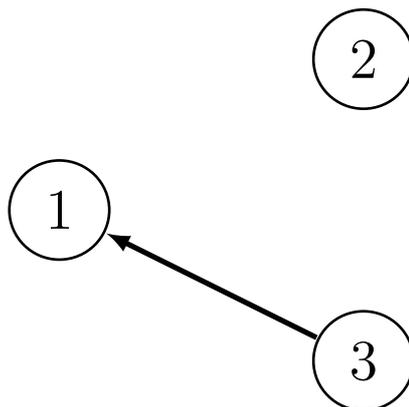


Figura 3.4: Subgrafo do vértice 1 3.2.

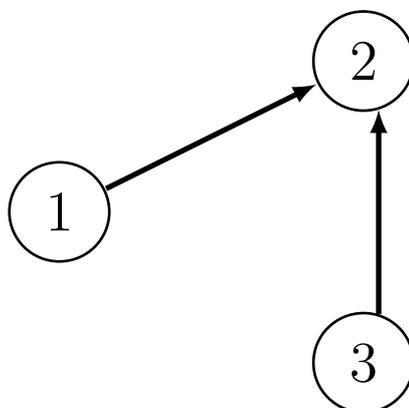


Figura 3.5: Subgrafo do vértice 2 3.2.

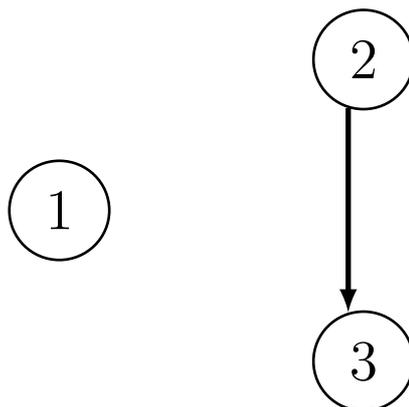


Figura 3.6: Subgrafo do vértice 3 do grafo da Figura 3.2.

Note que, conforme comentado anteriormente, se realizarmos a união de todos estes subgrafos teremos novamente o grafo da Figura 3.2.

Antes de definirmos o que é uma árvore geradora mínima direcionada, vamos esclarecer alguns conceitos fundamentais. Uma árvore direcionada é um tipo de grafo direcionado

sem ciclos que possui um nó chamado raiz sem nós pais, ou seja, não tem arestas apontando para ele. Além disso, todos os outros nós em uma árvore direcionada têm exatamente apenas um pai. Nessa árvore, existe um caminho (sequência direcionada de arestas) conectando o nó raiz a todos os outros nós (Szwarcfiter 1986).

Uma árvore geradora mínima direcionada é uma árvore direcionada que pode ser formada a partir da remoção de alguma aresta de um grafo direcionado, de modo que todos os nós deste grafo estejam incluídos. As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 abaixo, por exemplo, apresentam as árvores geradoras mínimas direcionadas do grafo da Figura 3.2. As linhas tracejadas em cinza representam as arestas removidas para formar as árvores geradoras mínimas (Szwarcfiter 1986).

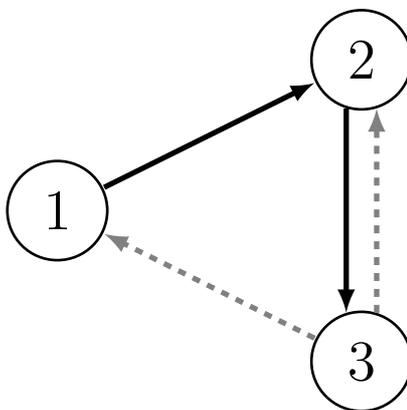


Figura 3.7: Exemplo de árvore geradora mínima direcionada na qual o nó 1 é a raiz.

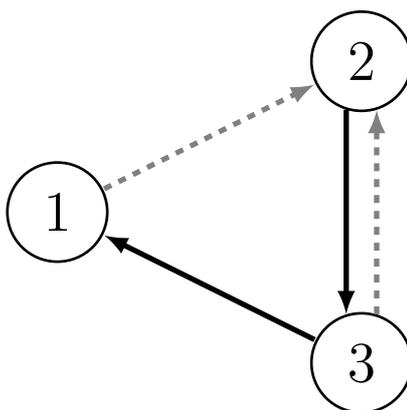


Figura 3.8: Exemplo de árvore geradora mínima direcionada na qual o nó 2 é a raiz.

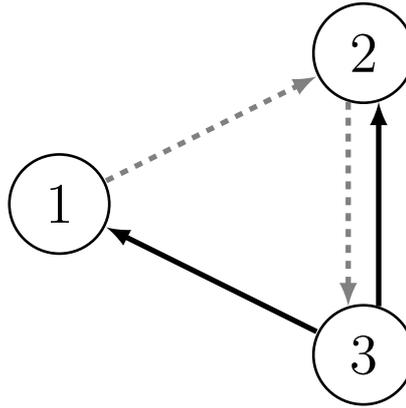


Figura 3.9: Exemplo de árvore geradora mínima direcionada na qual o nó 3 é a raiz.

Algebricamente, um grafo é descrito como $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, sendo \mathcal{V} o conjunto dos n nós ordenados e rotulados como v_1, v_2, \dots, v_n e \mathcal{E} o conjunto das arestas, sendo cada aresta definida como $e_{ij} = (v_i, v_j)$ tal que o primeiro elemento v_i é o nó filho e o segundo elemento v_j é o nó pai. Lembrando que a aresta direcionada sempre inicia no nó pai e termina no nó filho. $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ é a matriz de adjacências associada ao grafo. Nela estão contidas as informações do peso de cada uma das arestas (Mesbahi & Egerstedt 2010). É uma matriz quadrada e seus elementos são definidos como:

$$a_{ij} \begin{cases} = 0, & \text{se } i = j \text{ ou } \nexists e_{ij}, \\ > 0, & \text{se e somente se } \exists e_{ij}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Em resumo, podemos dizer que $a_{ij} = 0$ se $i = j$ ou se não existir uma aresta conectando o nó v_j ao v_i e $a_{ij} > 0$ se e somente se existir uma aresta conectando o nó v_j ao v_i . É importante ressaltar que neste trabalho todos os pesos das arestas existentes sempre serão considerados como 1.

Além da matriz de adjacências existem outras duas matrizes essenciais para descrever um grafo. São elas a matriz de grau \mathcal{D} , que representa a informação do peso total de todas as arestas direcionadas para um determinado nó, e a matriz laplaciana L que combina as informações da matriz de adjacências e da matriz de grau (Mesbahi & Egerstedt 2010).

A matriz de grau $\mathcal{D} = [d_{ii}]$ é uma matriz diagonal relacionada a matriz de adjacências e seus elementos são definidos como:

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (3.2)$$

Por fim, a matriz laplaciana $L = [l_{ij}]$ é definida como:

$$L = \mathcal{D} - \mathcal{A}, \quad (3.3)$$

ou seja,

$$l_{ij} \begin{cases} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, & \text{se } i = j, \\ = -a_{ij}, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.4)$$

Uma importante propriedade da matriz laplaciana é que a soma dos elementos de suas linhas é nula (Godsil & Royle 2001). Assumindo esta propriedade, podemos considerar a seguinte definição:

$$L1_n = 0_n, \quad (3.5)$$

sendo 1_n um vetor coluna com dimensão n e todos os elementos iguais a 1 e 0_n um vetor coluna com dimensão n e todos os elementos iguais a 0.

3.2 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma LMI é uma desigualdade matricial do tipo $F(g) > 0$, no qual $F(g)$ é simétrica e afim nas variáveis de busca que são representadas pelo vetor g . Assim, uma LMI pode ser genericamente apresentada na forma

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0, \quad (3.6)$$

sendo $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes dadas, tal que n , neste caso, representa a dimensão das matrizes, e g_i variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade (se possível) com m representando a quantidade destas variáveis. Quando existe uma solução $g = [g_1 \ \cdots \ g_m]^T$ para $F(g) > 0$, dizemos que a LMI é factível (Trofino 2000).

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece em um problema na forma genérica afim (3.6), por exemplo: dada uma matriz A e uma matriz $Q > 0$, a função matricial

$$F(P) = A^T P + P A + Q, \quad (3.7)$$

que aparece em diversos problemas de estabilidade, é afim na variável P e, portanto, a desigualdade $F(P) < 0$ é uma LMI que pode ser facilmente reescrita na forma (3.6) onde g é o vetor contendo os elementos da matriz P a ser determinada (Trofino 2000).

Para a resolução computacional de problemas na forma de LMIs, existem vários pacotes de otimização disponíveis na literatura. Entre eles estão o *LMI Control Toolbox*

(Gahinet 1995) e o *SeDuMi* (Sturm 1998), ambos desenvolvidos para uso no *MATLAB*. Em relação à complexidade computacional destas ferramentas utilizadas para solução de LMIs, o algoritmo utilizado no pacote *LMI Control Toolbox*, no pior caso, possui complexidade $\mathcal{O}(v^3 l \log(\epsilon^{-1}))$ (Gahinet 1995). Já o algoritmo do pacote *SeDuMi*, no pior caso, possui complexidade $\mathcal{O}((v^2 l^{2.5} v) \log(\epsilon^{-1}))$ (Sturm 1998). Para os dois casos, ϵ é a precisão relativa requerida, v é o número de variáveis escalares e l o número de linhas da LMI.

Por fim, é válido ressaltar que para resolução das LMIs desenvolvidas neste trabalho, optou-se pela utilização do *LMI Control Toolbox*.

3.3 O Complemento de Schur

Em geral, algumas propriedades são usadas para a formulação de LMIs a partir de inequações não lineares. Dentre tais propriedades está o complemento de Schur, apresentado no lema a seguir.

Lema 3.1 (Albert 1969) *Seja a matriz de blocos*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^T & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde Φ_1 e Φ_3 são matrizes simétricas. Então

- para $\Phi_1 > 0$, $\Phi > 0$ se, e somente se, $\Phi_3 - \Phi_2^T \Phi_1^{-1} \Phi_2 > 0$;
- para $\Phi_3 > 0$, $\Phi > 0$ se, e somente se, $\Phi_1 - \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2^T > 0$.

□

Essa propriedade pode ser utilizada, por exemplo, para transformar a desigualdade

$$A^T X + X A + X B X + C < 0 \quad (3.9)$$

com $B > 0$ e $X = X^T$, que aparece frequentemente em problemas de controle, em uma LMI, bastando fazer $\Phi_1 = A^T X + X A + C$, $\Phi_2 = X$ e $\Phi_3 = B$. Com isso, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A + C & X \\ X & -B^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Se $B \geq 0$, podemos escrever $B = QQ^T$. Dessa forma, usando a mesma ideia aplicada anteriormente, obtém-se a relação

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & XQ \\ Q^T X & -I \end{bmatrix} < 0.$$

que é também equivalente a (3.9).

Por fim, caso B não seja definida nem semidefinida positiva, a desigualdade (3.9) não será convexa e portanto, não pode ser expressa em termos de LMIs.

3.4 Sistemas Sujeitos a Atrasos no Tempo

Em sistemas lineares, atraso no tempo pode ser definido de forma concisa como o tempo necessário para que a mudança em uma variável controlada possa ser percebida. Durante este período o sistema de controle não atua e pode afetar de forma decisiva o desempenho do controlador. Este atraso pode ser causado por vários motivos, dentre os quais, pode-se destacar o tempo de transporte de materiais em correias ou tubulações industriais, o tempo para transferência de calor em sistemas térmicos e o tempo para envio de sinais em redes de múltiplos agentes (caso de estudo desta tese).

O segundo método de Lyapunov pode ser utilizado para garantir a estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos no tempo. A diferença dos casos convencionais é que para sistemas com atraso, há a necessidade de se conhecer como o sistema se comporta no intervalo $[t - h, -t]$ (sendo h o valor máximo do atraso e t o tempo), ou seja, é preciso conhecer o valor do estado $z(t)$ do sistema no instante inicial para determinar a evolução dinâmica do processo. Naturalmente, a função de Lyapunov torna-se uma função do tipo $V(t, z(t))$, posteriormente denominado de funcional de Lyapunov-Krasovskii. Este funcional consiste em uma extensão do segundo método de Lyapunov para sistemas sujeitos a atrasos no tempo (Wu, Yong & Jin-Hua 2010). A Subseção a seguir, apresenta em detalhes a aplicação destes conceitos.

3.4.1 Análise de Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii

Conforme mencionado anteriormente, o método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii corresponde a uma extensão do método de Lyapunov dedicada ao tratamento de sistemas sujeitos a atrasos no tempo. Esse método se baseia na proposição de um funcional quadrático e limitado, que leve em conta não só a evolução temporal do sistema mas também o seu histórico temporal (Souza 2008). O lema a seguir, será fundamental nas demonstrações dos métodos propostos por esta tese. Ele apresenta a forma restrita do teorema de Lyapunov-Krasovskii (Gu, Kharitonov & Chen 2003).

Lema 3.2 *Um sistema sujeito a atrasos no tempo será assintoticamente estável se existir um funcional de Lyapunov-Krasovskii quadrático e limitado $V(Z)$ que satisfaça as condições:*

$$\begin{aligned} V(Z) &\geq \alpha \| Z(t) \| \\ \dot{V}(Z) &\leq -\alpha \| Z(t) \| \end{aligned}$$

tal que $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ e Z denota os valores do estado $Z(t)$ no intervalo $[t - \max\{\tau(t)\}, t]$ para o atraso $\tau(t) \geq 0$.

□

3.4.2 Desigualdade de Jensen

Desigualdades em integrais quadráticas são uma ferramenta importante no tratamento de problemas de sistemas sujeitos a atrasos no tempo formulados por meio de LMIs dada a necessidade da utilização de limitantes superiores para que o problema em questão possa ser formulado como um problema convexo. Uma dessas desigualdades, também conhecida como Desigualdade de Jensen (Jensen 1906), utilizada neste trabalho, é apresentada no lema a seguir:

Lema 3.3 *Para qualquer matriz $M = M^T > 0$ constante e um escalar $\tau > 0$, podemos afirmar que:*

$$\int_{t-\tau}^t x^T(\xi) M x(\xi) d\xi \geq \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} M \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi.$$

□

Formulação do Problema

Viver é enfrentar um problema atrás do outro. O modo como você os encara é que faz a diferença.

Benjamin Franklin

Este capítulo apresenta a formulação matemática dos problemas tratados por esta tese. Inicialmente apresenta-se a modelagem dos agentes e das peculiaridades do sistema, em seguida o protocolo para solucionar o problema do consenso sob tais peculiaridades é apresentado e ao final apresenta-se o procedimento utilizado para transformar o problema de consenso em um problema de estabilidade.

4.1 Modelagem do Sistema Multiagente Heterogêneo

Conforme mencionado no Capítulo 3, um sistema multiagente pode ser representado algebricamente por meio da Teoria dos Grafos (Seção 3.1). Neste caso, os nós do grafo correspondem aos agentes e as arestas, os canais de comunicação entre eles. A partir desta ideia, considere o seguinte sistema multiagente heterogêneo com topologia fixa composto por m agentes de primeira ordem com dinâmica integrador puro e n agentes com dinâmica

integrador puro de segunda (agentes 3 e 4) ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t), & i \in \mathcal{I}_m, \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t), & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo x_i e $v_i \in \mathbb{R}$ as variáveis de estado (no caso dos agentes robóticos x_i representa posição e v_i velocidade) e $u_i \in \mathbb{R}$ a entrada de controle (posteriormente chamada de protocolo de consenso) do i -ésimo agente. $\mathcal{I}_m = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\mathcal{I}_n = \{m+1, m+2, m+3, \dots, m+n\}$.

4.2 Protocolo de Consenso

Sabe-se que o agente i está em consenso com o agente j se, e somente se, o valor dos estados dos agentes i e j forem iguais. Assim, para fazer com que o SMAH (4.1) atinja o consenso, inspirado nas propostas de Zheng et al. (2011) e Wang & Sun (2015), propõe-se o seguinte protocolo de consenso que considera que os agentes estão sujeitos a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle:

$$\begin{cases} u_i(t) = -\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} \left(x_i(t-\tau_i(t)) - x_j(t-\tau_j(t)) \right), & i \in \mathcal{I}_m \\ u_i(t) = -\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \left(x_i(t-\tau_i(t)) - x_j(t-\tau_j(t)) \right) - k_i v_i(t-\tau_i(t)), & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (4.2)$$

na qual a_{ij} é o elemento da matriz de adjacências (veja Seção 3.1) associada ao grafo do sistema que indica (para os casos tratados por esta tese) se um determinado agente recebe informações de outro, isto é, se o agente i recebe informações do agente j então $a_{ij} = 1$, caso contrário, $a_{ij} = 0$. $k_i > 0$ é o ganho de realimentação do estado v_i do agente i . $\tau_i(t) = \tau + \mu_i(t)$ é o atraso variante da ação de controle do agente i , de modo que τ é uma constante que representa o valor nominal do atraso e $\mu_i(t)$ uma perturbação variante no tempo que satisfaz a condição $|\mu_i(t)| \leq \mu$, $\forall i$, na qual μ é o limitante superior da variação do atraso. Assim, assume-se que $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ com $\tau > 0$ e $\tau \geq \mu \geq 0$ $\forall i$. A Figura 4.1 abaixo apresenta um exemplo desse atraso considerando um atraso médio $\tau = 0,2$ e um limitante superior $\mu = 0,1$.

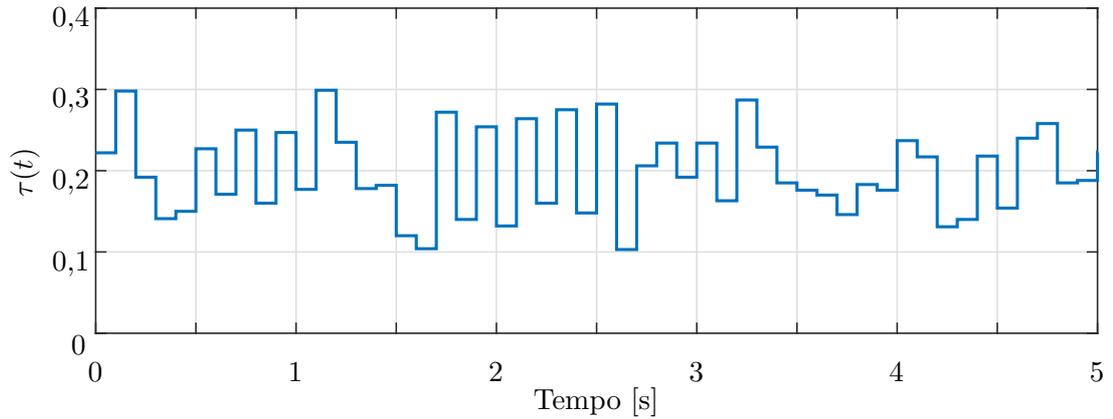


Figura 4.1: Exemplo do atraso considerando nesta tese ($\tau = 0,2$ e $\mu = 0,1$).

A seguir é apresentado um exemplo que demonstra a aplicação do protocolo de consenso (4.2) em um SMAH com a dinâmica do sistema (4.1).

Exemplo 4.1 *Considere um SMAH com topologia fixa, apresentada no grafo da Figura 4.2, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e um agente com dinâmica de segunda ordem (agente 3).*

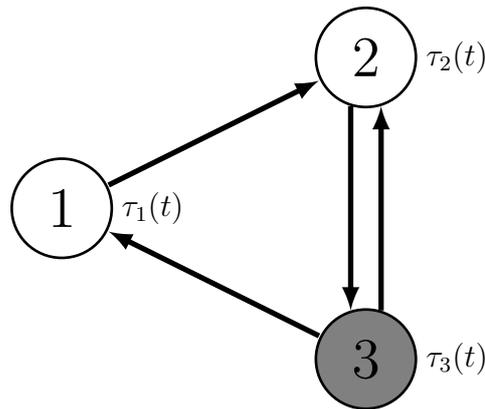


Figura 4.2: Grafo de um SMAH com topologia fixa, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) e composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e um agente com dinâmica de segunda ordem (agente 3).

Temos que a matriz de adjacências associada ao grafo da Figura 4.2 é definida por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Então, aplicando o protocolo de consenso (4.2) ao SMAH com dinâmica (4.1) e topologia dada pela Figura 4.2 obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t - \tau_2(t)) - x_1(t - \tau_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t - \tau_1(t)) - x_2(t - \tau_2(t)) + x_3(t - \tau_3(t)) - x_2(t - \tau_2(t)), \\ \dot{x}_3(t) = v_3(t), \\ \dot{v}_3(t) = x_2(t - \tau_2(t)) - x_3(t - \tau_3(t)) - k_3 v_3(t - \tau_3(t)). \end{cases} \quad (4.4)$$

□

Com auxílio da definição da matriz laplaciana apresentada no Capítulo 3 e de algumas manipulações algébricas, podemos representar um sistema multiagente com dinâmica (4.1) e protocolo de consenso (4.2) matricialmente. Os passos utilizados para realizar esta representação são apresentados a seguir.

Primeiramente, vamos considerar que os estados dos agentes serão agrupados da seguinte forma:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}^{(1)}(t) \\ \dot{x}^{(2)}(t) \\ \dot{v}^{(2)}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde $x^{(1)} = [x_1, x_2 \cdots x_m]^T$, $x^{(2)} = [x_{m+1}, x_{m+2} \cdots x_{m+n}]^T$ e $v^{(2)} = [v_{m+1}, v_{m+2} \cdots v_{m+n}]^T$.

Em seguida, considera-se a representação matricial do protocolo de consenso:

$$U(t) = - \sum_{i=1}^{m+n} L_i^{(1)} x^{(1)}(t - \tau_i(t)), \quad i \in \mathcal{I}_m, \quad (4.6)$$

$$U(t) = - \sum_{i=1}^{m+n} L_i^{(2)} x^{(2)}(t - \tau_i(t)) - \sum_{i=m+1}^{m+n} K_i v^{(2)}(t - \tau_i(t)), \quad i \in \mathcal{I}_n,$$

na qual $L_i^{(1)}$, com dimensão $m \times (m+n)$, é a submatriz formada pelas m primeiras linhas de L_i que representa o subgrafo contendo apenas as arestas que apontam para o agente

i , de modo que a soma das submatrizes laplacianas L_i resultam na matriz laplaciana do sistema, ou seja, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{m+n}$; $L_i^{(2)}$, com dimensão $n \times (m+n)$, é a submatriz formada pelas n últimas linhas de L_i ; K_i , com $i \in \mathcal{I}_n$, é uma matriz com dimensão $n \times n$ cujo elemento na posição $(i-m) \times (i-m)$ é igual a k_i e os demais são nulos, de modo que $\sum_{i=m+1}^{m+n} K_i = \text{diag}\{k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_{m+n}\}$. Além disso, define-se $K_i = 0_{n \times n} \forall i \in \mathcal{I}_m$, ou seja, para todos os agentes de primeira ordem essa matriz será nula.

Agora, agrupando as definições matriciais (4.5) e (4.6), podemos reescrever o SMAH com dinâmica (4.1) e protocolo de consenso (4.2), matricialmente, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}(t) &= - \sum_{i=1}^{m+n} L_i^{(1)} x^{(1)}(t - \tau_i(t)), \\ \dot{x}^{(2)}(t) &= v^{(2)}(t), \\ \dot{v}^{(2)}(t) &= - \sum_{i=1}^{m+n} L_i^{(2)} x^{(2)}(t - \tau_i(t)) - \sum_{i=m+1}^{m+n} K_i v^{(2)}(t - \tau_i(t)), \end{cases} \quad (4.7)$$

e posteriormente como:

$$\dot{X}(t) = AX(t) - \sum_{i=1}^{n+m} B_i X(t - \tau_i(t)), \quad (4.8)$$

na qual

$$A = \begin{bmatrix} 0_{m \times (m+n)} & 0_{m \times n} \\ 0_{n \times (m+n)} & I_n \\ 0_{n \times (m+n)} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e

$$B_i = \begin{bmatrix} L_i^{(1)} & 0_{m \times n} \\ 0_{n \times (m+n)} & 0_{n \times n} \\ L_i^{(2)} & K_i \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Enfim, fica determinado que o modelo do SMAH de topologia fixa a ser estudado por esta tese será o da notação matricial apresentado em (4.8). O exemplo apresentado a seguir ilustra como representar um SMAH utilizando esta notação matricial.

Exemplo 4.2 *Considere um SMAH com topologia fixa, apresentada no grafo da Figura 4.3 abaixo, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e dois agentes com dinâmica de segunda ordem (agentes 3 e 4).*

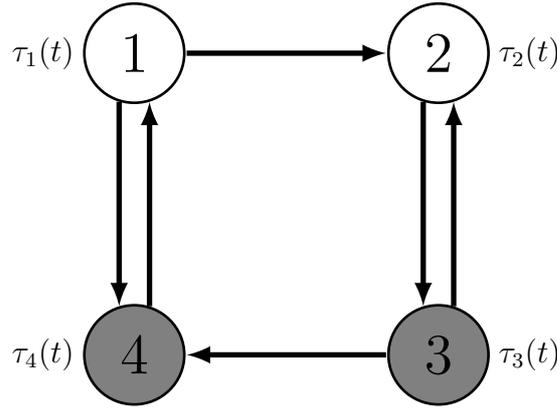


Figura 4.3: Grafo de um SMAH com topologia fixa, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) e composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e dois agentes com dinâmica de segunda ordem (agentes 3 e 4).

Neste sistema, o número de agentes de primeira ordem m é 2 e o número de agentes de segunda ordem n também é 2. Iniciando o processo de representação matricial do sistema, temos que a matriz laplaciana geral deste sistema será dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Em seguida, considere as submatrizes laplacianas associadas aos agentes de primeira e segunda ordem:

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_3^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_3^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

e, por fim, a matriz de ganhos associada aos agentes do sistema. Lembrando que esta

matriz é nula para os agentes de primeira ordem.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Agora que já conhecemos as submatrizes laplacianas $L_i^{(1)}$, $L_i^{(2)}$ e as matrizes de ganho K_i , podemos construir as matrizes A , B_1 , B_2 , B_3 e B_4 .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & k_4 \end{bmatrix}.$$

e o vetor de estados X como:

$$X = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ v^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

tal que

$$x^{(1)} = [x_1, x_2]^T, x^{(2)} = [x_3, x_4]^T, v^{(2)} = [v_3, v_4]^T.$$

Assim, a representação matricial do SMAH com topologia fixa dada pelo grafo da Figura 4.3 e conforme (4.8), é apresentada a seguir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \dot{v}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & k_3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & k_4 \end{bmatrix}}_{\sum_{i=1}^4 B_i} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t - \tau_1(t)) \\ x_2(t - \tau_2(t)) \\ x_3(t - \tau_3(t)) \\ x_4(t - \tau_4(t)) \\ v_3(t - \tau_3(t)) \\ v_4(t - \tau_4(t)) \end{bmatrix}}_{X(t - \tau_i(t))} \quad (4.18)$$

□

Ademais, antes de apresentar a transformação do problema do consenso em um problema de estabilidade, para formalizar o problema da análise de consenso no SMAH apresentado, considere a seguinte definição:

Definição 4.1 (Zheng et al. 2011) Diz-se que o SMAH (4.8) atingiu o consenso se, para qualquer condição inicial, as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| &= 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_m \cup \mathcal{I}_n, \quad i \neq j, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |v_i(t) - v_j(t)| &= 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_n, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Note que, apesar de o sistema ser composto por agentes de ordens diferente, o interesse do consenso está apenas na variável de primeira ordem x , como visto no protocolo de consenso (4.2). É importante ressaltar que para estes casos, com este protocolo, a estabilização da variável da ordem superior v está intrinsecamente ligada a estabilização da variável de primeira ordem x .

4.3 Consenso como Problema de Estabilidade

Sabe-se, por definição, que um SMAH com topologia variável atinge o consenso quando todos os estados do sistema atingem um valor em comum qualquer. As abordagens existentes na literatura (em especial na teoria de controle) para analisar se os estados de um determinado sistema vão para um valor em comum consideram que este valor comum deva ser zero. Este tipo de análise é comumente conhecida como análise de estabilidade

do sistema. Neste sentido, esta Seção apresenta como o problema da análise do consenso de um SMAH com topologia fixa e atrasos variantes nas ações de controle pode ser transformado em um problema de análise de estabilidade de um sistema linear de ordem reduzida. Existem diversas técnicas na literatura para a realização dessa análise; os métodos propostos por esta tese, por exemplo, baseiam-se na teoria de Lyapunov-Krasovskii (veja Capítulo 3). Inicialmente, será apresentado o procedimento utilizado para realizar a transformação e ao final será apresentada a demonstração matemática provando que a proposição imposta pela transformação é verdadeira.

A transformação proposta consiste em uma extensão do método de transformação em árvore apresentado por (Sun & Wang 2009) para o caso dos SMAHs tratados por esta tese. A ideia da transformação baseia-se em reescrever o sistema, considerando a diferença entre os estados de um agente arbitrário (aqui consideraremos o agente 1) com estados de todos os outros agentes do sistema. Deste modo, considere a seguinte definição:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(t) - x_3(t) \\ \vdots \\ x_1(t) - x_{m+n}(t) \\ v_{m+1}(t) - v_{m+2}(t) \\ v_{m+1}(t) - v_{m+3}(t) \\ \vdots \\ v_{m+1}(t) - v_{m+n}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

sendo $Z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_{m+2n-2}]^T$, ou seja, $z_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$, $z_2(t) = x_1(t) - x_3(t)$ e $z_{m+2n-2}(t) = v_{m+1}(t) - v_{m+n}(t)$.

Vamos considerar também que

$$Z(t) = \mathcal{U}X(t), \quad (4.20)$$

com

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m+n-1} & -I_{m+n-1} & \mathbf{0}_{(m+n-1) \times n} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times (m+n)} & \mathbf{1}_{n-1} & -I_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e sua transformação inversa

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \mathbf{1}_{m+n} \\ v_{m+1}(t) \mathbf{1}_n \end{bmatrix} + \mathcal{W}Z(t), \quad (4.22)$$

com

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (m+n-1)} & 0_{1 \times (n-1)} \\ -I_{m+n-1} & 0_{(m+n-1) \times (n-1)} \\ 0_{1 \times (m+n-1)} & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times (m+n-1)} & -I_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Assim, derivando a equação (4.20) e utilizando as equação (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \mathcal{U} \dot{X}(t) \\ &= \mathcal{U} A X(t) - \mathcal{U} \sum_{i=1}^{m+n} B_i X(t - \tau_i(t)) \end{aligned}$$

e, posteriormente, utilizando a equação (4.22), a propriedade da matriz laplaciana apresentada em (3.5) e sabendo que x_1 é um escalar, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \mathcal{U} A \begin{bmatrix} x_1(t) \mathbf{1}_{m+n} \\ v_{m+1}(t) \mathbf{1}_n \end{bmatrix} + \mathcal{U} A \mathcal{W} Z(t) \\ &\quad - \mathcal{U} \sum_{i=1}^{m+n} B_i \begin{bmatrix} x_1(t - \tau_i(t)) \mathbf{1}_{m+n} \\ v_{m+1}(t - \tau_i(t)) \mathbf{1}_n \end{bmatrix} - \mathcal{U} \sum_{i=1}^{m+n} B_i \mathcal{W} Z(t - \tau_i(t)) \\ &= \mathcal{U} A \mathcal{W} Z(t) - \mathcal{U} \sum_{i=1}^{m+n} B_i \mathcal{W} Z(t - \tau_i(t)). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema transformado proposto será dado por:

$$\dot{Z}(t) = \bar{A} Z(t) - \bar{B} Z(t - \tau_i(t)), \quad (4.24)$$

sendo $\bar{A} = \mathcal{U} A \mathcal{W}$ e $\bar{B} = \mathcal{U} \sum_{i=1}^{m+n} B_i \mathcal{W}$.

Ademais, será apresentado um exemplo para ilustrar a aplicação da transformação proposta em um caso prático. Vamos considerar um sistema com as mesmas características dos Exemplos 4.1 e 4.2.

Exemplo 4.3 *Considere um SMAH com topologia fixa, apresentada no grafo da Figura 4.3, sujeito a atrasos variantes nas ações de controle (representado por $\tau_i(t)$) composto por dois agentes com dinâmica de primeira ordem (agentes 1 e 2) e dois agentes com dinâmica de segunda ordem (agentes 3 e 4). Para aplicar a transformação proposta, que converte o problema do consenso em um problema de estabilidade, é necessário reescrever o SMAH (4.8) como (4.24). Para isto, em princípio vamos construir as matrizes \bar{A} e*

$\bar{B} = \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i$. A base dessas matrizes são as matrizes A e B_i do sistema na forma matricial que, neste caso, já foram definidas no Exemplo 4.2. Sendo assim, temos que as matrizes \bar{A} e \bar{B} para este exemplo, serão dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_u \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_w, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_u \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & k_3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & k_4 \end{bmatrix}}_{\sum_{i=1}^4 B_i} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_w, \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & k_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Note que o sistema sofreu a redução de duas ordens estados conforme era previsto pelas características da transformação proposta. Em resumo, o que acontece é que sempre após a transformação, o sistema deixará de possuir um estado x e um estado v .

Conhecendo as matrizes \bar{A} e \bar{B} , podemos então escrever o sistema conforme (4.24) e

assim finalizar este exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{Z}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix}}_{Z(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & k_4 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t - \tau_1(t)) \\ z_2(t - \tau_2(t)) \\ z_3(t - \tau_2(t)) \\ z_4(t - \tau_4(t)) \end{bmatrix}}_{Z(t - \tau_i(t))} \quad (4.27)$$

□

Adiante, será apresentada na forma de uma proposição, a demonstração de que é possível analisar se um SMAH com as características do sistema (4.8) atinge o consenso por meio da análise de estabilidade do sistema (4.24). Esta proposição esta entre uma das principais contribuições desta tese.

Proposição 4.1 *O SMAH (4.8) atingirá o consenso assintoticamente, se e somente se, o sistema (4.24) atingir a origem.*

Demonstração: Sabe-se que o sistema (4.24) atinge a origem quando todos os estados do sistema chegam a 0, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$$

e ainda que o SMAH (4.8) atinge o consenso, de acordo com a Definição 4.1, quando todos os estados dos agentes do sistema chegam a um valor em comum, ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t)1_{m+n} \\ \beta(t)1_n \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

onde α e β representam o valor de consenso dos estados $x(t)$ and $v(t)$, respectivamente.

Ademais, considerando as equações (4.20), (4.28) e assumindo que o sistema (4.8) atinge o consenso, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}X(t) \\ &= \mathcal{U} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \\ &= \mathcal{U} \begin{bmatrix} \alpha(t)1_{m+n} \\ \beta(t)1_n \end{bmatrix} \xrightarrow{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

E assim, fica demonstrada a relação de que se o SMAH (4.8) atingir o consenso, o sistema transformado (4.24) atingirá a origem. O próximo passo será demonstrar que o inverso dessa relação também é verdadeiro. Neste sentido, considerando a equação (4.22) e assumindo que o sistema transformado (4.24) atinge a origem, temos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{bmatrix} x_1(t)1_{m+n} \\ v_{m+1}(t)1_n \end{bmatrix} + \mathcal{W}Z(t) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(t)1_{m+n} \\ v_{m+1}(t)1_n \end{bmatrix} + \cancel{\mathcal{W} \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)} \rightarrow 0 \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(t)1_{m+n} \\ v_{m+1}(t)1_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha(t)1_{m+n} \\ \beta(t)1_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, fica demonstrado também que se o (4.24) atingir a origem, o SMAH (4.8) atingirá o consenso. Isto completa a demonstração. \square

Métodos Propostos

Em algum lugar, alguma coisa incrível está esperando para ser descoberta.

Carl Sagan

Este capítulo apresenta o desenvolvimento dos métodos propostos para análise do consenso em SMAHs sujeitos a atrasos variantes nas ações de controle. Inicialmente os métodos são formalizados como um teorema e em seguida é apresentado um algoritmo para simplificar a aplicação de cada método. São propostos métodos para análise de sistemas com topologia fixa que são estendidos para o caso em que é possível considerar também uma estimativa do tempo em que o sistema atingirá o consenso. Por fim, exemplos numéricos na forma são apresentados para exemplificar a aplicação e avaliar o desempenho dos métodos propostos.

5.1 SMAHs com Topologia Fixa e Atrasos Variantes

O método proposto baseia-se na proposição de condições suficientes na forma de LMIs derivadas a partir da teoria de Lyapunov-Krasovskii (veja Capítulo 3). Tal método foi publicado pelo autor em 2016 no XXI Congresso Brasileiro de Automática (dos Santos Junior et al. 2016). Assim, o teorema apresentado a seguir formaliza o método proposto por esta tese como uma solução para o problema de análise de consenso em SMAHs com topologia fixa e atrasos variantes que possuam as características descritas em (4.8).

Teorema 5.1 *Dados o valor médio do atraso $\tau > 0$ e o seu limitante superior e inferior μ tal que $\tau \geq \mu \geq 0$, pode-se afirmar que o sistema multiagente heterogêneo (4.8) com $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu] \forall i = 1, 2, \dots, m+n$, atinge o consenso se, o grafo \mathcal{G} que descreve sua topologia possuir uma árvore geradora mínima e existirem matrizes reais $F, G, P = P^T, Q, R = R^T, S = S^T$ e $W = W^T$ com dimensão $(m+2n-2) \times (m+2n-2)$ que satisfaçam as seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}R \end{bmatrix} > 0, \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mu\Gamma \\ * & -\mu W \end{bmatrix} < 0, \quad (5.2)$$

sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} Q + Q^T + R + F\bar{A} + \bar{A}^T F^T & P - F + \bar{A}^T G^T & -Q - F\bar{B} & 0 \\ * & \tau S - G - G^T + 2\mu W & -G\bar{B} & Q \\ * & * & -R & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} F\bar{B} \\ G\bar{B} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Demonstração: Com base na teoria de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii, esta demonstração mostra que se as LMIs propostas forem satisfeitas, então as desigualdades $V(Z) \geq \alpha \|Z(t)\|$ e $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \|Z(t)\|$ também serão tal que $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$, Z denota os valores do estado $Z(t)$ no intervalo $[t - \max\{\tau(t)\}, t]$ para o atraso $\tau(t) \geq 0$ e $V(Z)$ é o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(Z) = V_1(Z) + V_2(Z) + V_3(Z) + V_4(Z) + V_5(Z) \quad (5.5)$$

com

$$\begin{aligned}
V_1(Z) &= Z^T(t)PZ(t), \\
V_2(Z) &= 2Z(t)^TQ \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi, \\
V_3(Z) &= \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)RZ(\xi)d\xi, \\
V_4(Z) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \dot{Z}^T(\xi)S\dot{Z}(\xi)d\xi d\zeta, \\
V_5(Z) &= \int_{-\mu}^0 \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi d\zeta,
\end{aligned}$$

sendo $P = P^T$, Q , $R = R^T$, $S = S^T$ e $W = W^T$ matrizes com dimensão apropriada.

A partir do funcional proposto, a primeira parte da demonstração mostra que se as LMIs (5.1) e (5.2) forem satisfeitas, a condição $V(Z) \geq \alpha \| Z(t) \|$ também será.

Inicialmente, vamos expandir o termo $V_2(Z)$

$$\begin{aligned}
V_2(Z) &= 2Z^T(t)Q \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi \\
&= Z^T(t)Q \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi + \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)d\xi Q^T Z(t).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Em seguida, assumindo que $R > 0$, aplica-se o Lema 3.3 (Desigualdade de Jensen, veja Capítulo 3) em $V_3(Z)$

$$\begin{aligned}
V_3(Z) &= \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)RZ(\xi)d\xi \\
&\geq \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)d\xi \frac{1}{\tau} R \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Então, agrupando matricialmente $V_1(Z)$, (5.6), (5.7) e somando este resultado à $V_4(Z)$ e $V_5(Z)$, podemos reescrever o funcional (5.5) como

$$\begin{aligned}
V(Z) &= \geq \eta^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}R \end{bmatrix} \eta + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \dot{Z}^T(\xi)S\dot{Z}(\xi)d\xi d\zeta \\
&\quad + \int_{-\mu}^0 \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi d\zeta
\end{aligned} \tag{5.8}$$

tal que $\eta^T = \left[Z^T(t) \quad \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)d\xi \right]$.

Portanto, uma condição suficiente para garantir $V(Z) \geq \alpha \| Z(t) \|$ com $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$, é verificar se o lado direito da desigualdade acima (5.8) é positivo. Deste modo, se a LMI (5.1) e as condições $R > 0$, $S > 0$ e $W > 0$, implícitas na LMI (5.2), forem satisfeitas, então $V(Z) \geq \alpha \| Z(t) \|$ com $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ também será.

O próximo passo da demonstração mostra que se as LMIs (5.1) e (5.2) forem satisfeitas, a condição $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \|Z(t)\|$ também será. Então, derivando o funcional (5.5) obtemos:

$$\dot{V}(Z) = \dot{V}_1(Z) + \dot{V}_2(Z) + \dot{V}_3(Z) + \dot{V}_4(Z) + \dot{V}_5(Z). \quad (5.9)$$

O termo $\dot{V}_1(Z)$ é dado por

$$V_1(Z) = Z^T(t)PZ(t),$$

$$\dot{V}_1(Z) = \dot{Z}^T(t)PZ(t) + Z^T(t)P\dot{Z}(t). \quad (5.10)$$

O termo $\dot{V}_2(Z)$ é dado por

$$V_2(Z) = 2Z(t)^TQ \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi,$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(Z) &= 2\dot{Z}^T(t)Q \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi \\ &\quad + 2Z^T(t)QZ(t) - 2Z^T(t)QZ(t-\tau), \\ &= \dot{Z}^T(t)Q \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi + \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)d\xi Q^T \dot{Z}(t) \\ &\quad + Z^T(t)QZ(t) + Z^T(t)Q^T Z(t) - Z^T(t)QZ(t-\tau) - Z^T(t-\tau)Q^T Z(t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

O termo $\dot{V}_3(Z)$ é dado por

$$V_3(Z) = \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)RZ(\xi)d\xi,$$

$$\dot{V}_3(Z) = Z^T(t)RZ(t) - Z(t-\tau)RZ(t-\tau). \quad (5.12)$$

O termo $\dot{V}_4(Z)$ é dado por

$$V_4(Z) = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \dot{Z}^T(\xi)S\dot{Z}(\xi)d\xi d\zeta,$$

$$\dot{V}_4(Z) = \dot{Z}^T(t)\tau S\dot{Z}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{Z}^T(\xi)S\dot{Z}(\xi)d\xi \quad (5.13)$$

e, aplicando a Desigualdade de Jensen (Lema 3.3) no termo $\dot{V}_4(t)$, obtém-se

$$\dot{V}_4(Z) \geq \dot{Z}^T(t)\tau S\dot{Z}(t) - \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi)d\xi \frac{1}{\tau} S \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi. \quad (5.14)$$

E por fim, o termo $\dot{V}_5(Z)$ é dado por

$$V_5(Z) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{Z}^T(\xi) W \dot{Z}(\xi) d\xi d\zeta,$$

$$\dot{V}_5(Z) = \dot{Z}^T(t) 2\mu W \dot{Z}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi) W \dot{Z}(\xi) d\xi. \quad (5.15)$$

De posse das derivadas do funcional (5.5), vamos considerar o seguinte termo nulo auxiliar obtido a partir do sistema transformado (4.24):

$$\begin{aligned} 0 &= 2[Z^T(t)F + \dot{Z}^T(t)G] \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B}Z(t - \tau_i(t)) \right], \\ &= 2[Z^T(t)F + \dot{Z}^T(t)G] \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B} \left(Z(t - \tau) - \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{Z}(t + \xi) d\xi \right) \right], \\ &= 2[Z^T(t)F + \dot{Z}^T(t)G] \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B}Z(t - \tau) - \bar{B} \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{Z}(t + \xi) d\xi \right], \\ &= 2\Lambda \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B}Z(t - \tau) \right] + \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

tal que F e G matrizes com dimensões apropriadas,

$$\Lambda = [Z^T(t)F + \dot{Z}^T(t)G],$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 2\Lambda \bar{B} \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{Z}(t + \xi) d\xi \\ &= \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} 2\Lambda \bar{B} \dot{Z}(t + \xi) d\xi \end{aligned}$$

Continuando com a definição do termo nulo, aplica-se em \mathcal{V} a desigualdade

$$2a^T b \leq a^T M^{-1} a + b^T M b \quad (5.17)$$

sendo a e b vetores e $M > 0$ uma matriz com dimensão apropriada. Então, assumindo que $a^T = \Lambda \bar{B}$, $b = \dot{Z}(t + \xi)$ e $M = W$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} 2 \underbrace{\Lambda \bar{B}}_{a^T} \underbrace{\dot{Z}(t + \xi)}_b d\xi \\ &\leq \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \left[(\Lambda \bar{B}) W^{-1} (\Lambda \bar{B})^T d\xi + \dot{Z}^T(t + \xi) W \dot{Z}(t + \xi) \right] d\xi, \\ &\leq \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} (\Lambda \bar{B}) W^{-1} (\Lambda \bar{B})^T d\xi + \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{Z}^T(t + \xi) W \dot{Z}(t + \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $\tau_i(t)$ pelo seu limitante superior $\tau + \mu$ obtemos

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} (\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T d\xi + \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{Z}^T(t+\xi)W\dot{Z}(t+\xi)d\xi. \\ &\leq \int_{-\tau-\mu}^{-\tau} d\xi(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T + \int_{-\tau-\mu}^{-\tau} \dot{Z}^T(t+\xi)W\dot{Z}(t+\xi)d\xi. \\ &\leq \mu(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Em seguida, assumindo que

$$\int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi \leq \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi,$$

podemos reescrever \mathcal{V} como

$$\mathcal{V} \leq \mu(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi,$$

e o termo nulo como

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2\Lambda \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B}Z(t-\tau) \right] + \mathcal{V}, \\ &\geq 2\Lambda \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B}Z(t-\tau) \right] + \mu(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi, \\ &\geq \left(Z^T(t)F + \dot{Z}^T(t)G \right) \left(-\dot{Z}(t) + \bar{A}Z(t) - \bar{B}Z(t-\tau) \right) \\ &\quad + \left(-\dot{Z}^T(t) + Z^T(t)\bar{A}^T - Z^T(t-\tau)\bar{B}^T \right) \left(F^T Z(t) + G^T \dot{Z}(t) \right) \\ &\quad + \mu(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi, \\ &\geq -Z^T(t)F\dot{Z}(t) + Z^T(t)F\bar{A}Z(t) - Z^T(t)F\bar{B}Z(t-\tau) \\ &\quad -\dot{Z}^T(t)G\dot{Z}(t) + \dot{Z}^T(t)G\bar{A}Z(t) - \dot{Z}^T(t)G\bar{B}Z(t-\tau) \\ &\quad -\dot{Z}^T(t)F^T Z(t) + Z^T(t)\bar{A}^T F^T Z(t) - Z^T(t-\tau)\bar{B}^T F^T Z(t) \\ &\quad -\dot{Z}^T(t)G^T \dot{Z}(t) + Z^T(t)\bar{A}^T G^T \dot{Z}(t) - Z^T(t-\tau)\bar{B}^T G^T \dot{Z}(t) \\ &\quad + \mu(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ademais, adiciona-se o termo nulo definido em (5.18) à derivada do funcional (5.9) e organiza-se os termos na forma quadrática para obter

$$\dot{V}(Z) \leq \Upsilon^T \Phi \Upsilon + \mu(\Lambda\bar{B})W^{-1}(\Lambda\bar{B})^T, \tag{5.19}$$

sendo $\Upsilon^T = \left[Z^T(t) \dot{Z}^T(t) z(t-\tau) \int_{t-\tau}^t Z(\xi)d\xi \right]$ e a matriz Φ definida em (5.3). Note que a parcela $-\int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi)W\dot{Z}(\xi)d\xi$ do termo $\dot{V}_5(Z)$ em (5.15) é cancelado, pois, o seu complemento aparece no termo nulo (5.18).

Continuando, podemos reescrever o termo $\Lambda\bar{B}$ como

$$\begin{aligned}\Lambda\bar{B} &= \left[Z^T(t)F\bar{B} + \dot{Z}^T(t)G\bar{B} \right], \\ &= \begin{bmatrix} Z^T(t) & \dot{Z}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F\bar{B} \\ G\bar{B} \end{bmatrix}, \\ &= \Upsilon^T \begin{bmatrix} F\bar{B} \\ G\bar{B} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &= \Upsilon^T\Gamma.\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever (5.19) como

$$\begin{aligned}\dot{V}(Z) &\leq \Upsilon^T\Phi\Upsilon + \Upsilon^T\mu\Gamma W^{-1}\Gamma^T\Upsilon, \\ &\leq \Upsilon^T \left[\Phi + \mu\Gamma W^{-1}\Gamma^T \right] \Upsilon\end{aligned}\tag{5.20}$$

Portanto, uma condição suficiente para garantir $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \| Z(t) \|$ com $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ para qualquer $\Upsilon \neq 0$, é que o termo entre chaves em (5.20) seja negativo. Utilizando o complemento de Schur, podemos reescrever esta condição como

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mu\Gamma \\ * & -\mu W \end{bmatrix} < 0.$$

Então, se as LMIs (5.1) e (5.2) forem satisfeitas a condição $\dot{V}(z) \leq -\alpha \| Z(t) \|$ com $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ também será.

Por fim, fica demonstrado que se as LMIs impostas pelo Teorema (5.1) forem satisfeitas, temos que, pelo teoria de Lyapunov-Krasovskii, apresentada no Lema (3.2) no Capítulo 3, o sistema transformado (4.24) será estável e conseqüentemente, pela Proposição 4.1, o SMAH (4.8) atingirá o consenso conforme a Definição 4.1. Isto finaliza a demonstração. \square

Com o Teorema 5.1 proposto, podemos determinar matematicamente se um determinado SMAH sujeito a atrasos variantes nas ações de controle irá atingir o consenso. Porém, se o resultado obtido com o teorema for negativo, uma vez que a proposta possui apenas condições suficientes, não se pode afirmar que o sistema não atingirá o consenso.

O fluxograma apresentado na Figura 5.1 a seguir, ilustra um passo-a-passo de como o método proposto deve ser aplicado para solucionar o problema de análise de consenso em um SMAH com as características do sistema (4.8).

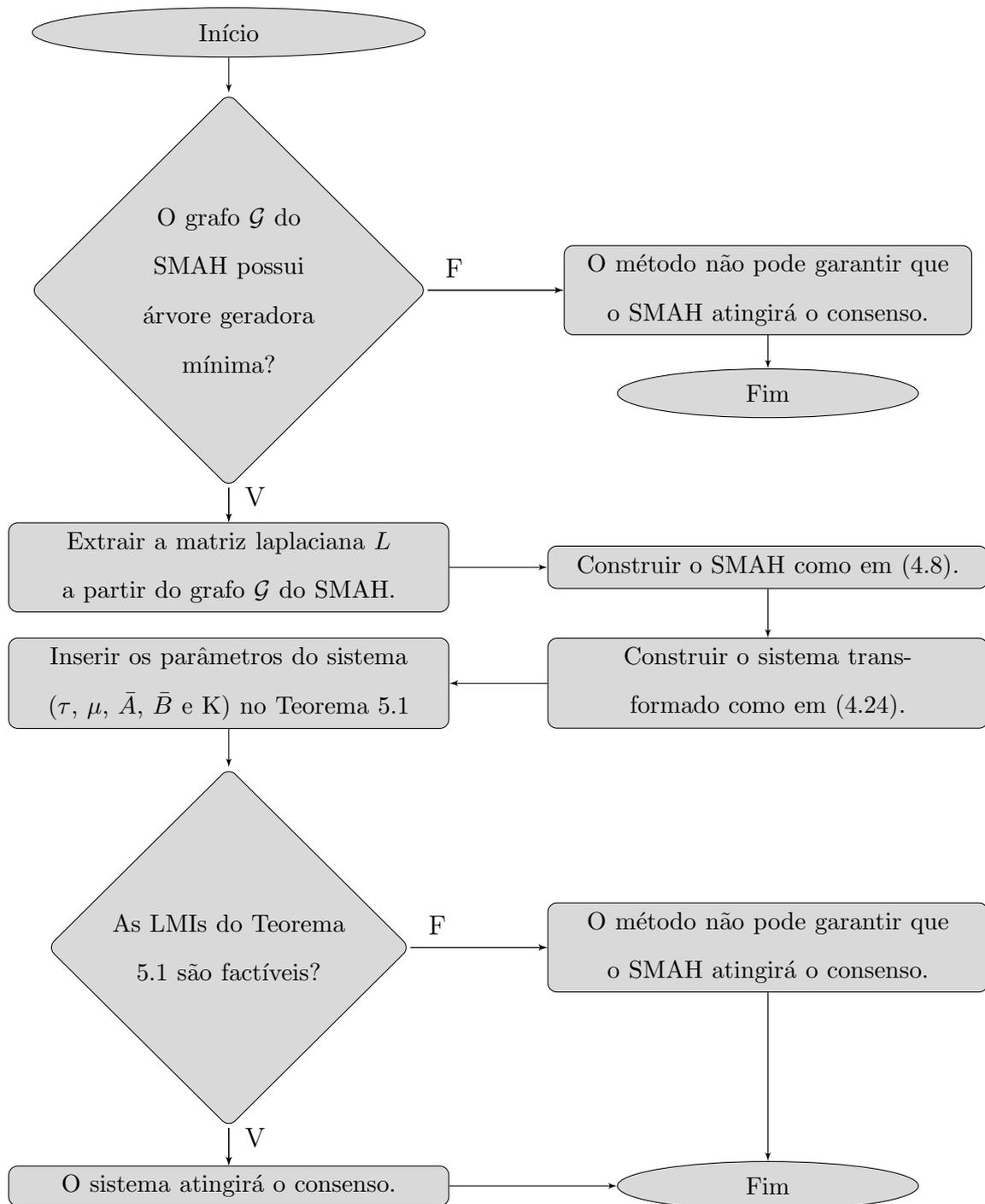


Figura 5.1: Fluxograma Passo-a-Passo da Aplicação do Método para Análise do Consenso em SMAHs com Topologia Fixa e Atrasos Variantes

Como mencionado no Capítulo 3, todas as implementações para validação deste método foram realizadas utilizando o *MATLAB* sendo o *LMI Control Toolbox* o *solver* utilizado para a resolução das LMIs. É importante enfatizar que a complexidade computacional para resolução das LMIs do método proposto não tem relação com a quantidade

ou a dimensão dos atrasos uma vez que esses termos não influenciam na dimensão das linhas e colunas das variáveis das LMIs o que é uma vantagem sobre o método baseado em LMIs proposto por Souza, Palhares & Ekel (2007). No caso do método proposto a complexidade computacional cresce em função do tamanho das variáveis das LMIs que por sua vez crescem em função da quantidade de agentes do sistema. Mais informações sobre a complexidade do algoritmo utilizado na solução das LMIs podem ser vistas em Gahinet (1995).

A seção a seguir apresenta um exemplo numérico para avaliar a eficiência e ilustrar a aplicação do método de análise de consenso proposto pelo Teorema 5.1.

5.1.1 Exemplos Numéricos

Nesta seção é apresentado um exemplo numérico para fins de ilustrar e validar a eficiência do método proposto para análise do consenso em SMAHs com topologia fixa e atrasos variantes nas ações de controle.

Com o intuito de mostrar que o método pode proporcionar resultados interessantes em aplicações práticas na robótica, considere o seguinte cenário: um sistema multi-robôs composto por dois robôs terrestres omnidirecionais e dois robôs aéreos omnidirecionais que desejam atingir uma determinada formação nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} para atuarem de forma sincronizada em um procedimento de mapeamento em grupo como em (Natarajan & Gennert 2018), (Schuster, Schmid, Brand & Beetz 2019) e (Howard 2005). Podemos utilizar o Teorema 5.1 para verificar se, dadas as condições de interações entre os agentes (o grafo \mathcal{G}), tal sistema atingirá uma formação preestabelecida (ou seja, atingirá o consenso) antes mesmo de fazer qualquer implementação real nos robôs. Será considerado que os robôs aéreos já estão em voo a uma altura segura que não interfere nas trajetórias dos robôs terrestres. É importante lembrar que os robôs do sistema está sujeito a atrasos nas ações de controle. A Figura 5.2 abaixo, ilustra como está organizado o esquema de troca de informações entre estes robôs. Aqui também, as setas indicam a direção em que existe a troca de informações entre os robôs e $\tau_i(t)$ é o elemento que representa o atraso variante nas ações de controle. Os agentes 1 e 2 representam os robôs terrestres e os agentes 3 e 4 os robôs aéreos.

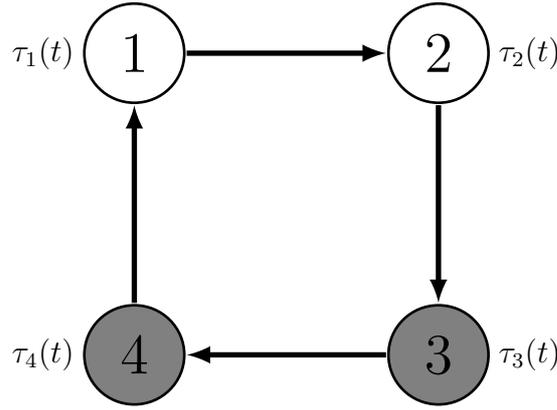


Figura 5.2: Topologia de comunicação do sistema multi-robôs composto por 2 robôs terrestres com dinâmica de primeira ordem integrador puro (robôs 1 e 2) e 2 robôs aéreos com dinâmica integrador puro de segunda ordem (robôs 3 e 4).

Seguindo os passos do fluxograma de aplicação do método para análise do consenso em SMAHs sujeitos a atrasos variantes nas ações de controle (Figura 5.1), antes de prosseguir com a construção do modelo do sistema, precisamos identificar se o grafo \mathcal{G} que descreve a interação entre os agentes do sistema possui uma árvore geradora mínima. E sim, este grafo possui. Assim, podemos seguir com os próximos passos até os testes das LMIs do teorema.

Uma vez que a dinâmica dos robôs terrestres é integrador puro de primeira ordem e que a dos robôs aéreos é integrador puro de segunda ordem, podemos modelar o sistema para a coordenada \mathbf{x} :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i^{\mathbf{x}}(t), & i = 1 \text{ e } 2, \\ \dot{x}_i(t) = v_i^{\mathbf{x}}(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i^{\mathbf{x}}(t), & i = 3 \text{ e } 4 \end{cases} \quad (5.21)$$

e para a coordenada \mathbf{y} :

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = u_i^{\mathbf{y}}(t), & i = 1 \text{ e } 2, \\ \dot{y}_i(t) = v_i^{\mathbf{y}}(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i^{\mathbf{y}}(t), & i = 3 \text{ e } 4, \end{cases} \quad (5.22)$$

na qual x_i e y_i são as posições do i -ésimo agente nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente e $v_i^{\mathbf{x}}$ e $v_i^{\mathbf{y}}$ as velocidades do i -ésimo agente nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente.

Com o intuito de analisar o problema de formação contextualizado no início desta Seção por meio do método proposto no Teorema 5.1, vamos considerar o seguinte protocolo de consenso para o controle dos robôs na coordenada \mathbf{x} (5.21)

$$\begin{cases} u_i^{\mathbf{x}}(t - \tau_i(t)) = -\sum_{j=1}^4 a_{ij} \left(x_i(t - \tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{x}} - x_j(t - \tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{x}} \right), & i = 1 \text{ e } 2, \\ u_i^{\mathbf{x}}(t - \tau_i(t)) = -\sum_{j=1}^4 a_{ij} \left(x_i(t - \tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{x}} - x_j(t - \tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{x}} \right) - k_i v_i^{\mathbf{y}}(t - \tau_i(t)), & i = 3 \text{ e } 4 \end{cases} \quad (5.23)$$

e o controle dos robôs na coordenada \mathbf{y} (5.22):

$$\begin{cases} u_i^{\mathbf{y}}(t - \tau_i(t)) = -\sum_{j=1}^4 a_{ij} \left(x_i(t - \tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{y}} - x_j(t - \tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{y}} \right), & i = 1 \text{ e } 2, \\ u_i^{\mathbf{y}}(t - \tau_i(t)) = -\sum_{j=1}^4 a_{ij} \left(x_i(t - \tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{y}} - x_j(t - \tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{y}} \right) - k_i v_i^{\mathbf{y}}(t - \tau_i(t)), & i = 3 \text{ e } 4 \end{cases} \quad (5.24)$$

na qual $\lambda_i^{\mathbf{x}}$ e $\lambda_j^{\mathbf{x}}$ indicam a posição arbitrária desejada, respectivamente, para os robôs i e j na coordenada \mathbf{x} e, analogamente, $\lambda_i^{\mathbf{y}}$ e $\lambda_j^{\mathbf{y}}$ para a coordenada \mathbf{y} .

Agora, substituindo, respectivamente, (5.23) e (5.24) em (5.21) e (5.22) e em seguida ajustando este resultado para a forma matricial, podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\dot{X}(t) = A \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{x}}(t) \\ v^{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 B_i \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{x}}(t - \tau_i^{\mathbf{x}}(t)) \\ v^{\mathbf{x}}(t - \tau_i^{\mathbf{x}}(t)) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\dot{Y}(t) = A \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{y}}(t) \\ v^{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 B_i \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{y}}(t - \tau_i^{\mathbf{y}}(t)) \\ v^{\mathbf{y}}(t - \tau_i^{\mathbf{y}}(t)) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

na qual, para a coordenada \mathbf{x}

$$\rho^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 - \lambda_1^{\mathbf{x}} \\ x_2 - \lambda_2^{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{m+n} - \lambda_{m+n}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, v^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ v_{m+n} \end{bmatrix},$$

e as matrizes A e B_i são respectivamente as mesmas que foram definidas em (4.9) e (4.10). Essas definições são análogas para o caso dos estados da coordenada y .

Deste modo, pode-se dizer que (5.25) e (5.26) estão no mesmo formato de (4.8) permitindo que a formação dos robôs possa ser verificada por meio do método proposto no Teorema 5.1.

Antes de continuarmos com o exemplo, é importante ressaltar que a representação do problema de formação baseado em consenso para o caso de SMAHs foi inspirada em Ren (2007).

Em continuidade, constrói-se a matriz laplaciana associada ao sistema multi-robôs com topologia de troca de informações dada pelo grafo \mathcal{G} apresentado pela Figura 5.2

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Em seguida, considere as submatrizes laplacianas associadas aos agentes de primeira $L_i^{(1)}$ e segunda ordem $L_i^{(2)}$:

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_3^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} L_1^{(2)}(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2^{(2)}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_3^{(2)}(2) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_4^{(2)}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Antes de apresentarmos a simulação das trajetórias do sistema, para fins de futuras comparações, inicialmente, realizaremos um teste utilizando o método proposto pelo Teorema 5.1 para verificar sob quais valores de atraso o sistema multi-robôs deste exemplo atingirá o consenso. Como relatado anteriormente, o método proposto foi implementado no *MATLAB* e a resolução das LMIs é feita com auxílio do *solver LMI Control Tool Box*.

Assumindo que os ganhos do estado v serão dados por

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

os resultados obtidos com estes testes são listados na Tabela 5.1 abaixo, na qual μ_{max} corresponde ao máximo valor do limitante superior e inferior μ encontrado (na verdade, em que as LMIs do Teorema 5.1 foram factíveis) para os valores de atraso médio τ dados. Note que para $\mu = 0$, o sistema está sujeito a um atraso constante, por outro lado, quando $\mu > 0$, o sistema está sujeito a atrasos variantes.

τ	0,100	0,200	0,250	0,300	0,400
μ_m	0,100	0,155	0,115	0,079	0,018

Tabela 5.1: Maior perturbação μ para diferentes atrasos τ com $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$, na qual o método proposto pelo Teorema 5.1 garante que o SMAH com topologia dada pelo grafo \mathcal{G} da Figura 5.2 atingirá o consenso.

É válido ressaltar que os testes realizados consideraram que os agentes atingiram o consenso (e não a formação), ou seja, todos os estados chegaram a um valor em comum. Este resultado é válido independentemente se foram considerados os estados da coordenada \mathbf{x} ou \mathbf{y} , uma vez que o método é válido para qualquer condição inicial. O mesmo se aplica para o caso em que a variável de consenso é um ponto arbitrário de uma formação e não um ponto comum para todos os agentes. Ademais, para comprovar estas questões e que os resultados obtidos com a aplicação do método proposto pelo Teorema 5.1 são verdadeiros, foram realizadas simulações de trajetórias e temporais. Além disso, essas simulações ilustram o efeito dos atrasos no comportamento do sistema.

A ideia então, é simular o sistema considerando uma formação desejada e um intervalo de atrasos entre os obtidos os estabelecidos pelo método na Tabela 5.1, verificando assim a eficiência do método quanto à garantia da formação dos sistema multi-robôs.

Vamos considerar as seguintes posições arbitrárias desejadas $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ para que a formação do sistema seja a apresentada na Figura 5.3, na qual os triângulos indicam as posições arbitrárias desejadas dos robôs.

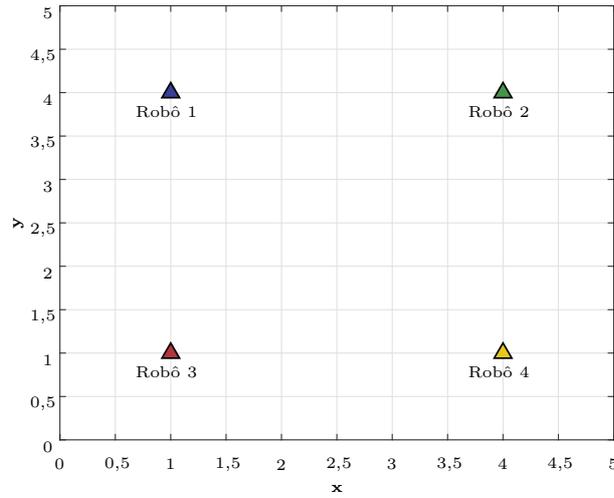


Figura 5.3: Formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$.

Observe que esta formação garante que os robôs formem um quadrado de modo que os robôs terrestres (Robôs 1 e 2) fiquem na parte de cima e os dois aéreos (Robôs 3 e 4) na parte de baixo. Assim, as trajetórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação definida anteriormente e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$) é apresentada na Figura 5.4 a seguir:

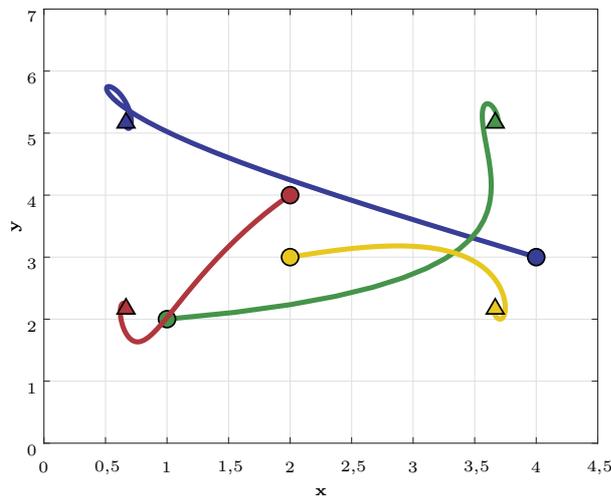


Figura 5.4: Trajetórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$). Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.

As Figuras 5.5 e 5.6 a seguir apresentam a trajetória temporal da Figura 5.4.

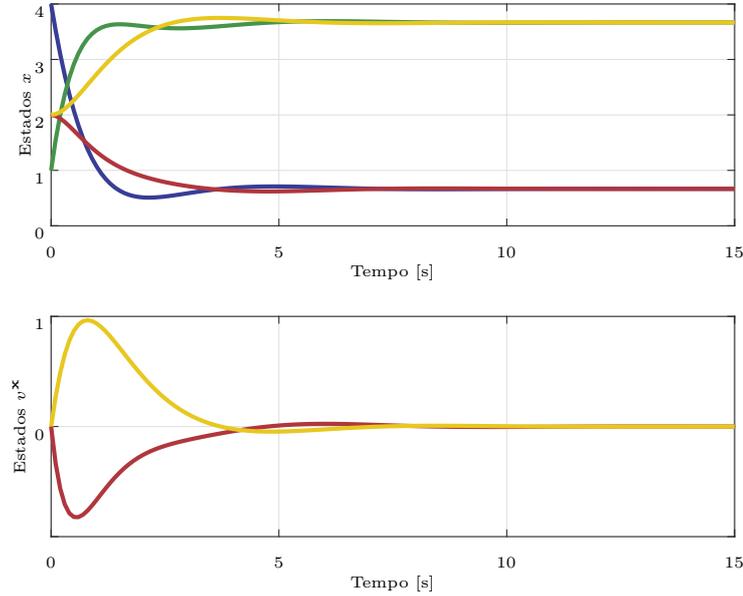


Figura 5.5: Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.25) com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$).

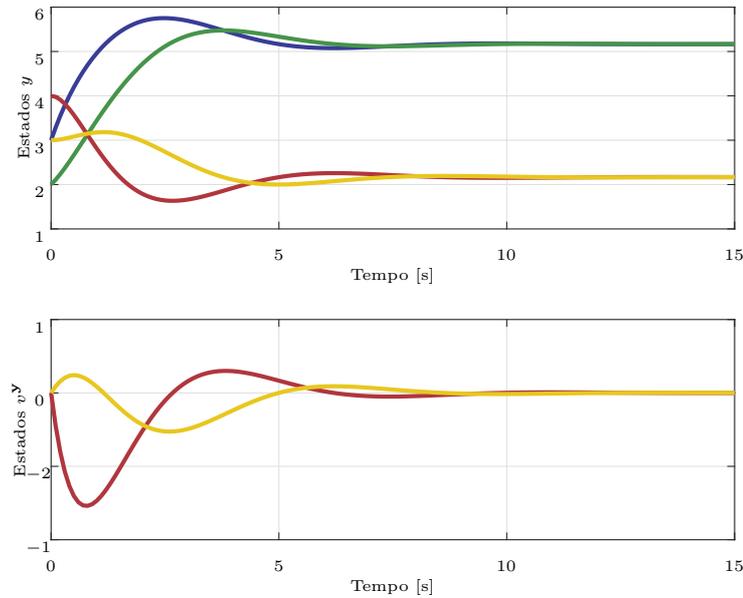


Figura 5.6: Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.26) com condições iniciais, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema não tem atrasos nas ações de controle (ou seja $\tau = 0$ e $\mu = 0$).

Portanto, como era esperado pelos resultados obtidos com o Teorema 5.1 para essas condições, as trajetórias do sistema convergiram para a formação. Agora, vamos verificar como ficam as trajetórias do sistema sujeito às condições máximas de atraso garantidas pelo Teorema 5.1 que são $\tau = 0.400$ com $\mu = 0,018$. Assim, as trajetórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^{\mathbf{y}}(0) = [0 \ 0]^T$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^{\mathbf{x}} = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^{\mathbf{y}} = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$, é apresentada na Figura 5.7 a seguir:

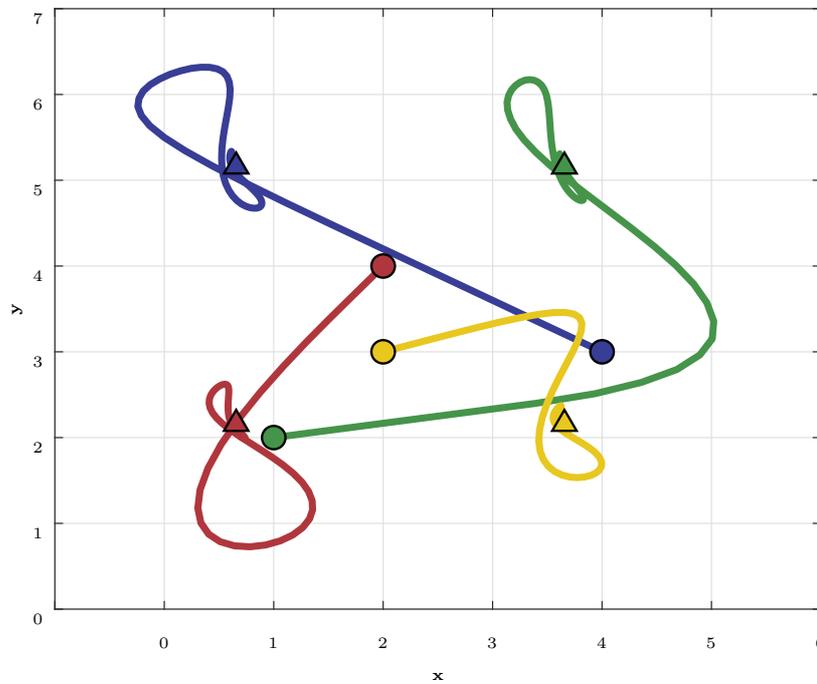


Figura 5.7: Trajetórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^{\mathbf{y}}(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^{\mathbf{x}} = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^{\mathbf{y}} = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.

As Figuras 5.8 e 5.9 a seguir apresentam a trajetória temporal dos estados da Figura 5.7. Em seguida, um trecho de 5 segundos dos atrasos nas ações de controle sofridos por cada um dos agentes são apresentados na Figura 5.10.

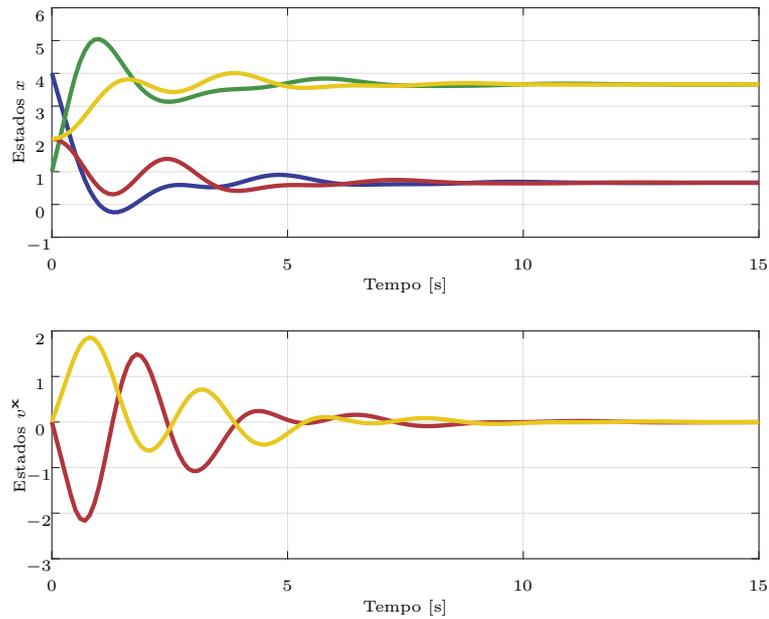


Figura 5.8: Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.25) com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$.

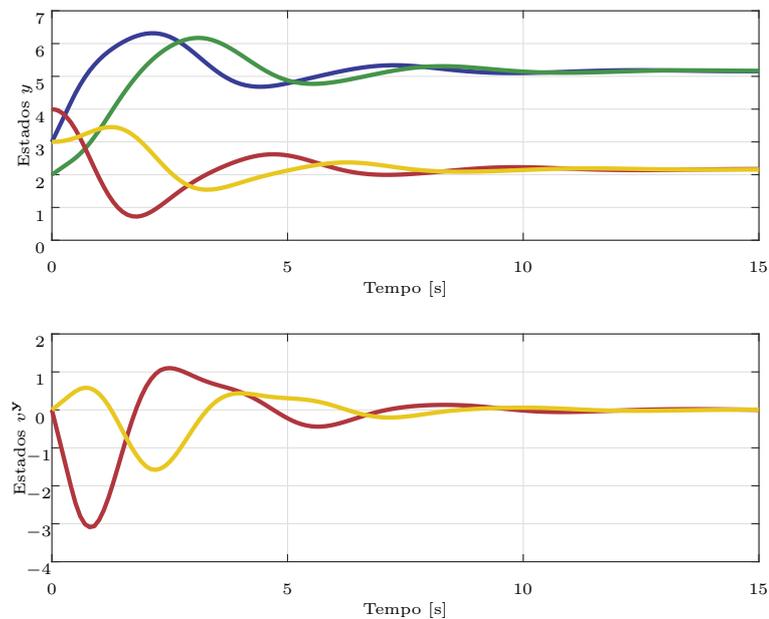


Figura 5.9: Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.26) com condições iniciais, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,400$ com $\mu = 0,018$.

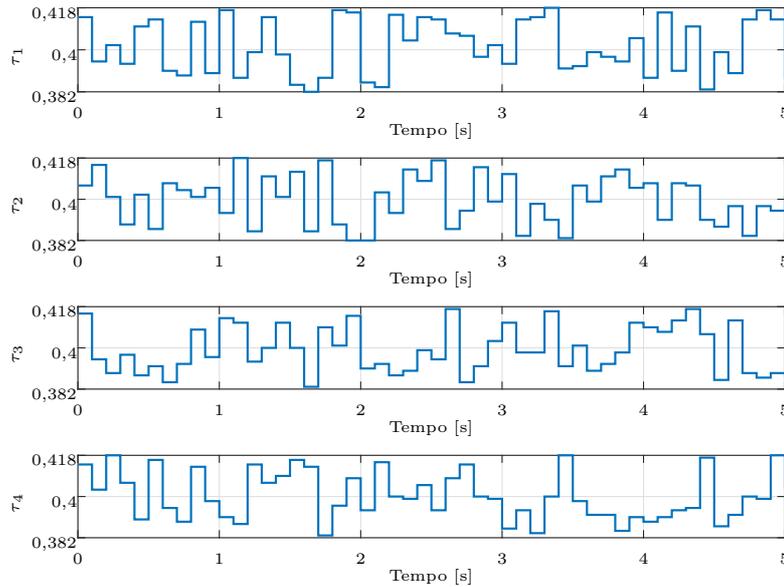


Figura 5.10: Trecho de 5 segundos dos atrasos variantes nas ações de controle ($\tau = 0,400$ e $\mu = 0,018$) sofridos pelos robôs durante a execução da trajetória da Figura 5.7.

Portanto, como era esperado pelos resultados obtidos com o Teorema 5.1 para essas condições, as trajetórias do sistema convergiram para a formação. Agora, nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13, será apresentado um caso em que o atraso é grande ao ponto de desestabilizar o sistema. As condições consideradas são as mesmas dos exemplos anteriores, com exceção dos atrasos que serão dados por $\tau = 0,6$ e $\mu = 0,1$.

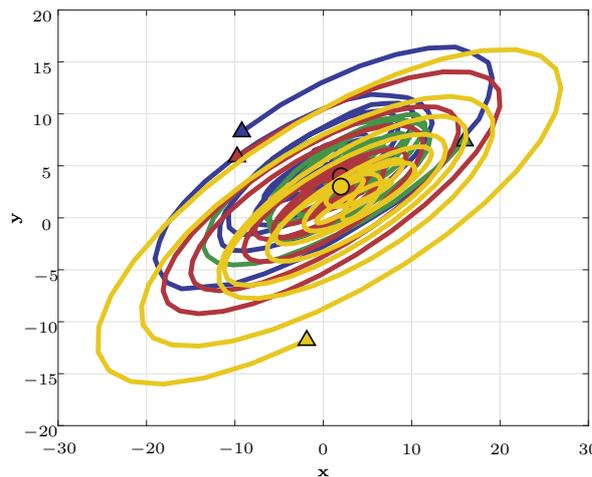


Figura 5.11: Trajetórias do sistema multi-robôs definido em (5.25) e (5.26) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,600$ com $\mu = 0,100$. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.

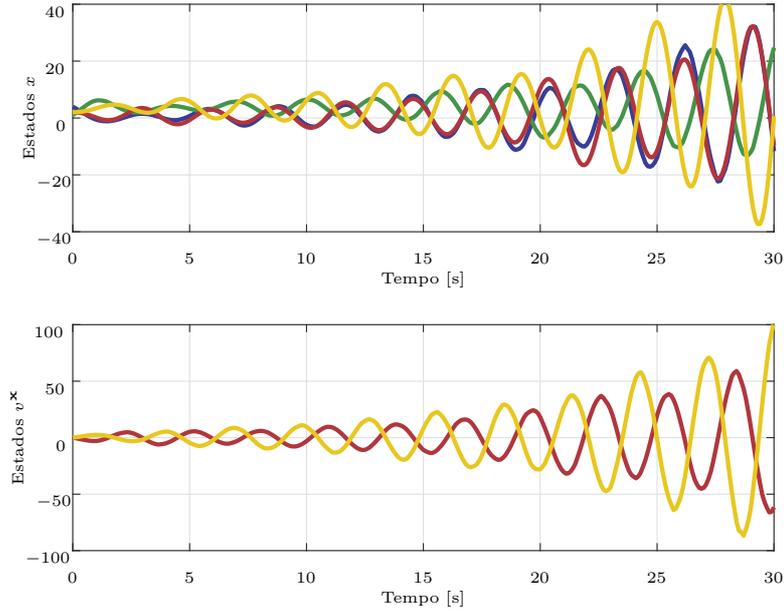


Figura 5.12: Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.25) com condições iniciais $X(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$, $v^x(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,600$ com $\mu = 0,100$.

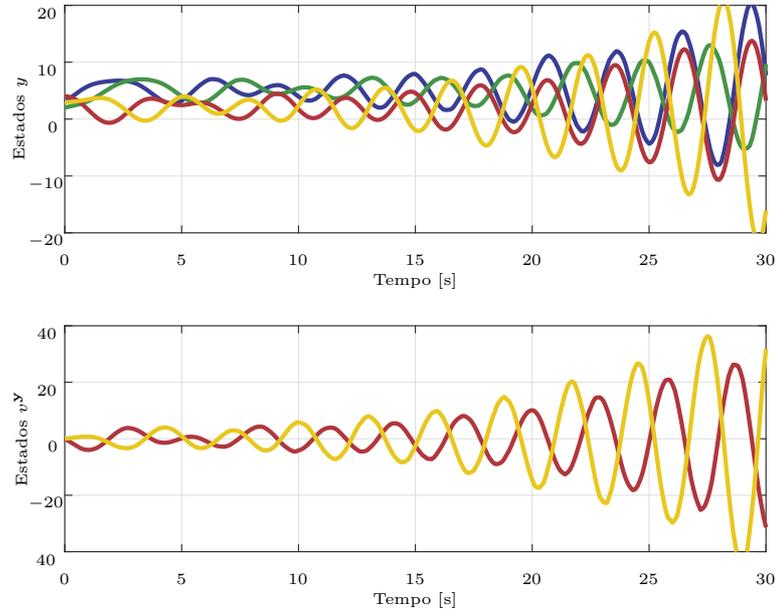


Figura 5.13: Trajetória temporal do sistema multi-robôs definido em (5.26) com condições iniciais, $Y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$ e $v^y(0) = [0 \ 0]^T$, $k_3 = 2$ e $k_4 = 2$, considerando a topologia da Figura 5.2, a formação $\lambda^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$ e que o sistema está sujeito a atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0,600$ com $\mu = 0,100$.

5.2 Extensão para Análise com Estimação do Tempo de Consenso

Existem situações em que, além de avaliar se um determinado SMAH atinge o consenso, é necessário saber também quanto tempo ele levará para isso. Neste contexto, esta seção estende os resultados apresentados anteriormente propondo um método para analisar se um determinado SMAH com topologia fixa e sujeito a atrasos variantes não uniformes e possivelmente não diferenciáveis nas ações de controle (exatamente com o sistema descrito em (4.8)), atingirá o consenso dentro de um tempo estimado pelo método. Estes resultados foram publicados pelo autor em 2018 no periódico internacional *Journal of Intelligent and Robotic System* (dos Santos Junior et al. 2018).

O aspecto inovador do método aqui proposto, quando comparado, por exemplo, com os métodos de Dai et al. (2014) e Wang & Sun (2015), possui pelo menos quatro pontos que merecem ser destacados. O primeiro ponto é que na abordagem aqui proposta são considerados múltiplos atrasos de modo que cada agente do sistema estará sujeito a um diferente atraso variante. O segundo ponto, é que neste método os atrasos podem ser não diferenciáveis, ou seja, não precisam ser uma função conhecida, o que representa um modelo mais realista dos fenômenos do mundo real. Em terceiro lugar, analisa-se a taxa de decaimento na resposta transitória, de modo que o tempo de convergência para alcançar o consenso possa ser estimado. E por fim, o quarto ponto diz respeito à forma como o atraso variante é representado, podendo variar dentro de um intervalo limitado que pode ter o limite inferior maior do que zero, o que representa de maneira mais fiel a forma como os atrasos se manifestam nos sistemas reais.

A partir destas concepções, o teorema apresentado a seguir formaliza o método proposto por esta tese como uma solução para analisar se um SMAH com as características descritas em (4.8) atingirá o consenso dentro de um tempo estimado.

Antes de apresentarmos o teorema, vamos considerar a seguinte definição:

Definição 5.1 *O sistema multi-agente heterogêneo (4.8) atingirá o consenso com taxa de convergência exponencial δ se:*

$$\|Z(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t}, \forall t \geq 0,$$

onde $Z(t)$ é dado pelo sistema transformado (4.24), κ é uma constante associado a este sistema e δ é um escalar positivo que representa a taxa de convergência do sistema.

Teorema 5.2 *Dados o valor médio do atraso $\tau > 0$, seu limitante superior e inferior μ tal que $\tau \geq \mu \geq 0$ e a taxa de convergência $\delta > 0$, pode-se afirmar que o sistema multiagente heterogêneo (4.8) com $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu] \forall i = 1, 2, \dots, m + n$, atinge o consenso se, o grafo \mathcal{G} que descreve sua topologia possuir uma árvore geradora mínima e existirem matrizes reais $F, G, P = P^T, Q, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T, S = S^T$ e $W = W^T$ com dimensão $(m + 2n - 2) \times (m + 2n - 2)$ que satisfaçam as seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{e_1}{\tau} S \end{bmatrix} > 0, \quad (5.31)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.32)$$

e

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mu\Gamma \\ * & -e_2\mu W \end{bmatrix} < 0, \quad (5.33)$$

na qual $e_1 = e^{-2\delta\tau}$, $e_2 = e^{-2\delta(\tau+\mu)}$,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^{11} & P + \tau R_2 - e_2 F + e_2 \bar{A}^T G^T & -Q + \frac{e_1}{\tau} R_3 - e_2 F \bar{B} & 2\delta Q - \frac{e_1}{\tau} R_2 \\ * & \tau R_3 + 2\mu Z - e_2 G - e_2 G^T & -e_2 G \bar{B} & Q \\ * & * & -\frac{e_1}{\tau} R_3 - e_1 S & \frac{e_1}{\tau} R_2 \\ * & * & * & -\frac{e_1}{\tau} R_1 \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

com $\Phi^{11} = 2\delta P + Q + Q^T + \tau R_1 - \frac{e_1}{\tau} R_3 + S + e_2 F \bar{A} + e_2 \bar{A}^T F^T$ e Γ dado por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} F \bar{B} \\ G \bar{B} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

sendo $\bar{B} = \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i$, \bar{A} e \bar{B}_i definidas em (4.24).

Demonstração: Com base na teoria de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii, esta demonstração mostra que se as LMIs propostas forem satisfeitas, então as desigualdades $V(Z) \geq \alpha \|Z(t)\|$ e $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \|Z(t)\|$ também serão tal que $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$, Z

denota os valores do estado $Z(t)$ no intervalo $[t - \max\{\tau(t)\}, t]$ para o atraso $\tau(t) \geq 0$ e $V(Z)$ é o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$\begin{aligned}
 V(Z) &= e^{2\delta t} Z^T(t) P Z(t) \\
 &+ 2e^{2\delta t} Z^T(t) Q \int_{t-\tau}^t Z(\xi) d\xi \\
 &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t e^{2\delta\xi} \bar{Z}^T(\xi) \bar{R} \bar{Z}(\xi) d\xi d\zeta \\
 &+ \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} Z^T(\xi) S Z(\xi) d\xi \\
 &+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\zeta-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{Z}^T(\xi) W \dot{Z}(\xi) d\xi d\zeta,
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

sendo $P = P^T$, Q , $R_1 = R_1^T$, R_2 , $R_3 = R_3^T$, $S = S^T$ e $W = W^T$ são matrizes com dimensão apropriada e $\bar{Z}^T(\xi) = [Z^T(\xi) \dot{Z}^T(\xi)]$. No próximo passo será apresentado como a condição $V(Z) \geq \alpha \|Z(t)\|$ será satisfeita.

Aplicando a Desigualdade de Jensen no termo da matriz S do funcional (5.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
 V(z_t) &\geq \eta^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{e-1}{\tau} S \end{bmatrix} \eta \\
 &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t e^{2\delta\xi} \bar{Z}^T(\xi) \bar{R} \bar{Z}(\xi) d\xi d\zeta \\
 &+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\zeta-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{Z}^T(\xi) W \dot{Z}(\xi) d\xi d\zeta,
 \end{aligned}$$

com $\eta^T = \left[e^{\delta t} Z^T(t) \quad e^{\delta t} \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi) d\xi \right]$.

Assim, uma condição suficiente que a condição $V(Z) \geq \alpha \|Z(t)\|$ seja verdadeira, é verificar se o lado direito da inequação acima é positivo. Então, se a LMI (5.31) e as condições $\bar{R} > 0$, $S > 0$, e $W > 0$ (implícita na LMI (5.33)), forem satisfeitas, logo $V(Z) \geq \alpha \|Z(t)\|$ também será.

Adiante, será demonstrado que se as LMIs (5.31), (5.32), e (5.33) forem satisfeitas, a condição $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \|Z(t)\|$ será verdadeira.

Primeiramente, derivando o funcional (5.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(Z) &= 2\delta e^{2\delta t} Z^T(t) P Z(t) + 2e^{2\delta t} Z^T(t) P \dot{Z}(t) \\
 &+ 2e^{2\delta t} \dot{Z}^T(t) \int_{t-\tau}^t Q Z(\xi) d\xi + 4\delta e^{2\delta t} Z^T(t) \int_{t-\tau}^t Q Z(\xi) d\xi \\
 &+ 2e^{2\delta t} Z^T(t) Q Z(t) - 2e^{2\delta t} Z^T(t) Q Z(t-\tau) \\
 &+ \tau e^{2\delta t} \bar{Z}^T(t) \bar{R} \bar{Z}(t) - \int_{t-\tau}^t e^{2\delta \zeta} \bar{Z}^T(\zeta) \bar{R} \bar{z}(\zeta) d\zeta \\
 &+ e^{2\delta t} Z^T(t) S Z(t) - e^{2\delta(t-\tau)} Z(t-\tau) S Z(t-\tau) \\
 &+ e^{2\delta t} \dot{Z}^T(t) 2\mu W \dot{Z}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} e^{2\delta \zeta} \dot{Z}^T(\zeta) W \dot{Z}(\zeta) d\zeta.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Em seguida vamos considerar o seguinte termo nulo obtido a partir da dinâmica do sistema (4.24):

$$\begin{aligned}
 0 &= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \left[Z^T(t) F + \dot{Z}^T(t) G \right] \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A} Z(t) - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i Z(t - \tau_i(t)) \right] \\
 &= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \left[Z^T(t) F + \dot{Z}^T(t) G \right] \times \\
 &\quad \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A} Z(t) - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i \left(Z(t - \tau) - \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{Z}(t + \xi) d\xi \right) \right] \\
 &= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \left[Z^T(t) F + \dot{Z}^T(t) G \right] \left[-\dot{Z}(t) + \bar{A} Z(t) - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i Z(t - \tau) \right] + \mathcal{V}(t),
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

onde F e G são matrizes com dimensão apropriada e

$$\mathcal{V}(t) = 2\Lambda \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} e^{\delta(t-\tau-\mu)} \dot{Z}(t + \xi) d\xi$$

com $\Lambda = e^{\delta(t-\tau-\mu)} [Z^T(t) F + \dot{Z}^T(t) G]$.

Então, aplicando a desigualdade abaixo em $\mathcal{V}(t)$

$$2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b,$$

com $X > 0$ e a e b com dimensão apropriada, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^{m+n} \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} (\Lambda \bar{B}_i) W^{-1} (\Lambda \bar{B}_i)^T d\xi \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{m+n} \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{Z}^T(t + \xi) W \dot{Z}(t + \xi) d\xi, \\
 &\leq \sum_{i=1}^{m+n} \mu (\Lambda \bar{B}_i) W^{-1} (\Lambda \bar{B}_i)^T \\
 &\quad + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{Z}^T(\xi) W \dot{Z}(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Agora, definindo $\bar{B} = \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i$, o limitante superior para $\dot{V}(Z)$ pode ser obtido aplicando a Desigualdade de Jensen na integral do termo com o \bar{R} em (5.37), adicionando a isso o termo nulo (5.38), e considerando o limitante superior para $\mathcal{V}(t)$ em (5.39), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t) &\leq \Upsilon^T \Phi \Upsilon + (\Lambda \bar{B}) \mu W^{-1} (\Lambda \bar{B})^T \\ &= \Upsilon^T [\Phi + \Gamma (e^{2\delta(\tau+\mu)} \mu W^{-1}) \Gamma^T] \Upsilon, \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde $\Upsilon^T = \left[e^{\delta t} Z^T(t) \quad e^{\delta t} \dot{Z}^T(t) \quad e^{\delta t} Z^T(t-\tau) \quad e^{\delta t} \int_{t-\tau}^t Z^T(\xi) d\xi \right]$, Φ é dado em (5.3) e Γ é definido em (5.35).

Portanto, com base em (5.40), para garantir que $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \|Z(t)\|$, para qualquer $\Upsilon \neq 0$, basta que a matriz entre colchetes acima seja negativa. Assim, aplicando o Complemento Schur, esta condição é equivalente à LMI (5.33). Por consequência, se as LMIs (5.31), (5.32), e (5.33) forem factíveis, a condição $\dot{V}(Z) \leq -\alpha \|Z(t)\|$ será satisfeita.

O próximo passo da demonstração é mostrar que se todas as LMIs do Terema foram satisfeitas, então o sistema (4.8) atingirá o consenso com taxa de convergência exponencial δ .

Primeiramente, considere a seguinte desigualdade:

$$2e^{2\delta t} Z^T(t) \int_{t-\tau}^t QZ(\xi) d\xi \leq \int_{t-\tau}^0 Z^T(t) e^{\delta t} QIQ^T e^{\delta t} Z(t) d\xi + \int_{t-\tau}^t e^{\delta t} Z^T(\zeta) I e^{\delta t} Z(\zeta) d\zeta,$$

then, um limitante superior para o funcional (5.36) é dado por:

$$\begin{aligned} V(Z) &= e^{2\delta t} \lambda_{\max}\{P\} \|Z(t)\|^2 + \tau e^{2\delta t} \lambda_{\max}\{QQ^T\} \|Z(t)\|^2 \\ &\quad + e^{2\delta t} \int_{t-\tau}^t \|Z(\zeta)\|^2 d\zeta + \tau \lambda_{\max}\{\bar{R}\} \int_{t-\tau}^t e^{2\delta \zeta} \|\bar{Z}\|^2 d\zeta \\ &\quad + \lambda_{\max}\{S\} \int_{t-\tau}^t e^{2\delta \zeta} \|Z(\zeta)\|^2 d\zeta \\ &\quad + (\tau + \mu) \lambda_{\max}\{W\} \int_{t-\tau-\mu}^t e^{2\delta \zeta} d\zeta \|\dot{Z}(\zeta)\|^2 d\zeta \\ &= \bar{V}(Z), \end{aligned}$$

onde $\lambda_{\max}\{\cdot\}$ é o máximo autovalor da matriz.

Agora, assumindo que as LMIs (5.31), (5.32), and (5.33) foram satisfeitas, temos que $\dot{V}(Z) < 0$ e $V(Z) > 0$. Isso implica que

$$0 \leq V(z_t) \leq V(Z(0)) \leq \bar{V}(Z)|_{t=0} \quad (5.41)$$

então

$$\begin{aligned} \bar{V}(Z_0) &\leq \left\{ \lambda_{\max}\{P\} + \tau \lambda_{\max}\{QQ^T\} + \lambda_{\max}\{S\} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta\zeta} d\zeta \right\} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|Z(\theta)\|\} \\ &\quad + \left\{ \tau \lambda_{\max}\{\bar{R}\} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta\zeta} d\zeta \right\} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|\bar{Z}(\theta)\|\} \\ &\quad + \left\{ (\tau + \mu) \lambda_{\max} W \int_{-\tau-\mu}^0 e^{2\delta\zeta} d\zeta \right\} \sup_{-(\tau+\mu) \leq \theta \leq 0} \{\|\dot{Z}(\theta)\|\} = \rho(\delta). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Por outro lado,

$$e^{2\delta t} \lambda_{\min}\{P\} \|Z(t)\|^2 \leq V(Z) \leq \rho(\delta), \quad (5.43)$$

onde $\lambda_{\min}\{P\}$ é o menor autovalor da matriz P . Assim, a partir de (5.43) temos que

$$\|Z(t)\| \leq \sqrt{\frac{\rho(\delta)}{\lambda_{\min}\{P\}}} e^{-\delta t} \triangleq \kappa e^{-\delta t}. \quad (5.44)$$

Por fim, podemos concluir que se as LMIs propostas por este teorema forem satisfeitas, o SMAH (4.8) atingirá a uma taxa de convergência δ de conforme a Definição 4.1. Isto completa a demonstração. \square

É importante ressaltar que com o Teorema 5.2 proposto, podemos determinar matematicamente se um determinado SMAH sujeito a atrasos variantes nas ações de controle irá atingir o consenso com uma determinada taxa de convergência δ . Porém, se o resultado obtido com o teorema for negativo, uma vez que a proposta possui apenas condições suficientes, não se pode afirmar que o sistema não atingirá o consenso.

O fluxograma apresentado na Figura 5.2 a seguir, ilustra um passo-a-passo de como o método proposto deve ser aplicado para solucionar o problema de análise de consenso com taxa de convergência estimada em um SMAH com as características do sistema (4.8).

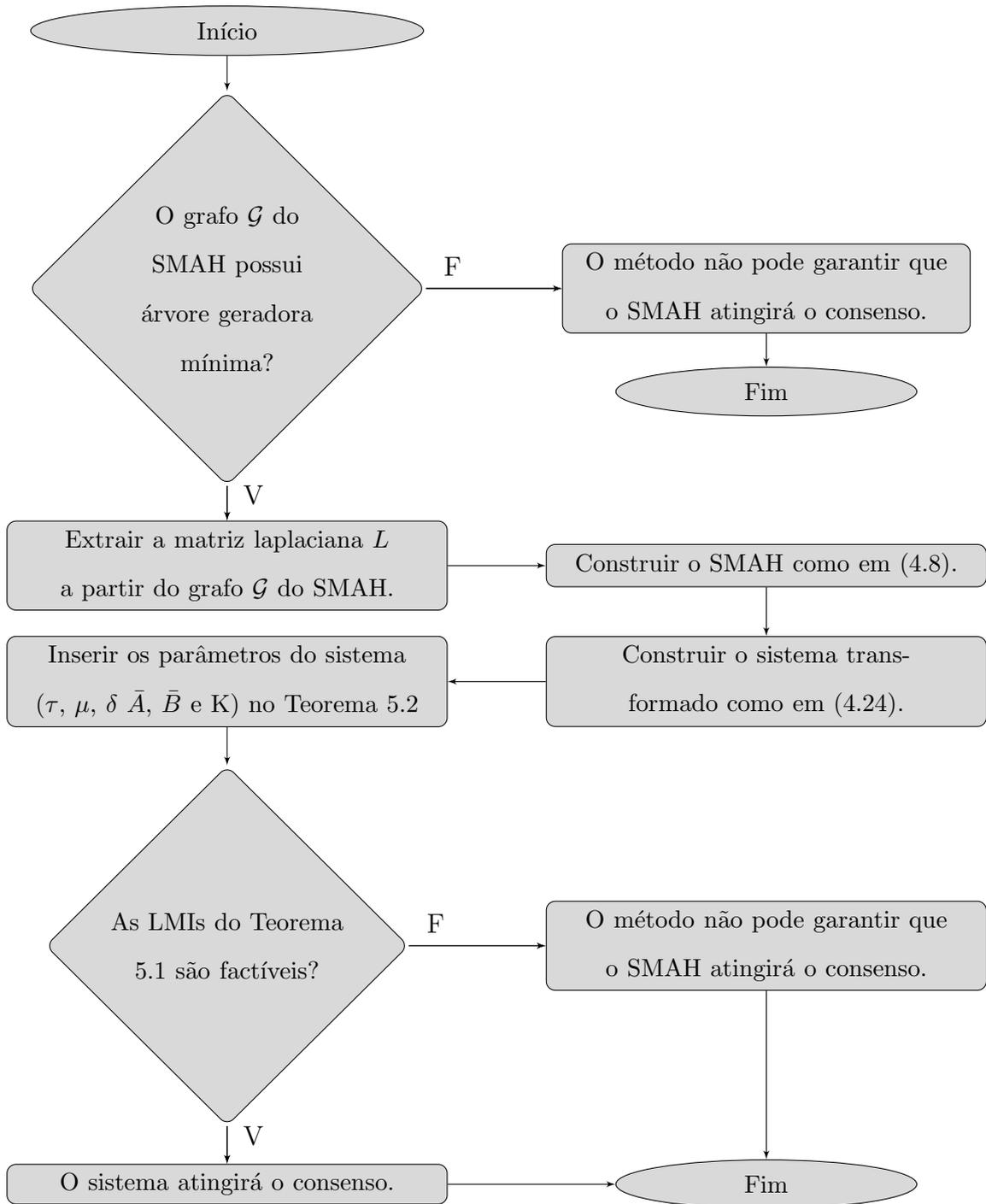


Figura 5.14: Fluxograma Passo-a-Passo da Aplicação do Método para Análise do Consenso Com Taxa de Convergência Estimada em SMAHs com Topologia Fixa e Atrasos Variantes

Como mencionado no Capítulo 3, todas as implementações para validação deste método foram realizadas utilizando o *MATLAB* sendo o *LMI Control Toolbox* o *solver* utilizado para a resolução das LMIs. É importante enfatizar que a complexidade computacional para resolução das LMIs do método proposto não tem relação com a quantidade ou

a dimensão dos atrasos uma vez que esses termos não influenciam na dimensão das linhas e colunas das variáveis das LMIs o que é uma vantagem sobre o método baseado em LMIs proposto por Souza et al. (2007). No caso deste método proposto a complexidade computacional cresce em função do tamanho das variáveis das LMIs que por sua vez crescem em função da quantidade de agentes do sistema. Mais informações sobre a complexidade do algoritmo utilizado na solução das LMIs podem ser vistas em Gahinet (1995).

A seção a seguir apresenta um exemplo numérico para avaliar a eficiência e ilustrar a aplicação do método de análise de consenso proposto pelo Teorema 5.2.

5.2.1 Exemplos Numéricos

Nesta seção é apresentado um exemplo numérico para fins de ilustrar e validar a eficiência do método proposto para análise do consenso com tempo de convergência em SMAHs com topologia fixa e atrasos variantes nas ações de controle.

Com o intuito de mostrar que o método pode proporcionar resultados interessantes em aplicações práticas na robótica, considere o seguinte cenário: um sistema multi-robôs composto por oito robôs terrestres omnidirecionais e oito robôs aéreos omnidirecionais que desejam atingir uma determinada formação nas coordenadas \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} para atuarem de forma sincronizada em um procedimento de patrulhamento em grupo (Portugal & Rocha 2013, ?). Podemos utilizar o Teorema 5.2 para verificar se, dadas as condições de interações entre os agentes (o grafo \mathcal{G}) e tempo de convergência, tal sistema atingirá uma formação pré-estabelecida, antes mesmo de fazer qualquer implementação real nos robôs. É importante lembrar que os robôs do sistema estão sujeitos a atrasos nas ações de controle. A Figura 5.15 abaixo, ilustra como está organizado o esquema de troca de informações entre estes robôs e também como deve ser a formação a ser atingida por eles. Aqui também, as setas indicam a direção em que existe a troca de informações entre os robôs e $\tau_i(t)$ é o elemento que representa o atraso variante nas ações de controle. Os agentes de 1 a 8 representam os robôs terrestres e os agentes de 9 a 16 os robôs aéreos.

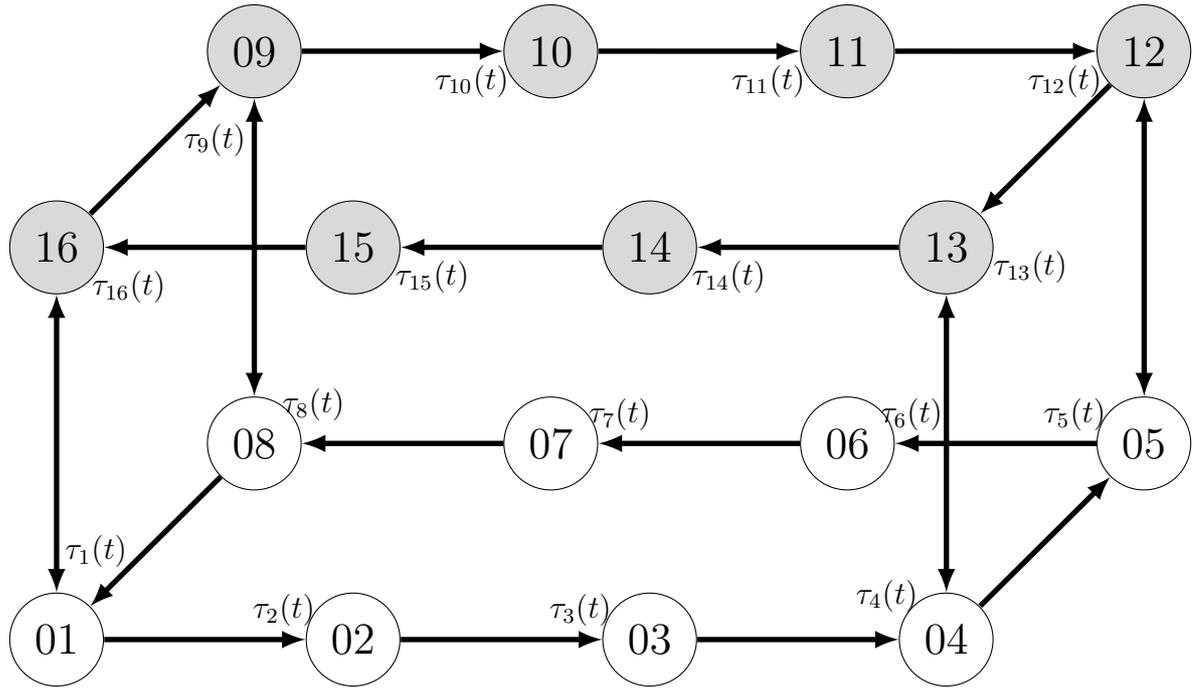


Figura 5.15: Topologia de comunicação e formação desejada do sistema multi-robôs heterogêneo composto por 8 robôs terrestres (robôs de 1 a 8) com dinâmica integrador puro de primeira ordem e 8 robôs aéreos (robôs de 9 a 16) sujeitos a atrasos $\tau_i(t)$ variantes nas ações de controle.

Assumindo que a dinâmica dos veículos robóticos terrestres é integrador puro de primeira ordem e que a dos veículos aéreos é integrador puro de segunda ordem, podemos modelar a dinâmica do sistema para a coordena \mathbf{x} como:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i^{\mathbf{x}}(t), & i = 1, 2, \dots, 8. \\ \dot{x}_i(t) = v_i^{\mathbf{x}}(t), \\ \dot{v}_i^{\mathbf{x}}(t) = u_i^{\mathbf{x}}(t), & i = 9, 10 \dots, 16., \end{cases} \quad (5.45)$$

na qual x_i , é a posição do i -ésimo robô na coordenada \mathbf{x} e $v_i^{\mathbf{x}}$, é a velocidade do i -ésimo robô na coordenada \mathbf{x} . As dinâmicas para as coordenadas \mathbf{y} e \mathbf{z} podem ser representadas de maneira análoga.

Com o intuito de analisar a formação deste sistema por meio do método proposto pelo Teorema 5.2, reescrevemos o problema de formação como um problema de consenso

considerando o seguinte protocolo:

$$u_i^\bullet(t) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} \left(x_i(t - \tau_i^\bullet(t)) - \lambda_i^\bullet - x_j(t - \tau_j^\bullet(t)) + \lambda_j^\bullet \right) & i \in \mathcal{I}_m \\ -\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \left(x_i(t - \tau_i^\bullet(t)) - \lambda_i^\bullet - x_j(t - \tau_j^\bullet(t)) + \lambda_j^\bullet \right) - k_i v_i^\bullet(t - \tau_i(t)) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (5.46)$$

onde λ_i^\bullet e λ_j^\bullet indicam a posição arbitrária desejada, respectivamente, para os robôs i e j na coordenada \bullet . Daqui em diante, o símbolo \bullet será utilizado para representar as coordenadas \mathbf{x} , \mathbf{y} , e \mathbf{z} .

Agora, substituindo, respectivamente, (5.46) em (5.45) e em seguida ajustando este resultado para a forma matricial, podemos reescrever o sistema como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}^\bullet(t) \\ \dot{v}^\bullet(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \rho^\bullet(t) \\ v^\bullet(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{m+n} B_i \begin{bmatrix} \rho^\bullet(t - \tau_i^\bullet(t)) \\ v^\bullet(t - \tau_i^\bullet(t)) \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

na qual $\rho^\bullet = [x_1^\bullet - \lambda_1^\bullet \cdots x_{(m+n)}^\bullet - \lambda_{(m+n)}^\bullet]^T$ e $v^\bullet = [v_{m+1}^\bullet \cdots v_{m+n}^\bullet]^T$.

Deste modo, pode-se dizer que (5.47) está no mesmo formato de (4.8), permitindo que a formação dos robôs possa ser verificada por meio do método proposto no Teorema 5.2.

Antes de continuarmos com o exemplo, é importante ressaltar que a representação do problema de formação baseado em consenso para o caso de SMAHs foi inspirada em Ren (2007).

Para fins de futuras comparações, inicialmente, realizaremos um teste utilizando o método proposto pelo Teorema 5.2 para verificar sob quais valores de atraso e taxa de convergência o sistema multi-robôs deste exemplo atingirá o consenso. Como relatado anteriormente, o método proposto foi implementado no *MATLAB* e a resolução das LMIs é feita com auxílio do *solver LMI Control Tool Box*. Assumindo que os ganhos do estado v serão dados por $k_i = 2 \forall i$, os resultados obtidos com estes testes são listados na Tabela 5.2 abaixo. Para estes testes os valores de τ e μ foram fixados de modo a determinar para qual o maior valor da taxa de convergência que método garantia o consenso. E os valores encontrados foram:

A ideia agora, é simular o sistema considerando uma formação desejada, e um conjunto intervalo de atrasos e taxa de convergência entre os estabelecidos pelo método na Tabela

(τ, μ)	(0.100, 0.05)	(0.150, 0.06)	(0.200, 0.07)
δ	0.174	0.166	0.158

Tabela 5.2: Maior valor de taxa de convergência δ obtida a partir do Teorema 5.2 para um dado par de atraso médio e variação do atraso (τ, μ) .

5.2, verificando assim a eficiência do método quanto à garantia da formação dos sistema multi-robôs.

Vamos considerar as seguintes posições arbitrárias desejadas, que garantem a formação como na Figura 5.15, $\lambda^x = [10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 40 \ 30 \ 20 \ 10 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 40 \ 30 \ 20 \ 10]^T$, $\lambda^y = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20]^T$ $\lambda^z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10]^T$. Esta formação é também apresentada pelos triângulos na Figura 5.16 apresentada a seguir. Ela representa um cubo em que os oito veículos terrestres são a base e os demais oito veículos aéreos são o topo em uma distância relativa de 10 nos eixos \mathbf{x} , \mathbf{y} and \mathbf{z} como na Figura 5.15.

Assim, as trajetórias do sistema multi-robôs definido em (5.47), considerando a formação desejada e a topologia de comunicação da Figura 5.15, sob a taxa de convergência estimada $\delta = 0.202$ e atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0.150$ e $\mu = 0.060$, com condições iniciais dadas por $x(0) = [0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \ 14 \ 16 \ 18 \ 20 \ 22 \ 24 \ 26 \ 28 \ 30]^T$, $y(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $z(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, e $v^\bullet(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, são apresentadas na Figura 5.16, onde os quadrados representam a posição inicial dos robôs.

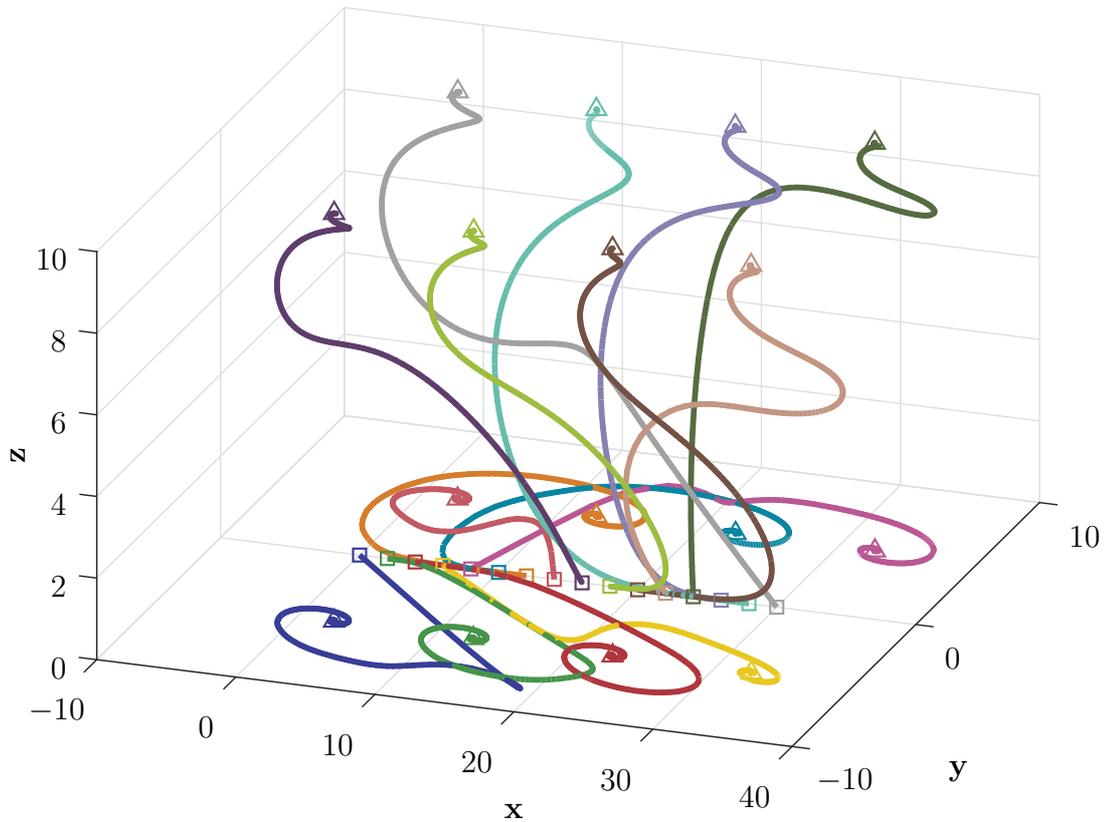


Figura 5.16: Trajetórias do sistema multi-robôs da Figura 5.15 nas coordenadas \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} sob a taxa de convergência estimada $\delta = 0.202$ e atrasos variantes não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle dados por $\tau = 0.150$ e $\mu = 0.060$. Os quadrados representam a posição inicial e os triângulos a posição final.

As trajetórias dos veículos apresentadas na Figura 5.16, mostram que o método proposto pelo Teorema 5.2 são eficientes pelo fato de assegurar que o sistema atingiria o consenso.

A Figura 5.17 a seguir, apresenta as trajetórias temporais do sistema no eixo \mathbf{x} e as velocidades $v^x(t)$, onde pode ser observado que a taxa exponencial de convergência estabelecida funcionou como uma excelente estimativa do tempo necessário para que o sistema atingisse a formação, ilustrando a aplicabilidade do método proposto.

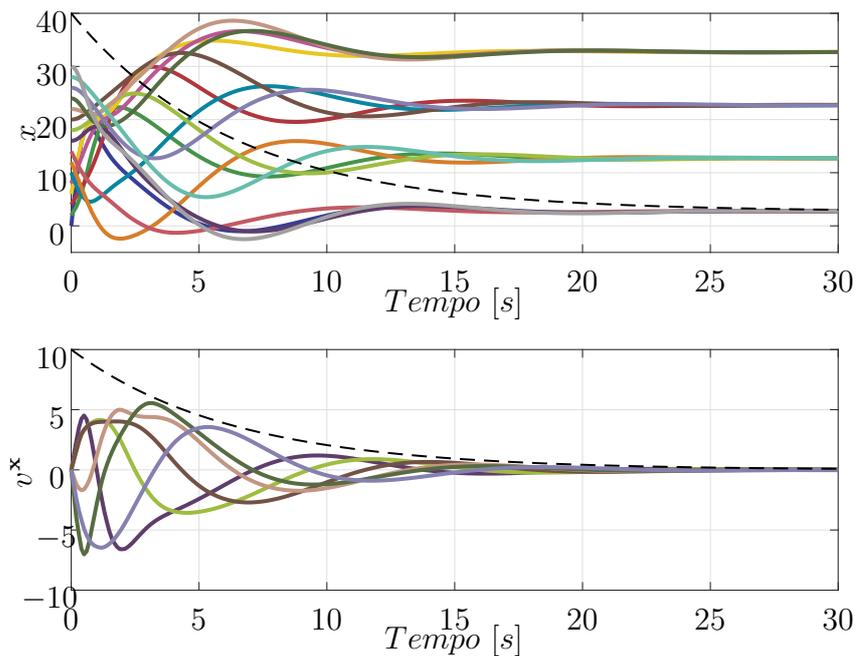


Figura 5.17: Trajetória temporal do sistema da Figura 5.15 considerando $\tau = 0.200$, $\mu = 0.070$, $\delta = 0.158$. Acima: trajetória temporal dos estados $x(t)$ (linhas sólidas) e uma função exponencial decrescente (linha tracejada), deslocada para o valor do consenso dos Robôs 1, 8, 9 e 16 dada por $(40 - x^*)e^{-\delta t} + x^*$. Abaixo: trajetória temporal das velocidades na coordenada \mathbf{x} $v^{\mathbf{x}}(t)$ e função exponencial decrescente $10e^{-\delta t}$.

Por fim, a Figura 5.2.1 mostra um trecho do ataso variante na ação de controle do Robô 1 na coordenada \mathbf{x} ($\tau_1^{\mathbf{x}}(t)$).

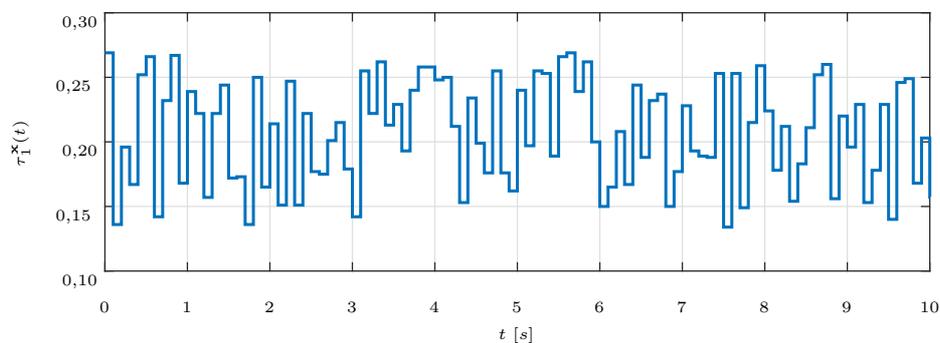


Figura 5.18: Trecho do atraso variante nas ações de controle aplicado na simulação temporal da Figura 5.17 $\tau_1^{\mathbf{x}}(t)$ com $\tau = 0.200$ e $\mu = 0.070$.

Consenso no Controle de Formação de Veículos Robóticos Heterogêneos

O conhecimento dirige a prática; no entanto, a prática aumenta o conhecimento.

Thomas Fuller

Este capítulo apresenta a descrição e os resultados de um experimento de aplicação do consenso para controle de formação de veículos robóticos heterogêneos. O objetivo é realizar a implementação dos protocolos de consenso em agentes robóticos reais e realizar a validação dos métodos propostos por esta tese também para esses casos. Inicialmente é apresentada a etapa de modelagem do sistema onde são apresentados os modelos considerados para os robôs e em seguida reescreve-se o sistema para o formato do controle de formação baseado em consenso. Em seguida, a arquitetura experimental é apresentada e ao final, os resultados obtidos com o experimento.

O experimento aqui apresentado foi realizado durante uma missão de estudos no Campus Alameda do Instituto Superior Técnico de Lisboa (IST) (Figura 6.1), mais especificamente no Laboratório de Controle, Automação e Informática Industrial do Instituto de Engenharia Mecânica do IST (Figura 6.2), sob a supervisão dos professores José Raul Azinheira e Alexandra Moutinho.



Figura 6.1: Entrada principal do Campus Alameda do Instituto Superior Técnico de Lisboa (acima) e Entrada do Instituto de Engenharia Mecânica (abaixo).

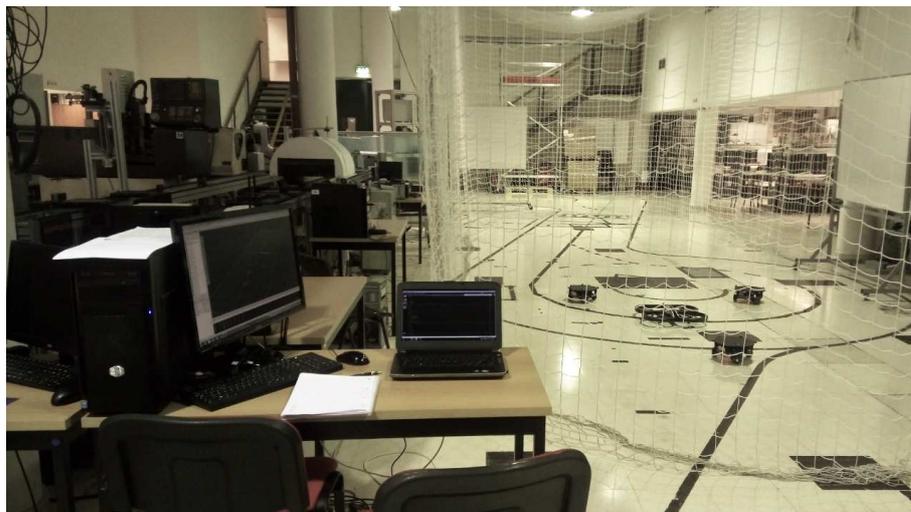


Figura 6.2: Dependências do Laboratório de Controlo, Automação e Informática Industrial do Instituto de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico de Lisboa.

6.1 Modelagem do Sistema Multi-Robôs

O sistema utilizado no experimento é composto por veículos robóticos terrestres e veículos robóticos aéreos. As subseções a seguir apresentam a descrição de como serão considerados os modelos desses robôs.

6.1.1 Veículos Robóticos Terrestres

Os veículos terrestres utilizados são robôs customizados do tipo omnidirecional de três rodas (Figura 6.3) como os apresentados em Ye, Ma & Hui (2011), Correia, Gustavo & Conceição (2012) e Moreno, Clotet, Lupianez, Tresanchez, Martinez, Palleja, Casanovas & Palacin (2016). Batizado como Omni-ANT, ele foi desenvolvido pelos próprios alunos do IST para a realização de atividades de pesquisa.



Figura 6.3: Vista superior (esquerda) e inferior (direita) do Omni-ANT.

Em resumo, o Omni-ANT é um veículo robótico terrestre omnidirecional com três rodas. Tem como base uma placa de alumínio de dois milímetros de espessura onde são fixados os demais componentes do veículo. As três rodas omnidirecionais estão posicionadas à mesma distância do centro do veículo espaçadas a 120 graus entre si. Esta configuração omnidirecional de três rodas garante que sempre todas as rodas irão estar em contato com o chão, reduzindo os efeitos de escorregamento que normalmente são desprezados na modelagem. A cada roda está ligado um conjunto composto por um motor, uma caixa redutora e um encoder. O veículo foi projetado para ter como alimentação uma bateria de Li-Po 3S2P de 11.1V. O modelo matemático considerado para o Omni-ANT foi exatamente o mesmo apresentado em Baede (2006). Toda a comunicação com o Omni-ANT é

realizada via Wi-Fi.

É importante ressaltar que todo o gerenciamento dos motores e controles de baixo nível do Omni-ANT já estão implementados no Arduino UNO. O controlador está configurado para receber comandos de velocidade linear em metros por segundo nas direções x e y e velocidade de rotação angular em radianos por segundo já em função de um referencial global. Dessa forma, se o controle de baixo nível está garantido, podemos considerar que dinâmica desses robôs é do tipo integrador puro de primeira ordem. Então, assumindo que o controle de baixo nível do Omni-ANT é ideal, podemos considerar uma dinâmica de alto nível para cada um dos eixos como:

$$\dot{x} = u^x \text{ e } \dot{y} = u^y \quad (6.1)$$

na qual \dot{x} e \dot{y} representam as velocidades nas direções x e y e u^x e u^y suas respectivas entradas de controle.

6.1.2 Veículos Robóticos Aéreos

O veículo robótico aéreo utilizado nos experimentos foi um *drone* comercial conhecido como AR.Drone 2.0 (Figura 6.4). A seguir é apresentada uma breve descrição sobre este veículo.



Figura 6.4: Veículo robótico aéreo utilizado nos experimentos reais (AR.Drone 2.0).

Em resumo, o AR.Drone 2.0 é um *drone* elétrico do tipo *quadrotor* a princípio destinado para fins de recreação. Sua base é composta por uma estrutura de fibra de carbono, quatro motores do tipo *brushless*, sensores de altitude (ultrassônico e barométrico), acelerômetro, giroscópio e duas câmeras (uma na parte inferior e uma na parte frontal). Assim como

no Omni-ANT, toda a comunicação com o AR.Drone é realizada via Wi-Fi. Ele também utiliza baterias de Li-Po com uma autonomia de vôo de aproximadamente quinze minutos. Mais detalhes sobre o AR.Drone podem ser vistos diretamente no site do seu fabricante ou em Krajník, Vonásek, Fišer & Faigl (2011).

O AR.Drone possui um controlador dedicado que gerencia todo o seu controle de baixo nível para estabilização. A princípio, fica disponível ao usuário o controle direto da sua guinada, dos ângulos de picada e rolamento e velocidade vertical, ou seja, conforme o usuário solicita os movimentos, a placa de controle ajusta as velocidades do motor para estabilizar o drone e realizar os movimentos desejados. Uma grande vantagem desta plataforma é que ela já possui integração com o ROS.

Inspirado nas aulas e nos textos de apoio do curso Simulação e Controle de Drones oferecido pelo IST Lisboa por meio da plataforma MOOC Técnico Lisboa (Moutinho & Azinheira 2018) sabe-se que é possível que o modelo desacoplado do movimento (sub-sistema do movimento) horizontal nas direções longitudinais e laterais de um *quadrotor* pode ser linearizado a ponto de se tornar um sistema do tipo integrador puro de segunda ordem, na qual a entrada do sistema passa a ser o ângulo de picada ou rolamento e as saídas, respectivamente, acelerações longitudinais ou laterais.

A partir desta ideia, assumindo que o controle de baixo nível está garantido, podemos considerar que a dinâmica de deslocamento nas direções x e y do nosso veículo robótico aéreo pode ser dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x \\ \dot{v} = u^x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{y} = v^y \\ \dot{v} = u^y \end{cases}, \quad (6.2)$$

na qual \dot{x} e \dot{y} representam as velocidades e \dot{v}^x e \dot{v}^y as acelerações nas direções x e y e u^x e u^y suas respectivas entradas de controle.

6.1.3 Controle de Formação Baseado em Consenso

A partir da definição dos modelos para controle dos eixos x e y dos veículos robóticos aéreos e terrestres apresentados em (6.1) e (6.2), faz-se a integração dos sistemas e apresenta-se então o modelo do SMAH a ser estudado no experimento. É importante ressaltar que no caso real teremos um agente 0 e ele funcionará como um agente virtual que indicará uma posição de referência desejada para todos os agentes do sistema. Assim, considera-se que o SMAH é composto por 5 agentes, sendo 4 terrestres e 1 aéreo. Além

disso, o agente 0 sempre terá valor constante e não receberá informação de nenhum dos outros agentes. Neste sentido, define-se então que para o controle na coordenada \mathbf{x} , o sistema será:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i^{\mathbf{x}}(t), & i = 0, 1, 2 \text{ e } 3, \\ \dot{x}_i(t) = v_i^{\mathbf{x}}(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i^{\mathbf{x}}(t), & i = 4 \end{cases} \quad (6.3)$$

e para a coordenada \mathbf{y} :

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = u_i^{\mathbf{y}}(t), & i = 0, 1, 2 \text{ e } 3, \\ \dot{y}_i(t) = v_i^{\mathbf{y}}(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i^{\mathbf{y}}(t), & i = 4, \end{cases} \quad (6.4)$$

Perceba que pela notação, os agentes 0 1, 2 e 3 são os veículos robóticos terrestres e o agente 4 é o veículo aéreo.

Para que o consenso deste sistema seja atingir uma determinada formação, vamos considerar o seguinte protocolo de consenso para o controle dos robôs na coordenada \mathbf{x} :

$$\begin{cases} u_i^{\mathbf{x}}(t) = -\sum_{j=0}^4 a_{ij} \left(x_i(t-\tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{x}} - x_j(t-\tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{x}} \right), & i = 0, 1, 2 \text{ e } 3, \\ u_i^{\mathbf{x}}(t) = -\sum_{j=0}^4 a_{ij} \left(x_i(t-\tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{x}} - x_j(t-\tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{x}} \right) - k_i v_i^{\mathbf{y}}(t-\tau_i(t)), & i = 4 \end{cases} \quad (6.5)$$

e na coordenada \mathbf{y} :

$$\begin{cases} u_i^{\mathbf{y}}(t) = -\sum_{j=0}^4 a_{ij} \left(x_i(t-\tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{y}} - x_j(t-\tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{y}} \right), & i = 0, 1, 2 \text{ e } 3, \\ u_i^{\mathbf{y}}(t) = -\sum_{j=0}^4 a_{ij} \left(x_i(t-\tau_i(t)) - \lambda_i^{\mathbf{y}} - x_j(t-\tau_j(t)) + \lambda_j^{\mathbf{y}} \right) - k_i v_i^{\mathbf{y}}(t-\tau_i(t)), & i = 4 \end{cases} \quad (6.6)$$

Note que foi considerado tanto no modelo quando protocolo de consenso que o sistema do experimento terá topologia fixa.

Ademais, substituindo, respectivamente, (6.5) e (6.6) em (6.3) e (6.4) e em seguida ajustando este resultado para a forma matricial, podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\dot{X}(t) = A \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{x}}(t) \\ v^{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=0}^4 B_i \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{x}}(t - \tau_i^{\mathbf{x}}(t)) \\ v^{\mathbf{x}}(t - \tau_i^{\mathbf{x}}(t)) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\dot{Y}(t) = A \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{y}}(t) \\ v^{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=0}^4 B_i \begin{bmatrix} \rho^{\mathbf{y}}(t - \tau_i^{\mathbf{y}}(t)) \\ v^{\mathbf{y}}(t - \tau_i^{\mathbf{y}}(t)) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

na qual, para a coordenada \mathbf{x}

$$\rho^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 - \lambda_1^{\mathbf{x}} \\ x_2 - \lambda_2^{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{m+n} - \lambda_{m+n}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, v^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ v_{m+n} \end{bmatrix},$$

Essas definições são análogas para o caso dos estados da coordenada \mathbf{y} . Deste modo, assim como nos exemplos numéricos do Capítulo 5, pode-se dizer que (6.7) e (6.8) estão no mesmo formato de (4.8) e isto permite que a formação dos robôs, antes de executar o experimento, pode ser verificada por meio dos métodos propostos nos Teoremas 5.1 e 5.2. Fica então finalizada a modelagem o do SMAH a ser considerado nos experimentos. A Seção a seguir apresenta a arquitetura experimental utilizada.

6.2 Arquitetura Experimental

Antes de apresentarmos a arquitetura geral utilizada nos experimentos, é necessário apresentar o conceito de um dos principais elementos que fazem parte dela: o sistema de localização Qualisys. Ele é um sistema de motion capture para localização indoor, ideal para a realização de experimentos com *quadcopteros* e os demais robôs com dinâmica de qualquer ordem. O sistema é composto por um conjunto de câmeras que identificam por meio de infravermelho a posição de marcadores específicos com precisão milimétrica e baixíssima latência. Um exemplo de captura é apresentado na Figura 6.5.

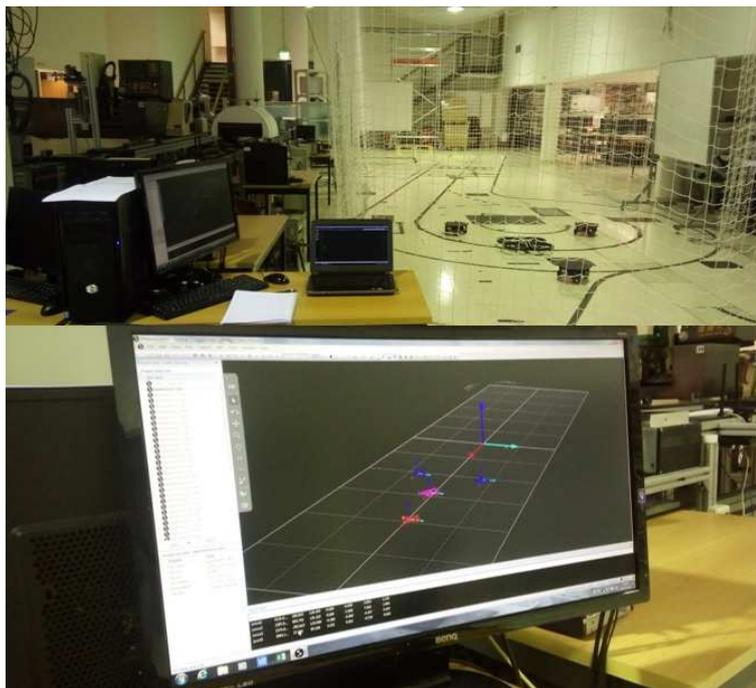


Figura 6.5: Exemplo de uma captura realizada pelo Qualisys.

Com exceção do Qualisys, todos os demais elementos que fazem parte da arquitetura geral do sistema são recorrentes no mundo da robótica e não serão detalhados nesta tese. Deste modo, a Figura 6.6 apresentada a seguir, ilustra a arquitetura geral utilizada para o desenvolvimento dos experimentos reais:

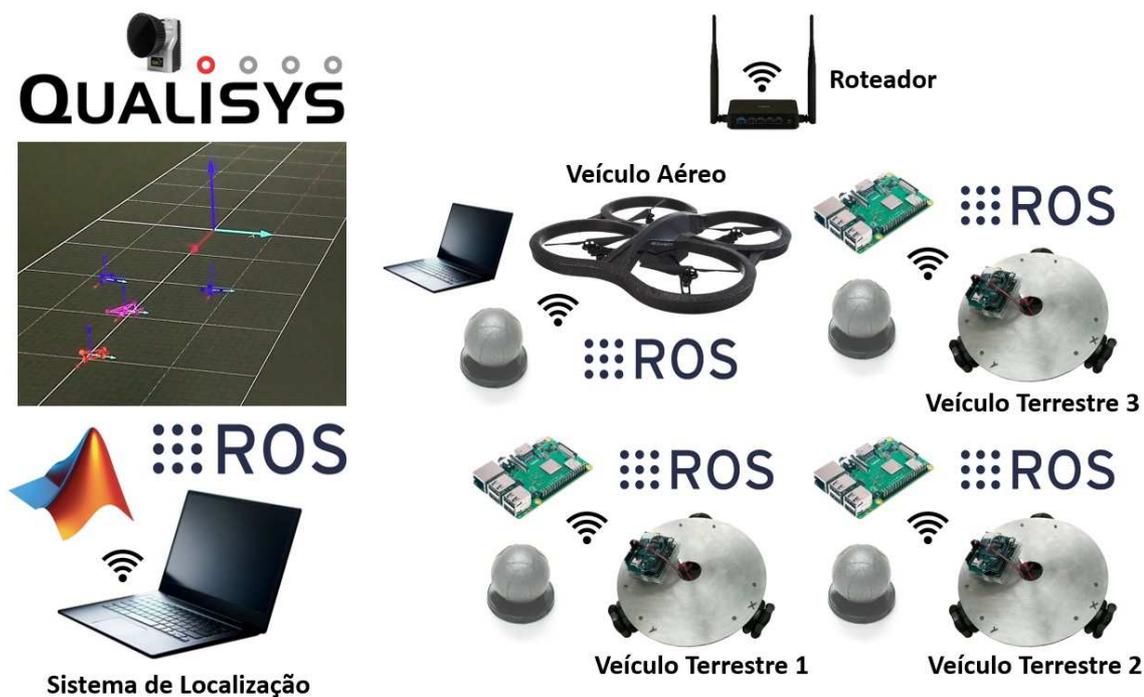


Figura 6.6: Arquitetura geral dos experimentos com veículos robóticos reais.

O sistema de localização composto pelo Qualisys, Matlab, ROS e um PC é o responsável por distribuir os dados de localização dos marcadores que estão nos veículos robóticos a partir das câmeras do Qualisys. Por meio de uma API chamada "*Qualisys UDP Receiver*", desenvolvida pelos alunos do IST, esses dados de localização podiam ser acessados pelo *MATLAB*. A partir do *MATLAB*, foi desenvolvida uma aplicação que publicava as informações de localização dos recebidas pelo "*Qualisys UDP Receiver*" na forma de tópicos por meio de um nó no *framework* do ROS, podendo ser acessado por qualquer outro nó na rede do ROS. É válido ressaltar que a versão do ROS utilizada nos experimentos foi a Indigo.

Os veículos terrestres, agora, além do controlador de baixo nível, possuem também marcadores para identificar o veículo pelo sistema de câmeras do Qualisys e uma Raspberry Pi para funcionar como controlador de alto nível. Para esta Raspberry, foi desenvolvido um software de integração para que o controlador de baixo nível pudesse receber comandos os via ROS. Além disso, é nela que fica implementado a lei de controle do consenso. A Figura 6.7 apresenta a estrutura física do Omni-ANT após a aplicação dos marcadores e do Raspberry Pi.



Figura 6.7: Omni-ANT adaptado para as aplicações desta tese.

Ao veículo aéreo também foram adicionados marcadores para identificar o veículo pelo sistema de câmeras do Qualisys. O envio dos comandos para ele também era feito via

ROS. Por questões de logística e problemas de fixação, o seu PC de alto nível ficou remoto, por isso na Figura 6.6 aparece como um PC e não como um Raspberry como nos demais veículos do sistema. Isso não altera em nada o desempenho do sistema. Para esse PC também foram desenvolvidos softwares para integração e envio dos comandos de alto nível via ROS e nele também foi implementado o protocolo de consenso. A Figura 6.4 apresenta como ficou o veículo aéreo do sistema após a fixação dos marcadores do Qualisys.



Figura 6.8: AR.Drone adaptado para as aplicações desta tese.

Em resumo, o sistema como um todo funciona da seguinte forma: as posições e velocidades (no casos de segunda ordem) dos veículos são fornecidos pelo PC que transmite as informações de localização dos marcadores Qualisys via ROS. De posse das informações da sua posição e da posição dos vizinhos, os robôs conseguem executar as trajetórias previstas pelo protocolo de consenso aplicado.

6.3 Resultados Experimentais

O experimento realizado com agentes reais foi pensado para uma aplicação em que um agente aéreo faria uma escolta para três agentes terrestres. Para isso, eles precisariam manter uma formação pré-estabelecida. Esta formação deve ser alcançada e mantida por meio do protocolo de consenso (6.5) para a coordenada x e (6.6) para a coordenada y . Os

deslocamentos na coordenada \mathbf{z} do veículo robótico aéreo, serão controlados diretamente pelo seu controle interno, não fazendo parte do consenso. Para o caso em questão, será mantida uma altura de segurança de 1 metro entre os veículos terrestres e o veículo aéreo.

A topologia de troca de informações entre os veículos robóticos é apresentada na Figura 6.9 abaixo:

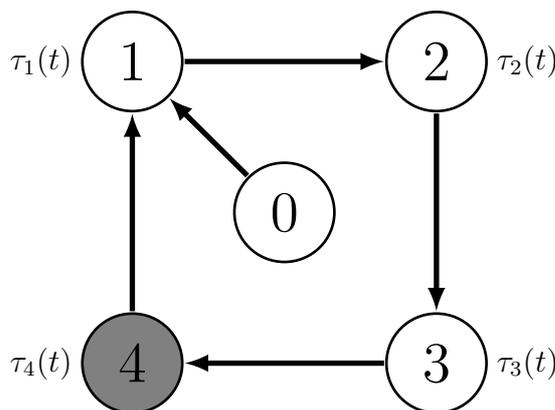


Figura 6.9: Topologia de troca de informações de um sistema multiagente heterogêneo sujeito a atrasos variantes $\tau_i(t)$, composto por 3 agentes com dinâmica integrador puro de primeira ordem (agentes 1, 2 e 3), 1 agente com dinâmica integrador puro de segunda ordem (agente 4) e um agente virtual (agente 0).

O número pequeno de canais de comunicação entre os agentes foi escolhido propositalmente para ilustrar que o sistema funciona mesmo com poucos canais de comunicação (desde que uma árvore geradora mínima exista) e pelo fato de que quanto menor a quantidade de dispositivos se comunicando na rede, menor será os custos com equipamentos de comunicação no sistema real (já pensando em levar estes conceitos para uma aplicação mais complexa). Note que o agente 4, que representa o veículo robótico aéreo do sistema, está destacado em cinza para facilitar a sua identificação, uma vez que ele é o único agente com dinâmica de segunda ordem do sistema. Como relatado anteriormente, o sistema possui um agente virtual e a sua principal função na topologia é garantir uma posição fixa para formação que será realizada. Perceba que ele não recebe informações dos demais agentes e portanto não tem seu estado atualizado.

A formação desejada para a escolta é apresentada na Figura 6.10 abaixo:

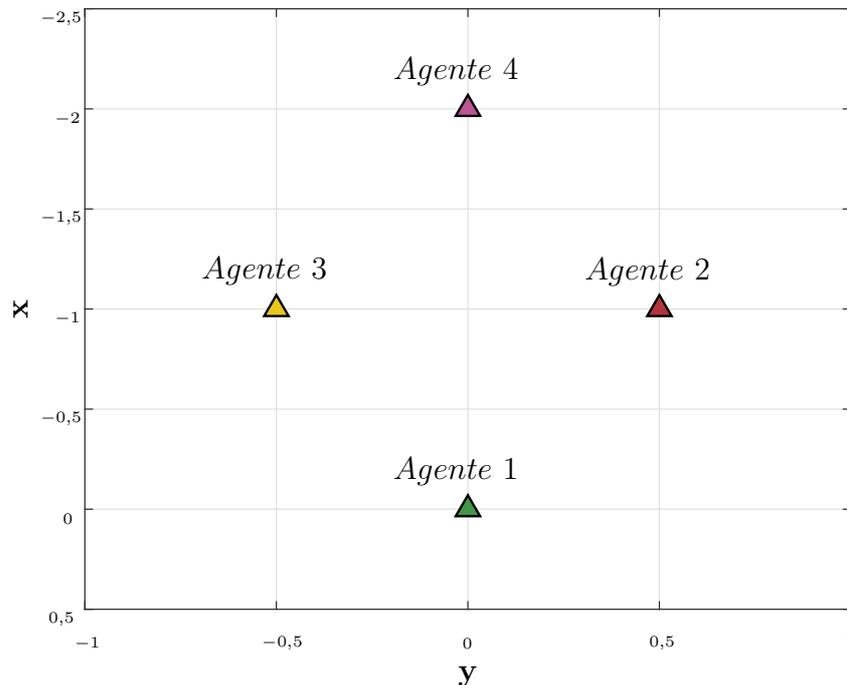


Figura 6.10: Formação $\lambda^x = [0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -2]^T$ e $\lambda^y = [0 \ 0 \ 0,5 \ -0,5 \ 0]^T$ na qual existe um *Agente 0* (virtual) na mesma posição do *Agente 1*.

Lembrando que os *Agentes 1, 2 e 3* são os veículos robóticos terrestres e o *Agente 4* é o veículo robótico aéreo. Note que o *Agente 0* não aparece na Figura 6.10 pelo fato de a posição desejada definida para este agente é a mesma posição do *Agente 1*.

Como comentado na seção anterior, a comunicação entre os veículos robóticos será por meio de uma rede Wi-Fi. Sabemos que esse tipo de tecnologia por mais moderno que seja, acaba atrasando as informações trocadas entre um dispositivo e outro. Uma vez que o sistema de localização dos veículos utilizados neste experimento será baseado em Wi-Fi, sem dúvidas, teremos problemas com atrasos. Na arquitetura utilizada, uma vez que tanto as informações do próprio agente quanto as informações dos agentes vizinhos dependem da rede Wi-Fi, caso existam atrasos nessa rede, podemos caracterizar estes como atrasos de entrada (ou nas ações de controle) pois todas as informações que chegarão ao protocolo de consenso de cada agente estarão sujeitas aos atrasos da rede Wi-Fi.

Conhecendo a topologia (Figura 6.9) e a formação (Figura 6.10) do sistema, podemos avaliar se o sistema atingirá o consenso mesmo antes de implementarmos os protocolos de consenso nos robôs ou realizarmos uma simulação das trajetórias do sistema. Para isso podemos utilizar o método proposto pelo Teorema 5.1 já garantindo uma margem máxima de atraso para o sistema nas trocas de informações na rede.

Para identificar o limite máximo de atraso garantido pelo método proposto Teorema 5.1, fixamos o valor do limitante superior $\mu = 0$ e identificamos que o método garante que sistema atingirá o consenso (considerando $k_5 = 2$) se sujeito a um atraso máximo dado por $\tau = 0,464$. Com esta informação, podemos verificar a latência da rede e identificar se algum dos agentes está com um atraso acima do garantido pelo método. As medições indicaram um atraso variando entre $\tau = 0,050$ a $\tau = 0,100$, ou seja, abaixo do valor máximo de atraso garantido pela análise do método.

Sabe-se que o protocolo de consenso proposto para solucionar este problema de formação não garante que os agentes do sistema irão evitar qualquer tipo de colisão entre eles. Foram realizadas simulações para identificar condições iniciais que evitassem trajetórias com risco de colisão entre os agentes. A Figura 6.11 apresentada abaixo, ilustra as condições iniciais selecionadas para o experimento real juntamente com as trajetórias deste sistema ao longo das coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} .

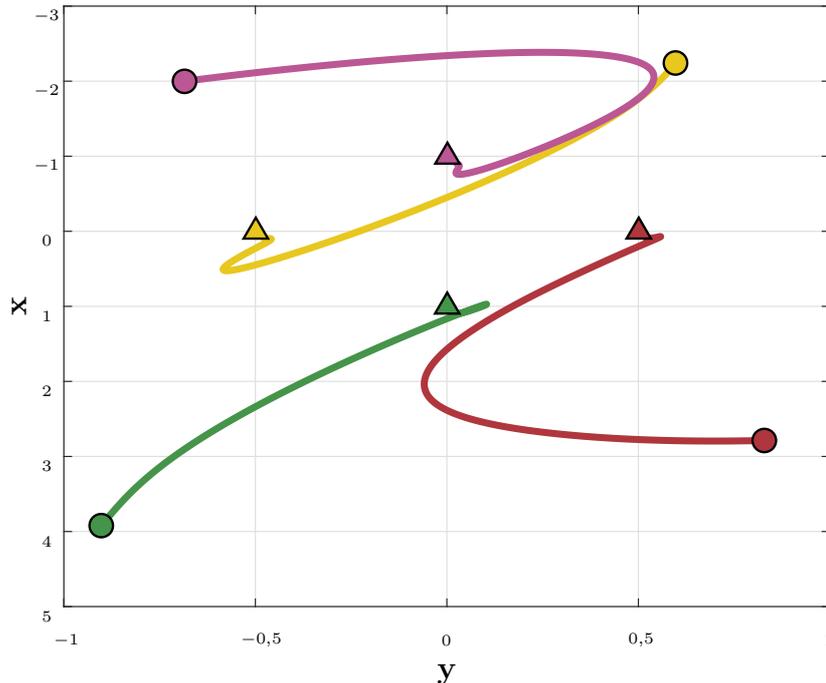


Figura 6.11: Trajetórias do sistema definido em (6.7) e (6.8) nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} com condições iniciais $X(0) = [1 \ 3,9 \ 2,8 \ -2,2 \ -2,0]^T$, $v^x(0) = [0]^T$, $Y(0) = [0 \ -0,9 \ 0,8 \ -0,6 \ -0,7]^T$ e $v^y(0) = [0]^T$, $k_5 = 2$, considerando a topologia da Figura 6.9, a formação da Figura 6.10 e que o sistema não está sujeito a atrasos. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.

Note que a condição inicial do agente virtual na coordenada \mathbf{x} foi definida como 1. Isto

foi escolhido para compensar as limitações físicas do espaço utilizado para os experimentos reais. O local, conhecido como *Arena* (Figura 6.12), possui uma área útil coberta pelas câmeras do *Qualisys* de aproximadamente 7 metros na coordenada x e 4 metros na coordenada y . Devido a limitações de espaço no laboratório, o eixo da coordenada x da *Arena* não é simétrico, isto é, os 7 metros estão divididos entre -3 e 4 . Observe que pela característica da formação escolhida, os veículos 2 3 e 4 devem estar atrás do veículo 1 que por sua vez assumirá exatamente a posição do agente virtual, dadas as características da topologia de rede escolhida. Como o agente virtual não muda de posição, se sua condição inicial para a coordenada x estivesse em 0 , por consequência, o ponto de consenso para o veículo 1 seria exatamente nesta posição. Assim, toda a trajetória da Figura 6.11 seria deslocada de -1 na coordenada x , ultrapassando o limite disponível de área útil da *Arena*.



Figura 6.12: *Arena* - espaço utilizado para a realização dos experimentos reais. .

Ainda sobre as condições iniciais, a Figura 6.13 a seguir, apresenta a disposição dos agentes reais, já nas posições iniciais estabelecidas pelas simulações das trajetórias.

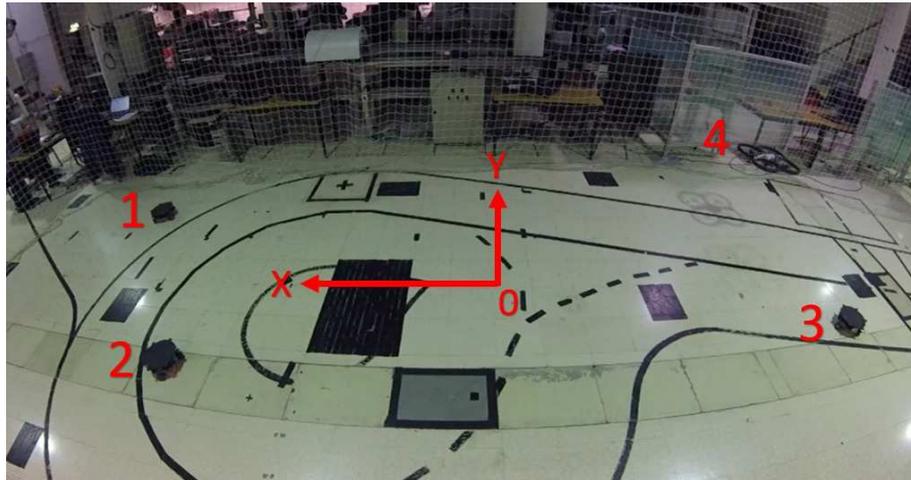


Figura 6.13: Condição inicial dos *Agentes* 1, 2, 3 e 4 no experimento com veículos reais.

Note que o veículo aéreo (*Agente* 4) já se encontra em vôo pairado sob controle independente do consenso. O início da ação do protocolos de consenso acontece quando é enviado um comando instantâneo ao mesmo tempo para todos os agentes por meio da comunicação do sistema de localização.

As trajetórias obtidas no experimento com os veículos robóticos reais é apresentada na Figura 6.14 a seguir:

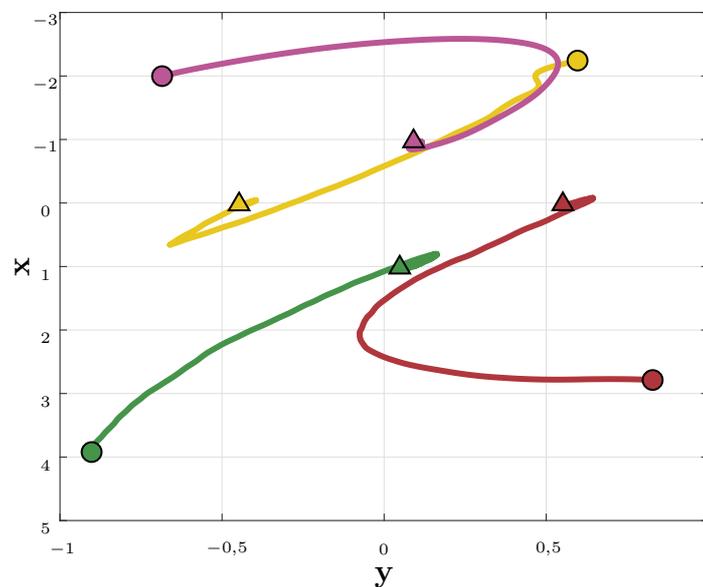


Figura 6.14: Trajetórias do sistema de um sistema multiagente heterogêneo real composto por 3 veículos terrestres e 1 veículo aéreo, com condições iniciais $X(0) = [1 \ 3,9 \ 2,8 \ -2,2 \ -2,0]^T$, $v^x(0) = [0]^T$, $Y(0) = [0 \ -0,9 \ 0,8 \ -0,6 \ -0,7]^T$ e $v^y(0) = [0]^T$, $k_5 = 2$, considerando a topologia da Figura 6.9, a formação da Figura 6.10 e que os atrasos do sistema são desprezíveis. Os círculos representam as posições iniciais e os triângulos as posições finais.

A Figuras 6.15 e 6.16 apresentam a combinação das trajetórias esperadas pela simulação com as trajetória realizadas no experimento real.

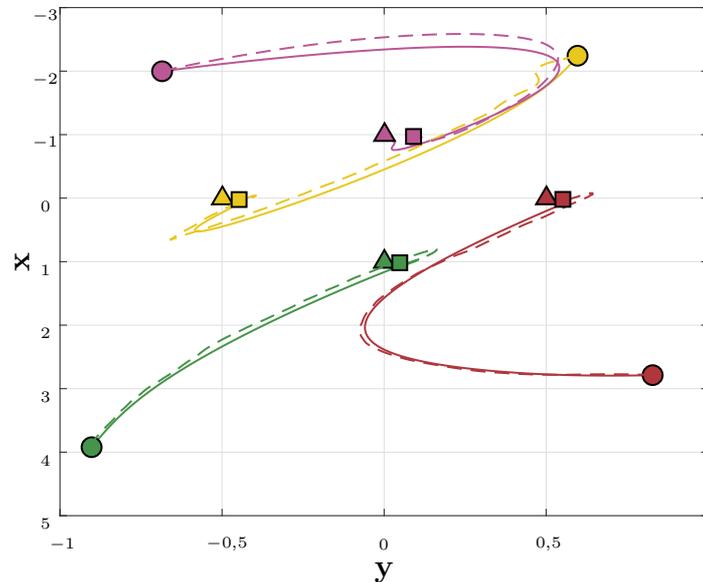


Figura 6.15: Comparação das trajetórias das Figuras 6.11 e 6.14 na qual as linhas sólidas representam as trajetórias esperadas pela simulação e as linhas tracejadas as trajetórias realizadas pelo sistema real. Os círculos indicam a posição e inicial, os quadrados a posição final da trajetória tracejada e os triângulos a posição final da trajetória sólida.

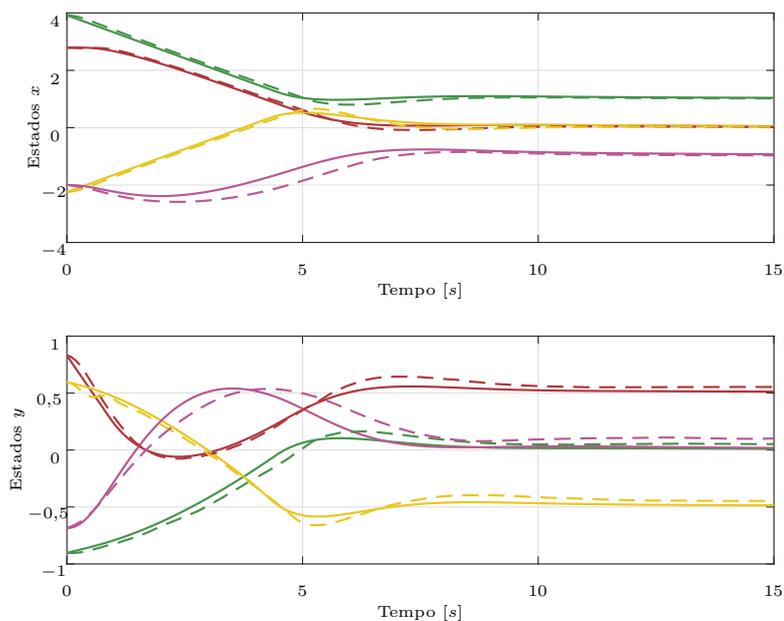


Figura 6.16: Comparação temporal das trajetórias das Figuras 6.11 e 6.14 na qual as linhas sólidas representam as trajetórias esperadas pela simulação e as linhas tracejadas as trajetórias realizadas pelo sistema real.

A Figura 6.17 apresenta em 6 quadros o comportamento dos veículos robóticos durante a execução destes experimentos.

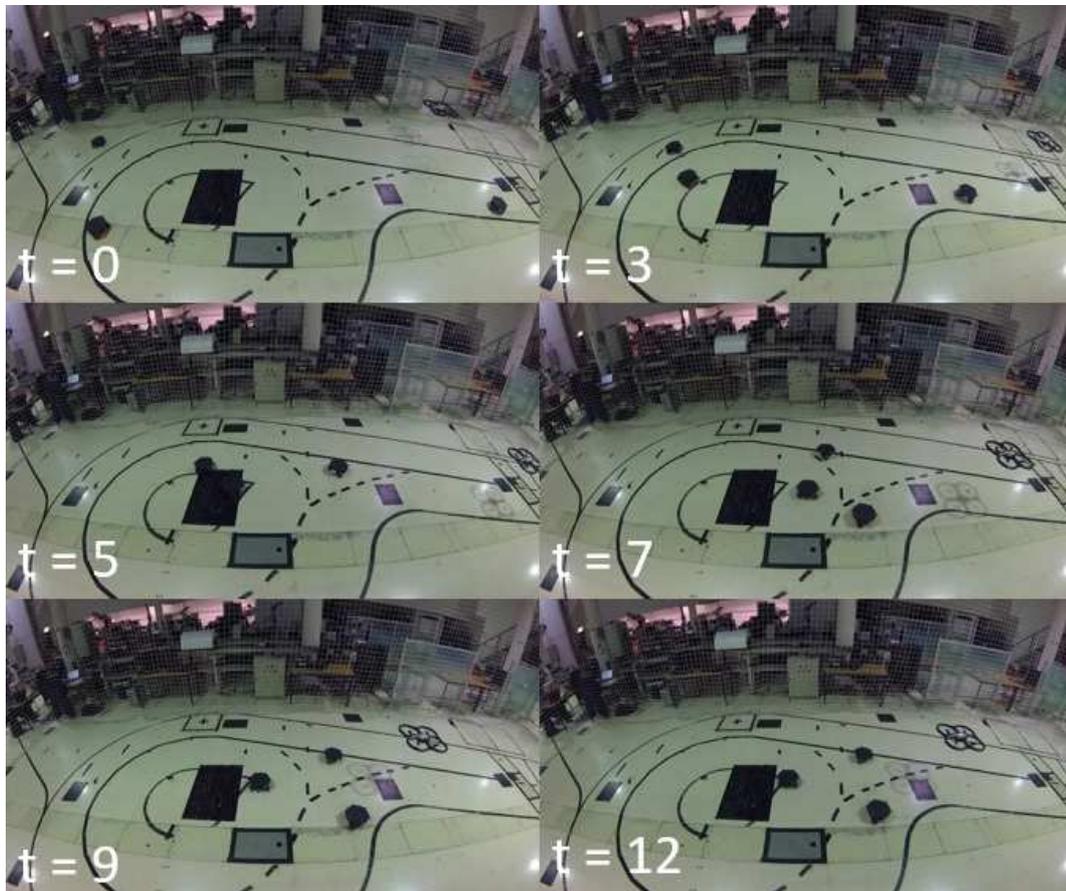


Figura 6.17: Trajetória real dos veículos do sistema. De 0 a 12 segundos em 6 quadros.

Assim como os resultados obtidos com os exemplos numéricos, os resultados obtidos com o uso do consenso para resolução de um problema de formação de robôs também são completamente satisfatórios. As trajetórias previstas pelas simulações reproduziram quase que identicamente as trajetórias reais do sistema. Estes resultados comprovam ainda a possibilidade de representar modelos de sistemas complexos de maneira simplificada também é funcional. Mesmo desprezando diversos pormenores dos modelos dos veículos robóticos utilizados nos experimentos, a modelagem desses sistemas como integradores puros de primeira e segunda ordem foi suficiente para que eles pudessem ser controlados em alto nível. Por fim, é válido ressaltar que mais uma vez um dos métodos propostos por esta tese se mostrou eficiente em determinar se o sistema multi-agente heterogêneo modelado para esta aplicação, atingiria o consenso.

Considerações Finais e Perspectivas

Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.

Isaac Newton

Ao longo deste trabalho pudemos perceber a vasta gama de problemas que podem ser resolvidos utilizando a ideia do consenso em sistemas multiagentes principalmente devido a crescentes tendências não só na robótica mas também na área de sistemas distribuídos. Neste contexto, este trabalho apresentou, em especial, propostas de métodos para análise de consenso em sistemas multiagentes heterogêneos compostos por agentes com dinâmica integrador puro de primeira e segunda ordem. Os métodos propostos foram construídos a partir de condições suficientes baseadas em LMIs e inspirados na teoria de análise de estabilidade de Lyapunov. A abordagem dos métodos pode ser considerada robusta pelo de fato de garantirem que um determinado sistema multiagente heterogêneo atingirá o consenso levando em consideração a possibilidade da existência de atrasos nas ações de controle dos agentes deste sistema. Além disso, a ideia central de direcioná-los para área da robótica foi disseminada ao longo dos capítulos apresentados.

Brevemente, o Capítulo 1 nos deu uma visão geral sobre conceitos fundamentais e nos motivou a seguir com afinco nas propostas realizadas. No Capítulo 2 foi possível navegar

pelas diversas vertentes e aplicações em que o problema do consenso aparece. Desde a psicologia social nos primeiros trabalhos em que o termo consenso apareceu, passando por modelos biológicos até chegar aos campos da computação e da robótica. Com o Capítulo 3, foi possível fixar os conhecimentos necessários para a complexa modelagem do sistema multiagente heterogêneo apresentada no Capítulo 4. Os resultados obtidos com os experimentos mostraram o grande poder de atuação dos modelos apresentados neste capítulo. Finalmente, os tão esperados métodos foram apresentados, demonstrados e avaliados com exemplos numéricos no Capítulo 5. Os resultados obtidos com os exemplos numéricos já eram suficientemente satisfatórios para demonstrar a eficiência dos métodos propostos. Porém, faltava verificar todo aquele conhecimento desenvolvido de forma teórica, na prática. E aí vem então o Capítulo 6 com a materialização da aplicação do consenso em um sistema multiagente heterogêneo composto por veículos robóticos reais. Foram exatamente sete semanas disponibilizadas para a configuração, implementação dos experimentos em uma parceria entre a UFAM e o IST Lisboa. Desse modo, podemos concluir que os resultados obtidos com os experimentos realizados neste período, validaram na prática a eficiência dos métodos propostos por esta tese.

Além disso, é importante ressaltar que esta tese apresentou diversas contribuições relevantes para o problema de consenso em sistemas multiagentes, em especial para os casos dos agentes heterogêneos. Dentre as principais contribuições estão:

- Um método para análise do consenso em sistemas multi-agentes heterogêneos com agentes de dinâmica integrador simples de primeira e segunda ordem sujeitos a atrasos variantes no tempo não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle.
- Um método para análise do consenso com estimação do tempo de convergência em sistemas multi-agentes heterogêneos com agentes de dinâmica integrador simples de primeira e segunda ordem sujeitos a atrasos variantes no tempo não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle.
- Expansão do método de (Sun & Wang 2009) para transformação do problema do consenso em um problema de estabilidade considerando o caso de agentes heterogêneos com dinâmicas de primeira e segunda ordem.
- Implementação e validação das técnicas de consenso para controle de formação em sistemas multiagentes heterogêneos com veículos robóticos reais.

- Concepção de uma plataforma baseada em ROS para a realização de experimentos com veículos robóticos.

É válido destacar que durante o período do doutorado, alguns dos resultados apresentados nesta tese foram compilados na forma de artigos e submetidos a congressos e revistas. Abaixo, segue, em ordem cronológica, a lista com as publicações realizadas durante o este período:

1. Savino, H. J., dos Santos, C. R. P., Souza, F. O., Pimenta, L. C. A., de Oliveira, M. & Palhares, R. M. (2016). Conditions for consensus of multi-agent systems with time-delays and uncertain switching topology. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1258-1267.
2. dos Santos, C. R. P., Carvalho, J. R. H., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2016). Consenso em sistemas multiagentes heterogêneos sujeitos a retardos variantes nas ações de controle. *XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2016*, Vitória - ES, Brasil.
3. dos Santos, C. R. P., Carvalho, J. R. H., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2018). Exponential consensus with decay rate estimation for heterogeneous multi-agent systems. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*.
4. dos Santos, C. R. P., Carvalho, J. R. H. & Savino, H. J. (2019). An optimization approach for consensus in multi-agent systems. *Agent & Multi-Agent Systems: Technologies & Applications Conference*. Aceito para publicação.

E finalmente, para trabalhos futuros sugere-se o estudo dos seguintes tópicos:

- Consideração de atrasos de comunicação juntamente com atrasos nas ações de controle para sistemas multiagente heterogêneos.
- Sistemas multiagentes heterogêneos sujeitos a atrasos variantes e topologia variável.
- Projeto de pesos para estabilização e otimização de sistemas multiagentes heterogêneos.
- Consideração de saturações nos protocolos de consenso.
- Modelagem de sistemas multiagentes heterogêneos com dinâmica $Ax(t) + Bu(t)$.

Referências Bibliográficas

- Albert, A. (1969). Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 434–440.
- Baede, T. (2006). *Motion control of an omnidirectional mobile robot*, DCT rapporten, Technische Universiteit Eindhoven. DCT 2006.084.
- Beard, R. W. & Atkins, E. M. (2005). A survey of consensus problems in multi-agent coordination, *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, pp. 1859–1864 vol. 3.
- Beard, R. W., McLain, T. W., Goodrich, M. & Anderson, E. P. (2002). Coordinated target assignment and intercept for unmanned air vehicles, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 18, pp. 911–922.
- Bettoni, S. S., Souza, F. O. & Pimenta, L. C. A. (2012). Consenso de múltiplos agentes sujeitos a múltiplos retardos variantes no tempo, *XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA2012*, Campina Grande - PB, Brasil.
- Boukas, E. K. (2005). *Stochastic switching systems: Analysis and Design*, Basel, Berlin.
- Cao, Y., Yu, W., Ren, W. & Chen, G. (2013). An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol. 9, pp. 427–438.
- CNN (2005). Trapped sub surfaces, crew safe, *CNN Online News* .

- Correia, M. D., Gustavo, A. & Conceição, S. (2012). Modeling of a three wheeled omnidirectional robot including friction models, *IFAC Proceedings Volumes* **45**(22): 7 – 12. 10th IFAC Symposium on Robot Control.
- Dai, P., Liu, C. & Liu, F. (2014). Consensus problem of heterogeneous multi-agent systems with time delay under fixed and switching topologies, *International Journal of Automation and Computing*, Vol. 11, pp. 340–346.
- D’Andrea, R. & Dullerud, G. E. (2003). Distributed control design for spatially interconnected systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(9): 1478–1495.
- DeGroot, M. H. (1974). Reaching a consensus, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, pp. 118–121.
- Dorri, A., Kanhere, S. S. & Jurdak, R. (2018). Multi-agent systems: A survey, *IEEE Access* **6**: 28573–28593.
- dos Santos Junior, C. R. P., Carvalho, J. R. H., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2016). Consenso em sistemas multiagentes heterogêneos sujeitos a retardos variantes na ações de controle, *XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2016*, Vitória - ES, Brasil.
- dos Santos Junior, C. R. P., Carvalho, J. R. H., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2018). Exponential consensus with decay rate estimation for heterogeneous multi-agent systems, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*.
- dos Santos Junior, C. R. P., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2014). Consenso em sistemas multiagentes sujeitos a atraso na comunicação e topologia variável, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2014*, Belo Horizonte - MG, Brasil. Por aparecer.
- dos Santos Junior, C. R., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2015). Consensus analysis in multi-agent systems subject to delays and switching topology, *IFAC-PapersOnLine* **48**(12): 147 – 152. 12th IFAC Workshop on Time Delay SystemsTDS 2015.
- Dynkin, B. O. (1965). *Markov Processes*, Springer-Verlag.
- Eisenberg, E. & Gale, D. (1959). Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method, *The Annals of Mathematical Statistics* **30**(1): 165–168.

- Fax, J. A. & Murray, R. M. (2002). Graph laplacians and stabilization of vehicle formation, *IFAC Proceedings Volumes* **35**(1): 55 – 60.
- Fax, J. A. & Murray, R. M. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, pp. 1465–1476.
- Fei, Z., Gao, H. & Shi, P. (2009). New results on stabilization of markovian jump systems with time delay, *Automatica*, Vol. 45, pp. 2300–2306.
- Ferber, J. (1999). *Multi-Agent Systems: An Introduction to Distributed Artificial Intelligence*, Addison-Wesley, New York.
- Ferreira, A. B. H. (2013). *Mini Aurélio - O Dicionário da Língua Portuguesa*, Editora Positivo.
- Gahinet, P. (1995). LMI control toolbox: For use with matlab. Disponível em <<http://www.mathworks.de/releases/R13sp2/pdf-doc/lmi/lmi.pdf>>.
- Giulietti, F., Pollini, L. & Innocenti, M. (2000). Autonomous formation flight, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 20, pp. 34–44.
- Godsil, C. & Royle, G. (2001). *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag.
- Gu, K., Kharitonov, L. V. & Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhuser, Boston.
- Howard, A. (2005). Multi-robot simultaneous localization and mapping using particle filters, *Robotics: Systems and Science*, Cambridge, MA, USA.
- Jadbabaie, A., Lin, J. & Morse, A. S. (2003). Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 988–1001.
- Jensen, J. L. W. V. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Mathematica* **30**(1): 175–193.
- Jesus, T. A., Pimenta, L. C. A., Tôrres, L. A. B. & Mendes, E. M. A. M. (2013). On the coordination of constrained fixed-wing unmanned aerial vehicles, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Vol. 24, pp. 585–600.

- Kecai, C., Chunxiang, L., Xiang, G. & Yang, H. (2011). Consensus in multi-agent with time-varying delays, *EEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering*, Vol. 4, pp. 313–317.
- Krajník, T., Vonásek, V., Fišer, D. & Faigl, J. (2011). Ar-drone as a platform for robotic research and education, in D. Obdržálek & A. Gottscheber (eds), *Research and Education in Robotics - EUROBOT 2011*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 172–186.
- Lin, P., Jia, Y., Du, J. & Yu, F. (2009). Average consensus for networks of continuous-time agents with delayed information and jointly-connected topologies, *American Control Conference, ACC*, pp. 3884–3889.
- Lin, P., Jia, Y. & Li, L. (2008). Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay, *Systems & Control Letters*, Vol. 57, pp. 643–653.
- Liu, C.-L. & Liu, F. (2011). Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays, *Automatica* **47**(9): 2130 – 2133.
- Lynch, N. A. (1997). *Distributed Algorithms*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.
- Massioni, P. & Verhaegen, M. (2009). Distributed control for identical dynamically coupled systems: A decomposition approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(1): 124–135.
- Matei, I., Martins, N. C. & Baras, J. S. (2009). Consensus problems with directed markovian communication patterns, *Proc. American Control Conf.*, pp. 1298–1303.
- Mesbahi, M. & Egerstedt, M. (2010). *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, Princeton University Press, Princeton.
- Mesbahi, M. & Hadaegh, F. (1999). Formation flying control of multiple spacecraft via graphs, matrix inequalities and switching, *IEEE International Conference on Control Applications*, Vol. 2, pp. 34–44.
- Moreau, L. (2004). Stability of continuous-time distributed consensus algorithms, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3998–4003.

- Moreau, L. (2005). Stability of multi-agent systems with time-dependent communications links, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, pp. 169–182.
- Moreno, J., Clotet, E., Lupianez, R., Tresanchez, M., Martinez, D., Palleja, T., Casanovas, J. & Palacin, J. (2016). Design, implementation and validation of the three-wheel holonomic motion system of the assistant personal robot (apr), *Sensors* **16**(10).
- Moutinho, A. & Azinheira, J. R. (2018). *Textos de apoio do Curso de Simulação e Controlo de Drones*, MOOC Técnico Lisboa.
- Natarajan, R. & Gennert, M. A. (2018). Efficient factor graph fusion for multi-robot mapping and beyond, *2018 21st International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pp. 1137–1145.
- Norvig, T. (1967). Consensus of subjective probabilities: A convergence theorem, *The Annals of Mathematical Statistics* **38**(1): 221–225.
- Olfati-Saber, R. (2006). Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 401–420.
- Olfati-Saber, R. & Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 49, pp. 1520–1533.
- Partridge, B. L. (1982). The structure and function of fish schools, *Scientific American* **246**(6): 114–123.
- Portugal, D. & Rocha, R. P. (2013). Distributed multi-robot patrol: A scalable and fault-tolerant framework, *Robotics and Autonomous Systems* **61**(12): 1572 – 1587.
- Qin, J., Ma, Q., Shi, Y. & Wang, L. (2017). Recent advances in consensus of multi-agent systems: A brief survey, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **64**(6): 4972–4983.
- Ren, W. (2007). Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations, *IET Control Theory and Applications*, Vol. 61, pp. 505–512.

- Ren, W. & Beard, R. (2005). Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(5): 655–661.
- Ren, W., Beard, R. W. & Atkins, E. M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control: Collective group behavior through local interaction, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, pp. 71–82.
- Reynolds, C. W. (1987). Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model, *SIGGRAPH Comput. Graph.* **21**(4): 25–34.
- Russell, S. & Norving, P. (2003). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Prentice Hall.
- Saber, R. O. & Murray, R. M. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents, *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, Vol. 2, pp. 951–956.
- Savino, H. J., Cota, A. P. L., Souza, F. O., Pimenta, L. C. A., Mendes, E. M. A. M. & Mozelli, L. A. (2013). Consensus of multi-agent systems with nonuniform non-differentiable time-varying delays, *European Control Conference - ECC*, pp. 1884–1889.
- Savino, H. J., dos Santos, C. R. P., Souza, F. O., Pimenta, L. C. A., de Oliveira, M. & Palhares, R. M. (2016). Conditions for consensus of multi-agent systems with time-delays and uncertain switching topology, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **63**(2): 1258–1267.
- Savino, H. J., Souza, F. O. & Pimenta, L. C. A. (2014a). Consenso de múltiplos agentes de segunda ordem sujeitos a retardos variantes no tempo, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2014*, Belo Horizonte - MG, Brasil.
- Savino, H. J., Souza, F. O. & Pimenta, L. C. A. (2014b). Consensus with convergence rate in directed networks with multiple non-differentiable input delays, *2014 IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC)*, pp. 252–257.
- Schuster, J. M., Schmid, K., Brand, C. & Beetz, M. (2019). Distributed stereo vision-based 6d localization and mapping for multi-robot teams, *Journal of Field Robotics* **36**(2): 305–332.

- Seuret, A., Dimarogonas, D. & Johansson, K. (2008). Consensus under communication delays, *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 4922–4927.
- Souza, F. O. (2008). *Estabilidade e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras*, Tese de Doutorado - UFMG.
- Souza, F. O., Palhares, R. M. & Ekel, P. Y. (2007). Asymptotic stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks via lyapunov-krasovskii theory, *Mathematical and Computer Modelling* **45**: 1350–1362.
- Stone, M. (1961). The opinion pool, *The Annals of Mathematical Statistics* **32**(4): 1339–1342.
- Sturm, J. F. (1998). Using sedumi 1.02 - a matlab toolbox for optimization over symmetric cones.
- Sun, Y. G. & Wang, L. (2009). Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, pp. 1607–1613.
- Szwarcfiter, J. L. (1986). *Grafos e Algoritmos Computacionais*, Campus.
- Trofino, A. (2000). Controle robusto. Disponível em <<http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas-/das-6600/apostila-robusto.pdf>>.
- Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, O. & Shochet, I. (1995). Novel type of phase transition in a system of self-derived particles, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 1226–1229.
- Wang, B. & Sun, Y. (2015). Consensus analysis of heterogeneous multi-agent systems with time-varying delay, *Entropy*, Vol. 17, pp. 3631–3644.
- Wentzell, A. D. (1981). *A course in the theory of stochastic processes*, McGraw-Hill.
- Winkler, R. L. (1968). The consensus of subjective probability distributions, *Management Science* **15**(2): B-61–B-75.
- Wu, M., Yong, H. & Jin-Hua, S. (2010). Stability analysis and robust control of time-delay systems.

- Ye, C., Ma, S. & Hui, L. (2011). An omnidirectional mobile robot, *Science China Information Sciences* **54**(12): 2631–2638.
- Yu, J. & Wang, L. (2010). Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays, *Systems and Control Letters*, Vol. 59, pp. 340–348.
- Zhang, Q., Niu, Y., Wang, L., Shen, L. & Zhu, H. (2011). Average consensus seeking of high-order continuous-time multi-agent systems with multiple time-varying communication delays, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 9, pp. 1209–1218.
- Zhang, Y. & Tian, Y.-P. (2009). Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology, *Automatica*, Vol. 45, pp. 1195–1201.
- Zhao, H., Xu, S. & Yuan, D. (2011). An lmi approach to consensus in second-order multi-agent systems, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 9, pp. 1111–1115.
- Zheng, Y., Zhu, Y. & Wang, L. (2011). Consensus of heterogeneous multi-agent systems, *IET Control Theory Applications* **5**(16): 1881–1888.
- Zhiyun, L., Broucke, M. & Francis, B. (2003). Local control strategies for groups of mobile autonomous agents, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1006–1011.
- Zhu, Y., Guan, X. & Luo, X. (2014). Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with linear and nonlinear dynamics, *Acta Automatica Sinica* **40**: 2618–2624.