Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Monotonicidade Maximal de Bifunções

Wanessa Ferreira Tavares

Manaus - AM
Agosto de 2019

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Monotonicidade Maximal de Bifunções

por

Wanessa Ferreira Tavares

sob a orientação da

Prof^{a}. Dr^{a}. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
Orientadora

Manaus - AM
Agosto de 2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

T231m

Tavares, Wanessa Ferreira
Monotonicidade Maximal de Bifunções / Wanessa Ferreira Tavares. 2019
71 f.: il. color; 31 cm.

Orientadora: Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Bifunções Monótonas Maximais. 2. Operadores Monótonos Maximais. 3. função Fitzpatrick. 4. Transformada de Fitzpatrick. I. Jacinto, Flávia Morgana de Oliveira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Monotonicidade Maximal de Bifunções

por

Wanessa Ferreira Tavares [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em 26 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto - (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Roberto Cristóvão Mesquita Silva

Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva - (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Mário Salvatierra Júnior - (Membro Externo)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

[1] A autora foi bolsista da FAPEAM durante a elaboração da dissertação.

Dedico este trabalho a minha mãe Hiléia Lima Ferreira, ao meu pai Elias Sanches Tavares, que sempre me incentivaram a dar continuidade aos meus estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por mais essa etapa alcançada em minha vida.

À minha mãe Hiléia Lima Ferreira, por sempre me apoiar e incentivar nos meus estudos.

Ao meu esposo Aderson pelo apoio e paciência.

À minha orientadora, Profª. Drª. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto pela paciência na orientação, tolerância e atenção. Agradeço todos os conselhos, conhecimentos e a ajuda na preparação deste trabalho. Por ter contribuído essencialmente na minha formação, gratidão.

Aos colegas do mestrado e doutorado pela relação de respeito mútuo e companheirismo, em especial, Clebes Brandão, André Matos, Claudeilsio e Leonardo pelos incentivos, contribuições e principalmente pelos momentos de reflexão sobre matemática e, Maristela e Flávia principalmente pelos momentos de diversões que tivemos juntas. Estejam certos de que este sonho realizado constitui a presença marcante de cada um.

Ao Departamento de Matemática, por me tornarem capaz de realizar este trabalho, em especial aos professores: Maria Rosilene e Cicero Mota que nos ajudaram em qualquer obstáculo e sempre nos incentivaram dando força para prosseguir. E ao professor Marcus Marrocos, por ser o responsável por me fazer continuar na matemática há oito anos.

Aos professores Roberto Cristóvão e Mario Salvatierra, por aceitarem avaliar esse trabalho.

Aos amigos secretários do PPGM, Aristocles Rannyeri Nascimento de Lima e ao Elclimar Alves Saraiva, muito obrigado pela paciência e pelos incentivos.

À FAPEAM (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas), pelo apoio financeiro que foi fundamental para se concretizar esta importante conquista.

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse ter mais essa conquista.

“Olhe para as estrelas e não para os seus pés. Tente entender o que você vê e imagine o que faz o universo existir. Seja curioso.”
Stephen Hawking

Resumo

Nesta dissertação, estudamos as relações entre Operadores Monótonos Maximais e Bifunções Monótonas Maximais estabelecida pelos autores Nicolas Hadjisavvas, Flávia Morgana O. Jacinto e Juan Enrique Martínez-Legaz.

Além disso, também estabelecemos a relação entre as bifunções e operadores via o novo conceito de monotonicidade maximal para bifunções denominado Monotonicidade Maximal Pontual(BMMP).

Também foi abordada a definição da função Fitzpatrick associada a um operador, cujas propriedades foram evidenciadas, por meio de exemplos, e que motivou a definição e o estudo da Transformada de Fitzpatrick para uma bifunção. Finalizamos o trabalho estabelecendo que a Transformada de Fitzpatrick de uma bifunção coincide com a função Fitzpatrick de um operador quando ambos são definidos convenientemente satisfazendo propriedades especiais.

Vale ressaltar que foram abordados alguns elementos da análise convexa e da teoria de conjugação que fundamentaram os resultados apresentados neste trabalho.

Palavras-chave: Bifunções Monótonas Maximais; Operadores Monótonos Maximais; função Fitzpatrick; Transformada de Fitzpatrick.

Abstract

In this dissertation, we study the relationships between Maximally Monotone Operators and Maximally Monotone Bifunctions established by the authors Nicholas Hadjisavvas, Flávia Morgana O. Jacinto and Juan Enrique Martínez-Legaz.

In addition, we also established the relationship between bifunctions and operators via the new concept of maximally monotonicity for bifunctions called Pointwise Maximally Monotonicity (PMMB).

It was also addressed the definition of Fitzpatrick function associated with an operator, whose properties were presented, in the form of examples, wich motivated the definition and study of the Fitzpatrick Transform for a bifunction. We conclude by establishing that the Fitzpatrick Transform of a Bifunction coincides with the Fitzpatrick function of an operator when both are conveniently defined satisfying special properties.

It should be noted that we adressed some elements of convex analysis and of the theory of conjugation to substantiate the results presented in this work.

Keywords: Maximally Monotone Bifunctions; Maximally Monotone Operators; Fitzpatrick function; Fitzpatrick transform.

Sumário

Notações

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	– Produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.
$\| \cdot \|$	– Norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.
$\partial f(x)$	– Subdiferencial da função f no ponto x .
$\overline{\mathbb{R}}$	– $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\mathrm{dom} f$	– Domínio da função f.
δ_C	– Função indicadora do conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$.
f^*	– Função conjugada da função f.
$\delta^*_{C^*}$	– Função suporte do conjunto $C^* \subseteq \mathbb{R}^n$.
$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$	– Operador ponto-conjunto do $\mathbb{R}^n$ no conjunto das partes do $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{D}(T)$	– Domínio do operador T.
φ_T	– Função Fitzpatrick do Operador T.
τ	– translação do operador T.
$\mathrm{dom} F$	– Domínio da bifunção.

Introdução

Nesta dissertação, baseada no artigo "*Some conditions for maximal monotonicity of bifunctions*" dos autores Nicolas Hadjisavvas, Flávia Morgana O. Jacinto e Juan Enrique Martínez-Legaz [9], estudamos a relação entre operadores monótonos maximais e bifunções monótonas maximais. Destaca-se que o objetivo principal foi abordar esses conceitos em um espaço de dimensão finita, mais especificamente o $\mathbb{R}^n$, que é um espaço de Banach reflexivo.

A motivação para o estudo de operadores monótonos tem origem nas definições usuais envolvendo as seguintes monotonicidades:

- Monotonicidade numérica em $\mathbb{R}$(Monotonicidade da multiplicação): Se $x \leq y$ então, para todo $z \geq 0$, tem-se
$$x \cdot z \leq y \cdot z$$

- Monotonicidade de funções: Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to C$ é monótona não-decrescente em D se
$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Relacionando essas monotonicidades do seguinte modo: para $x_1, x_2 \in D$ tais que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \text{ e } f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x_2 - x_1) \cdot (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0. \tag{1}$$

Neste trabalho definimos operadores ponto-conjunto monótonos que estendem a desigualdade em 1. Estes operadores aparecem na literatura como uma ferramenta útil tanto para construção de novas teorias como para aplicações na matemática (ver [[6],[7],[12]).

Abordamos que nem toda bifunção monótona é monótona maximal. Apresentamos a monotonicidade maximal clássica de bifunções via operadores que é comum na literatura. Existe uma ligação entre uma classe de operadores monótonos maximais e uma classe de bifunções monótonas maximais, mostramos que a partir de uma hipótese sobre as bifunções existe uma relação da monotonicidade maximal usual e a monotonicidade maximal pontual, que é um tipo de monotonicidade maximal definida sem recorrer a operadores monótonos maximais.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: no primeiro capítulo, apresentamos alguns elementos de Topologia no Espaço Euclidiano, de Análise Convexa e, em seguida, introduzimos a noção de função estendida e a teoria de conjugação na análise convexa (ver [5],[6],[11],[13],[14],[15],[16],[20],[21]). Vale ressaltar que os conceitos e exemplos apresentados neste capítulo torna a compreensão dos capítulos seguintes mais eficiente. Trabalhamos no capítulo 2 operadores monótonos e maximais monótonos, e a função Fitzpatrick (ver [6],[7],[8],[9],[12],[17],[19]). Além disso, explicitamos exemplos desses novos objetos e definições.

No terceiro capítulo, trabalhamos os principais resultados desta dissertação baseados no trabalho [9], são apresentadas algumas definições e propriedades referentes à bifunções monótonas, sobretudo, com exemplos. Estabelecemos a conexão entre operadores e bifunções monótonas e apresentamos a relação entre as definições de Bifunção Monótona Maximal(BMM) e Bifunção Monótona Maximal Pontual(BMMP). No final do capítulo, estudamos a Transformada de Fitzpatrick de uma bifunção e sua relação com a função Fitzpatrick de um operador monótono ([9], [10]).

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Apresentamos neste capítulo conceitos iniciais que são usados no decorrer desta dissertação, iniciamos falando sobre a Topologia no espaço Euclidiano, apresentando exemplos e propriedades.

Na seção seguinte abordamos alguns Elementos de Análise Convexa, apresentando exemplos e os principais resultados.

Na terceira seção apresentamos a Conjugação em Análise Convexa.

1.1 Topologia no espaço Euclidiano

Esta seção trata de elementos de Topologia no espaço Euclidiano. O objetivo é abordar os conceitos primordiais à compreensão das provas que são apresentadas nos próximos capítulos. Sabemos da teoria de análise funcional que todo espaço de Banach X de dimensão finita n é reflexivo e que a dimensão do dual e do bidual são também n. Além disso, vale $X = X^* = X^{**}$. Considerando o que foi dito anteriormente e visando desenvolver as teorias abordadas em um ambiente mais utilizado nas aplicações de matemática, escolhemos o ambiente deste trabalho como sendo o $\mathbb{R}^n$, que é o exemplo mais conhecido de espaço de Banach reflexivo.

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, cujo valor associado assumido no número k é indicado por x^k e chama-se o $k-$*ésimo termo* da sequência. De modo curto, de agora em diante denotaremos uma sequência por $\{x^k\}$.

Diz-se que a sequência $\{x^k\}$ é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^n$, ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x^k\| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\epsilon > 0$, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $\|x^k - a\| < \epsilon$, o que representa-se por

$$\lim_{k \to \infty} x^k = a. \tag{1.1}$$

Quando existe o limite acima, diz-se que a sequência $\{x^k\}$ é convergente.

Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando o mesmo é limite de uma sequência $\{x^k\} \subset X$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando contém todos os seus pontos aderentes, ou seja, para toda sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que $x^k \to a$ quando $(k \to \infty)$, tem-se que $a \in X$.

Diz-se que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado.

Definição 1.1. ([[13], Cap. 3, pág. 14)] **Função semicontínua inferiormente**). Diz-se que a função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente no ponto $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ quando para qualquer sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que $x^k \to x$ quando $(k \to \infty)$, tem-se que

$$f(x) \leq \lim_{k\to\infty} \inf f(x^k).$$

Definição 1.2. ([[13], Cap. 3, pág. 14] **Função semicontínua superiormente**). Diz-se que a função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente no ponto $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ quando para qualquer sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que $x^k \to x$ quando $(k \to \infty)$, tem-se que

$$\lim_{k\to\infty} \sup f(x^k) \leq f(x).$$

A função f é semicontínua inferiormente(superiormente) no conjunto X, quando ela é semicontínua inferiormente(superiormente) em todos os pontos de X.

Observação 1.1. Observe que se f é uma função contínua em $X \subset \mathbb{R}^n$, então f é semicontínua superiormente e inferiormente em X. Apenas a condição de ser semicontínua inferior ou superior não garante que f seja contínua, de fato, isto ocorre no seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Obviamente a função f não é contínua em $x = 0$. No entanto, afirmamos que f é semicontínua superiormente em $x = 0$. De fato, seja $\{x^k\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x^k \to 0$. Temos

$$1 = \limsup_{k\to\infty} f(x^k) \leq f(0) = 1,$$

ou seja,

$$\limsup_{k\to\infty} f(x^k) = 1 = f(0)$$

Porém f não semicontínua inferiormente neste ponto. De fato, seja $\{x^k\} \subset \mathbb{R}$ com $x^k \to 0$, temos

i) $x^k > 0 \; \forall \; k \in \mathbb{N}, f(x^k) = 1 \; \forall \; k \in \mathbb{N}, \inf f(x^k) = 1 \; \forall \; k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to \infty} \inf f(x^k) = 1 = f(0)$$

ii) $x^k < 0 \; \forall \; k \in \mathbb{N}, f(x^k) = -1 \; \forall \; k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to \infty} \inf f(x^k) = -1 < f(0),$$

ou seja,

$$1 = f(0) > -1 = \lim_{k \to \infty} \inf f(x^k),$$

o que contraria a definição de s.c.i.

Assim, f não é contínua em $x = 0$.

Daqui em diante, será usada a forma curta f é s.c.i. no lugar de f é semicontínua inferiormente.

Definição 1.3 ([13], pág. 77)**.** O *epígrafo* da função $f : D \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\text{epi} f = \{(x, \lambda) \in D \times \mathbb{R}; f(x) \leq \lambda\}.$$

Proposição 1.1. [[11], pág. 75] Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) f é s.c.i.;

(2) O *epígrafo* é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) Os conjuntos de níveis da função $L_{f,\mathbb{R}^n}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq r\}$ são fechados para todo $r \in \mathbb{R}$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Seja $(x^k, t^k) \in \text{epi} f$ uma sequência convergindo para (x, t), quando $t \to \infty$. Como f é s.c.i. e $f(x^k) \leq t^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$t = \lim_{k \to \infty} t^k \geq \lim_{k \to \infty} \inf f(x^k) \geq f(x),$$

ou seja, $(x, t) \in \text{epi} f$. Como (x, t) é ponto de aderência de epi$f$, temos que epi$f$ é um conjunto fechado.

2) $\Rightarrow$ 3) Tomemos $x^k \in L_{f,\mathbb{R}^n}(t)$ tal que $x^k \to a$. Precisamos mostrar que $a \in L_{f,\mathbb{R}^n}(t)$. Seja a sequência (x^k, t). Como $x^k \in L_{f,\mathbb{R}^n}(t)$, temos que $f(x^k) \leq t$. Por definição, $(x^k, t) \in \text{epi} f$, pois $t \geq f(x^k)$. Como epi$f$ é um conjunto fechado, por hipótese, e $(x^k, t) \to (a, t)$, então $(a, t) \in \text{epi} f$, ou seja, $t \geq f(a)$. Logo, $L_{f,\mathbb{R}^n}(t)$ é fechado para todo $t \in \mathbb{R}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Suponhamos agora, por contradição, que f não é semicontínua inferior para algum x. Então existe uma sequência $\{x^k\}$ convergindo para x tal que $f(x^k)$ converge para $r < f(x) < +\infty$. Consideremos $t \in (r, f(x))$. Quando k é suficientemente grande, temos $f(x^k) \leq t < f(x)$, ou seja, $L_{f,\mathbb{R}^n}(t)$ não contém seu limite x. Então, $L_{f,\mathbb{R}^n}(t)$ não é fechado, o que contraria a hipótese. Portanto, f é s.c.i.. ■

Definição 1.4. ([15], p. 7) Seja E um espaço vetorial. Um **produto interno** em E é uma função

$$\langle \ , \ \rangle : E \to \mathbb{R}$$

que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y\rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

(P1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$;

(P2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;

(P3) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(P4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

O que nos interessa nesse momento é enfatizar que trabalhamos com o $\mathbb{R}^n$ exatamente porque ele é um espaço vetorial cuja norma é proveniente de um produto interno, ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Abaixo definimos norma de um modo geral e explicitamos suas principais propriedades.

Definição 1.5. ([16], p. 23) Seja E um espaço vetorial. Uma função

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

que associa a cada vetor $x \in E$ um número real $\|x\|$, é uma **norma** em E se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo escalar a e todo $x \in E$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer que sejam $x, y \in E$.

Da propriedade (N2), segue $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$.

Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais quando $\langle x, y\rangle = 0$. Obviamente, 0 é ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^n$. Também e_i é ortogonal a e_j se $i \neq j$.

Observação 1.2. Vamos mostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $y \neq 0$, e pondo-se $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. Com efeito,

$$\langle z, y\rangle = \langle x - \alpha y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha\|y\|^2 = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

Usaremos a observação acima para demonstrar a desigualdade fundamental da Geometria Euclidiana, que será utilizada no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.1. ([[14], Cap. 1, pág. 5] **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é um múltiplo escalar do outro.

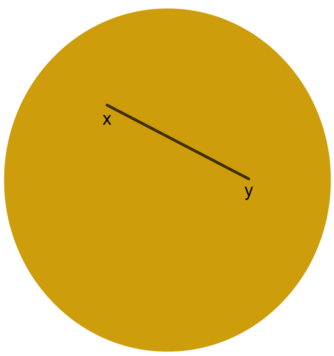
Demonstração. A prova pode ser encontrada em [14]. ■

1.2 Elementos de Análise Convexa

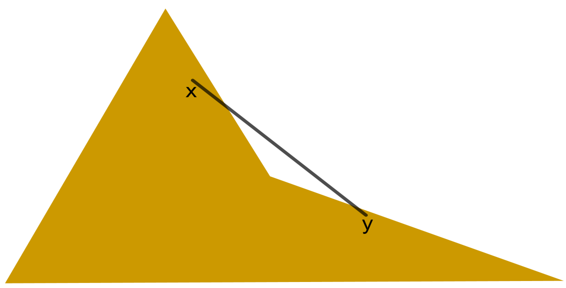
Nesta seção, introduzimos alguns elementos da Teoria de Análise Convexa que servem como ferramentas para a prova de resultados.

Definição 1.6. ([[13], Cap. 3, pág. 69] **Conjunto convexo**). Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se para quaisquer $x, y \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D$.

O ponto $\alpha x + (1 - \alpha)y$ no qual $\alpha \in [0, 1]$ se chama combinação convexa de x e y (com parâmetro α). Geometricamente, podemos afirmar que um conjunto é convexo se ele contém toda combinação convexa de quaisquer dois de seus pontos (ver as figuras abaixo).



(a) Figura 1: Conjunto convexo



(b) Figura 2: Conjunto não-convexo

Exemplo 1.2. Um semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^n / \langle a, x\rangle \leq c\}$, onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Segue da Definição 1.6 que qualquer semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

Exemplo 1.3. Toda bola é convexa no $\mathbb{R}^n$. Para ilustrar, mostramos que a bola aberta $B(0;a) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < a\}$ é convexa. De fato, sejam $x, y \in B(0;a)$, então $\|x\| < a$ e $\|y\| < a$. Assim, para todo $\alpha \in [0,1]$, tem-se $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| < \alpha a + (1-\alpha)a = a$. Logo, $\alpha x + (1-\alpha)y \in B(0;a)$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

O Conjunto vazio, o espaço $\mathbb{R}^n$ e o conjunto unitário são trivialmente convexos.

Observe o conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ da forma $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$. Veja que X não é convexo, pois se tomarmos, por exemplo, os pontos $A = (-1,1)$ e $B = (1,1) \in X$, temos que,

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (0,1) \notin X.$$

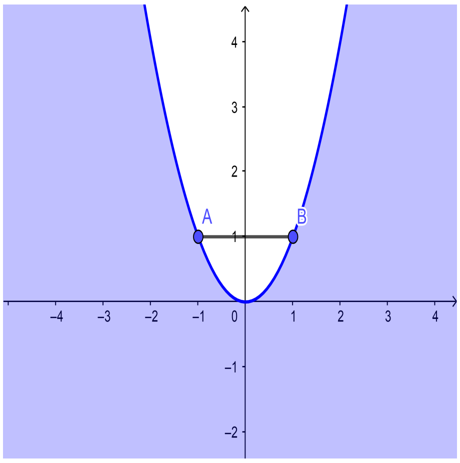


Figura 1.1:

Proposição 1.2. [[13], pág. 82] Sejam $C_j \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, $j \in I$, onde I é um conjunto de índices. Então $C = \bigcap_{j \in I} C_j$ é um conjunto convexo.

Demonstração. Sejam x, y em C. Então $x, y \in C_j$ e $, \forall j \in I$. Como os conjuntos C_j, $j \in I$, são convexos, então para $\alpha \in [0,1]$, tem-se que $\alpha x + (1-\alpha)y \in C_j$ e todo $j \in I$. Logo, $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$. Portanto, C é convexo.

■

Definição 1.7. ([[13], Cap. 3, pág. 77] **Função convexa**). Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, diz-se que a função $f : D \to \mathbb{R}$ é convexa em D quando para quaisquer $x, y \in D$ e $\alpha \in [0,1]$, tem-se que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

A função f diz-se estritamente convexa quando a desigualdade acima é estrita para todos os pontos $x, y \in D$ com $x \neq y$ e $\alpha \in (0,1)$.

Exemplo 1.4. A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, v\rangle, v \in \mathbb{R}^n$ fixo, é convexa. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0, 1]$ quaisquer e fixos, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \langle \alpha x + (1-\alpha)y, v\rangle \\ &= \langle \alpha x, v\rangle + \langle (1-\alpha)y, v\rangle \\ &= \alpha\langle x, v\rangle + (1-\alpha)\langle y, v\rangle \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \end{aligned}$$

Portanto, f é convexa.

Exemplo 1.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ é convexa. Com efeito, dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$ quaisquer e fixos, temos

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \frac{1}{2}(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2) \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda^2 x^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2) + (1-\lambda)^2 y^2) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{aligned}$$

Logo, f é convexa.

Proposição 1.3. [[13],pág. 78] Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e convexo. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é convexa em D se, e somente se, o *epígrafo* de f é um conjunto convexo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Sendo f convexa sobre D. Sejam (x_1, λ_1) e $(x_2, \lambda_2) \in \text{epi}f$.

Vamos provar que $(1-t)(x_1, \lambda_1) + t(x_2, \lambda_2) \in \text{epi}f$ para todo $t \in [0, 1]$. Como $(x_1, \lambda_1) \in \text{epi}f$ implica

$$f(x_1) \leq \lambda_1 \tag{1.2}$$

e, como $(x_2, \lambda_2) \in \text{epi}f$ implica

$$f(x_2) \leq \lambda_2 \tag{1.3}$$

Pela convexidade de f, para todo $t \in [0, 1]$, vale

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Por 1.2 e 1.3, temos

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)\lambda_1 + t\lambda_2$$

Assim,

$$((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)\lambda_1 + t\lambda_2) \in \text{epi}f,$$

o que equivale a

$$(1-t)(x_1, \lambda_1) + t(x_2, \lambda_2) \in \text{epi}f.$$

Suponhamos agora que epi$f$ é convexo em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que f é convexa sobre D. Sejam $x_1, x_2 \in D$ e $t \in [0,1]$ quaisquer e fixos. Sabemos que $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2)) \in \text{epi}f$.

Da convexidade de epi$f$, sabemos que

$$(1-t)(x_1, f(x_1)) + t(x_2, f(x_2)) \in \text{epi}f,$$

o que equivale a

$$((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2)) \in \text{epi}f,$$

pela definição de *epígrafo*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Logo, f é convexa, pela arbitrariedade de x_1, x_2 e t. ∎

Definição 1.8. [[13], pág. 80] Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função côncava em D quando a função $(-f)$ é convexa em D.

Exemplo 1.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f((1-t)x_1 + tx_2) &= a[(1-t)x_1 + tx_2] + b \\ &= a(1-t)x_1 + atx_2 + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)[ax_1 + b] + t[ax_2 + b] \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \end{aligned}$$

Logo, f é convexa e côncava.

O próximo teorema garante que uma função convexa é localmente Lipschitziana e contínua no interior do seu domínio.

Teorema 1.2. ([[13], Cap. 3, pág. 147] **Continuidade de funções convexas**). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa em Ω. Então f é localmente Lipschitz-contínua em Ω. Em particular, f é contínua em Ω.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [13]. ∎

Assim como apresentamos o conceito semicontinuidade que é menos restritivo que o conceito usual de continuidade, também apresentamos dentro da mesma filosofia, o conceito de subdiferenciabilidade de uma função convexa .

Definição 1.9. ([[13], Cap. 3, pág. 175] **O subgradiente de função convexa**). Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Diz-se que $y \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente de f no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \forall\, z \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.10. O **subdiferencial em um ponto** $x \in D$ de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa é o conjunto de todos os subgradientes de f em x, denotado por

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n; f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle, \forall\, y \in D\}. \tag{1.4}$$

Exemplo 1.7. Seja a função$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. O subdiferencial de f no ponto $x = 0$ é o conjunto de todos os valores reais y tais que $f(z) \geq f(0) + y(z - 0)$, isto é, $|z| \geq yz$. Daí, temos três casos a avaliar:

(i) se $z = 0$, então a desigualdade é satisfeita para qualquer valor $y \in \mathbb{R}$;

(ii) se $z > 0$, então $1 \geq y$;

(iii) se z < 0, então $-1 \leq y$.

Assim, concluímos que $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Em geral, para $a \neq 0$, temos $\partial f(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a > 0; \\ -1, & \text{se } a < 0. \end{cases}$

Observação 1.3. Seja $y \in \partial f(x)$. Considere $z \in \mathbb{R}^n$ como $z = x + \alpha d$, e $\alpha > 0$. Pela Definição 1.9, tem-se que

$$\begin{aligned} y \in \partial f(x) &\Leftrightarrow \langle y, z - x \rangle \leq f(z) - f(x), \forall\, z \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(x + \alpha d) - f(x) \geq \langle y, \alpha d \rangle, \forall\, d \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall\, \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} \geq \langle y, d \rangle, \forall\, d \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall\, \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} \geq \langle y, d \rangle, \forall\, d \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial d}(x) \geq \langle y, d \rangle, \forall\, d \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Assim, são equivalentes as seguintes definições do subdiferencial de f em x

$$\begin{aligned} \partial f(x) &:= \{y \in \mathbb{R}^n / f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n\} \\ &:= \{y \in \mathbb{R}^n / \frac{\partial f}{\partial d}(x) \geq \langle y, d \rangle, \forall d \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.3. ([[13], Cap. 3, pág. 176] **Propriedades do subdiferencial**). Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, o conjunto $\partial f(x)$ é convexo e compacto para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Primeiramente, mostramos que $\partial f(x)$ é convexo. Sejam $s \in \partial f(x)$, $w \in \partial f(x)$ e $t \in [0,1]$. Então

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

e

$$f(y) \geq f(x) + \langle w, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

Multiplicando (1.5) por t e (1.6) por $(1-t)$, resulta em,

$$tf(y) \geq tf(x) + t\langle s, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

e

$$(1-t)f(y) \geq (1-t)f(x) + (1-t)\langle w, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{1.8}$$

Somando 1.7 e 1.8, obtém-se

$$f(y) \geq f(x) + \langle (1-t)w + ts, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $(1-t)w + ts \in \partial f(x), \forall t \in [0,1]$. Portanto, $\partial f(x)$ é convexo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostraremos agora, $\partial f(x)$ é fechado.

Seja uma sequência $\{y^k\} \subset \partial f(x)$ convergente, tal que $y^k \to \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Como $y_k \in \partial f(x)$, então

$$f(y) \geq f(x) + \langle y^k, y - x\rangle, \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Logo, $f(y) \geq f(x) + \lim\limits_{k\to+\infty} \langle y^k, y - x\rangle = f(x) + \langle \bar{y}, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n$. Assim, $\bar{y} \in \partial f(x)$. Portanto, $\partial f(x)$ é fechado no $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, mostraremos que o conjunto $\partial f(x)$ é limitado para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $z \in \partial f(x), z \neq 0$, e considere $\delta > 0$ tal que $y = x + \delta\frac{z}{\|z\|}$ pertença ao compacto $B[x,\delta]$. Pelo Teorema 1.2, f é localmente Lipschitz-contínua. Logo, para $y \in B[x,\delta]$, existe uma constante de Lipschitz $M > 0$ tal que $f(y) - f(x) \leq M\|y - x\|$.

Daí,

$$f(y) - f(x) \leq M\|x + \delta\frac{z}{\|z\|} - x\| = M\delta \tag{1.10}$$

Por outro, como $z \in \partial f(x)$ então $f(y) \geq f(x) + \langle z, y - x\rangle$. Daí,

$$f(y) \leq f(x) + \langle z, \delta\frac{z}{\|z\|}\rangle = f(x) + \delta\|z\| \tag{1.11}$$

De 1.10 e 1.11, $\delta\|z\| \leq f(y) - f(x) \leq M\delta$. Isto implica que $\|z\| \leq M$.

Portanto, $\partial f(x)$ é limitado para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ∎

Podemos caracterizar a diferenciabilidade de uma função convexa a partir do seu subdiferencial. A demonstração da proposição seguinte vai ser omitida, pois utilizam ferramentas que vão além das apresentadas nesta dissertação.

Proposição 1.4. ([[13], Cap. 3, pág. 179]). Uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, o conjunto $\partial f(x)$ é unitário. E neste caso, $\partial f(x) = \{\bigtriangledown f(x)\}$.

Demonstração. Ver Proposição 3.4.53 em [[13], pág. 179]. ■

Exemplo 1.8. Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = ax + by$, com $a, b \in \mathbb{R}$ então $\partial f(x, y) = \{\bigtriangledown f(x, y) = (a, b)\}$;

1.3 Conjugação em Análise Convexa

Nesta seção, definimos a conjugação de funções em Análise Convexa. Esta definição tem relevância teórica e prática para o desenvolvimento dos principais resultados deste trabalho.

Função Estendida

Neste momento introduzimos a noção de funções estendidas que nos permite transformar os problemas de minimização restrita em problemas de minimização irrestrita.

Para tanto vamos considerar as funções estendidas como sendo uma função convexa f que pode atingir o valor $+\infty$, ou seja, que para algum $x \in \mathbb{R}^n$ pode-se ter $f(x) = +\infty$. Tais funções serão representadas por $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Como consequência, tem-se que o domínio efetivo de uma função estendida é definido em ([20], pág. 23) por

$$\text{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < +\infty\}.$$

Dado $K \subset \mathbb{R}^n$, o problema com restrições de minimizar uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeita a $x \in K$ é equivalente ao problema irrestrito de minimizar a função $\varphi_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, com φ_K dado por

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in K, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O que justifica o estudo de tais funções. Nesse sentido vamos precisar das noções da função indicadora de um conjunto, ja que se trata de um caso especial de funções estendidas.

Definição 1.11. ([[21], Cap. 5, pág. 64] **Função indicadora**). Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$, então a função indicadora de C é a função

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in C \\ +\infty, & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

Definição 1.12. [[20], cap 1, pág.24] Uma função convexa estendida $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é própria quando o seu domínio efetivo for não vazio, ou seja, dom$f \neq \emptyset$. Quando a função convexa estendida f não é própria diz-se que é imprópria.

Serão apresentadas, a partir de agora, caracterizações importantes da função indicadora.

Proposição 1.5. ([[21], Cap. 5, pág. 64]). Seja $\delta_C : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, onde $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, a função indicadora δ_C é convexa se, e somente se, C é um conjunto convexo.

Demonstração. Suponha que δ_C seja uma função convexa, mas C não convexo, isto é, existem $x, y \in C$ e $\bar{\alpha} \in [0, 1]$, tais que $\bar{\alpha}x + (1 - \bar{\alpha})y \notin C$. Por definição, $\delta_C(x) = 0, \delta_C(y) = 0$ e $\delta_C(\bar{\alpha}x + (1 - \bar{\alpha})y) = +\infty$. Assim,

$$\delta_C(\bar{\alpha}x + (1 - \bar{\alpha})y) = +\infty > 0 = \bar{\alpha}_C(x) + (1 - \bar{\alpha})\delta_C(y).$$

Contradição, pois contradiz a convexidade de δ_C. Portanto, C é um conjunto convexo.

Reciprocamente, suponha C um conjunto convexo. Pela convexidade de C tem-se que para quaisquer $x, y \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, vale $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$. Assim,

$$\delta_C(\alpha x + (1 - \alpha)y) = 0 = \alpha\delta_C(x) + (1 - \alpha)\delta_C(y).$$

Suponha que $x \in C, y \in \mathbb{R}^n \setminus C$ e $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$. Desta forma, para todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$\delta_C(\alpha x + (1 - \alpha)y) = 0 < +\infty = \alpha\delta_C(x) + (1 - \alpha)\delta_C(y).$$

Agora, suponha que $x \in C, y \in \mathbb{R}^n \setminus C$ e $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Assim, para todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$\delta_C(\alpha x + (1 - \alpha)y) = +\infty = \alpha\delta_C(x) + (1 - \alpha)\delta_C(y).$$

Portanto, δ_C é uma função convexa. ■

Destaca-se que a definição de semicontinuidade inferior de uma função estendida só faz sentido sobre seu domínio efetivo recuperando nesse ambiente a Definição 1.1 para uma função real (ver [[6], pág. 60]).

Proposição 1.6. ([[21], Cap. 5, pág. 64]). Seja $\delta_C : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, onde $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, a função indicadora δ_C é s.c.i. se, e somente se, C é um conjunto fechado.

Demonstração. Suponha que δ_C é s.c.i., mas C não seja fechado, isto é, $\exists\, \{x^k\} \subset C$, com $x^k \to a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \notin C$.

Por hipótese, δ_C é semicontínua inferior então para cada $x^k \to a$ tem-se $\delta(a) \leq \liminf \delta(x^k)$. Mas $\delta(a) = +\infty$. Assim, $+\infty \leq 0$, absurdo. Portanto C é fechado.

Reciprocamente, como C é fechado então para toda $\{x^k\} \subset C$ com $x^k \to a \in \mathbb{R}^n \; \forall\, k \in \mathbb{N}$ tem-se que $a \in C$.

Vamos mostrar que para cada $x^k \to a$ temos $\delta(a) \leq \liminf \delta(x^k)$. De fato, por definição de δ_C, vem que,

$$\delta(a) = 0 = \liminf \delta(x^k).$$

Logo, δ_C é semicontínua inferior.

$\blacksquare$

Proposição 1.7. [[6], pág. 62 e pág. 68] Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ funções convexas e s.c.i's para todo $i \in I$, em que I é um conjunto de índices arbitrário. Então, vale:

(1) $f_i + f_j$ é uma função convexa e s.c.i., para quaisquer $i, j \in I$;

(2) $\sup_{i \in I} f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função convexa e s.c.i..

Demonstração. (1) Ver demonstração em [[6], pág. 62]

(2) Defina $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$. Mostraremos que f é convexa.

Vamos verificar se epi$f$ é convexo. Dados $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \text{epi}f$, temos $f_i(x_1) \leq t_1$ e $f_i(x_2) \leq t_2 \; \forall\, i \in I$, como todas as $f_{i's}$ são convexas, podemos tomar $\lambda \in [0, 1]$ e vale

$$f_i((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2 \; \forall\, i \in I$$

e assim,

$$(1-\lambda)(x_1, t_1) + \lambda(x_2, t_2) = ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \in \text{epi}f_i \; \forall\, \lambda \in [0, 1], \forall\, i \in I$$

Logo, $(1-\lambda)(x_1, t_1) + \lambda(x_2, t_2) \in \text{epi}f \; \forall\, i \in I, \forall\, \lambda \in [0, 1]$, ou seja, epi$f$ é convexo. Portanto, pela Proposição 1.3, temos que f é convexa.

Note que $\text{epi}f = \bigcap_{i \in I} \text{epi}f_i$ pois,

(a) $\text{epi}f \subset \bigcap_{i \in I} \text{epi}f_i$:

Dado $(x, \lambda) \in \text{epi}f$ temos que,

$$f(x) \leq \lambda \Rightarrow \sup_{i \in I} f_i(x) \leq \lambda, \text{isto é}, f_i(x) \leq \lambda, \forall\, i \in I.$$

Portanto, $(x, \lambda) \in \bigcap_{i \in I} \text{epi}f_i$.

(b) $\bigcap_{i \in I} \text{epi} f_i \subset \text{epi} f$:

Dado $(x, \lambda) \in \bigcap_{i \in I} \text{epi} f_i$, então $f_i(x) \leq \lambda, \forall i \in I$. Assim, $\sup_{i \in I} f_i(x) \leq \lambda$.

Portanto,

$$f(x) \leq \lambda \Rightarrow (x, \lambda) \in \text{epi} f.$$

Como f_i é s.c.i., para todo $i \in I$, pela Proposição 1.1 temos que epi$f$ é fechado para todo $i \in I$. Como a interseção arbitrária de fechados é fechado, temos que o epi$f$ é fechado, pela Proposição 1.1 temos que f é semicontínua inferiormente.

■

Função Conjugada

Os conceitos da função conjugada são necessários ao desenvolvimento de resultados nos demais capítulos. Considerando que esta função, em contextos mais gerais, é definida em espaços duais de espaços de Banach, adotamos a notação x^* para pontos onde a função conjugada estiver definida.

Definição 1.13. ([[21], Cap. 6, pág. 84] **Função Conjugada**). A conjugada da função $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é a função $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}, \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 1.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Temos que a função conjugada de $f(x)$ é $f^*(y) = \frac{1}{2}y^2$. De fato,

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - f(x)\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ xy - \frac{1}{2}x^2 \right\} = \max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + yx \right\}.$$

Encontrar o ponto de máximo e o valor de máximo dessa função, significa encontrar o máximo da função de segundo grau $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + xy$ na variável x. O que corresponde a encontrar seu ponto crítico $\bar{x} = y$ e o valor crítico que é

$$g(\bar{x}) = g(y) = y^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}y^2 = f^*(y),$$

de onde obtemos o desejado.

A seguir, será apresentado um teorema que caracteriza as funções conjugadas.

Teorema 1.4. ([[5], Cap. 1, pág. 11]). Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa própria semicontínua inferiormente e $x \in \mathbb{R}^n$. Então, a função f^* é convexa, própria e s.c.i..

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$. Se $f^*(z_1) < +\infty$ e $f^*(z_2) < +\infty$, então para $t \in [0,1]$ tem-se,

$$f^*((1-t)z_1 + tz_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, (1-t)z_1 + tz_2\rangle - f(x)\} \tag{1.12}$$

Daí somando e subtraindo tf(x) a 1.12, obtemos

$$f^*((1-t)z_1 + tz_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, (1-t)z_1 + tz_2\rangle - f(x) + tf(x) - tf(x)\}$$

Assim,

$$f^*((1-t)z_1 + tz_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1-t)[\langle x, z_1\rangle - f(x)] + t[\langle x, z_2\rangle - f(x)]\}$$

Segue que,

$$f^*((1-t)z_1 + tz_2) \leq (1-t)\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, z_1\rangle - f(x)\} + t\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, z_2\rangle - f(x)\}$$

Portanto, pela Definição 1.13

$$f^*((1-t)z_1 + tz_2) \leq (1-t)f^*(z_1) + tf^*(z_2)$$

Logo, f^* é uma função convexa.

Afirmamos que f^* é s.c.i.. Para isso, usaremos a Proposição 1.7.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, defina $\iota_x : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, por $\iota_x(y) = \langle y, x\rangle - f(x)$. Mostraremos que ι_x é uma aplicação contínua, daí em particular ι_x será s.c.i..

Seja $\{y^k\}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$, com $y^k \to y$ quando $k \to +\infty$ en $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\langle y^k - y, x\rangle| = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| \leq 1.$$

Então

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} |\langle y^k - y, x\rangle| = 0 &\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} |\langle y^k, x\rangle - \langle y, x\rangle| = 0\\ &\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \iota_x(y^k) = \iota_x(y).\end{aligned}$$

Para um caso geral, basta tomar $z = \dfrac{x}{\|x\|}$ com x não nulo, fixado arbitrariamente em $\mathbb{R}^n$

e observar que

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} |\langle y^k - y, z\rangle| = 0 &\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} |\langle y^k - y, \frac{x}{\|x\|}\rangle| = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \lim_{k\to+\infty} |\langle y^k - y, x\rangle| = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} |\langle y^k, x\rangle - \langle y, x\rangle| = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $\{\iota_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ é uma família de funções s.c.i.. Pela Proposição 1.7, a função conjugada $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, com $f^*(y) = \sup\{\iota(y)\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ é s.c.i. ■

No próximo exemplo verificamos que a função conjugada da função indicadora (ver Definição 1.11) de um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é a função suporte desse conjunto.

Exemplo 1.10. Sabemos da definição de função conjugada que

$$\delta_C^*(x^*) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, x^*\rangle - \delta_C(x)\}, \forall\, x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, para $x \in C$, tem-se que $\delta_C(x) = 0$ e para $x \notin C$, tem-se $\delta_C(x) = +\infty$. Logo, segue-se que a conjugada de δ_C é a **função suporte do conjunto** C, isto é,

$$\delta_C^*(x^*) = \sup_{x\in C}\{\langle x, x^*\rangle\}, \forall x^* \in \mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Capítulo 2

Operadores Monótonos e Função Fitzpatrick

Neste capítulo, apresentamos os operadores ponto-conjunto, com o objetivo de introduzir a classe de operadores ponto-conjunto monótonos maximais. Também introduzimos a função Fitzpatrick associada a um operador ponto-conjunto. Destacamos que estes dois objetos serão ferramentas fundamentais no desenvolvimento teórico do próximo capítulo onde estabelecemos a monotonicidade maximal de bifunções.

2.1 Monotonicidade Maximal de Operadores

Começamos esta seção introduzindo a noção de operadores ponto-conjunto. Um dos conceitos que motiva essa definição é o subdiferencial da função convexa $f(x) = |x|$ dada no Exemplo 1.7.

Definição 2.1. Uma aplicação T é denominada um operador ponto-conjunto quando associa a cada ponto do $\mathbb{R}^n$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, ou seja, $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, no qual $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é definido como o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$.

Notação: $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ ou $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1. Seja o seguinte operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, dado por $T(x) = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2. Seja o seguinte operador $T_1 : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, dado por

$$T_1(x) = \begin{cases} [x, x+1], & \text{se } x \geq 0 \\ \{0\}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O operador T_1 associa a cada ponto $x \in \mathbb{R}$ um intervalo na reta se $x \geq 0$.

A seguir, são elencadas algumas definições referentes a um operador ponto-conjunto T que podem ser encontradas em [[3], p. 184].

- O domínio do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$\mathrm{D}(T) := \{x \in \mathbb{R}^n ; T(x) \neq \emptyset\}.$$

- A imagem do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\mathrm{Im}(T) := \bigcup_{x \in \mathrm{D}(T)} T(x).$$

- O gráfico do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$\mathrm{Graf}(T) = \{(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x^* \in T(x)\}.$$

- A inversa de T é o operador $T^{-1} : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$T^{-1}(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n ; x^* \in T(x)\}.$$

- Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ chama-se zero do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ quando $0 \in T(x)$.

Observação 2.1. Quando $T(x)$ é composto de apenas um único elemento, dizemos que a aplicação é **ponto-ponto**.

Exemplo 2.3. Consideramos novamente o operador $T_1 : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, dado por

$$T_1(x) = \begin{cases} [x, x+1], & \text{se } x \geq 0 \\ \{0\}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

temos

$$\mathrm{Graf}(T_1) = \mathrm{D}(T_1) \times \mathrm{Im}(T_1)$$

e

$$\mathrm{Im}(T_1) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+} T_1(x) = \{0\} \cup (\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+} [x, x+1]) = \mathbb{R}_+.$$

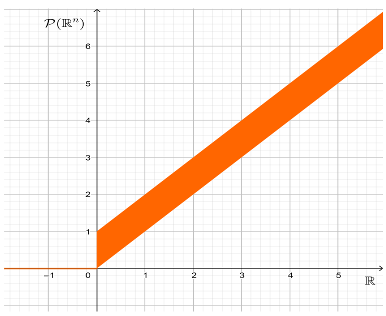


Figura 2.1: Visualização gráfica de T_1.

Exemplo 2.4. Consideramos outro operador $T_2 : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, dado por

$$T_2(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_+, & \text{se } x \geq 0 \\ \emptyset, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}(T_2) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} T_2(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+.$$

Exemplo 2.5. Seja $T_3 : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dado por

$$T_3(a) = \begin{cases} (0, 2], & \text{se } 0 < a < 1 \\ [1, a+1], & \text{se } 1 \leq a \leq 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

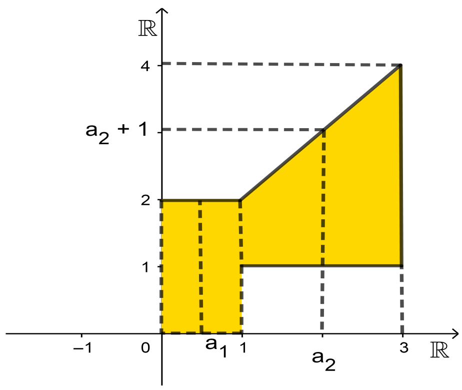


Figura 2.2: Visualização gráfica de T_3

Exemplo 2.6. Seja $T_4 : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$T_4(a) = \begin{cases} (0, +\infty), & \text{se } a = 1 \\ (-2, -1) \cup [1, +\infty), & \text{se } a = 2 \\ (-\infty, 2], & \text{se } a = 3 \\ \mathbb{R}, & \text{se } a \notin \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

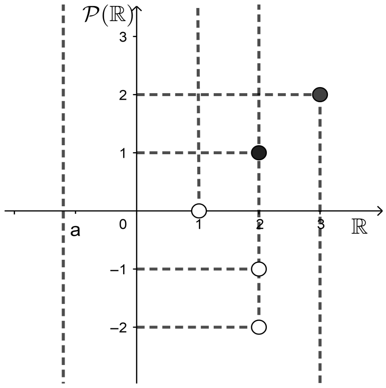


Figura 2.3: Visualização gráfica de T_4

Definição 2.2. ([7], pág. 299). Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador. Diremos que T é um Operador Monótono(**OM**) quando para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n, x^* \in T(x)$ e $y^* \in T(y)$, tem-se

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0.$$

Agora, iremos apresentar exemplos de operadores monótonos.

Exemplo 2.7. Considere o operador identidade $I : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x \in I(x)$ e $y \in I(y)$. Assim,

$$(x - y) \cdot (x - y) = (x - y)^2 \geq 0.$$

Logo, I é monótono.

Exemplo 2.8. Considere o operador $A : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dado por $A(x) = ax$, com $a > 0$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $ax \in A(x)$ e $ay \in A(y)$. Assim

$$(x - y) \cdot (ax - ay) = (x - y) \cdot a(x - y) = a(x - y)^2 \geq 0.$$

Logo, A é monótono.

Exemplo 2.9. Considere o operador $T : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Definido por

$$T(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x < 0 \\ [0, 1], & \text{se } x = 0 \\ x + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Sejam $x, y > 0$, então para $x + 1 \in T(x)$ e $y + 1 \in T(y)$ vale,

$$(x - y) \cdot [(x + 1) - (y + 1)] = (x - y) \cdot [x + 1 - y - 1] = (x - y)^2 \geq 0.$$

Sejam $x, y < 0$, e para $x - 1 \in T(x)$ e $y - 1 \in T(y)$ tem-se,

$$(x-y)\cdot[(x-1)-(y-1)] = (x-y)\cdot[x-1-y+1] = (x-y)^2 \geq 0.$$

Sejam $x < 0$ e $y > 0$ para $x - 1 \in T(x)$ e $y + 1 \in T(y)$ tem-se,

$$(x-y)\cdot[(x-1)-(y+1)] = (x-y)\cdot[x-y-2] = (x-y)^2 - 2(x-y) > 0.$$

Sejam $x > 0$ e $y < 0$ para $x + 1 \in T(x)$ e $y - 1 \in T(y)$ tem-se,

$$(x-y)\cdot[(x+1)-(y-1)] = (x-y)\cdot[x-y+2] = (x-y)^2 + 2(x-y) > 0.$$

Sejam $x = 0$, $y > 0$ e para $[0, 1] = T(0)$ e $y + 1 \in T(y)$. Seja $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$(0-y)\cdot[\alpha-(y+1)] = (-y)\cdot[\alpha-y-1] = (-y)\cdot(-y)+(-y)\cdot(\alpha-1) = y^2 - y(\alpha-1) > 0.$$

Sejam $x = 0$, $y < 0$ e para $[0, 1] = T(0)$ e $y - 1 \in T(y)$. Seja $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$(0-y)\cdot[\alpha-(y-1)] = (-y)\cdot[\alpha-y+1] = (-y)\cdot(-y)+(-y)\cdot(\alpha+1) = y^2 - y(\alpha+1) > 0.$$

Logo, T é monótono.

Exemplo 2.10. Considere o operador $B' : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Definido por

$$B'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 0 \\ [-1, 1], & \text{se } x = 0 \\ x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Sejam $x, y > 0$, então para $x + 1 \in B'(x)$ e $y + 1 \in B'(y)$ tem-se,

$$(x-y)\cdot[(x+1)-(y+1)] = (x-y)\cdot[x+1-y-1] = (x-y)^2 \geq 0.$$

Sejam $x, y < 0$, então para $x - 1 \in B'(x)$ e $y - 1 \in B'(y)$ vale,

$$(x-y)\cdot[(x-1)-(y-1)] = (x-y)\cdot[x-1-y+1] = (x-y)^2 \geq 0.$$

Sejam $x < 0$ e $y > 0$, para $x - 1 \in B'(x)$ e $y + 1 \in B'(y)$ tem-se,

$$(x-y)\cdot[(x-1)-(y+1)] = (x-y)\cdot[x-y-2] = (x-y)^2 - 2(x-y) > 0.$$

Sejam $x > 0$ e $y < 0$, para $x + 1 \in B'(x)$ e $y - 1 \in B'(y)$ tem-se,

$$(x-y)\cdot[(x+1)-(y-1)] = (x-y)\cdot[x-y+2] = (x-y)^2 + 2(x-y) > 0.$$

Sejam $x = 0$, $y > 0$ e para $[-1, 1] = B'(0)$ e $y + 1 \in B'(y)$. Seja $\beta \in [-1, 1]$, temos

$$(0-y)\cdot[\beta-(y+1)] = (-y)\cdot[\beta-y-1] = (-y)\cdot(-y)+(-y)\cdot(\beta-1) = y^2-y(\beta-1) > 0.$$

Sejam $x = 0$, $y < 0$ e para $[-1, 1] = B'(0)$ e $y - 1 \in B'(y)$. Seja $\beta \in [-1, 1]$, temos

$$(0-y)\cdot[\beta-(y-1)] = (-y)\cdot[\beta-y+1] = (-y)\cdot(-y)+(-y)\cdot(\beta+1) = y^2-y(\beta+1) > 0.$$

Logo, B' é estritamente monótono.

Considerando que o subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. é um operador ponto-conjunto, mostraremos que o subdiferencial de uma função convexa e própria é um operador monótono.

Proposição 2.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa e própria. Então, $\partial f : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é um operador monótono.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in \partial f(x), \bar{y} \in \partial f(y)$. Pela definição de subdiferencial,

$$f(m) \geq f(x) + \langle \bar{x}, m - x \rangle \ \forall m \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

e

$$f(p) \geq f(y) + \langle \bar{y}, p - y \rangle \ \forall p \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

Em particular $y = m$ e $x = p$ e substituindo em 2.1 e 2.2, obtém-se

$$f(y) \geq f(x) + \langle \bar{x}, y - x \rangle \text{ e } f(x) \geq f(y) + \langle \bar{y}, x - y \rangle \tag{2.3}$$

Da soma das duas desigualdades em 2.3, resulta

$$-\langle \bar{x}, x - y \rangle + \langle \bar{y}, x - y \rangle \leq 0$$
$$\langle \bar{x}, x - y \rangle - \langle \bar{y}, x - y \rangle \geq 0$$

Isto é,

$$\langle \bar{x} - \bar{y}, x - y \rangle \geq 0$$

Portanto, ∂f é um operador monótono. ■

Agora damos um exemplo chave que liga as definições de subdiferencial de uma função convexa com operadores ponto-conjunto.

Definição 2.3. [[9], pág. 3] Considere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

A **aplicação dualidade** $J : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é o subdiferencial ∂g de g.

Observação 2.2. (ver [[9], pág. 3]) Afirma-se que:

1) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ valem que

$$J(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}; \tag{2.4}$$

Se $f(\cdot) = \dfrac{1}{2}\|\cdot\|^2$, então

$$\partial f(x) = J(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

Vamos mostrar inclusão de conjuntos. Primeiramente vamos provar $J(x) \subset \partial f(x)$. Seja $x^* \in J(x)$ então $\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}\langle y - x, x^* \rangle &= \langle y, x^* \rangle - \langle x, x^* \rangle \\ &= \langle y, x^* \rangle - \|x\|^2\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle y - x, x^* \rangle + \|x\|^2 &= \langle y, x^* \rangle \\ &\leq |\langle y, x^* \rangle| \\ &\leq \|y\|\|x^*\| \\ &= (\|y\|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\|x^*\|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{pela desigualdade de Young} \\ &\leq \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|x^*\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle y - x, x^* \rangle + \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Isso implica

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Portanto, $x^* \in \partial f(x)$.

Agora, vamos mostrar $\partial f(x) \subset J(x)$. Seja $x^* \in \partial f(x)$ então

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Considerando $y = x + \alpha z$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^n$ em 2.5, temos

$$\alpha\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}\|x + \alpha z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{2.6}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\alpha\langle x^*, z\rangle &\leq \frac{1}{2}\Big(\|x\|^2 + 2\langle x, \alpha z\rangle + \alpha^2\|z\|^2\Big) - \frac{1}{2}\|x\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\|z\|^2 + 2\langle x, \alpha z\rangle\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\|z\|^2 + 2|\alpha|\|x\|\|z\|\Big)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\alpha\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\|z\|^2 + 2|\alpha|\|x\|\|z\|\Big) \tag{2.7}$$

Se $\alpha > 0$ em 2.7 então $\alpha\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\|z\|^2 + 2\alpha\|x\|\|z\|\Big)$. Dividindo por α, temos

$$\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}\Big(\alpha\|z\|^2 + 2\|x\|\|z\|\Big)$$

Fazendo $\alpha \longrightarrow 0^+$, temos

$$\langle x^*, z\rangle \leq \|x\|\|z\| \ \forall\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Por outro lado,

Se $\alpha < 0$ em 2.7 então $\alpha\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\|z\|^2 - 2\alpha\|x\|\|z\|\Big)$. Dividindo por α, temos

$$\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}\Big(\alpha\|z\|^2 - 2\|x\|\|z\|\Big)$$

Fazendo $\alpha \longrightarrow 0^-$, temos

$$\langle x^*, z\rangle \geq -\|x\|\|z\| \ \forall\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

De 2.8 e 2.9 segue-se

$$|\langle x^*, z\rangle| \leq \|x\|\|z\| \ \forall\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Assim, para $z = x$, tem-se

$$|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x\|^2 \tag{2.11}$$

Por outro lado, para $z = x^*$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|x^*\|^2 \leq \|x\|\|x^*\| \\
&\Rightarrow \|x^*\|(\|x^*\| - \|x\|) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \|x^*\| - \|x\| \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \|x^*\| \leq \|x\| \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Fazendo $z = x$ em 2.6, temos

$$\begin{aligned}
\alpha\langle x^*, x\rangle \leq \frac{1}{2}\Big(\|x + \alpha x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2\Big) &= \frac{1}{2}\Big(2\alpha\langle x, x\rangle + \alpha^2\|x\|^2\Big) \\
&= \alpha\|x\|^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\|x\|^2 \\
&= \alpha\|x\|^2\Big(1 + \frac{1}{2}\alpha\Big) \\
&= \alpha\|x\|^2\Big(\frac{\alpha+2}{2}\Big) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Para $\alpha < 0$ em 2.13 então $\alpha\langle x^*, x\rangle \leq \alpha\|x\|^2\Big(\frac{\alpha+2}{2}\Big)$. Dividindo por α, temos

$$\langle x^*, x\rangle \geq \|x\|^2\Big(\frac{\alpha+2}{2}\Big)$$

Fazendo, $\alpha \longrightarrow 0^-$, temos

$$\langle x^*, x\rangle \geq \|x\|^2$$

De 2.11, temos

$$\|x\|^2 \leq \langle x^*, x\rangle \leq |\langle x^*, x\rangle| \leq \|x\|^2$$

Então,

$$\|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle \qquad (2.14)$$

Isso significa que,

$$\|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\|\|x\|$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|x\|(\|x\| - \|x^*\|) \leq 0 \\
&\Rightarrow \|x\| - \|x^*\| \leq 0 \\
&\Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\| \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

De 2.12 e 2.15, segue que, $\|x\| = \|x^*\|$ e, de 2.14,temos $\|x^*\|^2 = \langle x^*, x\rangle$.

Logo, $x^* \in J(x)$. Portanto $\partial f(x) = J(x)$.

Além disso, note que

$$\begin{aligned}\|x-x^*\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, x^*\rangle + \|x^*\|^2\\ &= \|x^*\|^2 - 2\|x^*\|^2 + \|x^*\|^2\\ &= -\|x^*\|^2 + \|x^*\|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

Isso implica, $\|x - x^*\| = 0 \Rightarrow x = x^*$.

Definição 2.4. [[6], p. 122] Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador ponto-conjunto. T é estritamente monótono se, e somente se $\langle u - v, x - y\rangle > 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq y$, todo $u \in T(x)$, e todo $v \in T(y)$.

Definição 2.5. [[7], p. 299] Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um Operador Monótono Maximal(**OMM**) quando não existe um outro operador monótono T' tal que o Graf(T) esteja propriamente contido no Graf(T'), ou seja, T é **OMM** se

i) T é monótono;

ii) Para todo T' monótono tal que $T(x) \subset T'(x)$ pata todo x, vale que $T = T'$.

Exemplo 2.11. Seja o operador identidade $I : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ que é monótono (ver Exemplo 2.7). A seguir, será verificado que este operador também é maximal. Para tal, seja o operador $\tilde{I}$ definido por

$$\tilde{I}(x) := \begin{cases} \{x\}, & \text{se } x \neq \bar{x} \\ \{\bar{x}, \tilde{x}\}, & \text{se } x = \bar{x} \end{cases}$$

onde $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ é qualquer e $\tilde{x} \neq \bar{x}$. Nota-se que Graf(I) $\subset$ Graf($\tilde{I}$), entretanto, será mostrado que $\tilde{I}$ é não monótono. Sejam $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ tais que $\bar{x} > x > 0$, $x \in \tilde{I}(\bar{x})$ e $\tilde{x} \in \tilde{I}(\bar{x})$. Assim, tem-se

$$(x - \bar{x}) \cdot (x - \tilde{x}) < 0.$$

Logo, o operador $\tilde{I}$ é não monótono. Portanto, o operador I é monótono maximal.

Exemplo 2.12. Seja o operador $\bar{A} : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ monótono definido no Exemplo 2.8. Em seguida, será verificado que $\bar{A}$ é maximal. Para tal, seja o operador $\tilde{A}$ definido por

$$\tilde{A}(x) := \begin{cases} \{ax\}, & \text{se } x \neq \bar{x} \\ \{ax, 0\}, & \text{se } x = \bar{x} > 0 \end{cases}$$

Nota-se que Graf($\bar{A}$) $\subset$ Graf($\tilde{A}$), entretanto, será mostrado que $\tilde{A}$ é não monótono. Sejam $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ tais que $\bar{x} > x > 0$, $a\bar{x} \in \tilde{A}(\bar{x})$ e $0 \in \tilde{A}(\bar{x})$. Assim, tem-se

$$(x - \bar{x}) \cdot (ax - 0) < 0.$$

Exemplo 2.13. Seja o operador $B : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ monótono definido no Exemplo 2.10. Em seguida, será verificado que B é maximal. Para tal, seja o operador $\tilde{B}$ definido por

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} B(x), & \text{se } x \neq \bar{x} \\ \{B(\bar{x}), x'\}, & \text{se } x = \bar{x}, \bar{x} \neq x' \end{cases}$$

Nota-se que $\mathrm{Graf}(B) \subset \mathrm{Graf}(\tilde{B})$, entretanto, será mostrado que $\tilde{B}$ é não monótono.

Sejam $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ tais que $x > \bar{x} > 0$, $\bar{x} + 1 \in \tilde{B}(\bar{x})$ e $x' \in \tilde{B}(\bar{x})$. Vamos mostrar que

$$(x - \bar{x}) \cdot (x + 1 - x') < 0.$$

De fato, tome $x' > 2$, $1 > x > \bar{x} > 0$. Temos que,

$$1 > x > 0 \Rightarrow 0 > x - 1 > -1 \Rightarrow x - 1 < 0$$

e

$$x > \bar{x} > 0 \Rightarrow x - \bar{x} > 0$$

Assim, $(x + 1 - x') < (x + 1 - 2) = x - 1 < 0$. Logo, $(x + 1 - x') < 0$.

Logo, $\tilde{B}$ não é monótono. Portanto, B é monótono maximal.

As proposições abaixo abordam propriedades importantes a respeito da teoria de operadores monótonos maximais.

Proposição 2.2. ([[6], Cap. 4, pág. 126] **Convexidade de Operadores Monótonos Maximais**). Se $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ é monótono maximal, então $T(x)$ é convexo para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver Corolário 4.2.6 em [[6], pág. 126]. ■

Proposição 2.3. [[12], pág. 9] Se $y_k \to \bar{y}$, $z_k \to \bar{z}$, T é monótono maximal e $y_k \in T(z_k)$, então $\bar{y} \in T(\bar{z})$.

Demonstração. Defina $T' : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ como

$$T'(z) = \begin{cases} T(z), & \text{se } z \neq \bar{z} \\ T(\bar{z}) \cup \{\bar{y}\}, & \text{se } z = \bar{z} \end{cases}$$

Afirmamos que T' é monótono.

Vamos mostrar que para quaisquer $z, z' \in \mathbb{R}^n, y \in T'(z)$ e para todo $y' \in T'(z')$ vale

$$\langle y - y', z - z' \rangle \geq 0 \tag{2.16}$$

Pela definição de T' e T sendo monótono, basta verificar que 2.16 vale para $y' = \bar{y}, z' = \bar{z}$. Por hipótese, temos $\{y_k\} \in T(z_k)$ e pela monotonicidade de T, temos

$$\langle y - y_k, z - z_k \rangle \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall y \in T(z), \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Tomando o limite em 2.17 quando $(k \to +\infty)$,

$$\lim_{k \to +\infty} \langle y - y_k, z - z_k \rangle \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall y \in T(z).$$

Pela continuidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, segue-se

$$\langle y - \lim_{k \to +\infty} y_k, z - \lim_{k \to +\infty} z_k \rangle \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall y \in T(z).$$

Assim,

$$\langle y - \bar{y}, z - \bar{z} \rangle \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall y \in T(z).$$

Logo, T' é um operador monótono. Como $T(x) \subset T'(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$, e por hipótese T é monótono maximal, concluímos que $T = T'$. Em particular, $T(\bar{z}) = T'(\bar{z}) = T(\bar{z}) \cup \{\bar{y}\}$, isto é, $\bar{y} \in T(\bar{z})$. Portanto, todo operador monótono maximal T é uma aplicação fechada. $\blacksquare$

Para completude das propriedades do operador subdiferencial, vamos enunciar o próximo resultado, a fim de usá-lo para aplicações posteriores.

Teorema 2.1. *([[21], Cap. 7, pág. 110]* ***Maximalidade do Subdiferencial da*** *f). Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, própria e s.c.i.. Então, ∂f é um operador monótono maximal.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [21], pág. 110. $\blacksquare$

Proposição 2.4. Se $\mathbb{R}^n$ é reflexivo e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é monótono maximal então T^{-1} é também monótono maximal.

Demonstração. Ver Proposição 4.2.7 em [[6], pág. 127]. $\blacksquare$

Outro resultado bastante útil sobre operadores monótonos maximais é o seguinte:

Corolário 2.1. ([[17], pág. 532]) Seja $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono e $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono maximal com a função Fitzpatrick φ_B de valor finito. Se A é monótono maximal então $\mathrm{Im}(A + B) = \mathbb{R}^n$. Reciprocamente, se B é ponto-ponto e estritamente monótono e $\mathrm{Im}(A + B) = \mathbb{R}^n$ então A é monótono maximal.

Demonstração. Ver [[17], pág. 532]. $\blacksquare$

Observe que em seu enunciado esse resultado envolve a noção de função Fitzpatrick associada a um operador, o que serve de motivação para a nossa próxima seção

2.2 Função Fitzpatrick

A função Fitzpatrick foi introduzida por Simon Fitzpatrick em [8], no ano de 1988, com o objetivo de representar convexamente o subdiferencial de uma função convexa e própria.

Em 2001, esta bifunção foi utilizada por Martínez-Legaz e Théra em [19] com o fim de identificar e classificar um operador monótono maximal.

Definição 2.6. [[9], pág. 3] Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador ponto-conjunto tal que $D(T) \neq \emptyset$. A função **Fitzpatrick** do operador T denotada por $\varphi_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\varphi_T(x, x^*) := \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle. \tag{2.18}$$

Reescrevendo (2.18), será obtida outra expressão equivalente, também muito presente na literatura,

$$\begin{aligned}
\varphi_T(x, x^*) &= \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{\langle x - y, x^* - y^* \rangle\} \\
&= - \inf_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{-\langle x, x^* \rangle + \langle x - y, x^* - y^* \rangle\} \\
&= - \inf_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{-\langle x, x^* \rangle - \langle y - x, x^* - y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{\langle x, x^* \rangle + \langle y - x, x^* - y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{\langle x, x^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle - \langle x, x^* \rangle + \langle x, y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{\langle y, x^* \rangle + \langle x, y^* \rangle - \langle y, y^* \rangle\}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi_T(x, x^*) := \sup_{(y,y^*)\in \text{Graf}(T)} \{\langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle\} \tag{2.19}$$

Agora, veremos a função Fitzpatrick de alguns operadores como exemplos.

Exemplo 2.14. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a > 0$. Vamos calcular a função Fitzpatrick desta função. De fato,

$$\varphi_f(x, x^*) = x \cdot x^* - \inf_{(y,y^*)\in \text{Graf}(f)} (x - y) \cdot (x^* - y^*).$$

Assim, para $(x, x^*) \in \text{Graf}(f)$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_f(x,x^*) &= x \cdot (ax+b) - \inf_{y \in R}\{(x-y)\cdot(ax+b-(ay+b))\}\\ &= ax^2+bx - \inf_{y\in\mathbb{R}}\{(x-y)\cdot a\cdot(x-y)\}\\ &= ax^2+bx-\inf_{y\in\mathbb{R}}\{a\cdot(x-y)^2\}\\ &= ax^2+bx\end{aligned}$$

Agora, para $(x, x^*) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\backslash\text{Graf}(f)$ implica que x e x^* são quaisquer e fixos. Então

$$\begin{aligned}\varphi_f(x,x^*) &= x\cdot x^* - \inf_{y\in\mathbb{R}}\{(x-y)\cdot(x^*-(ay+b))\}\\ &= x\cdot x^* - \inf_{y\in\mathbb{R}}\{(x-y)\cdot(x^*-ay-b)\}\\ &= x\cdot x^* - x\cdot x^* - \inf_{y\in\mathbb{R}}\{-axy-bx-yx^*+ay^2+yb\}\\ &= -\inf_{y\in\mathbb{R}}\{ay^2+(b-x^*-ax)y-bx\}\end{aligned}$$

Como $a > 0$, precisamos encontrar o ponto de mínimo da função

$$g(y) = ay^2+(b-x^*-ax)y-bx$$

que é uma função de segundo grau na variável y. Logo, o ponto de mínimo é

$$X_v = \frac{-b+x^*+ax}{2a} \tag{2.20}$$

E substituindo (2.20) na função para obter o valor mínimo, temos

$$\begin{aligned}Y_v &= a{X_v}^2 + X_v(b-x^*-ax)-bx\\ &= a\left(\frac{-b+x^*+ax}{2a}\right)^2 + \frac{-b+x^*+ax}{2a}(b-x^*-ax)-bx\\ &= a\left(\frac{-b+x^*+ax}{2a}\right)^2 - \frac{(-b+x^*+ax)^2}{2a} - bx\\ &= \frac{a(-b+x^*+ax)^2-2a(-b+x^*+ax)^2-4a^2bx}{4a^2}\\ &= \frac{-a(-b+x^*+ax)^2-4a^2bx}{4a^2}\\ &= \frac{-(-b+x^*+ax)^2-4abx}{4a}\end{aligned}$$

Portanto, a função Fitzpatrick da função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$ é dada por

$$\varphi_f(x, x^*) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{se } (x, x^*) \in \text{Graf}(f) \\ \dfrac{(-b + x^* + ax)^2 + 4abx}{4a}, & \text{se } (x, x^*) \notin \text{Graf}(f). \end{cases}$$

Exemplo 2.15. Seja a função $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $I(x) = x$. Vamos calcular a função Fitzpatrick da função identidade. Para $(x, x^*) \in$ Graf(I), tem-se que

$$\begin{aligned} \varphi_I(x, x^*) &= xx - \inf_{y \in \mathbb{R}} \{(x - y)(x - y)\} = x^2 - \inf_{y \in \mathbb{R}} \{(x - y)^2\} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Agora, seja $(x, x^*) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \backslash$Graf(I) implica que (x, x^*) são quaisquer, porém fixos. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_I(x, x^*) &= xx^* - \inf_{y \in \mathbb{R}} \{(x - y)(x^* - y)\} \\ &= xx^* - xx^* - \inf_{y \in \mathbb{R}} \{(-xy - yx^* + y^2)\} \\ &= - \inf_{y \in \mathbb{R}} \{y^2 - y(x + x^*)\} \end{aligned}$$

Usando um raciocínio análogo ao exemplo anterior, calculando X_v, obtém-se,

$$X_v = \frac{x + x^*}{2} \tag{2.21}$$

Substituindo (2.21) em Y_v, temos

$$\begin{aligned} Y_v &= {X_v}^2 - X_v(x^* + x) \\ &= \left(\frac{x + x^*}{2}\right)^2 - (x + x^*) \cdot \left(\frac{x + x^*}{2}\right) \\ &= \frac{(x + x^*)^2}{4} - \frac{(x + x^*)^2}{2} \\ &= -\frac{(x + x^*)^2}{4} \end{aligned}$$

Portanto, a função Fitzpatrick da função identidade $f(x) = x$ é dada por

$$\varphi_I(x, x^*) = \begin{cases} x^2, & \text{se } (x, x^*) \in \text{Graf}(I) \\ \dfrac{(x + x^*)^2}{4}, & \text{se } (x, x^*) \notin \text{Graf}(I). \end{cases}$$

Apresentaremos, agora, um Teorema que caracteriza a função Fitzpatrick de um operador monótono maximal.

Teorema 2.2. [[8], pág. 62] Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono maximal. Então, as seguintes afirmações são satisfeitas:

(1) $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^*\rangle$ se, e somente se, $(x, x^*) \in \text{Graf}(T)$;

(2) $\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^*\rangle$, para todo $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração. (1). Suponha $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^*\rangle$. Assim, de (2.18), implica que

$$\varphi_T(x, x^*) - \langle x, x^*\rangle = - \inf_{(y,y^*)\in\text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^*\rangle$$

Por hipótese,

$$\langle x, x^*\rangle - \langle x, x^*\rangle = - \inf_{(y,y^*)\in\text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^*\rangle$$

Assim,

$$\inf_{(y,y^*)\in\text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^*\rangle = 0$$

Da definição de ínfimo,

$$\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq \inf_{(y,y^*)\in\text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^*\rangle = 0 \tag{2.22}$$

Pela maximalidade de T, segue-se de (2.22) que $(x, x^*) \in \text{Graf}(T)$.
Reciprocamente, supondo $(x, x^*) \in \text{Graf}(T)$ e usando a monotonicidade de T temos

$$\langle x, x^*\rangle \geq \langle y, x^*\rangle + \langle x, y^*\rangle - \langle y, y^*\rangle$$

De modo que,

$$\langle x, x^*\rangle \geq \sup_{(y,y^*)\in\text{Graf}(T)} \langle y, x^*\rangle + \langle x, y^*\rangle - \langle y, y^*\rangle$$

Implica que,

$$\varphi_T(x, x^*) \leq \langle x, x^*\rangle. \tag{2.23}$$

Por outro lado, pela definição de Fitzpatrick,

$$\inf_{(y,y^*)\in\text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^*\rangle = \langle x, x^*\rangle - \varphi_T(x, x^*)$$

Pela definição de ínfimo, temos

$$\langle x, x^*\rangle - \varphi_T(x, x^*) \leq \langle x - y, x^* - y^*\rangle, \forall\ (y, y^*) \in \text{Graf}(T). \tag{2.24}$$

Assim,

$$\langle x, x^*\rangle - \langle x - y, x^* - y^*\rangle \leq \varphi_T(x, x^*), \forall\ (y, y^*) \in \text{Graf}(T).$$

Em particular, $(y, y^*) = (x, x^*) \in \text{Graf}(T)$, temos que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0$. De (2.24), vem

$$\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle. \tag{2.25}$$

De (2.23) e (2.25) segue que

$$\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

(2). Suponha que $(x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \text{Graf}(T)$. Da maximalidade de T, segue-se que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle < 0 \ \forall \ (y, y^*) \in \text{Graf}(T)$, o que implica $\inf\limits_{(y,y^*) \in \text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle < 0$. Desta forma,

$$-\inf_{(y,y^*) \in \text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0.$$

Logo, $\varphi_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle - \inf\limits_{(y,y^*) \in \text{Graf}(T)} \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq \langle x, x^* \rangle$. Isto é,

$$\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle \text{ para todo } (x, x^*) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \text{Graf}(T). \tag{2.26}$$

Dessa maneira, da afirmação (1) e de (2.26), segue-se que $\varphi_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$ para todo $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. ∎

Proposição 2.5. [[8], pág. 61] Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um operador monótono. Se $\text{D}(T) \neq \emptyset$, então φ_T é uma função convexa, própria e s.c.i..

Demonstração. Consideremos a definição da função Fitzpatrick dada em (2.19), segue que o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é convexo, pois é uma aplicação bilinear no $\mathbb{R}^n$. Assim, pela Proposição (1.7), segue-se que φ_T é uma função convexa. Continuando, para $(y, y^*) \in \text{Graf}(T)$ qualquer e fixo, a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua no $\mathbb{R}^n$ o que implica que é s.c.i.. Desta forma, pela Proposição (1.7), tem-se que φ_T é s.c.i. Como o $\text{D}(T) \neq \emptyset$, segue-se da afirmação (1) do Teorema (2.2) que a função φ_T é própria. ∎

Definição 2.7. [[9], pág. 3] A **translação** $\tau_{(x_0, x_0^*)}(T) : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ de T é o operador definido por

$$\tau_{(x_0, x_0^*)}(T)(x) = T(x + x_0) - x_0^*, \tag{2.27}$$

com $(x_0, x_0^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Observação 2.3. A monotonicidade e a monotonicidade maximal são preservadas pela translação. Observe que, $\tau_{(x_0, x_0^*)}(T)$ é monótono.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x^* \in \tau_{(x_0, x_0^*)}(T)(x)$, $y^* \in \tau_{(x_0, x_0^*)}(T)(y)$. Temos que

$$x^* \in \tau_{(x_0, x_0^*)}(T)(x) \Leftrightarrow x^* \in T(x + x_0) - x_0^* \Leftrightarrow \exists \ x' \in T(x + x_0); x^* = x' - x_0^*$$

e

$$y^* \in \tau_{(x_0, x_0^*)}(T)(y) \Leftrightarrow y^* \in T(y + x_0) - x_0^* \Leftrightarrow \exists \ y' \in T(y + x_0); y^* = y' - x_0^*$$

Como T é monótono, temos

$$\begin{aligned}\langle x-y, x^*-y^*\rangle &= \langle x-y, x'-x_0^*-y+x_0^*\rangle \\ &= \langle x-y, x'-y'\rangle \\ &= \langle x-x_0+x_0-y, x'-y'\rangle \\ &= \langle x+x_0-(y+x_0), x'-y'\rangle \geq 0\end{aligned}$$

Logo, $\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)$ é monótono.

Afirmamos que $\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)$ é monótono maximal.

De fato, suponha que não, então existe $T' : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que T' é monótono e existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T'(z) \supset \tau_{(x_0,x_0^*)}(T)(x) = T(z+x_0) - x_0^* \Leftrightarrow T'(z) + x_0^* \supset T(z+x_0)$$

Então definindo $T'(z+x_0) = T'(z)+X_0^* \supset T(z+x_0)$, o que é um absurdo, pois contraria o fato de T ser um operador monótono maximal. Portanto, $\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)$ é monótono maximal.

Além disso, vale a seguinte expressão para a função Fitzpatrick da translação de T.

$$\varphi_{\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)}(x,x^*) = \varphi_T(x+x_0, x^*+x_0^*) - [\langle x, x_0^*\rangle + \langle x_0, x^*\rangle + \langle x_0, x_0^*\rangle] \tag{2.28}$$

De fato, por definição, $\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)(x) = T(x+x_0) - x_0^*$. Isso significa que, para $y^* \in T(y+x_0) - x_0^*$ temos que existe $y' \in T(y+x_0)$ tal que $y^* = y' - x_0^*$.

Da definição de função Fitzpatrick, temos

$$\varphi_T(x+x_0, x^*+x_0^*) = \langle x+x_0, x^*+x_0^*\rangle - \inf_{(z,z^*)\in \mathrm{Graf}(T)} \langle x+x_0-z, x^*+x_0^*-z\rangle$$

Assim,

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)}(x,x^*) &= \langle x,x^*\rangle - \inf_{(y,y^*)\in \mathrm{Graf}(T(y+x_0)-x_0^*)} \langle x-y, x^*-y^*\rangle \\ &= \langle x,x^*\rangle - \inf_{y'\in T(y+x_0)} \langle x-y, x^*-y'+x_0^*\rangle \\ &= \langle x,x^*\rangle - \inf_{y'\in T(y+x_0)} \langle x+x_0-x_0-y, x^*+x_0^*-y'\rangle \\ &= \langle x+x_0, x^*+x_0^*\rangle - \inf_{y'\in T(y+x_0)} \langle x+x_0-(x_0+y), x^*+x_0^*-y'\rangle - \\ &- [\langle x, x_0^*\rangle + \langle x_0, x^*\rangle + \langle x_0, x_0^*\rangle] \\ &= \varphi_T(x+x_0, x^*+x_0^*) - [\langle x, x_0^*\rangle + \langle x_0, x^*\rangle + \langle x_0, x_0^*\rangle]\end{aligned}$$

Verificamos que 2.28 é satisfeita.

Para finalizar este capítulo nós apresentamos um resultado teórico que é bastante útil para resolver problemas de zeros de operadores.

Teorema 2.3. [[9], pág. 6] Seja $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono e $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador monótono maximal e tal que φ_B é de valor finito. Considere as seguintes afirmações:

1) A é monótono maximal.

2) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $\operatorname{Im}(A + B(\cdot - x)) = \mathbb{R}^n$.

3) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$0 \in A(x') + B(x' - x).$$

Então as seguintes implicações são verdadeiras:1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3).

Demonstração. 1) $\Longrightarrow$ 2) Definindo $T := B(\cdot - x)$. Afirmamos que $\tau_{(-x,0)}B = B(\cdot - x)$. De fato, de $\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)(z)$ definido em 2.27, temos

$$\begin{aligned}
\tau_{(x_0,x_0^*)}(T)(z) &= T(z + x_0) - x_0^* \\
\tau_{(x_0,x_0^*)}(B)(z) &= B(z + x_0) - x_0^* \\
\tau_{(-x,0)}(B)(z) &= B(z - x) - 0 \\
&= B(z - x)
\end{aligned}$$

Logo, $\tau_{(-x,0)}B = B(\cdot - x)$. Então, temos que T é um operador monótono, pois B é monótono maximal, portanto, monótono e pela relação 2.28, temos que φ_T é de valor finito. Pela primeira parte do Corolário 2.1, obtemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale $\operatorname{Im}(A + B(\cdot - x)) = \mathbb{R}^n$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Por hipótese, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A + B(\cdot - x)) &= \bigcup_{z \in \mathbb{R}^n} (A(z) + B(z - x)) \\
&= \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Assim, $0 \in \mathbb{R}^n$, o que implica $0 \in \bigcup_{z \in \mathbb{R}^n} (A(z) + B(z - x))$. Então existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in A(x') + B(x' - x)$.

$\blacksquare$

Observação 2.4. Se, além disso no resultado acima o operador B for ponto-ponto e estritamente monótono, então essas afirmações serão equivalentes. Para a prova dessa afirmação ver [9].

Observação 2.5. A implicação 3) $\Longrightarrow$ 1) não se aplica em geral, se o operador B não é ponto-ponto. Por exemplo, considere os operadores A e B definidos em $\mathbb{R}$ por

$$A(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } x > 0 \\ \{0\}, & \text{se } x = 0 \\ \{-1\}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} \{x+1\}, & \text{se } x > 0 \\ \{-1, 1\}, & \text{se } x = 0. \\ \{x-1\}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Então A é monótono, mas não é monótono maximal, B é monótono maximal e estritamente monótono, com φ_B de valor finito. Para ver isso basta mostrar que, para dado $(x, x^*) \in \mathbb{R}^2$ vale que $\inf_{(y,y^*)\in \text{Graf(B)}}(x-y)(x^*-y^*) > -\infty$. Para isso, basta ter $\inf_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x-y)(x^*+s-y) > -\infty$, para $s \in \{-1, 1\}$. Este último é verdadeiro, já que temos o ínfimo de uma função quadrática em y com coeficiente líder positivo. Portanto, φ_B é de valor finito.

Pra todo $x \in \mathbb{R}$ definimos $x' = x$. Temos que a afirmação 3) é válida já que $B(0) = [-1, 1]$ enquanto $A(x)$ é um dos conjuntos $\{-1\}, \{0\}$ e $\{1\}$. No entanto, a afirmação 1) não é válida.

A partir desse momento, vamos mostrar uma aplicação do Teorema 2.3 usando as propriedades do subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i.. Para tanto vamos considerar no Teorema 2.3 os seguintes operadores: $A = \partial f$, $B = \partial g$, onde $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções convexas, próprias e s.c.i's. com $\varphi_{\partial g}$ finito. Além disso, $A = \partial f$ é um operador monótono maximal implicando que para $0 \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$\text{Im}(\partial f + \partial g(\cdot - 0)) = \mathbb{R}^n$$

o que por sua vez implica que para $0 \in \mathbb{R}^n, \exists\, x' \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$0 \in \partial f(x') + \partial g(x' - 0) = \partial f(x') + \partial g(x')$$

Como $0 \in \partial f(x') + \partial g(x') \Rightarrow \exists\, z \in \partial f(x')$ e $-z \in \partial g(x')$ que significa

$$f(y) \geq f(x') + \langle z, y - x' \rangle,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.29}$$

e

$$g(w) \geq g(x') + \langle -z, w - x' \rangle,\ \forall\, w \in \mathbb{R}^n. \tag{2.30}$$

Tomando $y \in \mathbb{R}^n$ em 2.29 e 2.30 e somando, teremos

$$(f + g)(y) \geq (f + g)(x'), \forall\, y \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja, x' é o minimizador da função $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Bifunções

Neste capítulo dissertamos sobre as conexões entre operadores e bifunções monótonas. Também apresentamos a monotonicidade maximal clássica de bifunções via operadores (ver [10]). Ainda neste capítulo, seguindo as mesmas ideias desenvolvidas por Nicolas Hadjisavvas, Flávia Morgana O. Jacinto e Juan Enrique Martínez-Legaz em [9], definimos bifunção monótona maximal. Finalizamos o capítulo apresentando uma caracterização de operadores monótonos maximais a partir de bifunções monótonas maximais, e vice-versa.

3.1 Monotonicidade de Bifunções

Nesta seção, seguimos as mesmas ideias desenvolvidas por Nicolas Hadjisavvas, Flávia Morgana O. Jacinto e Juan Enrique Martínez-Legaz em [9] para definir bifunção monótona.

A partir desta seção, passamos a considerar a notação $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$. Em que $+\infty \cdot 0 = -\infty \cdot 0 = 0$, $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$ e $+\infty + \alpha = +\infty, -\infty + \alpha = -\infty \; \forall \, \alpha \in \mathbb{R}$. Evitaremos $-\infty + (+\infty)$ e $+\infty + (-\infty)$.

Definição 3.1. [[9], pág. 3] Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma **Bifunção** se para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associa um único elemento em $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemplo 3.1. Listamos alguns exemplos interessantes de bifunções abaixo:

a. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, y) = x^2 + y^2$;

b. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, y) = -x^2$;

c. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, y) = \dfrac{1}{2}\|y - x\|^2$;

d. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, y) = f(y) - f(x)$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

e. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, y) = \sup\limits_{z \in T(x)} \{\langle x - y, z \rangle\}$, em que $T(x) = \mathbb{R}^n$.

Definição 3.2. [[9], pág. 3] O domínio da bifunção $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é dado por

$$\mathrm{dom}(F) := \{x \in \mathbb{R}^n; \forall\, y \in \mathbb{R}^n, F(x, y) > -\infty\}.$$

Observação 3.1. Os domínios das bifunções nos exemplos 3.1.a. e 3.1.b é $\mathbb{R}$ e nos exemplos 3.1.c., 3.1.d., 3.1.e. é o $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.3. [[9], pág. 3] Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma bifunção. Diremos que F é chamada Bifunção Monótona**(BM)** se, e somente se

$$F(x, y) \leq -F(y, x),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Observação 3.1. Para todo $x, y \in \mathrm{dom}(F)$, a expressão (3.1) implica que $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$.

Exemplo 3.2. Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $F(x, y) = -x^2$. Veremos que a bifunção F é monótona. De fato,

$$F(x, y) + F(y, x) = -x^2 - y^2 = -(x^2 + y^2) \leq 0,\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 3.3. Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $F(x, y) = f(x) - f(y)$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Veremos que a bifunção F é monótona. De fato,

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(y, x) &= f(x) - f(y) + (f(y) - f(x)) \\ &= 0,\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Observação 3.2. Observamos que o exemplo 3.3 vale para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemplo 3.4. Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = -(\|x\| + \|y\|)$. A seguir, veremos que a bifunção F é monótona. De fato,

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(y, x) &= -(\|x\| + \|y\|) - (\|y\| + \|x\|) \\ &= -\|x\| - \|y\| - \|y\| - \|x\| \\ &= -2\|x\| - 2\|y\| \\ &= -2(\|x\| + \|y\|) \leq 0,\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = -e^{\|x\|+\|y\|}$. A seguir, veremos que a bifunção F é monótona. De fato,

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(y, x) &= -e^{\|x\|+\|y\|} - e^{\|y\|+\|x\|} \\ &= -e^{\|x\|+\|y\|} - e^{\|x\|+\|y\|} \\ &= -2e^{\|x\|+\|y\|} < 0,\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6. A bifunção $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $F(x, y) = \|y - x\|^2$ não é monótona pois,

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(y, x) &= \|y - x\|^2 + \|x - y\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 \geq 0,\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A próxima definição vai associar uma bifunção a um operador ponto-conjunto para mais tarde vincular a monotonicidade desta bifunção à monotonicidade deste operador.

Definição 3.4. [[9], pág.4] Dada qualquer bifunção $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pode-se definir o operador $A^F : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ por

$$A^F(x) := \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y), \forall\ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exemplo 3.7. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = y^2 - x^2$. Da definição de A^F, temos que avaliar a seguinte desigualdade $(y - x) \cdot x^* \leq y^2 - x^2$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Daí, temos os seguintes casos possíveis:

i) Se $x < y$ então $y - x > 0$ o que implica $x^* \leq y + x$;

ii) Se $x > y$ então $y - x < 0$ o que implica $x^* \geq y + x$;

Dos itens i) e ii) concluímos que $x^* = y + x$. E usando a terceira possibilidade que é para $y = x$ obtemos que $x^* = 2x$. Logo, $A^F(x) = \{2x\},\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.8. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x, y) = 2x(y - x)$. Da definição de A^G, temos que avaliar a seguinte desigualdade $(y - x) \cdot x^* \leq 2x(y - x)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Daí, temos os seguintes casos possíveis:

i) Se $x < y$ então $y - x > 0$ o que implica $x^* \leq 2x$;

ii) Se $x > y$ então $y - x < 0$ o que implica $x^* \geq 2x$;

Dos itens i) e ii) temos que $x^* = 2x$. De onde concluímos que $A^G(x) = \{2x\}$.

A seguir, obtemos a primeira relação teórica entre bifunções e operadores envolvendo seus respectivos domínios efetivos.

Observação 3.3. *Temos $D(A^F) \subseteq dom(F)$. De fato,*

$$\begin{aligned} x \in D(A^F) = \{x \in \mathbb{R}^n; A^F(x) \neq \emptyset\} \\ &\Leftrightarrow \{x^* \in \mathbb{R}^n; \langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y), \forall\ y \in \mathbb{R}^n\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{\exists\ x^* \in \mathbb{R}^n; \langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y), \forall\ y \in \mathbb{R}^n\} \\ &\Leftrightarrow F(x, y) > -\infty, \forall\ y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Leftrightarrow x \in dom(F). \end{aligned}$$

Portanto, $D(A^F) \subseteq dom(F) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

No contexto de bifunções quando se fixa uma das coordenadas obtemos uma expressão geral e interessante quando a bifunção zera na diagonal do $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Fixar uma entrada significa considerar a seguinte notação: $F(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$.

Lema 3.1. *Seja* $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma bifunção. Se* $F(x,x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, então* $A^F(x) = \partial F(x, \cdot)(x)$ *(o subdiferencial da função* $F(x,\cdot)$ *no ponto* x*).*

Demonstração. Como $F(x,x) = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
x^* \in A^F(x) &\Leftrightarrow \langle y - x, x^* \rangle \leq F(x,y), \forall y \in \mathbb{R}^n. \\
&\Leftrightarrow \langle y - x, x^* \rangle + F(x,x) \leq F(x,y), \forall y \in \mathbb{R}^n. \\
&\Leftrightarrow x^* \in \partial F(x,\cdot)(x).
\end{aligned}
$$

■

Lema 3.2. Para qualquer bifunção F, vale que $A^F(x)$ é um conjunto convexo fechado para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $A^F(x)$ é convexo.

Sejam $x^*, y^* \in A^F(x)$. De fato, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$(1-\alpha)\langle y - x, x^* \rangle \leq (1-\alpha)F(x,y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

$$\alpha\langle y - x, y^* \rangle \leq \alpha F(x,y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Fazendo a soma de (3.2) e (3.3), resulta-se

$$\langle y - x, (1-\alpha)x^* + \alpha y^* \rangle \leq F(x,y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $(1-\alpha)x^* + \alpha y^* \in A^F(x)$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Portanto, o conjunto $A^F(x)$ é convexo.

Agora, vamos mostrar que $A^F(x)$ é fechado. Seja uma sequência $\{\xi^k\} \subset A^F(x)$ convergente, tal que $\{\xi^k\} \longrightarrow x^* \in \mathbb{R}^n$.

Com efeito,

$$\langle y - x, \xi^k \rangle \leq F(x,y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Tomando o limite em (3.4) com $(k \longrightarrow +\infty)$, obtém-se

$$\lim_{k\to+\infty} \langle y - x, \xi^k \rangle \leq \lim_{k\to+\infty} F(x,y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

O que implica,

$$\left\langle y - x, \lim_{k\to+\infty} \xi^k \right\rangle \leq F(x,y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, $\lim_{k \to +\infty} \xi^k = x^*$. Logo,

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $x^* \in A^F(x)$.

Portanto, $A^F(x)$ é fechado para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

3.2 Resultados Principais

Considerando as propriedades obtidas no Lema 3.2 é natural introduzirmos os seguintes conjuntos, que serão utilizados a partir desta etapa do trabalho.

- $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n) := \{C^* \subseteq \mathbb{R}^n : C^* \text{ é um conjunto convexo fechado}\}$
- $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) : T(x) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

A partir de agora vamos mostrar que a monotonicidade de bifunções implica na monotonicidade de operadores.

Proposição 3.1. Se $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é **BM**, então $A^F : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é **OM**.

Demonstração. Ora, por hipótese, temos que F é bifunção monótona então $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $x^* \in A^F(x)$, $y^* \in A^F(y)$, por definição de $A^F(x)$,

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y) \text{ e } \langle x - y, y^* \rangle \leq F(y, x). \tag{3.5}$$

Da soma das desigualdades em (3.5), resulta-se

$$\langle y - x, x^* \rangle + \langle x - y, y^* \rangle \leq F(x, y) + F(y, x).$$

E da hipótese, resulta-se

$$\langle y - x, x^* \rangle + \langle x - y, y^* \rangle \leq 0.$$

Usando as propriedades de produto interno, vem

$$\begin{aligned} \langle y - x, x^* \rangle - \langle y - x, y^* \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle y - x, x^* - y^* \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow -\langle x - y, x^* - y^* \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $A^F(x)$ é um operador monótono. ■

Observação 3.4. A recíproca do que foi analisado na Proposição 3.1 não é verdade, como pode ser visto pelo exemplo a seguir.

Exemplo 3.9. Defina $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $F(x,y) = \|y-x\|^2$. Então F não é monótona e é fácil mostrar que $A^F = 0$, então é monótono. De fato,

$$\begin{aligned} F(x,y) + F(y,x) &= \|y-x\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &= 2\|x-y\|^2 > 0 \; \forall \; x \neq y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $A^F = 0$. Com efeito,

$$A^F(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n; \langle y-x, x^* \rangle \leq \|y-x\|^2, \forall \; y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ qualquer e fixo, por definição, temos

$$\begin{aligned} \langle y-x, x^* \rangle \quad &\leq \quad \|y-x\|^2 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow \quad \langle y-x, x^* \rangle - \langle y-x, y-x \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow \quad \langle y-x, x^* - (y-x) \rangle \leq 0. \\ &\Rightarrow \quad \langle z, x^* - z \rangle \leq 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Supondo $x^* \neq 0$, tome $z = \dfrac{1}{2}x^*$, então

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}x^*, \frac{1}{2}x^* \right\rangle &= \frac{1}{4}\langle x, x^* \rangle \leq 0 \\ &= \frac{1}{4}\|x^*\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Absurdo, pois $\|x^*\|^2 \geq 0$ para todo $x^* \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\|x^*\| = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $A^F = 0$.

Isso leva a outros exemplos, tomando a soma da bifunção acima com outra bifunção monótona. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.10. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é monótono, operador linear limitado, então a bifunção $G(x,y) = \langle Tx, y-x \rangle + \|T\|\|y-x\|^2$ não é monótona e $A^G = T$.

Vamos mostrar que $G(x,y)$ não é monótona. De fato, usando as propriedades de produto interno e de norma, resulta

$$\begin{aligned} G(x,y) + G(y,x) &= \langle Tx, y-x \rangle + \|T\|\|y-x\|^2 + \langle Ty, x-y \rangle + \|T\|\|x-y\|^2 \\ &= -\langle Tx, x-y \rangle + \|T\|\|y-x\|^2 + \langle Ty, x-y \rangle + \|T\|\|x-y\|^2 \\ &= \langle Ty - Tx, x-y \rangle + 2\|T\|\|y-x\|^2 \\ &= -\langle Tx - Ty, x-y \rangle + 2\|T\|\|y-x\|^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $(*)$ e, pelas hipóteses sobre T, segue que

$$\begin{aligned} G(x,y)+G(y,x) &\geq -\|T\|\|y-x\|^2+2\|T\|\|y-x\|^2 \\ &= \|T\|\|y-x\|^2 > 0, \forall\, x \neq y \text{ em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo, $G(x,y)$ não é monótona. Agora vamos mostrar que $A^G = T$.
De fato, pela definição de $A^G(x)$, temos

$$\langle y-x, x^* \rangle \leq G(x,y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Substituindo a $G(x,y)$, temos

$$\begin{aligned} \langle y-x, x^* \rangle \leq \langle Tx, y-x \rangle + \|T\|\|y-x\|^2 &\Rightarrow \langle y-x, x^* \rangle - \langle Tx, y-x \rangle \leq \|T\|\|y-x\|^2 \\ &\Rightarrow \langle y-x, x^* - Tx \rangle \leq \|T\|\|y-x\|^2 \end{aligned}$$

Assim, se $x^* = T(y)$, então

$$\langle y-x, Ty-Tx \rangle \leq \|T\|\|y-x\|^2$$

$$\Rightarrow \langle y-x, Ty-Tx \rangle - \|T\|\|y-x\|^2 \leq 0 \qquad (*)$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $(*)$ e, pelas hipóteses sobre T, segue que

$$\begin{aligned} \langle y-x, T(y-x) \rangle - \langle Ty-Tx, y-x \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle y-x, T(y-x) \rangle - \langle y-x, Ty-Tx \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $A^G = T$.

A partir de agora, dado um operador vamos associar a uma bifunção.

Definição 3.5. [[9], pág. 4] Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ um operador com $\mathrm{D}(T) \neq \emptyset$. Assim podemos associar a Bifunção $G_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$G_T(x,y) := \sup_{(x,x^*) \in \mathrm{Graf}(T)} \langle y-x, x^* \rangle.$$

Exemplo 3.11. Seja o operador $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T(x) = ax+b$ com $a > 0$. A seguir, será estudada a bifunção G_T do operador T. De fato,

$$G_T(x,y) = \sup_{(x,x^*) \in \mathrm{Graf}(T)} (y-x) \cdot x^*.$$

Assim, para $x^* = T(x) = ax + b$, temos

$$
\begin{aligned}
G_T(x,y) &= \sup_{(x,x^*)\in \mathrm{Graf}(T)} (y-x)\cdot x^* \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\{(y-x)\cdot(ax+b)\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\{yax + yb - ax^2 - bx\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\{-ax^2 + x(ya-b) + yb\} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}}\{-ax^2 + x(ya-b) + yb\}
\end{aligned}
$$

Como $a < 0$, precisamos encontrar o ponto de máximo da função

$$g(x) = -ax^2 + x(ya-b) + yb$$

que é uma função de segundo grau na variável x. Logo, o ponto de mínimo é

$$X_v = \frac{ya-b}{2a} \tag{3.6}$$

Substituindo 3.6 na função para obter o valor de máximo, temos

$$
\begin{aligned}
Y_v &= -a{X_v}^2 + X_v(ya-b) + yb \\
&= -a\left(\frac{ya-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{ya-b}{2a}\right)\cdot(ya-b) + yb \\
&= -a\left(\frac{ya-b}{2a}\right)^2 + \frac{(ya-b)^2}{2a} + yb \\
&= \frac{-a(ya-b)^2 + 2a(ya-b)^2 + 4a^2yb}{4a^2} \\
&= \frac{a(ya-b)^2 + 4a^2yb}{4a^2} \\
&= \frac{y^2a^2 + 2ayb + b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

Portanto, a bifunção G_T do operador T é

$$G_T(x,y) = \frac{y^2a^2 + 2yab + b^2}{4a}$$

Observação 3.5. Como consequência da Definição 3.5, temos

i) $G_T(x,y) = -\infty$ se, e somente se $T(x) = \emptyset$.

De fato, como $T(x) = \emptyset$ implica que não existe $x^* \in T(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} G_T(x,y) &= \sup_{(x,x^*)\in \mathrm{Graf}(T)} \langle y-x, x^*\rangle \\ &\Leftrightarrow \sup_{(x,x^*)\in \mathrm{Graf}(T)} \emptyset \\ &\Leftrightarrow -\infty \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

ii) $\mathrm{D}(T) = \mathrm{dom}(G_T)$. De fato,

$$\begin{aligned} x \in D(T) &= \{x \in \mathbb{R}^n; T(x) \neq \emptyset\} \\ &\Rightarrow G_T(x,y) = \sup_{(x,x^*)\in \mathrm{Graf}(T)} \langle y-x, x^*\rangle > \langle y-x, x^*\rangle \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow G_T(x,y) > -\infty \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow x \in \mathrm{dom}(G_T). \end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{dom}(G_T) &= \{x \in \mathbb{R}^n; G_T(x,y) > -\infty, \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n\} \\ &\Rightarrow \sup_{(x,x^*)\in \mathrm{Graf}(T)} \langle y-x, x^*\rangle > -\infty \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow \beta > -\infty \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow \exists\, x^* \in T(x) \Leftrightarrow T(x) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Logo, $x \in \mathrm{D}(T)$.

Abaixo mostramos que se o operador T é monótono então a bifunção associada G_T também é monótona.

Proposição 3.2. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ é **OM** então $G_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é **BM**.

Demonstração. Como T é operador monótono então para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $x^* \in T(x)$ e $y^* \in T(y)$, vale

$$\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq 0.$$

Assim, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer e fixos, temos

$$\begin{aligned} \langle x-y, x^*\rangle - \langle x-y, y^*\rangle &\geq 0 \quad \cdot(-1) \\ \langle y-x, x^*\rangle + \langle x-y, y^*\rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

Aplicando o sup em $x^* \in T(x)$ na última desigualdade, temos

$$\sup_{x^*\in T(x)} \langle y-x, x^*\rangle + \langle x-y, y^*\rangle \leq 0, \ \forall y^* \in T(y) \tag{3.7}$$

e, aplicando sup em $y^* \in T(y)$ em 3.7, temos

$$\sup_{x^* \in T(x)} \langle y - x, x^* \rangle + \sup_{y^* \in T(y)} \langle x - y, y^* \rangle \leq 0$$

Logo, $G_T(x, y) + G_T(y, x) \leq 0 \; \forall \; x, y \in \mathbb{R}^n$. Portanto, G_T é uma **BM**. ■

Observação 3.6. Notamos que para operadores distintos podemos encontrar bifunções associadas pela Definição 3.5 iguais. E analogamente, dadas duas bifunções distintas também podemos obter operadores associados pela Definição 3.4 iguais. De fato, considere os seguintes exemplos:

i) Sejam os operadores $T : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dado por $T(x) = x$ e $S : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dado por $S(x) = \left\{x, \frac{x}{2}\right\}$. Temos que $T \neq S$, porém $G_T = G_S$. De fato,

$$G_T(x, y) = \sup_{(x,x^*) \in \text{Graf}(T)} (y - x) \cdot x^* = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{(y - x) \cdot x\} = \max_{x \in \mathbb{R}} \{-x^2 + yx\}$$

Precisamos encontrar o ponto de máximo da função

$$g(x) = -x^2 + yx$$

que é uma função de segundo grau na variável x. Logo, o ponto de máximo é

$$X_v = \frac{y}{2} \tag{3.8}$$

E substituindo 3.8 na função para obter o valor de máximo, temos

$$Y_v = -{X_v}^2 + yX_v = -\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{4}$$

Logo,

$$G_T(x, y) = \frac{y^2}{4} \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Calculando G_S.

$$\begin{aligned} G_S(x, y) &= \sup_{(x,x^*) \in \text{Graf}(S)} \{(y - x) \cdot x^*\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{(y - x) \cdot x, (y - x) \cdot \frac{x}{2}\right\} \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}} \left\{-x^2 + yx, \frac{1}{2}(-x^2 + yx)\right\} \end{aligned}$$

Usando as mesmas ideias que foram aplicadas no exemplo anterior, temos que

$$G_S(x,y) = \max_{x\in\mathbb{R}}\left\{\frac{y^2}{4}, \frac{y^2}{8}\right\} = \frac{y^2}{4}, \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Logo, $G_T(x,y) = G_S(x,y)$. Portanto, $G_T = G_S$.

ii) Sejam as bifunções $M : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $M(x,y) = y^2 - x^2$ e $G : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,y) = 2x(y-x)$. Temos que $M \neq G$ e dos Exemplos 3.7 e 3.8 temos $A^M(x) = 2x = A^G(x)$. Portanto, $A^M = A^G$.

Observando os exemplos acima temos que: no caso i) dois operadores distintos foram associados à mesma bifunção enquanto que no caso ii) duas bifunções distintas foram associadas ao mesmo operador.

Logo, se consideramos as aplicações

$$T \mapsto G_T \qquad \text{e} \qquad F \mapsto A^F$$

elas não seriam bijeções. Porém, se restringirmos seus domínios e imagens, elas se tornam bijeções como veremos. Mas, primeiro relembramos algumas notações e introduzimos outras:

- $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n) := \{C^* \subseteq \mathbb{R}^n : C^* \text{ é um conjunto convexo fechado}\}$
- $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) : T(x) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$
- $\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n) := \{T \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é monótono}\}$
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \{s : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} : s \equiv -\infty, \text{ou } s(0) = 0 \text{ e } s$ é semicontínua inferior, convexa e positivamente homogênea$\}$
- $\mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n) := \{F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} : F(x, x+\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$
- $\mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n) := \{F \in \mathscr{B}_s : F \text{ é monótona}\}$

Notemos que esses são conjuntos especiais ou do $\mathbb{R}^n$ ou de operadores ponto-conjunto ou de bifunções. Note que para toda função $s \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou $s \equiv -\infty$ ou $s(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é s é própria.

Observação 3.7. Para cada $C^* \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, tem-se que a sua função suporte é:

$$\sigma_{C^*}(x^*) := \delta^*_{C^*}(x^*) = \sup_{x\in C^*}\{\langle x, x^*\rangle\}, \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Verificaremos que $\sigma_{C^*} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, se $C^* = \emptyset$ então $\delta_{C^*} = +\infty$ que implica $\sigma_{C^*} = -\infty$. Se $C^* \neq \emptyset$ então $\delta_{C^*}(x) = \sup_{\xi\in C^*} = \{\langle x, \xi\rangle\}$. Temos que $\sigma_{C^*}(0) = \sup_{\xi\in C^*}\{\langle 0, \xi\rangle\} = 0$.

Como o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é convexo e é s.c.i. pela observação 1.1, temos que $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in C^*}$, $\varphi_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$ é uma família de funções convexas e s.c.i.. Desta forma, pela Proposição 1.7

$$\sigma_{C^*}(x) = \sup_{\xi \in C^*} \langle x, \xi \rangle = \sup_{\xi \in C^*} \varphi_\xi(x)$$

é convexa e s.c.i.. E, além disso,

$$\begin{aligned}
\sigma_{C^*}(\lambda x) &= \sup_{\xi \in C^*} \langle \lambda x, \xi \rangle \\
&= \sup_{\xi \in C^*} \lambda \langle x, \xi \rangle \\
&= \lambda \sup_{\xi \in C^*} \langle x, \xi \rangle \\
&= \lambda \sigma_{C^*}(x)
\end{aligned}$$

Donde, σ_{C^*} é positiva homogênea.

O diagrama abaixo ilustra a bijeção da aplicação $C^* \longmapsto \sigma_{C^*}$ que mostraremos em seguida.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "Id"'] & \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\gamma"] \\
 & \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Observação 3.8. Mostraremos que a aplicação

$$\begin{aligned}
\gamma : \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \\
C^* &\longmapsto \gamma(C^*) = \sigma_{C^*} = \delta^*_{C^*},
\end{aligned}$$

assim definida é uma bijeção, cuja inversa é a aplicação

$$\begin{aligned}
\Psi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \\
s &\longmapsto \Psi(s)
\end{aligned}$$

definida por

$$\Psi(s) = \{x^* : \langle x, x^* \rangle \leq s(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{3.9}$$

Afirma-se que $\Psi(\delta^*_{C^*}) = C^*$, $\forall\ C^* \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $x^* \in \Psi(\delta^*_{C^*})$. Então,

$$\begin{aligned} x^* \in \Psi(\delta^*_{C^*}) &= \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*_{C^*}(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x, x^* \rangle \leq \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \langle x, x^* \rangle - \delta_{C^*}(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x, x^* \rangle \leq \sup_{x^* \in C^*} \langle x, x^* \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Logo, $x^* \in C^*$.

Seja $x^* \in C^*$. Então, $\delta_{C^*}(x^*) = 0$.

Isso implica que $\sup_{x^* \in \mathbb{R}^n}\{\langle x, x^* \rangle - \delta_{C^*}(x^*)\} = \sup_{x^* \in C^*}\{\langle x, x^* \rangle\} = \delta^*_{C^*}(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$ Assim, $x^* \in \Psi(\delta^*_{C^*})$.

Portanto,

$$\Psi(\delta^*_{C^*}) = C^*, \ \forall\ C^* \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \tag{3.10}$$

Afirma-se que $\delta^*_{\Psi(s)} = s, \ \forall\ s \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \delta^*_{\Psi(s)}(x) &= \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - \delta_{\Psi(s)}(x)\} \\ &= \sup_{x^* \in \Psi(s)} \{\langle x, x^* \rangle\} \\ &= s(x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto, de 3.10 e 3.11, valem

$$\Psi(\gamma(C^*)) = \Psi(\sigma^*_C) = \Psi(\delta^*_{C^*}) = C^*, \ \forall\ C^* \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \tag{3.12}$$

e

$$\gamma(\Psi(s)) = \delta^*_{\Psi(s)} = s, \ \forall\ s \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.13}$$

E assim, γ é bijeção. Esta bijeção satisfaz $\gamma^{-1}(-\infty) = \Psi(-\infty) = \emptyset$.

Observação 3.9. Para cada $T \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$G_T(x, x + \cdot) = \sup_{x^* \in T(x)} \langle \cdot, x^* \rangle = \delta^*_{T(x)}$$

Então, $G_T \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
G_T(x, x+a) &= \sup_{(x,x^*)\in \mathrm{Graf}(T)} \langle x+a-x, x^*\rangle \\
&= \sup_{x^*\in T(x)} \langle a, x^*\rangle \\
&= \delta^*_{T(x)}(a) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Logo, $G_T \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, para toda $F \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$, temos que $A^F \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, para toda $F \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$ então $\partial F(x,\cdot)(x)$ é um conjunto fechado e convexo. Assim, $\partial F(x,\cdot) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, como $A^F = \partial F(x,\cdot) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, temos que, $A^F \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3.10. Note que,

$$A^F(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle y-x, x^*\rangle \leq F(x,y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

Fazendo $d = y - x$ e usando a definição de Ψ dada em 3.9, temos

$$\begin{aligned}
A^F(x) &= \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle d, x^*\rangle \leq F(x,x+d), \forall\, d \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \Psi(F(x, x+\cdot)). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Observe abaixo no diagrama a bijeção entre operadores e bifunções que provaremos no próximo resultado.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "Id"'] & \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\omega"] \\
& \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Além disso, temos que a restrição no conjunto $\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção entre $\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$. Observe no diagrama baixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "Id"'] & \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\rho"] \\
& \mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.1. [[9], pág. 5] Para todo $T \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, temos $A^{G_T} = T$. Além disso, para todo $F \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$, temos $G_{A^F} = F$. Consequentemente, a aplicação

$$\mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \ni T \mapsto G_T \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$$

é uma bijeção, cuja inversa é a aplicação

$$\mathscr{B}_s \ni F \mapsto A^F \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n).$$

A restrição desta aplicação em $\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção entre $\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $x^* \in A^{G_T}(x)$. Então $\langle y - x, x^* \rangle \leq G_T(x, y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Fazendo $d = y - x$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle d, x^* \rangle \leq G_T(x, x + d) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \\ &\Rightarrow \langle d, x^* \rangle \leq s(d) \text{ para todo } d \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Assim,

$$x^* \in \Psi(G_T(x, x + \cdot)) \tag{3.16}$$

Da definição,

$$\begin{aligned} G_T(x, x + d) &= \sup_{x^* \in T(x)} \langle x + d - x, x^* \rangle \\ &= \sup_{x^* \in T(x)} \langle d, x^* \rangle \\ &= \delta^*_{T(x)}(d) \end{aligned}$$

Substituindo em 3.16, temos

$$x^* \in A^{G_T}(x) \Rightarrow x^* \in \Psi(\delta^*_{T(x)}(\cdot)) = T(x).$$

Seja $x^* \in T(x)$. Então, $x^* \in \Psi(\delta^*_{T(x)}(\cdot))$. Desse modo, $x^* \in \Psi(G_T(x, x + \cdot))$.

Assim, $\langle \cdot, x^* \rangle \leq G_T(x, x + \cdot)$. Fazendo $y = x + \cdot$, temos,

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq G_T(x, y), \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $x^* \in A^{G_T}(x)$. Portanto, $A^{G_T} = T$.

Similarmente,

$$\begin{aligned} G_{A^F}(x, x+\cdot) &= \sup_{x^* \in A^F(x)} \langle \cdot, x^* \rangle, \text{ de } 3.14 \\ &= \delta^*_{A^F(x)}(\cdot), \text{ de } 3.15 \\ &= \delta^*_{\Psi(F(x,x+\cdot))}, \text{ de } 3.11 \\ &= F(x, x+\cdot) \end{aligned}$$

Para verificar que $T \longmapsto G_T$ é uma bijeção, definimos

$$\begin{aligned} \omega : \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n) \\ T &\longmapsto \omega(T) = G_T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho : \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \\ F &\longmapsto \rho(F) = A^F \end{aligned}$$

é a inversa de ω dada. Mostraremos que se $\omega \circ \rho = Id_{\mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)}$ e $\rho \circ \omega = Id_{\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)}$ então ω é uma bijeção. De fato,

$$\omega(\rho(F)) = \omega(A^F) = G_{A^F} = F$$

e

$$\rho(\omega(T)) = \rho(G_T) = A^{G_T} = T$$

Das Proposições 3.1 e 3.2 e como provamos que ω é uma bijeção então a restrição ao conjunto $\mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n)$ também é bijeção. ■

A seguir, vemos um resultado que liga bifunção monótona maximal e bifunção monótona maximal pontual.

3.2.1 Monotonicidade Maximal de Bifunções

Nesta subseção, analisamos a ligação entre uma classe de operadores monótonos maximais e uma classe de bifunções monótonas maximais.

Definição 3.6. [[9], pág. 5] Uma bifunção monótona $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita ser uma **Bifunção Monótona Maximal(BMM)** se o operador A^F é **monótono maximal**.

Exemplo 3.12. Seja a função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $F(x, y) = f(y) - f(x)$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa. Como foi visto no Exemplo 3.3, F é monótona. A seguir, será verificado que esta bifunção também é monótona maximal. De fato, seja

$$\begin{aligned} A^F(x) &= \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y), \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \partial f(x) \end{aligned}$$

é o subdiferencial da f, que é monótono maximal. Logo, $A^F(x)$ é monótono maximal. Portanto, F é monótona maximal.

Nem toda bifunção monótona é monótona maximal. Veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 3.13. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = -x^2$. Como foi visto no exemplo 3.2, F é monótona. Vamos mostrar que F não é **BMM**. Para tanto vamos calcular o $A^F(x)$ e mostrar que ele não **OMM**. De fato, temos que

$$A^F(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : (y - x)x^* \leq -x^2, \forall\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Se $y \neq x$, para $y < x \Rightarrow y - x < 0$, temos

$$x^* \geq \frac{-x^2}{y - x}$$

Para $y > x \Rightarrow y - x > 0$, temos

$$x^* \leq \frac{-x^2}{y - x}$$

Assim, $x^* = \dfrac{-x^2}{y - x}$, para $y \neq x$. Além disso, para $y = x$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 \cdot x^* &\leq -x^2 \\ 0 &\leq -x^2, \end{aligned}$$

que vale somente se $x = 0$. Do contrário, $0 > x^2$, o que é um absurdo. Assim,

$$A^F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \emptyset, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que $A^F(x)$ não é monótono maximal. De fato, definimos

$$\tilde{A}^F(x) = \begin{cases} A^F(x), & \text{se } x = 0 \\ \{\emptyset, 0\}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Assim, $\tilde{A}^F(x) = 0$ é monótono. Logo, $A^F(x)$ não é monótono maximal. Portanto, F não é bifunção monótona maximal.

Também introduzimos outra definição, em uma classe mais restrita de bifunções:

Definição 3.7. [[9], pág. 5] Seja $F \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que F é uma **Bifunção Monótona Maximal Pontual(BMMP)** se F é **maximal pontual** em $\mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\forall H \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n), F \leq H \Rightarrow F = H$$

O teorema seguinte mostra a relação entre a monotonicidade maximal usual de uma bifunção e a monotonicidade maximal pontual.

Teorema 3.2. [[9], pág. 6] Seja $F \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$. Então F é uma **BMM** se, e somente se, F é uma **BMMP**.

Demonstração. Seja $F \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$ uma **BMM**. Suponha que $H \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $F \leq H$. E como $F \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$, temos

$$A^F(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y)\ \forall y \in \mathbb{R}^n\} \in \mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n) \text{ e}$$

$$A^H(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle y - x, x^* \rangle \leq H(x, y)\ \forall y \in \mathbb{R}^n\} \in \mathscr{O}_m(\mathbb{R}^n).$$

Da hipótese de que $F \leq H$, isso implica que para todo $x^* \in A^F(x)$, vale

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq F(x, y) \leq H(x, y)\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n.$$

O que implica $x^* \in A^H(x)$. Pela arbitrariedade de x, vale

$$A^F(x) \subseteq A^H(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Como A^F é um operador monótono maximal, $A^F = A^H$. Do Teorema 3.1, isto implica que

$$F = G_{A^F} = G_{A^H} = H.$$

Portanto, $F = H$ e F é **BMMP**.

Reciprocamente, seja $F \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$ uma **BMMP**. Seja T uma extensão monótona maximal de A^F. Então, $A^F(x) \subseteq T(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$G_{A^F}(x, y) = \sup_{x^* \in A^F(x)} \langle y - x, x^* \rangle \leq \sup_{x^* \in T(x)} \langle y - x, x^* \rangle = G_T(x, y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $G_{A^F} \leq G_T$. Como $F \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 3.1, $F = G_{A^F}$, logo, $F \leq G_T$. Como F é uma **BMMP** e T é monótono maximal, assim, G_T é monótono, logo $G_T \in \mathscr{B}_m(\mathbb{R}^n)$. Logo, $F = G_T$. Assim, $A^F = A^{G_T} = T$ pelo Teorema 3.1. Daí A^F é monótono maximal. Portanto, F é uma **BMM**.

∎

3.2.2 Transformada de Fitzpatrick

Nesta seção, vemos que a Transformada de Fitzpatrick é definida como a conjugada de uma bifunção e os principais resultados que ligam Transformada de Fitzpatrick de uma bifunção com a função Fitzpatrick dado um operador.

Definição 3.8. [[9], pág. 6] Dada qualquer bifunção F, sua **Transformada de Fitzpatrick** é definida como a função $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\Phi_F(x, x^*) = (-F(\cdot, x))^*(x^*) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + F(y, x)\}.$$

Exemplo 3.14. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = -x^2$, a sua Transformada de Fitzpatrick.

$$\begin{aligned}
\Phi_F(x, x^*) &= \sup_{y \in \mathbb{R}} \{yx^* + F(y, x)\} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}} \{yx^* - y^2\} \\
&= \max_{y \in \mathbb{R}} \{-y^2 + yx^*\} \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Seja $g(y) = -y^2 + yx^*$, derivando temos $g'(y) = -2y + x^* = 0$ implicando que $y = \dfrac{x^*}{2}$. Substituindo em 3.17, teremos

$$\begin{aligned}
\Phi_F(x, x^*) &= \max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ -\left(\frac{x^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^*}{2}\right) x^* \right\} \\
&= \frac{x^{*2}}{4}
\end{aligned}$$

Exemplo 3.15. Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $F(x, y) = \dfrac{1}{2}\|y - x\|^2$, a sua Transformada de Fitzpatrick.

$$\begin{aligned}
\Phi_F(x, x^*) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + F(y, x)\} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y, x^* \rangle + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \right\} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y, x^* \rangle + \frac{1}{2}(\langle x - y, x - y \rangle) \right\} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y, x^* \rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x, y \rangle + \frac{1}{2}\|y\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2}\|x\|^2 + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y, x^* - x \rangle + \frac{1}{2}\|y\|^2 \right\} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Como x^* e x são fixos e $y \in \mathbb{R}^n$, segue de 3.18 que

$$\Phi_F(x, x^*) \equiv +\infty.$$

Proposição 3.3. Se T é qualquer operador, então $\Phi_{G_T} = \varphi_T$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi_{G_T}(x, x^*) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + G_T(y, x)\} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + \sup_{y^* \in T(y)} \langle x - y, y^* \rangle\} \\
&= \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Graf(T)}} \{\langle y, x^* \rangle + \langle x - y, y^* \rangle\}
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.4. Se $F \in \mathscr{B}_s(\mathbb{R}^n)$, então $\Phi_F = \varphi_{A^F}$ já que $F = G_{A^F}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi_F(x, x^*) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + F(y, x)\}, \text{por hipótese } F = G_{A^F} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + G_{A^F}(y, x)\}, \text{por definição de } G_{A^F} \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle + \sup_{y^* \in A^F(y)} \langle x - y, y^* \rangle\}, \text{pela Proposição 3.3} \\
&= \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Graf}(A^F)} \{\langle y, x^* \rangle + \langle x - y, y^* \rangle\}, \text{ pelas propriedades de produto interno} \\
&= \sup_{(y,y^*) \in \mathrm{Graf}(A^F)} \{\langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle\}, \text{pela definição de Fitzpatrick} \\
&= \varphi_{A^F}(x, x^*)
\end{aligned}$$

■

Considerações Finais

Ter optado pelo $\mathbb{R}^n$, para o ambiente de trabalho, foi fundamental para a elaboração dos exemplos.

Determinamos a função Fitzpatrick de alguns operadores monótonos maximais a partir da definição, o que não são comumente encontrado na literatura. Bem como, apresentamos algumas provas de resultado teóricos importantes que não aparecem na literatura.

Observou-se que os operadores ponto-conjunto e a função Fitzpatrick foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria de bifunções monótonas maximais.

Destacamos a bijeção obtida entre a classe especial de bifunções monótonas e de operadores monótonos.

Referências Bibliográficas

[1] ALIZADEH, M.; HADJISAVVAS, N., *On the Fitzpatrick transform of a monotone bifunctions*. Optimization 62 (2013), 693-701.

[2] BARBU, V., *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. 4 a. ed. Springer Monographs in Mathematics: Springer, 2012.

[3] BEER, G., *Topologies on closed and closed convex sets, series mathematics and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1993.

[4] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[5] BREZIS, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial diferential equations*, Springer, 2010.

[6] BURACHIK, R. S.; IUSEM, A. N., *Set-valued mappings and enlargements of monotone operators*. Springer, 2008.

[7] BURACHIK, R. S.; SVAITER, B. F., *Maximal monotone operators, convex functions and a special family of enlargements*. Set-Valued Anal. 10 (2002), 297-316.

[8] FITZPATRICK, S., *Representing Monotone Operators by Convex Functions*. Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. 3 (1988), 59-65.

[9] HADJISAVVAS,N.; JACINTO, FLÁVIA M. O.; MARTÍNEZ-LEGAZ, JUAN E.. *Some Conditions for Maximal Monotonicity of Bifunctions*, Set-Valued Var. Anal 24, 323–332, 2016.

[10] HADJISAVVAS, N.; KHATIBZADEH, H., *Maximal monotonicity of bifunctions*. Optimization 59 (2010), 147-160.

[11] HIRIART-URRUTY, J.-B., LEMARÉCHAL, C., *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer, 2004.

[12] IUSEM, A. N., *Métodos de ponto proximal em Otimização*, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1995.

[13] Izmailov, A.; Solodov, M., *Otimização*. Vol.1, 3ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[14] Lima, E. L., *Curso de Análise*. Vol.2, 11ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[15] Lima, E. L., *Espaços métricos*. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[16] Lima, E. L., *Elementos de Topologia Geral*. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[17] Martínez-Legaz, JUAN. E., *Some Generalizations of Rockafellar's Surjectivity Theorem*. Pacific Journal of Otimization 4(2008), 527-535.

[18] Martínez-Legaz, J. E., Svaiter, B.F., *Monotone operators representable by l.s.c. convex functions*. Set-Valued Anal. 13 (2005), 21-46.

[19] Martínez-Legaz, J.-E., Théra, M., *A convex representation of maximal monotone operators*. Journal of Nonlinear and Convex Analysis 4 (2001), 243-247.

[20] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Press, 1972.

[21] Van Tiel, J., *Convex Analysis*. British Library, 1984.