

Universidade Federal do Amazonas  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Estabilização de Sistemas de Circuito Fechado

André Matos de Souza

Manaus – AM  
Fevereiro de 2020

Universidade Federal do Amazonas  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Estabilização de Sistemas de Circuito Fechado

por

André Matos de Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Julio César Rodríguez  
Orientador

Manaus – AM  
Fevereiro de 2020

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S729e Souza, André Matos de  
Estabilização de sistemas de circuito fechado / André Matos de Souza . 2020  
85 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Julio César Rodríguez  
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) -  
Universidade Federal do Amazonas.

1. Equações Diferenciais. 2. Estabilidade. 3. Sistemas de Controle. 4. Estabilização. 5. Sistemas de Circuito Fechado. I. Rodríguez, Julio César. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

# Estabilização de Sistemas de Circuito Fechado

por

**André Matos de Souza<sup>1</sup>**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito necessário para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração: Matemática**

**Aprovada em 18 de Fevereiro de 2020.**

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes – (Presidente)**  
**Universidade Federal de São Carlos - UFSCar**

---

**Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves – (Membro)**  
**Universidade Federal do Amazonas - UFAM**

---

**Prof. Dr. Moacir Aloísio Nascimento dos Santos – (Membro)**  
**Universidade Federal do Amazonas - UFAM**

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Dedico este trabalho à minha família por garantir um ambiente acolhedor e incentivador durante todas as dificuldades.*

# Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus em primeiro lugar, pelo dom da vida e por dar a todos a capacidade de continuar aprendendo.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante toda a duração do curso.

Ao professor Julio César Rodríguez por ter aceito me orientar em um tema que me era totalmente desconhecido e também por todo tempo e paciência despendidos nestes dois anos.

Aos amigos do curso de Pós-Graduação que sempre apoiaram, incentivaram e inspiraram nos vários momentos da caminhada.

Aos meus pais Marcos e Aurora, meus irmãos David, Marcos e Daniel e meus amigos, especialmente Pedro Cabral e Deborah Cristina, pelo carinho e compreensão em todos os momentos. Nestes anos as dificuldades e obstáculos se elevavam sempre, mas o amor de vocês sempre conseguia se elevar mais alto.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas, em especial à professora Flávia Morgana pela disponibilidade nos momentos cruciais, e também ao professor Raul Rabello e a todos os Petianos da Matemática pelo apoio contínuo.

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt."*

*"Indeed it is not knowledge, but the act of learning, not owning but acquiring, not being there but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment."*

— Carl Friedrich Gauss, 1808.

# Resumo

Neste trabalho damos uma introdução à teoria de estabilização de sistemas de controle, com foco para sistemas de circuito fechado, para tanto utilizamos ferramentas da teoria de equações diferenciais, em particular a teoria de estabilidade de equações diferenciais, e também usamos resultados de álgebra linear na forma dos teoremas sobre sistema de controle lineares assim como resultados clássicos de análise em  $\mathbb{R}^n$ . Os sistemas de controle são apresentados tanto em espaços  $\mathbb{R}^n$  como em variedades diferenciáveis, portanto a fundamentação teórica aborda conceitos e resultados destes dois ambientes, buscando basear os resultados finais do trabalho. As equações diferenciais e suas soluções são estudadas de forma rigorosa e a teoria de estabilidade de soluções traz os métodos mais conhecidos, como o Método de Lyapunov. Por se tratar de uma introdução, a ênfase está sobre os sistemas de controle lineares autônomos e os resultados obtidos para eles são, sempre que possível, aplicados aos casos mais gerais. Vários exemplos são apresentados ao longo do texto para auxiliar na compreensão dos assuntos. Também discutimos alguns fatos sobre a teoria de Lie, abordando grupos e álgebras de Lie e algumas das aplicações que os relacionam.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, Estabilidade, Sistemas de Controle, Estabilização, Sistemas de Circuito Fechado.



# Abstract

In this work we give an introduction to the theory of stabilization of control systems, focusing on closed-loop systems, with that intent we utilize tools of the theory of differential equations, in particular the theory of the stability of differential equations, and we also use results of linear algebra in the form of theorems about linear control systems as so as classical results of analysis in  $\mathbb{R}^n$ . The control systems are presented both in euclidean spaces and in smooth manifolds, therefore the theoretical foundation addresses concepts and results of these two ambients, in order to support the final results of the work. The differential equations and their solutions are studied rigorously and the theory of estability of solutions brings the most known methods, such as the Lyapunov method. Because it is an introduction, the emphasis is on the autonomous linear control systems and the results obtained for them are, whenever possible, applied to the most general cases. Many examples are presented throughout the text to assist in understanding the subjects. We also discuss some facts about the Lie theory, adressing Lie groups and Lie algebras and some of the maps that relate them.

**Key words:** Differential Equations, Stability, Control Systems, Stabilization, Closed-Loop Control Systems

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	15
<b>2 Sistemas de Controle</b>	<b>28</b>
2.1 Sistemas de Controle em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	28
2.2 Sistemas de Controle em Variedades . . . . .	33
<b>3 Estabilidade</b>	<b>37</b>
3.1 Equações Diferenciais Gerais: O Método de Lyapunov . . . . .	37
3.2 Equações Diferenciais Lineares: Métodos Matriciais . . . . .	44
<b>4 Estabilização</b>	<b>55</b>
4.1 Estabilização em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	55
4.1.1 Estabilização de Sistemas de Controle Linear . . . . .	55
4.1.2 Estabilização de Sistemas Não-Lineares . . . . .	68
4.2 Estabilização em Variedades . . . . .	69
<b>5 Apêndice A: Grupos e Álgebras de Lie</b>	<b>73</b>
5.1 Grupos e Álgebras de Lie . . . . .	73
5.2 Representações Adjuntas . . . . .	81
<b>Referências</b>	<b>84</b>

# Lista de Figuras

1	Sistema com realimentação . . . . .	13
3.1	Atrator de Lorenz . . . . .	39
4.1	Equilíbrio de um bastão . . . . .	58

# Introdução

A Teoria de Controle é uma área da Matemática que utiliza funções, chamadas controles, para manipular sistemas dinâmicos. Os objetivos incluem desenvolver um modelo para controlar tais sistemas de maneira ótima, sem atrasos ou sobrecargas, ou garantir que as soluções do sistema sejam estáveis. Outros aspectos estudados são controlabilidade, o ato de determinar o comportamento das soluções do sistema, e observabilidade, que consiste em determinar o comportamento das soluções a partir da saída do sistema. Nesta teoria está baseado o avanço dos tipos de automação que revolucionaram a manufatura, aviação, comunicações e outras indústrias.

Apesar de sistemas de controles de vários tipos serem conhecidos desde a antiguidade, uma análise mais formal da área começou no século XIX com a análise dinâmica do governador centrífugo por James Clerk Maxwell em 1868, no trabalho de título "On Governors"[15]. A base teórica para a operação de Governadores e Moderadores, mecanismos que analisam a perturbação de um sistema, é então descrita pela primeira vez. A Teoria de Controle foi desenvolvida inicialmente por Edward John Routh em 1874 [16] e Adolf Hurwitz em 1895 [8], estes contribuíram para o estabelecimento de critérios de estabilidade, em especial o matemático e físico russo Aleksandr Lyapunov em 1892 [14]. Apesar de a maior aplicação de Teoria de Controle ser em engenharia de sistemas de controle, que lida com o desenvolvimento de processos de sistemas de controles para indústrias, outras aplicações vão muito além disso, sendo uma das mais famosas na atualidade a estabilização de câmeras, aparelhos de gravação digital e também o controle de aeronaves não-tripuladas como drones.

Neste trabalho damos atenção à propriedade de estabilização de sistemas de controle, em particular aos sistemas dados por equações diferenciais. Estas equações diferenciais determinam um sistema dinâmico que é influenciado por uma função de controle com certas propriedades desejadas. A formulação matemática geral é dada por

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = h(x(t)). \end{cases} \quad (1)$$

onde  $x(t)$  representa o estado do sistema,  $y(t) = h(x(t))$  representa a saída do sistema e  $f(t, x(t), u(t))$  representa a dinâmica, o comportamento, do sistema. Queremos usar uma estratégia comum nessa área de estudo que é a de realimentação, onde o controle é determinado por dados referentes aos estados ou a saída do sistema, como representa a Figura 1.

Quando utilizamos a realimentação de estados temos  $u(t) = g(x(t))$  e quando utilizamos a realimentação de saída temos  $u(t) = g(y(t))$ , este tipo de sistema é denominado sistema de circuito fechado, será através deste tipo de sistema que iremos obter resultados sobre estabilização de sistemas de controle.

No Capítulo 1 enunciamos os resultados principais da teoria de equações diferenciais ordinárias (EDO's) que serão usados no decorrer do trabalho, abordando os

teoremas que garantem a existência de soluções para EDO's e alguns casos particulares. Introduzimos também o conceito de Variedades Diferenciáveis e estudamos como se comportam os campos de vetores definidos neste ambiente. As referências principais são [4] [6] [11].

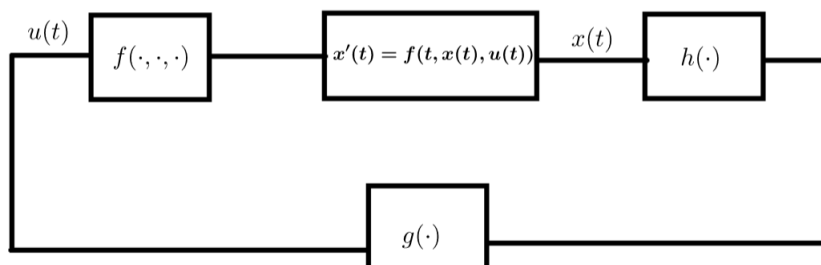


Figura 1: Sistema com realimentação

No Capítulo 2 apresentamos a teoria de controle, definimos os objetos principais de estudo, que são os sistemas de controle, abordamos as principais propriedades destes sistemas, como controlabilidade e observabilidade, assim como as condições para que um dado sistema de controle apresente estas propriedades. Apresentamos também os sistemas de controle em variedades e vemos como se apresenta a propriedade de controlabilidade nesse ambiente. As referências principais são [1] [9].

No Capítulo 3 abordamos a teoria de estabilidade para sistemas de EDO's, tanto lineares quanto não lineares, apresentando através de exemplos e teoremas as condições para que os pontos de equilíbrio de um sistema sejam estáveis, lançando assim as bases para o estudo da Estabilização. As referências principais são [4] [1].

No Capítulo 4 iniciamos o estudo da teoria de estabilização de sistemas de controle que consiste principalmente em manipular a dinâmica de um sistema de EDO's para garantir, quando possível, a estabilidade de um ponto de equilíbrio. As técnicas principais são a de controle por realimentação de estados e a por realimentação de saída. O caso não-linear é tratado brevemente, assim como o caso em variedades. As referências usadas são [4] [3] [9].

No Apêndice A tratamos da teoria de Lie, tratamos dos grupos de Lie, que são um tipo particular de variedade, e das álgebras de Lie que estão intimamente relacionadas com os primeiros. Também são apresentadas aplicações importantes como a aplicação exponencial e as representações adjuntas. Apesar de não ser estritamente necessário para o trabalho este apêndice traz vários resultados ligados a alguns dos resultados abordados no texto principal, principalmente quando falamos de campos de vetores em variedades.

# Índice de Notações

$I$	Subconjunto fechado dos números reais;
$Im(f)$	Conjunto dos pontos atingidos pela função $f : X \rightarrow Y$ , i.e., $Im(f) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$ ;
$Graf(f)$	Gráfico da função $f : X \rightarrow Y$ , i.e., $Graf(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ ;
$M(m \times n, \mathbb{R})$	Conjunto das matrizes com $m$ linhas e $n$ colunas com entradas reais;
$rank A$	posto da matriz $A$ , é a quantidade de linhas ou vetores linearmente independentes;
$B[x_0, b]$	Conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão a uma distância $b > 0$ de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;
$\mathcal{F}(X, Y)$	Conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$ ;
$C(X; Y)$	Conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$ que são contínuas;
$C^k(X; Y)$	Conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$ que possuem derivadas até ordem $k$ e a derivada de ordem $k$ , $f^{(k)}$ , é contínua;
$C^\infty(X; Y)$	Conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$ que possuem derivadas até ordem $k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ , são chamadas funções suaves;
$L^p(X) \ 1 \leq p < \infty$	Conjunto das aplicações $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\left( \int_X f(x)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde  $\mu$  é uma medida definida nos conjuntos mensuráveis de  $X$ ;

$L^\infty(X)$  Conjunto das aplicações  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem

$$\inf \{ \sup \{|f(x)| : x \in N\} \mid N \in \mathbb{X}, \mu(N) = 0 \} < \infty,$$

onde  $\mathbb{X}$  é a coleção dos conjuntos mensuráveis de  $X$ ;

$f(x) = O(g(x))$  Notação que diz como a aplicação  $f$  se comporta. Sendo  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  ambas definidas em conjuntos ilimitados, dizemos que  $f(x) = O(g(x))$  se e somente se existem  $M > 0$  e  $r > 0$  tais que  $|f(x)| \leq Mg(x)$  para todo  $|x| \geq r$ .

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo introduzimos o conceito de sistemas de EDO's que estarão presentes em todo o trabalho. Na primeira seção damos uma visão geral sobre equações diferenciais e suas soluções, e exemplificamos através de casos particulares. Na segunda seção definimos um ambiente mais geral de estudo, que são as variedades diferenciáveis, e estendemos alguns conceitos da primeira seção para este ambiente.

### 1.1 Equações Diferencias Ordinárias

Iniciamos dando uma definição, aparentemente particular, de equação diferencial.

**Definição 1.1.1.** Dada uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , dizemos que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

é uma *equação diferencial ordinária em  $\mathbb{R}^n$*  definida pela aplicação  $f$ . Uma solução dessa equação é um caminho  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  de forma que  $\text{Graf}(x) = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : v = x(t)\} \subset U$  e também seja válida a igualdade (1.1). A solução é chamada uma trajetória de  $f$  ou também curva integral da equação.

Este tipo de equação é dito uma equação diferencial não linear de 1ª ordem, pois temos apenas a primeira derivada da função  $x$ , porém em casos com mais derivadas podemos recair na equação (1.1) com uma simples renomeação de variáveis. Note também que a equação (1.1) representa uma igualdade vetorial, logo ela equivale a um sistema de  $n$  equações. A aplicação  $f$  será chamada a dinâmica da equação diferencial ordinária.

Vamos trabalhar principalmente com equações diferenciais autônomas, onde a variável  $t$  não aparece explicitamente. Note que qualquer EDO pode se tornar autônoma se considerarmos a variável  $\bar{x} = (t, x) \in U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , este tratamento pode trazer desvantagens para alguns estudos, porém não será o nosso caso.

**Definição 1.1.2.** Dado  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$ , dizemos que  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma *solução da equação autônoma*

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x = x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

quando  $\varphi$  é diferenciável em  $I$  e satisfaz:

- i)  $\text{Graf}(\varphi) = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n : x = \varphi(t)\} \subset I \times U$ , e

$$\text{ii) } \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)), \quad \forall t \in I.$$

Vejam agora alguns resultados necessários para que possamos estudar as soluções da EDO (1.2)

**Definição 1.1.3.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  aberto, uma aplicação  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é denominada *Lipschitziana em  $D$*  quando existe uma constante  $L > 0$  tal que

$$\forall x, y \in D, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

**Definição 1.1.4.** Seja  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x)$  uma aplicação. dizemos que  $f$  é *Lipschitziana em  $U$  com respeito à segunda variável*, se existe  $L > 0$  tal que

$$\forall (t, x), (t, y) \in U, \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L|x - y|$$

A constante  $L$  que aparece tanto na Definição 1.1.3 e 1.1.4 é denominada constante de Lipschitz de  $f$ . Temos assim dois resultados, dependendo das propriedades da dinâmica  $f$ . As demonstrações destes resultados estão nas respectivas referências dadas.

**Teorema 1.1.5.** ([4] *Cauchy-Peano*) Sejam  $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua no aberto  $U$ ,  $(t_0, x_0) \in U$  e  $a > 0, b > 0$  tais que  $R_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times B[x_0, b] \subset U$ . Então existe uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

definida no intervalo fechado  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , onde  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ , com  $M > 0$  uma cota superior qualquer de  $|f(t, x(t))|$ , com  $(t, x) \in R_{a,b}$ .

**Demonstração:** Para a prova veja [4] página 387. ■

**Teorema 1.1.6.** ([4] *Picard-Lindelöf*) Sejam  $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua,  $(t_0, x_0) \in U$  e  $a > 0, b > 0$  tais que  $R_{a,b} \subset U$ . Se  $f$  é lipschitz contínua em  $R_{a,b}$  então existe uma única solução do problema (1.3) definida no intervalo  $I$  tal que  $t_0 \in I \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ,  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ , em que  $M > 0$  é uma cota superior de  $|f(t, x)|$  com  $(t, x) \in R_{a,b}$ .

**Demonstração:** Para a prova veja [4] página 385. ■

Estes teoremas garantem que para cada  $(t_0, x_0)$  no domínio da  $f$  existem um caminho  $x : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um intervalo, que denotaremos  $I(x) \subseteq \mathbb{R}$ , tal que a aplicação  $x$  restrita a este intervalo é uma solução do PVI (1.3).

Podemos então definir a solução do PVI (1.3) como a aplicação

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds,$$

mas é claro que cada Problema pode ter um método de resolução diferente ou até mesmo não possuir uma forma explícita, como é o caso do exemplo a seguir.



**Exemplo 1.1.7.** Consideramos agora o modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra, que busca modelar a interação entre duas espécies, sendo uma a presa da outra. Representando a quantidade de presas no tempo  $t$  por  $x(t)$  e a quantidade de predadores no tempo  $t$  por  $y(t)$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) &= y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  são constantes que mostram a influência que as interações têm nas duas populações. É possível obter uma solução implícita de maneira simples, ao utilizar o sistema para encontrar o quociente  $\frac{dy}{dx}$ . A não linearidade do sistema se apresenta nos termos em que ocorrem o produto entre  $x(t)$  e  $y(t)$ .

Com estes resultados podemos garantir a existência de um grande número de EDO's e também sabemos o formato das soluções. Vejamos agora definições e resultados que nos ajudam a entender o comportamento destas soluções

**Definição 1.1.8.** Dada  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$  no aberto  $D$ , seja  $x : I(x) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma solução do PVI (1.3), então definimos o *fluxo* do campo  $f$  como a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, x) \end{aligned}$$

que satisfaz a equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(\varphi(t, x)), \forall (t, x) \in U,$$

onde  $U = I(x) \times D$

Vejamos algumas propriedades do fluxo

**Proposição 1.1.9.** ([4]) O fluxo  $\varphi : U = I(x) \times D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de um campo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  satisfaz as propriedades

a)  $\varphi$  é uma aplicação  $C^1$  que satisfaz a equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(\varphi(t, x)), \forall (t, x) \in U;$$

b) Fixado  $t \in I(x)$  a aplicação  $\varphi_t = \varphi|_D : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  de  $D$  sobre si mesmo;

c) Dados  $t, s \in \mathbb{R}$  tais que  $t, t + s \in I(x)$  o fluxo satisfaz a chamada propriedade de grupo

$$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x));$$

d) Fixado  $t \in I(x)$  temos

$$\varphi(-t, x) = \varphi^{-1}(t, x),$$

onde  $\varphi^{-1}$  denota a aplicação inversa de  $\varphi$ .

**Demonstração:** Para a prova veja [4] página 158. ■

Uma ferramenta que usamos para entender o comportamento das soluções são as órbitas

**Definição 1.1.10.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ ,  $x(t)$  a solução do PVI (1.3) e  $\varphi(t, x)$  o fluxo associado, dizemos que a *órbita de  $x(t)$*  é o conjunto

$$O_x = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } v = x(t) = \varphi(t, x) \in \mathbb{R}^n; \}$$

**Observação 1.1.11.** Note que, dado um PVI com  $x_0$  como condição inicial, temos que uma solução maximal é um caminho diferenciável, denominado trajetória de  $f$  por  $x_0$ , e a imagem deste caminho, isto é seu gráfico, será o que denominamos órbita.

Um último resultado sobre fluxos é o seguinte

**Definição 1.1.12.** Dados os campos  $f_i : D_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$  e  $\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x)$  os fluxos associados, dizemos que os campos  $f_1, f_2$  (ou os fluxos  $\varphi_1, \varphi_2$ ) são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo  $h : D_1 \rightarrow D_2$  tal que  $\varphi_2(t, h(x)) = h(\varphi_1(t, x))$ .

No caso em que  $h$  é um difeomorfismo, dizemos que  $f_1, f_2$  (ou os fluxos  $\varphi_1, \varphi_2$ ) são *diferenciavelmente conjugados*. Caso o resultado seja válido apenas nas vizinhanças  $U_1 \subset D_1$ ,  $U_2 \subset D_2$ , dos pontos  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente, dizemos que  $h : U_1 \rightarrow U_2$  é uma conjugação local e os campos (ou fluxos) são *localmente conjugados nos pontos  $x_1$  e  $x_2$* .

A importância desta definição fica clara quando estudamos determinados pontos de uma dinâmica não linear. De modo geral temos a definição:

**Definição 1.1.13.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função continuamente diferenciável no aberto  $D$ , considere a EDO  $x'(t) = f(x(t))$  então

- i)  $p \in D$  é dito um *ponto regular* de  $f$  se  $f(p) \neq 0$
- ii)  $p \in D$  é dito um *ponto crítico* de  $f$  se  $f(p) = 0$

Os dois próximos resultados nos dizem o comportamento da dinâmica numa vizinhança de qualquer ponto em que a dinâmica está definida.

**Definição 1.1.14.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$ , e seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  o campo constante, dizemos que o ponto  $x_0 \in D$  tem a *propriedade do fluxo tubular* se existem uma vizinhança  $U \subset D$  de  $x_0$ , um aberto  $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , uma constante  $r > 0$  e um difeomorfismo  $g : U \rightarrow (-r, r) \times W$  que conjugua localmente o fluxo  $\varphi$  de  $f$  e o fluxo  $\tau$  de  $T$ , isto é, para todo  $x \in g^{-1}(\{0\} \times W)$  e  $|t| < r$  tem-se

$$\tau(t, g(x)) = g(\varphi(t, x))$$

A vizinhança  $U$  da definição acima é chamada Vizinhança Tubular.

**Teorema 1.1.15.** ([4]) *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^1$  no aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $x_0 \in D$  é um ponto regular, então  $x_0$  tem a propriedade do fluxo tubular.*

**Demonstração :** Para a prova veja [4] página 174. ■

**Teorema 1.1.16.** ([4]) *Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$  e  $x_0 \in D$  um ponto de equilíbrio de  $f$ . Se todos os autovalores da matriz da aplicação  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  possuem parte real não-nula, então  $f$  em  $x_0$  é localmente topologicamente conjugado ao campo linear  $Df(x_0)$  em 0.*

**Demonstração:** Para a prova veja [4] página 231. ■

Desta forma podemos, ao menos teoricamente, estudar o comportamento local das soluções de qualquer EDO. Estes resultados serão usados exaustivamente nos próximos capítulos. Vamos agora estudar alguns casos particulares para a dinâmica  $f$ .

Para estudar estes casos particulares precisamos de algumas definições e resultados clássicos de Álgebra Linear.

**Definição 1.1.17.** Seja a matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$ . A matriz definida pela série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

é denominada *exponencial da matriz A* e é denotada por  $e^A \in M(n, \mathbb{R})$ .

Note que esta série sempre converge, como pode ser inferido da desigualdade

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$$

Esta desigualdade mostra que a série que define a matriz exponencial converge pelo critério da comparação. A definição de exponencial de matrizes nos traz algumas propriedades.

**Lema 1.1.18.** *Sejam  $A, B, M, \mathbf{O}, In \in M(n, \mathbb{R})$ , onde  $\mathbf{O}$  é a matriz identicamente nula,  $In$  é a matriz identidade de ordem  $n$  e  $M$  é uma matriz invertível qualquer, i.e.  $\det(M) \neq 0$ . As seguintes propriedades da exponencial de matrizes são válidas:*

- a)  $e^{\mathbf{O}} = In$  ;
- b)  $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$ ;
- c)  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ ;
- d)  $e^{MAM^{-1}} = M e^A M^{-1}$  ;
- e)  $A e^A = e^A A$

**Demonstração:** A prova segue diretamente da aplicação da definição de exponencial de matrizes. ■

Enunciamos agora dois famosos resultados de Álgebra Linear que serão úteis.

**Lema 1.1.19.** *([6]) Dada uma matriz  $A \in M(n, \mathbb{C})$ , existem matrizes  $M \in M(n, \mathbb{C})$  e  $J_1, \dots, J_p$  que satisfazem:*

$$\begin{aligned} A &= M J M^{-1} \\ J &= \text{diag}(J_1, \dots, J_p) \\ J_i &= \lambda_i In_i + N_i, \quad 1 \leq i \leq p, \end{aligned}$$

onde  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  são os autovalores de  $A$ ,  $n_1 + \dots + n_p = n$ ,

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq p \quad e \quad \text{diag}(J_1, \dots, J_p) := \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}.$$

**Demonstração:** Para a prova veja [6] página 301. ■

Dada uma matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$  definimos o polinômio  $p_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dito o polinômio característico de  $A$ , pela equação

$$p_A(r) = \det(rIn - A) = r^n + \alpha_{n-1}r^{n-1} + \cdots + \alpha_2r^2 + \alpha_1r + \alpha_0$$

onde  $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  representa a função determinante e  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Podemos então enunciar o Teorema de Cayley-Hamilton.

**Teorema 1.1.20.** ([2]) *Seja  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , vale que  $A$  é um zero do operador  $P_A : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  associado ao polinômio característico  $p_A$ , ou seja,*

$$P_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_2A^2 + \alpha_1A + \alpha_0In = \mathbf{O}.$$

**Demonstração:** Para a prova veja [2] página 341. ■

A seguir temos um resultado que nos ajudará a estimar o valor da norma da exponencial de uma matriz.

**Teorema 1.1.21.** *Seja  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  definido por*

$$\gamma := \max\{ \operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \text{ é autovalor de } A \}.$$

Para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists c = c(\varepsilon, A) > 0$  tal que

$$\|e^{tA}\| \leq ce^{(\gamma+\varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Demonstração :** Utilizando a forma canônica de Jordan temos:  $A = MJM^{-1}$ , onde  $M$  e  $J$  são como no Lema 1.1.19, portanto do item d) do Lema 1.1.18 temos

$$e^{tA} = e^{tMJM^{-1}} = Me^{tJ}M^{-1}$$

Como para quaisquer matrizes  $A, B \in M(n; \mathbb{C})$  vale  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ , segue que

$$\|e^{tA}\| = \|Me^{tJ}M^{-1}\| \leq \|M\|\|e^{tJ}\|\|M^{-1}\| = C_1\|e^{tJ}\|, \quad (1.4)$$

onde  $C_1 = \|M\|\|M^{-1}\|$ . Aproveitaremos a estrutura de  $J$  para realizar este cálculo. Como a matriz  $J$  é diagonal por blocos temos

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \cdots + \tilde{J}_p,$$

logo podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t \operatorname{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \operatorname{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \operatorname{diag}(J_1^n, J_2^n, \dots, J_p^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\tilde{J}_1^n + \tilde{J}_2^n + \cdots + \tilde{J}_p^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tilde{J}_1^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tilde{J}_2^n + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tilde{J}_p^n \\ &= e^{t\tilde{J}_1} + e^{t\tilde{J}_2} + \cdots + e^{t\tilde{J}_p} = \sum_{i=1}^p e^{t\tilde{J}_i}. \end{aligned}$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$  temos  $J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$  e  $I_{n_i} N_i = N_i = N_i I_{n_i}$ , donde  $e^{t(J_i)} = e^{t(\lambda_i I_{n_i} + N_i)} = e^{t\lambda_i I_{n_i}} e^{tN_i}$ . Tomando a norma de  $e^{tJ_i}$  temos

$$\|e^{tJ_i}\| = \|e^{t\lambda_i I_{n_i}} e^{tN_i}\| \leq \|e^{t\lambda_i I_{n_i}}\| \|e^{tN_i}\|,$$

tomando esta norma matricial como a norma do supremo, definida por

$$\forall A \in M(n; \mathbb{C}), \quad \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Para  $t \geq 0$  segue

$$\begin{aligned} \|e^{t\lambda_i I_{n_i}}\| &= \sup_{\|x\|=1} \|e^{t\lambda_i I_{n_i}} x\| = \sup_{\|x\|=1} \|e^{t\lambda_i} I_{n_i} x\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|e^{t\lambda_i} x\| \leq \sup_{\|x\|=1} |e^{t\lambda_i}| \|x\| = |e^{t\lambda_i}| = e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como as matrizes  $N_i$  são nilpotentes, temos que existem  $a_i \in \mathbb{N}$  tais que  $N_i^{a_i} = \mathbf{O}$ , assim temos, para  $t \geq 0$ ,

$$\|e^{tN_i}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N_i^n \right\| = \left\| \sum_{n=0}^{a_i} \frac{t^n}{n!} N_i^n \right\| \leq \left\| \sum_{n=0}^{a_i} \frac{t^n}{n!} N_i^n \right\|$$

assim  $\|e^{tN_i}\|$  é uma expressão polinomial em  $t$  e podemos limitar seu crescimento pela aplicação exponencial, isto é, existem  $k_i = ki(N_i) > 0$  e  $\varepsilon_i > 0$  tais que

$$\|e^{tN_i}\| = k_i e^{\varepsilon_i t}.$$

Temos então

$$\|e^{tJ_i}\| = \|e^{t(\lambda_i I_{n_i} + N_i)}\| \leq \|e^{t\lambda_i I_{n_i}}\| \|e^{tN_i}\| \leq (e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)})(k_i e^{\varepsilon_i t}) = k_i e^{t(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \varepsilon_i)}$$

Tomando  $\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq p} \{\varepsilon_i\}$ ,  $k = \max_{1 \leq i \leq p} \{k_i\}$  estas desigualdades podem ser reescritas como

$$\|e^{tJ}\| = \left\| \sum_{i=1}^p e^{tJ_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^p \|e^{tJ_i}\| \leq \sum_{i=1}^p k_i e^{t(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \varepsilon_i)} \leq \sum_{i=1}^p k e^{t(\gamma + \varepsilon)}$$

Substituindo de volta na Equação (1.4) temos

$$\|e^{tA}\| \leq C_1 \|e^{tJ}\| \leq C_1 k e^{t(\gamma + \varepsilon)} = c e^{t(\gamma + \varepsilon)}.$$

■

Analisaremos agora os casos particulares da dinâmica e como se obtêm soluções nesses casos, iniciando pelo caso de equações diferenciais ordinárias lineares autônomas com coeficientes constantes, que são da forma

$$x'(t) = Ax(t), \quad A \in M(n, \mathbb{R}) \quad (1.5)$$

A caracterização das soluções deste tipo de sistema é dada pelo próximo teorema.

**Teorema 1.1.22.** ([4]) *O problema de valor inicial*

$$x'(t) = Ax(t) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

onde  $A \in M(n, \mathbb{R})$  possui uma única solução dada pela aplicação

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(t) = e^{tA}x_0$$

**Demonstração:** Para a prova veja [4] página 383. ■

Uma consequência importante do Teorema 1.1.22 é a seguinte.

**Corolário 1.1.23.** *As colunas da matriz  $X(t) := e^{tA}$  geram  $n$  soluções linearmente independentes para o sistema de equações diferenciais (1.6).*

**Definição 1.1.24.** Seja  $t_0 \in \mathbb{R}$  fixo. A função Matricial

$$\begin{aligned} \Phi_A(\cdot, t_0) : \mathbb{R} &\rightarrow M(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \Phi_A(t, t_0) := e^{(t-t_0)A} \end{aligned}$$

é denominada *matriz de transição* do sistema, ela descreve a transição do estado  $x_0$  no tempo  $t_0$  para o estado  $x(t)$  no tempo  $t$ .

Note que agora podemos denotar a solução de (1.6), com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , pela aplicação  $x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0$ , de fato temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_A(t, t_0)x_0 &= \frac{d}{dt}e^{(t-t_0)A}x_0 = \frac{d}{dt}(t-t_0)A \cdot e^{(t-t_0)A}x_0 = Ae^{(t-t_0)A}x_0 = A\Phi_A(t, t_0)x_0 \\ \Phi_A(t_0, t_0)x_0 &= e^{(t_0-t_0)A}x_0 = e^{0A}x_0 = x_0 \end{aligned}$$

Isto mostra uma propriedade importante de EDO's autônomas que é a possibilidade de "transladar" as soluções no tempo, portanto sempre que estamos nesse caso podemos considerar  $t_0 = 0$ .

**Observação 1.1.25.** Podemos ver também que a aplicação  $\Phi_A(t, t_0)x_0$  faz o papel do fluxo da EDO linear, portanto dados dois sistemas lineares  $x'(t) = Ax(t)$  e  $y'(t) = By(t)$ ,  $A, B \in M(n, \mathbb{R})$  temos que os fluxos  $\Phi_A(t, t_0)$  e  $\Phi_B(t, t_0)$  são conjugados se existe  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\Phi_B(t, h(x)) = h(\Phi_A(t, x))$ . Este resultado implica que para sistemas conjugados, as trajetórias apresentam o mesmo comportamento.

Temos ainda de [19] página 71 que no caso em que  $h(x) = Cx$ ,  $C \in M(n, \mathbb{R})$ , então vale  $CA = BC$ , isto é, as matrizes  $A$  e  $B$  são similares. Logo sistemas cujas matrizes são similares apresentam trajetórias com o mesmo comportamento.

Dada a função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos ter equações diferenciais de ordem superior, isto é, da forma

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Esse tipo de equação pode ser resolvido da maneira que está, através de técnicas apropriadas, mas também podemos reescrevê-la como um sistema de EDO's com o seguinte método.

Defina  $x_1(t) = x(t)$  e  $x_2 = x'(t)$ , temos então a aplicação  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  e obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \equiv \dot{x}(t) = Ax(t).$$

De modo geral, suprimindo a dependência em  $t$ , temos a equivalência

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \equiv \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Este método também pode ser usado para equações não lineares.

**Exemplo 1.1.26.** *Considere a EDO*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

*Esta equação é equivalente ao sistema*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

*Após alguns cálculos pode-se verificar que  $A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} I_2$  e  $A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A$  e portanto*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j} A^{2j}}{2j!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k+1}}{2k+1!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{2j} t^{2j} I_2}{2j!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1} A}{2k+1!} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{2j} t^{2j}}{2j!} & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{2j} t^{2j}}{2j!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{2j} t^{2j}}{2j!} & \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{2j} t^{2j}}{2j!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Logo temos como solução do PVI (1.6), com  $x_0 = (s_0, v_0)$ , a aplicação  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,*

$$x(t) = \left( s_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t), -s_0 \omega \text{sen}(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) \right)$$

*Podemos também definir a constante  $\alpha = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$  e com algumas manipulações podemos escrever*

$$x(t) = (\alpha \cos(\omega t - \theta), -\alpha \omega \text{sen}(\omega t - \theta))$$

*onde  $\theta \in [0, 2\pi]$  satisfaz  $\cos(\theta) = \frac{s_0}{\alpha}$ ,  $\text{sen}(\theta) = \frac{v_0}{\alpha \omega}$ . Esta equação é bem conhecida na física e representa o movimento de uma partícula cujo movimento é periódico, a constante  $\omega^2$  é tomada assim na literatura clássica para simplificar as notações da solução. Dois exemplos de processos modelados por esta equação são o Sistema Massa-Mola, que é um sistema composto por um bloco de massa  $m$  e uma mola de constante  $k$  e temos  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , outro exemplo é o caso da simplificação do sistema composto por um bloco e um pêndulo simples de comprimento  $l$  temos  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  onde  $g$  é a magnitude da força da gravidade e  $l$  é o comprimento do pêndulo, sendo esta equação válida apenas para amplitudes do pêndulo menores do que ou iguais a dez graus.*

Estudaremos agora sistemas lineares não autônomos homogêneos, estes sistemas tem a forma

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad A \in \mathcal{F}([0, 1], M(n, \mathbb{R})). \quad (1.7)$$

**Teorema 1.1.27.** ([4]) *Seja  $A \in C([t_0, t_1], M(n, \mathbb{R}))$ , então para  $s \in [t_0, t_1]$  o problema de valor inicial*

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad , \quad x(s) = x_0$$

*possui uma única solução.*

**Demonstração:** Para a prova veja [4] página 382. ■

Este tipo de equação, ao contrário do caso anterior, não possui uma forma fechada para as suas soluções, porém uma propriedade interessante das soluções é a seguinte.

**Teorema 1.1.28.** *Seja  $A \in C([t_0, t_1], M(n, \mathbb{R}))$ . Então o conjunto das soluções do sistema (1.7) é um subespaço  $n$ -dimensional de  $C^1([t_0, t_1], M(n, \mathbb{R}))$ .*

**Demonstração:** Sejam  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  soluções de (1.7) com  $A \in C([t_0, t_1], M(n, \mathbb{R}))$ . É claro que o caminho  $x(t) \equiv 0$  é uma solução. Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$(x_1(t) + \lambda x_2(t))' = (x_1(t))' + \lambda(x_2(t))' = Ax_1(t) + \lambda Ax_2(t) = A(x_1(t) + \lambda x_2(t)),$$

o que prova que o conjunto de soluções é um subespaço.

Para verificar a dimensão deste espaço, podemos tomar  $n$  problemas  $x'_i(t) = Ax_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$  com as  $n$  condições iniciais  $x_i(0) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . Segue da continuidade das soluções e da continuidade do produto interno que as  $n$  soluções  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  são ortogonais duas a duas, logo formam um conjunto l.i. no espaço das soluções. Se tivéssemos  $n+1$  soluções, então o conjunto  $\{x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0), x_{n+1}(0)\}$  seria l.d. em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, existiriam constantes  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ , não todas nulas tais que  $\lambda_1 x_1(0) + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}(0) = 0$ . Tomando a aplicação  $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i(t) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  vemos que esta é solução do PVI  $x(t) = Ax(t)$ ,  $x(0) = 0$ . Por outro lado vemos que a aplicação  $x(t) \equiv 0$  também é solução deste problema e sabemos do Teorema 1.1.27 que a solução deste problema é única, portanto  $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i(t) = 0$  e o conjunto  $\{x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)\}$  é l.d. em  $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ . Isto prova que o espaço solução tem dimensão  $n$ . ■

**Observação 1.1.29.** O fato usado na prova do Teorema 1.1.28 de que a solução identicamente nula é a única solução do PVI  $x'(t) = A(t)x(t)$ ,  $x(t_0) = 0$ , também é válido para o caso da EDO linear homogênea e autônoma  $x'(t) = Ax(t)$ , este fato é muito usado para mostrar unicidade de soluções em problemas que envolvam equações diferenciais.

**Definição 1.1.30.** Seja  $A \in C([t_0, t_1], M(n, \mathbb{R}))$ . Denominamos *sistema fundamental* toda base  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\} \subset C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  para o espaço de soluções do sistema (1.7).

A matriz correspondente

$$X(t) := (x^1(t) \mid x^2(t) \mid \dots \mid x^n(t)), \quad t \in [t_0, t_1]$$

é denominada matriz fundamental



Note que isto generaliza o que ocorre no caso autônomo, pode-se também verificar que a equação a seguir é satisfeita

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (1.8)$$

donde segue que  $\det X(t) \neq 0, \forall t \in [t_1, t_2]$ , pois suas colunas são l.i.. Podemos então fazer a conexão com o problema

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(s) = x_0$$

, e verificar que a única solução deste problema é dada pela aplicação

$$x(t) = X(t)X(s)^{-1}x_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Mas além de tudo isso temos que duas matrizes fundamentais devem diferir por uma constante não nula, pois a solução da equação deve ser única e não pode depender da matriz  $X$  (isto é, da base do espaço de soluções) escolhida. Assim, se temos matrizes fundamentais  $X(t), Y(t)$  do sistema (1.7), então existe uma matriz invertível, constante  $C$  satisfazendo  $Y(t) = X(t) \cdot C$ . Podemos assim estender o conceito de matriz de transição para sistemas não autônomos.

**Definição 1.1.31.** Seja  $X$  uma matriz fundamental para (1.7). A função matricial definida pela aplicação  $\Phi(\cdot, s) : [t_0, t_1] \rightarrow M(n, \mathbb{R})$

$$\Phi_A(t, s) := X(t)X(s)^{-1}$$

é denominada *matriz de transição* do sistema (1.7).

Desta definição podemos denotar a solução de (1.7) como  $x(t) = \Phi_A(t, s)x_0$ . Vejamos algumas propriedades da matriz de transição.

**Lema 1.1.32.** *As seguintes operações são válidas:*

- a)  $\Phi_A(t, t) = I$ ;
- b)  $\Phi_A(t, s) = \Phi_A(t, r)\Phi_A(r, s)$ ;
- c)  $\Phi_A(t, s)^{-1} = \Phi_A(s, t)$ ;
- d)  $\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = A(t)\Phi_A(t, s), \forall t \in [t_0, t_1]$ .

**Demonstração:** a) Pela definição de  $\Phi_A$  temos

$$\Phi_A(t, t) = X(t)X(t)^{-1} = I.$$

b) Utilizando o item a) temos

$$\begin{aligned} \Phi_A(t, s) &= X(t)X(s)^{-1} = X(t)IX(s)^{-1} \\ &= X(t)X(r)^{-1}X(r)X(s)^{-1} = \Phi_A(t, r)\Phi_A(r, s). \end{aligned}$$

c) Utilizando propriedades básicas de matrizes obtemos

$$\Phi_A(t, s)^{-1} = (X(t)X(s)^{-1})^{-1} = X(s)X(t)^{-1} = \Phi_A(s, t).$$

d) Utilizando a igualdade (1.8) vale que

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = \frac{\partial (X(t)X(s)^{-1})}{\partial t} = \frac{dX(t)}{dt} X(s)^{-1} = A(t)X(t)X(s)^{-1} = A(t)\Phi_A(t, s).$$

■

Note que a aplicação  $\Phi_A(\cdot, s)x(s)$  é exatamente o fluxo da dinâmica linear não autônoma, basta comparar os itens *b), c), d)* deste Lema 1.1.32 com as propriedades *a), c), d)* da Proposição 1.1.9 que nos dá as propriedades do fluxo, o item *b)* da Proposição 1.1.9 pode ser facilmente verificada levando em consideração o que foi dito sobre a matriz fundamental  $X$ . Pode-se realizar um raciocínio análogo para o caso linear autônomo, onde o fluxo é a aplicação  $\Phi_A(t, t_0)x_0 = e^{(t-t_0)A}x_0$ .

**Exemplo 1.1.33.** *Vamos considerar a equação de Legendre, dada por*

$$(1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \lambda(\lambda + 1)x(t) = 0, \quad -1 < t < 1.$$

*Vamos considerar apenas o caso  $\lambda = 1, t \in (0, 1)$ . Após a obtenção de soluções ( ver [5] pg.106), temos as funções*

$$x^1(t) = t, \quad x^2(t) = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

*Reescrevendo a equação como um sistema obtemos*

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2t} \\ -\frac{2}{(1-t)^2} & \frac{1}{(1-t)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

*cujas soluções são agora*

$$x^1(t) = (t, 1), \quad x^2(t) = \left( \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{t}{1-t^2} \right),$$

*e estes vetores são l.i. pois*

$$\det \begin{pmatrix} t & 1 \\ \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 & \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{t}{1-t^2} \end{pmatrix} = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{t^2}{1-t^2} - \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + 1 = \frac{1}{1-t^2},$$

*e claramente esta expressão não se anula para  $t \in (0, 1)$ . Assim temos a matriz fundamental  $X$  do sistema (1.9) e sua inversa, dadas por*

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{t}{1-t^2} \end{pmatrix} \quad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{2t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{1}{t} & \frac{1-t^2}{t^2} - \frac{1-t^2}{2t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \\ \frac{t^2-1}{t^2} & \frac{1-t^2}{t} \end{pmatrix}$$

*O leitor é convidado a calcular a matriz de transição  $\Phi_A(t, s) = X(t)X^{-1}(s)$  e obter a solução geral  $x(t) = \Phi_A(t, s)x_0$ .*

Vejamos agora o caso de sistemas não autônomos e não homogêneos, dados por

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad A \in C([0, 1], M(n, R)), f \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n). \quad (1.10)$$

**Teorema 1.1.34.** *Dados  $A \in C([t_0, t_1], M(n, \mathbb{R}))$ ,  $f \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , o problema de valor inicial*

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.11)$$

*possui como única solução a aplicação*

$$x : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)f(s)ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.12)$$

**Demonstração:** Seja  $x$  a aplicação definida como em (1.12). Do item **a**) do Lema 1.1.32, temos  $x(t_0) = x_0$  e do item **d**) segue que

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t A(t)\Phi_A(t, s)f(s)ds + \Phi_A(t, t)f(t) \\ &= A(t)x(t) + f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned}$$

valendo assim a existência de solução. Suponha agora que tenhamos duas soluções  $x_1$  e  $x_2$ , assim vale para  $\hat{x} = x_1 - x_2$  que

$$\begin{aligned} \hat{x}'(t) &= x_1'(t) - x_2'(t) = A(t)x_1 + f(t) - A(t)x_2 - f(t) \\ &= A(t)\hat{x}(t). \end{aligned}$$

Desse modo,  $\hat{x}$  satisfaz o sistema linear (1.6) com  $\hat{x}(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = x_0 - x_0 = 0$ . Visto que a única solução possível é  $\hat{x} \equiv 0$ , temos  $x_1 = x_2$ ; portanto a solução de (1.11) é única. ■

Claramente o Teorema 1.1.27 é um caso particular deste Teorema 1.1.34 no caso em que  $f \equiv 0$ .

**Exemplo 1.1.35.** *Consideramos novamente a equação do Oscilador Harmônico, porém desta vez supomos que existe uma força externa, representada por  $f(t)$ , que pode variar com o tempo mas independe da posição da mola. Neste caso, temos a equação*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t),$$

a qual reescrita na forma de sistema nos dá  $x'(t) = Ax(t) + b(t)$  ou, na sua forma explícita,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Estamos no caso em que  $A(t) \equiv A$ , e portanto podemos utilizar a matriz de transição do Exemplo 1.1.26 e obter a solução

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\omega t - \theta) + \int_{t_0}^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} f(s)ds \\ -\alpha \omega \sin(\omega t - \theta) + \int_{t_0}^t \cos(\omega(t-s)) f(s)ds \end{pmatrix}$$

Com isto cobrimos os casos possíveis de EDO's que veremos neste trabalho e como se apresentam suas soluções.

# Capítulo 2

## Sistemas de Controle

Neste capítulo apresentamos de maneira breve o que são sistemas de controle, tanto nos espaços  $\mathbb{R}^n$  como nas Variedades Diferenciáveis. O foco será apresentar as definições básicas dos sistemas e suas propriedades, enunciando os principais teoremas que serão usados para garantir as propriedades de Estabilidade e Estabilização. Desse modo, este capítulo será usado como referência para os resultados dos próximos dois capítulos.

### 2.1 Sistemas de Controle em $\mathbb{R}^n$

Um sistema de controle é uma família de Equações Diferenciais parametrizadas por um parâmetro  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ , chamado controle, em que um vetor que depende do tempo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  tem sua evolução descrita por uma equação da forma

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

onde temos

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das variáveis de estado.
- $u \in U$  é o vetor das variáveis de controle ou ainda a entrada do sistema, que mostra a possibilidade de influenciar o sistema. O conjunto  $U$  é um conjunto de funções cujo domínio é um intervalo na reta e o contra domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  que satisfazem propriedades adequadas ao sistema.
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função conhecida que descreve a dinâmica de evolução do sistema.

Denotamos por  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  o estado inicial do sistema. Em muitos problemas é também fornecida uma condição de contorno final  $x(t_1) = x_1$  ou ainda uma condição de contorno transversal. A equação (2.1) é denominada equação de estado.

Algumas classes de sistemas de controle são:

Sistemas Lineares: Neste caso a dinâmica  $f$  é dada por funções matriciais e pode ser escrita como

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (2.2)$$

onde  $A(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M(n; \mathbb{R})$  e  $B(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M(n \times m; \mathbb{R})$  para todo  $t$  são transformações lineares, ou seja, a dinâmica do sistema é linear tanto na variável de estado  $x$  quanto no controle  $u$ . Além disso, quando  $A(t) \equiv A$ ;  $B(t) \equiv B$  temos

o caso autônomo e voltamos para o caso de um sistema de equações diferenciais autônomo não homogêneo como em (1.10) e sua solução está dada pelo Teorema 1.1.34.

Sistemas Afins: Ocorrem nos casos em que a dinâmica é linear apenas nos controles, estes sistemas são descritos por

$$x'(t) = F(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t),$$

onde  $F, G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $x, u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Sistema Não Lineares: É o caso mais geral, aqui temos o mesmo que no sistema (2.1).

Vejamos alguns exemplos tratados antes, agora sob a ótica da Teoria de Controle.

**Exemplo 2.1.1.** *Consideramos novamente a equação do Oscilador Harmônico influenciado por uma força externa, representada agora por  $u(t)$ . No Exemplo (1.1.35) obtemos uma equação da forma  $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ , que podemos reescrever como  $x'(t) = Ax(t) + bu(t)$ , explicitamente*

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

**Exemplo 2.1.2.** *Podemos considerar novamente o modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra, mas agora adicionamos funções de controle  $u_1(t), u_2(t)$  que podem representar tanto limitações nos recursos do ambiente, quanto bloqueios físicos que separam as populações, ou seja, podemos tomar várias estratégias para influenciar na interação entre presa e predador. De forma geral, denotando  $z(t) = (x(t), y(t))$  obtemos o sistema de controle  $z'(t) = A(t)z(t) + Bu(t)$  dado por*

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t) & 0 \\ 0 & \delta x(t) - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Uma função de controle nos permite investigar várias propriedades de um sistema, algumas delas são: Controlabilidade, Detectabilidade, Estabilização e Observabilidade. A propriedade que nos será mais importante é a Estabilização de um sistema de controle que está intimamente relacionada com a propriedades de Estabilidade de um sistema de EDO's, devido a essa importância dedicamos um capítulo para cada uma dessas propriedades. Vamos agora introduzir os conceitos de Controlabilidade, Detectabilidade e Observabilidade e alguns resultados relacionados a estes conceitos, que nos serão úteis nos capítulos seguintes.

Nas próximas definições consideramos o sistema de controle dado por

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde  $x(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  são como em (2.1),  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  é o vetor de observação, que nos dá informação sobre a saída do sistema e temos os operadores  $A : [t_0, t_1] \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ ,  $B : [t_0, t_1] \rightarrow M(n \times m, \mathbb{R})$  e  $C : [t_0, t_1] \rightarrow M(d \times n)$ , que suporemos contínuos.

Primeiro discutiremos a propriedade de Controlabilidade.

**Definição 2.1.3.** O sistema 2.3 é dito *controlável* em  $[t_0, t_1]$  quando, para quaisquer dois estados  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe um controle  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  tal que a solução  $x(t)$  do PVI

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

satisfaz também a condição de contorno  $x(t_1) = x_1$ .

Podemos interpretar a propriedade de Controlabilidade como a possibilidade de associar quaisquer dois elementos de  $Im(x)$  com o controle apropriado, desta forma pode-se efetivamente determinar o comportamento do sistema. Um exemplo de sistema controlável é o do oscilador harmônico com força externa dado no Exemplo 2.1.1. Isto implica que dado um sistema massa-mola ou um pêndulo simples podemos escolher, a partir de qualquer posição inicial, qual será a posição final do sistema desde que usemos o controle apropriado.

**Observação 2.1.4.** Utilizando o Teorema 1.10 vemos que um sistema de controle linear tem como solução

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s)ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

e portanto este sistema é controlável se o estado  $x_1$  tem a forma

$$x_1 = \Phi_A(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

Enunciamos agora um Teorema que caracteriza a propriedade de Controlabilidade para sistemas de controle lineares autônomos.

**Teorema 2.1.5.** *Seja (2.3) um sistema de controle autônomo. São equivalentes as afirmações:*

- (a) (2.3) é controlável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ ;
- (b) (2.3) é controlável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ ;
- (c) A matriz  $W_T := \int_0^T e^{-As}BB^*e^{-A^*s}ds$  é não singular para um  $T > 0$ ;
- (d) A matriz  $W_T := \int_0^T e^{-As}BB^*e^{-A^*s}ds$  é não singular para todo  $T > 0$ ;
- (e)  $\text{rank}[A; B] = n$ , onde  $[A; B] \in M(n \times n \cdot m, \mathbb{R})$  é a matriz cujas colunas são

$$[A; B] = (B \mid AB \mid \cdots \mid (A)^{n-1}B).$$

**Demonstração:** Para a prova veja [1] página 44. ■

O item e) recebe o nome critério de Kalman, este critério implica que a matriz  $[A; B]$  possui  $n$  colunas l.i. e portanto gera o espaço  $\mathbb{R}^n \supseteq Im(x)$ , o que nos dá pelo menos uma intuição de sua motivação. Um sistema que satisfaz o critério de Kalman também é chamado completamente controlável. Além do critério de Kalman temos o seguinte lema:

**Lema 2.1.6.** *Se o sistema (2.3) é controlável então  $\text{rank}[\lambda I - A|B] = n$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $\text{rank}[A|B] = n$ .*

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que não fosse  $\text{rank}[\lambda I - A|B] = n$  mesmo sendo o sistema controlável; existiria então um vetor  $p \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $p \neq 0$ , tal que  $p \cdot w = 0$  para todo vetor coluna da matriz  $[\lambda I - A|B] \in M(n \times (n+m); \mathbb{R})$ . Então  $pA = p\lambda$  e  $pB = 0$ , donde  $pA^k B = \lambda^k pB = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Em particular,  $p \cdot w = 0$  para todo vetor coluna  $v$  na matriz de controlabilidade  $[A; B]$ . Porém pelo critério de Kalman, isto nos dá uma contradição com a hipótese de (2.3) ser controlável. ■

Vejamos agora a propriedade de Observabilidade.

**Definição 2.1.7.** O sistema (2.3) é denominado *observável em*  $[t_0, t_1]$  quando para toda função  $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  a condição

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad C(t)x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

implicar em  $x(t_0) = 0$ .

Temos os seguintes resultados sobre observabilidade

**Teorema 2.1.8.** ([1]) O sistema (2.3) é observável em  $[t_0, t_1]$  se e somente se a matriz

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) dt$$

é tal que  $W(t_0, t_1) \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

**Demonstração:** Para a prova veja [1] página 28. ■

**Teorema 2.1.9.** ([1]) Seja (2.3) um sistema autônomo. As seguintes afirmativas são equivalentes

- a) (2.3) é observável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ ;
- b) (2.3) é observável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ ;
- c) A matriz  $W_T := \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} ds$  é invertível para algum  $T > 0$ ;
- d) A matriz  $W_T := \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} ds$  é invertível para todo  $T > 0$ ;
- e)  $\text{rank}[A^*; C^*] = n$ , onde  $[A^*; C^*]$  é a matriz cujas colunas são

$$[A^*; C^*] = (C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*),$$

$[A^*; C^*]$  é chamada matriz de observação

$$\text{f) } \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}(CA^k) = \{0\}$$

**Demonstração:** Para a prova veja [1] página 29. ■

Podemos ainda associar ao sistema (2.3) a aplicação

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\rightarrow C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \\ x_0 &\mapsto C(\cdot) \Phi_A(\cdot, t_0) x_0 \end{aligned}$$

Note que esta é uma aplicação entre o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  e o subespaço vetorial  $\text{Im}(C \cdot \Phi_A) \subset C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ , daí temos que (2.3) é observável se  $G$  é injetiva. Diremos que

o núcleo da aplicação  $G$  é o subespaço não observável  $\mathcal{N} = \ker(G)$  do sistema (2.3). Dado agora o polinômio característico de  $A$  vamos fazer a seguinte fatoração

$$p_A(r) = p_A^+(r) \cdot p_A^-(r),$$

onde  $p_A^+$  possui apenas as raízes com parte real não-negativa e  $p_A^-$  apenas as raízes com parte real estritamente negativa. A partir desta fatoração definimos os espaços

$$X^+(A) := \ker(p_A^+(A)), \quad X^-(A) := \ker(p_A^-(A)). \quad (2.4)$$

Obtemos então a seguinte definição

**Definição 2.1.10.** Sejam (2.3) um sistema autônomo de controle,  $\mathcal{N}$  seu subespaço não observável e sejam ainda  $X^+(A), X^-(A)$  como em (2.4). Dizemos que o sistema (2.3) é *detectável* quando  $\mathcal{N} \subset X^-(A)$ .

A importância destas duas propriedades para os sistemas lineares fica clara no seguinte resultado

**Teorema 2.1.11.** ([1]) *Seja (2.3) um sistema de controle autônomo. Então existe uma matriz não singular  $P \in M(n, \mathbb{R})$ , de modo que o sistema*

$$\begin{cases} x'(t) &= \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}(t)x(t) \end{cases}$$

é tal que as matrizes  $\tilde{A} = PAP^{-1}, \tilde{B} = PB, \tilde{C} = CP^{-1}$ , são da forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{C}_2 \quad 0 \quad \tilde{C}_4).$$

Temos ainda que o sub-sistema

$$\left( \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \right)$$

é controlável e o sub-sistema

$$\left( \begin{pmatrix} \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_4 \end{pmatrix} \right)$$

é observável.

**Demonstração:** Para a prova veja [1] página 47. ■

A separação do sistema em blocos é denominada a forma normal do sistema original, também dita forma normal de Kalman.

**Teorema 2.1.12.** ([1]) *Dado o sistema (2.3), as afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) (2.3) é controlável em  $[t_0, t_1]$ ;



(b) Não existe nenhum  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  que satisfaça

$$B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* v = 0, \forall t \in [t_0, t_1];$$

(c) A matriz  $P(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, t) B(t) B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* dt$  é não singular;

(d) O sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= -A^*(t)x(t) \\ y(t) &= B^*(t)x(t) \end{cases}$$

é observável em  $[t_0, t_1]$ .

**Demonstração:** Para a prova veja [1] página 42. ■

## 2.2 Sistemas de Controle em Variedades

O assunto de Sistemas de Controle em Variedades apresentado aqui é baseado principalmente na referência [9].

Já introduzimos o conceito de Variedade Diferenciável e já estudamos o funcionamento de Campos de vetores e EDO's definidas em variedades, vamos agora estender a definição de Sistemas de Controle para este ambiente e vamos ver novamente algumas propriedades dos sistemas de controle neste cenário.

Sejam  $M$  uma variedade diferenciável, um Sistema de Controle em  $M$  é uma família de Equações Diferenciais da forma

$$x'(t) = X(x(t), u(t)), \quad (2.5)$$

onde  $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  representa os estados do sistema,  $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  é contínua por partes e  $X : M \times U \rightarrow TM$  é um campo de vetores em  $M$  para cada  $u(t)$  fixado.

Vamos nos focar no sistema de controle afim, que tem a forma

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + u(t)Y(x), \quad (2.6)$$

onde  $M$  é uma variedade  $n$ -dimensional,  $X, Y : M \rightarrow M$  são campos de vetores analíticos em  $M$ , e  $u : [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua por partes.

Por comodidade vamos definir o conjunto dos controles admissíveis,  $\mathcal{U}_{ad}$  como o conjunto  $\mathcal{U}_{ad} = \{u \in \mathcal{F}([0, +\infty); \mathbb{R}) : u \text{ é contínua por partes (c.p.p)}\}$ . Vejamos como são definidas as propriedades de um sistema de controle em variedades, começando pela propriedade de Acessibilidade.

**Definição 2.2.1.** Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ , dado  $y \in M$  dizemos que  $y$  é  $(X, Y)$ -*acessível* de  $x \in M$  se existem  $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$  e  $T > 0$  tais que  $\bar{x}(t) = \varphi(t, \bar{u}, x)$  é solução de (2.6) com  $\varphi(0, \bar{u}, x) = x$ ,  $\varphi(T, \bar{u}, x) = y$ . Nesse caso também dizemos que  $x$  pode ser  $(X, Y)$ -unido a  $y$ .

Utilizando as definições acima podemos definir os conjuntos

$$A^+(x) := \{y \in M : y \text{ é } (X, Y) \text{ - acessível de } x\}$$

$$A^-(x) := \{y \in M : y \text{ pode ser } (X, Y) \text{ - unido a } x\}$$

Note que os conjuntos  $A^+$  e  $A^-$  dependem fortemente dos campos  $X$  e  $Y$ , ainda que estes não estejam explícitos na notação.

Definimos agora a propriedade de Controlabilidade para um sistema da forma (2.6).

**Definição 2.2.2.** O sistema (2.6) é dito *controlável em*  $[t_0, t_1]$  quando para quaisquer  $x_0, y_0 \in M$ , existe um controle  $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$  de forma que a solução  $\varphi(t, \bar{u}, x)$  de (2.6) satisfaz  $\varphi(t_0, \bar{u}, x) = x_0$ ,  $\varphi(t_1, \bar{u}, x) = y_0$ , onde  $\varphi(t, \bar{u}, x)$  representa o fluxo associado à dinâmica de (2.6).

Uma definição análoga que se utiliza de estruturas apresentadas anteriormente é a seguinte:

**Definição 2.2.3.** O sistema (2.6), representado pelo par de campos vetoriais  $(X, Y)$ , é *controlável* se  $A^+(x) = M$ ,  $\forall x \in M$ .

Ao estudar propriedades de controlabilidade do sistema (2.6) é conveniente reformular o problema em termos de estruturas algébricas.

**Definição 2.2.4.** Se  $X$  e  $Y$  são campos de vetores dados, denotamos por  $\mathcal{G}(X, Y)$  o grupo de difeomorfismos gerados por todos os elementos da forma  $e^{t(X+u(t)Y)}$ , onde  $(t, u(t)) \in \mathbb{R}^2$ .

$\mathcal{G}(X, Y)$  é claramente um grupo com relação à operação de composição de funções

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(X, Y) &= \{Z_t = e^{t(X+uY)} : t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\dots \circ e^{t_k(X+u_kY)} \circ \dots \circ e^{t_2(X+u_2Y)} \circ e^{t_1(X+u_1Y)} : t_i \in \mathbb{R}, k > 0, X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)\}. \end{aligned}$$

- O grupo  $\mathcal{G}(X, Y)$  age em  $M$  da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{G}(X, Y) \times M &\rightarrow M \\ (Z_t, x) &\mapsto \varphi(Z_t, x) = e^{tZ}x \end{aligned}$$

- Denotamos as órbitas que passam por  $x$  como

$$\mathcal{G}(X, Y)(x) = \{e^{tZ}x : t \in \mathbb{R}\}.$$

**Observação 2.2.5.**  $\mathcal{G}(X, Y)(x)$  é uma subvariedade de  $M$  com

$$\dim(\mathcal{G}(X, Y)(x)) = \dim(\mathcal{L}(X, Y)(x)) \leq \dim(T_x M).$$

**Definição 2.2.6.** Chama-se o *semigrupo de difeomorfismos* associados a (2.6) o conjunto

$$\mathcal{S} := \{Z_t = e^{t(X+uY)} : t \geq 0, u \in \mathbb{R}\}.$$

Para cada  $x \in M$  a semi-órbita de  $\mathcal{S}$  através de  $x$  é o conjunto

$$\mathcal{S}(x) := \{Z_t(x) : Z_t \in \mathcal{S}\}.$$

Vejam agora a relação dos semigrupos de difeomorfismos com os conjuntos  $A^+$  e  $A^-$ .

**Proposição 2.2.7.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e considere o sistema (2.6) definido em  $M$ , então valem as igualdades*

$$\overline{\mathcal{S}(x)} = \overline{A^+(x)} \text{ e } \overline{\mathcal{S}^{-1}(x)} = \overline{A^-(x)}$$

para  $x \in M$  qualquer.

**Demonstração:** Para cada  $x \in M$  e qualquer  $Z_t \in \mathcal{S}$ , vale que  $\mathcal{S}(x)$  está em uma trajetória de  $\varphi(t, x)$  associado a (2.6) gerada por um controle constante por partes (cons.p.p.).

Portanto, para cada  $x \in M$ ,  $\mathcal{S}(x) \subset A^+(x)$  (+)

As trajetórias de (2.6) geradas por controles cons.p.p. através de  $x$  são da forma

$$\varphi(t, u_0, x) = e^{t(X+u_0Y)}.$$

Como os controles cons.p.p são densos em  $\mathcal{U}_{ad}$ , segue que  $\overline{A^+(x)} \subset \overline{\mathcal{S}(x)}$ .

De (+) segue  $\overline{\mathcal{S}(x)} \subset \overline{A^+(x)}$ , logo  $\overline{\mathcal{S}(x)} = \overline{A^+(x)}$ .

Seja  $\mathcal{S}^{-1} = \{Z_{-t} : Z_t \in \mathcal{S}\}$ , então para cada  $x \in M$  e cada  $Z_{-t} \in \mathcal{S}^{-1}$  vale  $x \in \mathcal{S}(Z_{-t}(x))$ . Assim,  $\mathcal{S}^{-1}(x) \subset A^-(x)$  para cada  $x \in M$ . Analogamente temos  $\overline{\mathcal{S}^{-1}(x)} = \overline{A^-(x)}$ . ■

Forneceremos agora alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a controlabilidade de um sistema de controle em variedades

**Lema 2.2.8.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$  tais que  $\mathcal{L}(X, Y)(x) = T_x M$  para cada  $x \in M$ . Se  $\overline{\mathcal{S}(x)} = M$  para  $x$  em um subconjunto denso de  $M$ , então  $(X, Y)$  é controlável.*

**Demonstração:** Pelo fato de  $\mathcal{L}(X, Y)(x) = T_x M$  para cada  $x \in M$  temos  $\mathcal{G}(X, Y)(x) = M$  para cada  $x \in M$ . Como  $\mathcal{G}(X, Y)(x)$  é uma subvariedade de  $M$  podemos ver seus subconjuntos abertos como interseções de  $\mathcal{G}(X, Y)(x)$  com subconjuntos abertos de  $M$ .

Sejam  $W_x$  e  $W_{-x}$  vizinhanças de  $X \in M$  temos que

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{G}(X, Y)(x) \cap W_x \quad \text{e} \quad \mathcal{S}^{-1}(x) = \mathcal{G}(X, Y)(x) \cap W_{-x}$$

são abertos na topologia relativa a  $\mathcal{G}(X, Y)(x)$  e portanto contêm abertos, o mesmo ocorrendo para  $\mathcal{S}(x) \cap U$ ,  $\overline{\mathcal{S}^{-1}(x)} \cap U$ , onde  $U \subset M$  é aberto.

Fixe  $x \in M$  tal que  $\overline{\mathcal{S}(x)} = M$ , isto é,  $\mathcal{S}(x)$  é denso em  $M$ , e seja  $y \in M$  qualquer. Seja  $U_y$  uma vizinhança de  $y$ . Como  $\mathcal{S}^{-1}(y) \cap U_y$  contém um aberto, segue que existe  $z \in \mathcal{S}(x)$  tal que  $z \in \mathcal{S}^{-1}(y)$ . Portanto  $z \in A^-(y)$  e  $y \in A^+(z)$ . Isto implica que  $y \in \mathcal{S}(x)$  e como  $y \in M$  é arbitrário obtemos  $\mathcal{S}(x) = M$  para  $x$  em um subconjunto denso de  $M$ .

Seja agora  $x \in M$  qualquer. Para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$ , seja  $V$  o aberto tal que  $V = \mathcal{S}(x) \cap U$ . Seja  $y \in V$  tal que  $\mathcal{S}(y) = M$ . Como  $y \in V$  vale  $y \in \mathcal{S}(x)$  e temos  $\mathcal{S}(y) \subset \mathcal{S}(x)$ , o que implica  $M \subset \mathcal{S}(x)$ . Portanto  $\mathcal{S}(x) = M$ . ■

**Lema 2.2.9.** *Seja  $\hat{\mathcal{S}}$  o semigrupo de difeomorfismos gerado por elementos da forma  $e^{tX}$ ,  $t \geq 0$ , e  $e^{sY}$  onde  $s \in \mathbb{R}$ . Então para cada  $x \in M$  tem-se  $\overline{\mathcal{S}(x)} \supseteq \overline{\hat{\mathcal{S}}(x)}$ , onde o fecho é relativo à topologia da subvariedade  $\mathcal{G}(X, Y)(x)$ .*

**Demonstração:** É suficiente mostrar que para cada  $x \in M$  e para cada  $t \in \mathbb{R}$  tem-se  $e^{tY}(x) \in \overline{\mathcal{S}(x)}$ . Como nossos campos vetoriais são analíticos segue que para cada  $x$  existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que

$$e^{t(X+uY)}(y) = e^{tX} e^{tuY} e^{Z(t,u)}(y) \tag{2.7}$$

para  $t$  suficientemente pequeno e  $y \in U_x$ , onde  $Z$  satisfaz:

- i)  $Z \in \mathcal{L}(X, Y)$
- ii)  $Z(t, u) = O(t^2u)$

Isto é uma consequência da fórmula de Cambell-Hausdorff na Definição 5.1.42 no Apêndice A. Sejam  $t \in \mathbb{R}$  dado e  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qualquer sequência tal que  $t_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ . Seja  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \frac{t}{t_n}$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos  $e^{t_n(X+u_nY)}x \in \mathcal{S}(x)$ . Substituindo isto na equação (2.7) e tomando o limite temos

$$\begin{aligned} \lim e^{t_n(X+u_nY)}(y) &= \lim e^{t_nX} e^{t_n u_n Y} e^{Z(t_n, u_n)}(y) \\ &= \lim e^{t_nX} e^{tY} e^{Z(t_n, u_n)}(y) \\ &= e^{tY} \lim e^{Z(t_n, u_n)}(y) \\ &= e^{tY} \lim e^{O(t_n^2 u_n)}(y) \\ &= e^{tY} \lim e^{O(t_n t)}(y) \\ &= e^{tY}(y) \end{aligned}$$

Assim  $e^{tY}(y) \in \overline{\mathcal{S}(x)}$ . Portanto vale  $\widehat{\mathcal{S}}(x) \subset \overline{\mathcal{S}(x)}$ . ■

Finalizamos este capítulo com os seguintes resultados sobre controlabilidade

**Teorema 2.2.10.** ([9]) *Sejam  $(X, Y)$  um par de campos vetoriais em  $M$  tais que*

- i)  $\mathcal{L}(X, Y)(x) = T_x M \forall x \in M$ ;
- ii) *O conjunto de pontos recorrentes de  $X$  é denso em  $M$ .*

*Então  $(X, Y)$  é controlável.*

**Corolário 2.2.11.** *Sejam  $M = \mathbb{R}^n$  e  $X(x) = Ax$ , onde  $A \in M(n; \mathbb{R})$  é tal que seus autovalores são imaginários puros e distintos. Se  $Y$  é um campo de vetores em  $M$  tal que  $\mathcal{L}(X, Y)(x) = \mathbb{R}^n \forall x \in \mathbb{R}^n$ , então  $(X, Y)$  é controlável.*

# Capítulo 3

## Estabilidade

Neste capítulo iremos estudar condições que garantem a estabilidade de pontos críticos de EDO's, isto é, condições que garantem que a solução de um sistema de EDO's assume valores próximos ao valor atingido no ponto crítico quando as entradas do sistema estão de alguma forma próximas deste ponto. Iniciamos com o caso geral, que é abordado através do Método de Lyapunov e apresentamos alguns exemplos. Depois apresentamos o caso linear que nos dá várias ferramentas para entender a estabilidade de um sistema, estas ferramentas serão muito usadas no próximo capítulo, que trata de Estabilização.

### 3.1 Equações Diferenciais Gerais: O Método de Lyapunov

Considere a EDO

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

em que  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo de vetores que satisfaz as seguintes condições:

$$D \subset \mathbb{R}^n \text{ é aberto ;} \tag{3.2}$$

$$0 \in D, f(0) = 0; \tag{3.3}$$

$$f \in C^1(D; \mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Este sistema é autônomo, pois  $f$  não depende explicitamente do tempo; desse modo, podemos estudar as soluções a partir de  $t_0 = 0$ . Graças à condição (3.4) e ao Teorema 1.1.5 podemos garantir a existência de solução para o Problema de Valor Inicial

$$\text{(PVI): } \begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Podemos estender esta solução a um intervalo máximo de existência que representaremos por

$$I(x_0) = [0, \omega(x_0)).$$

Neste intervalo a solução é unicamente determinada graças ao Teorema de 1.1.6. Chamamos esta solução única de solução maximal, representada por  $x(\cdot, x_0)$ .

A condição (3.3) garante que 0 é um ponto estacionário do sistema, pois o (PVI) com condição inicial  $x_0 = 0$  possui apenas a solução  $x(\cdot, x_0) \equiv 0$ . Além disso, sempre que o campo  $f$  possui apenas um zero, por exemplo  $f(\bar{x}) = 0$ , podemos aplicar translações como  $\tilde{f}(x) = f(x) - \bar{x}$ , para que tenhamos novamente a condição (3.3).

Vejamos algumas classificações dos pontos de equilíbrio.

**Definição 3.1.1.** O ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$  do sistema (3.1) é denominado

i) *Estável* quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \bar{x} \in B_\delta(x_0) \Rightarrow x(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq 0 \text{ e } I(\bar{x}) = [0, +\infty);$$

ii) *Atrator* quando:

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \bar{x} \in B_\delta(x_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \bar{x}) = x_0 = 0 \text{ e } I(\bar{x}) = [0, +\infty);$$

iii) *Assintoticamente estável* quando é estável e atrator simultaneamente.

Podemos reinterpretar estas definições utilizando o conceito de distância. Sabemos que podemos escrever explicitamente os conjuntos da forma

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} < r\},$$

para  $r > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , onde a função  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica que satisfaz algumas propriedades básicas e portanto podemos falar de proximidade de elementos em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $d(x, y)$  é a distância de  $x$  a  $y$ .

Portanto, quando temos um ponto de equilíbrio estável  $x_0$ , existem números positivos  $\varepsilon$  e  $\delta$  tais que as soluções de um PVI com uma condição inicial a uma distância menor do que  $\delta$  do ponto  $x_0$  permanecerão a uma distância sempre menor do que  $\varepsilon$  do ponto  $x_0$ . Enquanto que se  $x_0$  é um ponto de equilíbrio atrator temos que existe um número positivo  $\delta$  tal que as soluções de um PVI com condição inicial a uma distância menor que  $\delta$  do ponto  $x_0$  se aproximarão cada vez mais de  $x_0$ .

Vejamos agora um exemplo.

**Exemplo 3.1.2.** Consideremos o sistema não linear de Lorenz  $x'(t) = f(x(t))$  tal que

$$f(x) = \begin{pmatrix} s(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde  $r, s, b \in \mathbb{R}_+^*$ . Este sistema foi utilizado por Lorenz como modelo de dimensão finita para o fenômeno físico da "convecção de Rayleigh-Bérnard" que é uma simplificação do clima de uma região limitada do espaço. Nesse caso o calor se propaga no fluido devido as próprias diferenças de temperatura internas, sem depender de fontes externas. Tomando os valores de  $r = 28, b = 8/3, s = 10$  e acompanhando as trajetórias do sistema obtemos a Figura 3.1.

Para  $r > 1$  o sistema possui três pontos de equilíbrio e para obtê-los resolvemos o sistema  $f(x) = (0, 0, 0)$ . É claro que  $\bar{x}^T = (0, 0, 0)$  é solução de (3.5). Agora, supondo  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ , podemos fazer

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2. \\ rx_1 - x_1 - x_1x_3 = 0 &\rightarrow x_1x_3 = x_1(r - 1) \rightarrow x_3 = (r - 1). \\ x_1^2 - bx_3 = 0 &\rightarrow x_1 = \pm\sqrt{bx_3} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{b(r - 1)}. \end{aligned}$$

Logo temos os pontos de equilíbrio

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)} \\ r - 1 \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r - 1)} \\ -\sqrt{b(r - 1)} \\ r - 1 \end{pmatrix}.$$

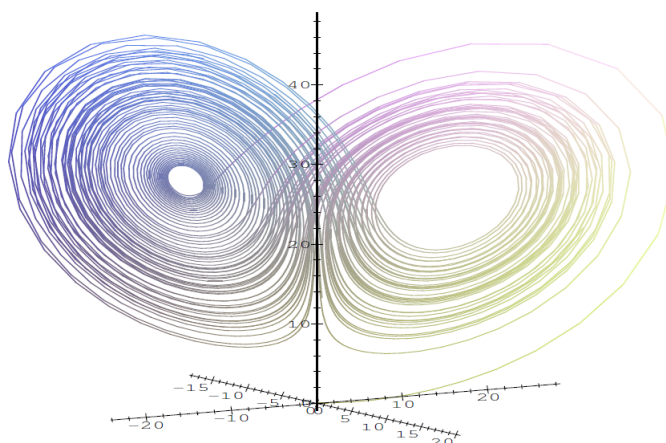


Figura 3.1: Atrator de Lorenz

A estabilidade destes 3 pontos de equilíbrio pode ser analisada estudando a aproximação linear do campo vetorial, como comprova o Teorema 1.1.16. Porém, antes de recorrer ao caso linear, vamos estudar o Método de Lyapunov, que se utiliza de uma função auxiliar para determinar o comportamento dos pontos de equilíbrio de uma Equação Diferencial.

O método de Lyapunov que trataremos aqui nos possibilita verificar a estabilidade de pontos críticos de sistemas gerais, em particular não lineares, da forma

$$x' = f(x). \quad (3.6)$$

Essa análise é feita com a ajuda de uma aplicação especial que definimos a seguir.

**Definição 3.1.3.** Uma função  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é uma vizinhança qualquer de  $\bar{x} = 0$ , é denominada *função de Lyapunov* para o sistema  $x'(t) = f(x(t))$  quando satisfaz:

- i)  $V$  é contínua em  $U$  e  $C^1$  em  $U \setminus \{\bar{x}\}$ ;
- ii)  $V(\bar{x}) = 0, V(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$ ;
- iii)  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0, \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$ .

$V$  é denominada função de Lyapunov estrita quando satisfaz

- iii')  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0, \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$ .

**Observação 3.1.4.** Dada a EDO (3.6), dizemos que  $\bar{x}$  é Lyapunov Estável para  $f$  quando existe uma função de Lyapunov para o ponto  $\bar{x}$ . A importância da função de Lyapunov e a razão desta denominação ficarão claras após o Teorema 3.1.7.

As condições iii) e iii') podem ser interpretadas da seguinte forma: a função  $(V \circ x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0,$$

ou seja, a função de Lyapunov  $V$  é decrescente quando restrita às trajetórias de  $f$ .

Provamos agora dois Lemas que serão utilizados na demonstração do teorema principal sobre a função de Lyapunov

**Lema 3.1.5.** (*Lema de Gronwall*) Dadas as constantes  $\alpha, \beta > 0$ , se uma função  $w : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfaz

$$w(t) = \alpha + \beta \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

então podemos estimar o crescimento de  $w$  por

$$w(t) \leq \alpha e^{\beta t}, \quad t \in [0, T].$$

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário e defina  $v(t) := (\alpha + \varepsilon)e^{\beta t}$  para  $t \in [0, T]$ . A função  $v$  satisfaz a equação diferencial  $v' = \beta v$ . Logo,  $v$  também satisfaz a equação integral

$$v(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t v(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Defina  $S := \{t \in [0, T] : w(s) < v(s) \text{ para } s \in [0, t]\}$ . Por construção, temos  $0 \in S$ . Defina agora  $t_0 := \inf\{t : t \in [0, T] \setminus S\}$ . Suponha que  $t_0 < T$ . Como  $w$  e  $v$  são contínuas, segue da definição de  $S$  e  $t_0$  que  $w(t_0) = v(t_0)$ . Porém da desigualdade

$$w(t_0) = \alpha + \beta \int_0^{t_0} w(s) ds < \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^{t_0} v(s) ds = v(t_0)$$

obtemos uma contradição à hipótese  $t_0 < T$ . Temos portanto que  $t_0 = T$ . De onde concluímos que

$$w(t) \leq (\alpha + \varepsilon)e^{\beta t}, \quad t \in [0, T].$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, o lema está provado. ■

**Lema 3.1.6.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : D \rightarrow D$  Lipschitziana contínua em  $D$  com constante de Lipschitz  $L$ . Sejam ainda  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$  uma solução de  $x'(t) = f(x(t))$ ,  $x(0) = x_0$ , e  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$  continuamente diferenciável satisfazendo

$$\|y(t) - x(0)\| \leq a, \quad \|y'(t) - f(y(t))\| \leq b, \quad t \in [0, T].$$

Então vale a desigualdade

$$\|y(t) - x(t)\| \leq (a + bT)e^{Lt}, \quad t \in [0, T].$$

**Demonstração:** Para  $t \in [0, T]$ , temos

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &= \left\| y(0) - x(0) + \int_0^t (y'(s) - x'(s)) ds \right\| \\ &\leq a + \int_0^t (\|y'(s) - f(y(s))\| + \|f(y(s)) - f(x(s))\|) ds \\ &\leq a + bt + \int_0^t L\|y(s) - x(s)\| ds \\ &\leq a + bT + \int_0^t L\|y(s) - x(s)\| ds \end{aligned}$$

Definindo  $w(t) := \|y(t) - x(t)\|$ , obtemos da desigualdade acima que

$$w(t) \leq a + bT + L \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T].$$



Utilizando o Lema 3.1.5 para a função  $w(t)$  com  $\alpha = a + bT$  e  $\beta = L$  temos  $w(t) \leq \alpha e^{\beta T}$  e assim

$$\|y(t) - x(t)\| \leq (a + bT)e^{Lt}, \quad t \in [0, T].$$

■

O próximo teorema deixa claro a importância de uma função de Lyapunov para a estabilidade de um sistema de EDO's.

**Teorema 3.1.7.** *Sejam  $U$  uma vizinhança qualquer de  $\bar{x} = 0$  e  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lyapunov para o sistema  $x'(t) = f(x(t))$ . As seguintes condições são satisfeitas*

- a)  $\bar{x} = 0$  é um ponto de equilíbrio estável.  
 b)  $\bar{x} = 0$  é um ponto de equilíbrio atrator se e somente se existe uma vizinhança  $W$  de  $0$  de modo que a solução estacionária  $x(t) \equiv 0$  de  $x' = f(x)$  é a única solução que satisfaz

$$x : [0, \infty) \rightarrow U, \quad x(0) \in W \quad e \quad \frac{d}{dt}V(x(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty).$$

**Demonstração :** a) Queremos mostrar que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que, caso a solução  $x(t)$  satisfaça  $|x(0) - \bar{x}| < \delta$  então  $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon, \forall t \in [0, +\infty)$ . Para tanto tome  $r > 0$  tal que  $B_{2r}(\bar{x}) \subset U$ . Defina  $\beta := \min_{x \in S_r} \{V(x)\}$ , que existe pelo Teorema de Weierstrass já que  $V$  é contínua e  $S_r$  é compacta; note também que  $\beta$  é positivo pois  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{x} = 0$ . Novamente da continuidade de  $V$  podemos definir o aberto  $U_\beta := \{x \in U : V(x) < \beta\} \cap \bar{B}_r(\bar{x}) \subset B_r(0)$ , agora como  $V(\bar{x}) = 0$  temos  $\bar{x} \in U_\beta$  e assim  $U_\beta$  é uma vizinhança de  $\bar{x}$  com  $U_\beta \subset B_r \subset U$ .

Suponha agora, por contradição, que dado  $x \in U_\beta$  qualquer existe  $T \geq 0$  tal que  $x(T) \notin U$ , em particular temos  $x(T) \notin B_r$  e assim existe  $t_* \in [0, T]$  tal que  $x(t_*) \in B_r$ . Segue daí que

$$V(x(0)) = V(x) < \beta \leq V(x(t_*)),$$

porém isto é uma contradição com a definição de  $V$  pois devemos ter  $V(x(t_*)) \leq V(x(0))$ . Portanto dado  $\varepsilon > 0$  qualquer tal que  $B_{2\varepsilon}(\bar{x}) \subset U$  temos que existe  $\delta = \min_{x \in S_\varepsilon} V(x)$  tal que  $\bar{x}$  é um ponto de equilíbrio estável na vizinhança  $U_\delta$ .

b) Seja  $\bar{x} = 0$  um ponto de equilíbrio atrativo do sistema  $x'(t) = f(x(t))$  na vizinhança  $U$ . Temos então que existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in B_\delta(\bar{x})$  a solução  $x(t)$  com  $x(0) = x$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$ . Tome  $\beta$  como acima e defina  $W = U_\beta \cap B_\delta$ .

Seja  $x : [0, +\infty) \rightarrow U$  uma solução de  $x'(t) = f(x(t)), x(0) \in W$ , satisfazendo  $\frac{d}{dt}V(x(t)) = 0, \forall t \geq 0$ . Temos então

$$V(x(0)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = V(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)) = V(0) = 0,$$

e portanto  $x(0) = 0$ . Além disso a definição de  $V$  nos dá  $V(x(t)) \leq V(x(0)) = 0$ , o que implica  $x(t) = 0$  para cada  $t \in [0, +\infty)$ , como queríamos.

Reciprocamente, tome novamente  $U_\beta$  e seja  $x(t)$  uma solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) \in U_\beta \end{cases}. \quad (3.7)$$

Como  $U_\beta \subset U$ ,  $V$  é uma função de Lyapunov para o PVI (3.7) e assim, do item a), tem-se que  $x(0)$  é estável e a solução satisfaz  $Im(x) \subset B_r$ .

Desta forma, cada seqüência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  nos dá uma seqüência  $(x(t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset B_r$ , logo pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subseqüência convergente  $(x(t_n))_{n \in \mathbb{N}'} \subset B_r$  que converge para algum  $\hat{x} \in \overline{B}_r$ .

Sabemos que  $\bar{x} = 0 \in U_\beta$ , vamos supor por contradição que  $\hat{x} \neq 0$ , ou seja

$$\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}'}, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = \hat{x} \neq 0 \quad (3.8)$$

Note que se  $|\hat{x}| = r$  ou  $V(\hat{x}) = \beta$ , então teremos a mesma contradição obtida em a), isto é, existiria  $t_* \geq 0$  tal que para  $x(0) \in U_\beta$

$$V(x(0)) < \beta \leq V(x(t_*)).$$

Portanto deve ser  $V(\hat{x}) < \beta$  e assim  $\hat{x} \in W = U_\beta \cap \overline{B}_r$ .

Considere agora a solução  $\tilde{x}$  do PVI

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = f(\tilde{x}(t)) \\ \tilde{x}(0) = \hat{x} \end{cases} \quad (3.9)$$

Novamente do item a) segue que  $Im(\tilde{x}) \subset B_t$ . Como  $\hat{x} \neq 0$  e  $(V \circ \tilde{x})$  é monótona não crescente, temos  $V(\tilde{x}) \leq V(\tilde{x}(0)) = \hat{x}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Caso fosse  $V(\tilde{x}(t)) = V(\tilde{x}(0)) = V(\hat{x})$ ,  $\forall t \geq 0$ , teríamos  $(V \circ \tilde{x})$  constante e da hipóteses teríamos  $\tilde{x}(t) \equiv 0$ , donde  $V(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0$ . Portanto deve existir  $\tau > 0$  com  $V(\tilde{x}(\tau)) < V(\tilde{x}(0))$ .

Considere agora as aplicações  $x_n : [0, +\infty) \rightarrow U$  dadas por  $x_n(t) := x(t_n + t)$ , que são soluções, respectivamente, de

$$\begin{cases} x_n'(t) = f(x_n(t)) \\ x_n(0) = x(t_n) \end{cases} \quad (3.10)$$

Como  $f \in C^1$ , aplicando a desigualdade do valor médio temos

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}_r, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \sup_{x \in \overline{B}_r} \|Df(x)\| \|x_1 - x_2\| \leq L,$$

onde  $L = \frac{1}{2r} \cdot \sup_{x \in \overline{B}_r} \|Df(x)\|$ . Logo  $f$  é Lipschitziana em  $\overline{B}_r$ .

Por outro lado, vemos que as aplicações  $x_n$  são todas de classe  $C^2$  e formam uma seqüência convergente, pois temos de (3.8) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n + t) = \hat{x}, \quad \forall t \geq 0,$$

logo  $(x_n)$  é de Cauchy. Restrita a  $\overline{B}_r$  esta seqüência converge uniformemente e podemos definir  $y : [0, +\infty) \rightarrow \overline{B}_r$ ,  $y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t)$ , com  $y_n'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n'(t)$ .

Daí segue que

$$\begin{aligned} |y(0) - \tilde{x}(0)| &= \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(0) - \hat{x} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) - \hat{x} \right| = 0 \\ |y'(t) - f(y(t))| &= \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n'(t) - f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t)\right) \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n'(t) - f(x_n(t))] \right| = 0 \end{aligned}$$

Aplicando então o Lema 3.1.6 obtemos  $a = 0, b = 0$  e assim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n(t) - \tilde{x}(t)| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) - \tilde{x}(t) \right| = |y(t) - \tilde{x}(t)| = 0, \quad t \in [0, \tau]$$

Obtemos então  $y(t) = \tilde{x}(t)$  em  $[0, \tau]$  e segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(x(t_n + \tau)) = V\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(\tau)\right) = V(\tilde{x}(\tau)) < V(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n). \quad (3.11)$$

Observando novamente o fato de  $(V \circ x)$  ser monótona não-crescente vemos que (3.11) não pode ocorrer. Assim devemos ter  $\hat{x} = 0$  e qualquer PVI com condição inicial  $x(0) \in W$  deve ter  $\bar{x} = 0$  como ponto de equilíbrio atrativo ■

**Corolário 3.1.8.** *Seja  $V$  uma função de Lyapunov estrita em  $U$ , uma vizinhança de  $\bar{x} = 0$ , para o sistema  $x'(t) = f(x(t))$ . Então o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável.*

**Demonstração:** O Teorema 3.1.7 item a) garante a estabilidade de  $\bar{x}$  em alguma vizinhança  $B_r(0) \subset U$ . Note agora que para toda solução de  $x'(t) = f(x(t))$  cuja imagem está contida em  $B_r(0)$ ,  $t \geq 0$ , a aplicação  $(V \circ x)(t)$  é monótona estritamente decrescente. Seja  $x$  uma solução qualquer do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

tal que  $\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = 0, t \geq 0$  e  $Im(x) \subset B_r$ . Vejamos que  $x(t) \equiv 0$ . Suponha por contradição  $x(t) \not\equiv 0$ , logo existe  $t_* \geq 0$  com  $x(t_*) \neq x(0) = 0$ . Como a função  $\theta(t) = \frac{d}{dt}(V \circ x)(t)$  é nula, vale que

$$0 = \int_0^{t_*} \theta(s) ds = \int_0^{t_*} \frac{d}{ds}(V \circ x)(s) ds = V(x(t_*)) - V(x(0)),$$

o que implica  $V(x(t_*)) = 0$  e assim  $x(t_*) = 0$ , o que é uma contradição. Logo deve ser  $x(t) \equiv 0$ , do item b) segue que  $\bar{x} = 0$  é atrativo. ■

Quando estamos estudando sistemas não-lineares em geral não temos um método simples e direto de obter uma função de Lyapunov, porém em alguns casos particulares temos os seguintes métodos:

1) No caso em que o sistema modelado pela dinâmica  $f$  é um sistema mecânico, ou seja, um sistema que respeita as leis da Mecânica Newtoniana, e além disso é um sistema conservativo, sem dissipação de energia, podemos utilizar a lei e conservação de energia para encontrar a função de Lyapunov do sistema. Para detalhes veja

2) Podemos supor que a função de Lyapunov é da forma  $V(x) = \langle x^{\alpha_1}, \text{diag}(a_1, \dots, a_n)x^{\alpha_2} \rangle$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e utilizando o item iii) da Definição 3.1.3 determinar os  $\alpha_j$  e os  $a_i$ .

Vejamos algumas aplicações dos resultados obtidos até aqui.

**Exemplo 3.1.9.** *Considere o sistema não linear*

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{com} \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3x_2 - x_1^5 \\ -2x_2 + x_1^5 \end{pmatrix}$$

*Definindo a aplicação*

$$V(x_1, x_2) := x_1^6 + 9x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

vemos imediatamente que ela satisfaz as condições i) e ii) da Definição 3.1.3. Dada uma solução do sistema temos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_1} \cdot \frac{d}{dt}x_1(t) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_2} \cdot \frac{d}{dt}x_2(t) \\
 &= \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_1} \cdot f_1(x(t)) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_2} \cdot f_2(x(t)) \\
 &= 6x_1^5(-3x_2 - x_1^5) + 18x_2(-2x_2 + x_1^5) \\
 &= -18x_1^5x_2 - 6x_1^{10} - 36x_2^2 + 18x_1^5x_2 \\
 &= -6(x_1^{10} + 6x_2^2) \leq 0
 \end{aligned}$$

Agora do fato de  $\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \frac{d}{dt}V(x(t))$  temos que  $V$  satisfaz o item iii') da definição 3.1.3. Concluimos diretamente do Corolário 3.1.8 que  $\bar{x} = 0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

**Exemplo 3.1.10.** Considere agora o sistema

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{com} \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Uma função de Lyapunov é dada por  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . O Teorema 3.1.7 garante que  $\bar{x} = 0$  é um ponto de equilíbrio estável mas não atrator, pois dada uma solução qualquer  $x(t)$  vale que

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_1} \cdot f_1(x(t)) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_2} \cdot f_2(x(t)) = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Logo qualquer solução satisfaz  $\frac{d}{dt}V(x(t)) = 0$ .

## 3.2 Equações Diferenciais Lineares: Métodos Matriciais

Vamos analisar o caso particular de (3.1) em que  $f(x(t)) = Ax(t)$ ,  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e

$$x'(t) = Ax(t) \tag{3.12}$$

Do Teorema 1.1.22 já sabemos a forma e o comportamento das soluções, queremos agora estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$ . Vamos apresentar resultados que nos ajudam neste estudo.

**Teorema 3.2.1.** *Seja o sistema (3.12). São equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) O ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável;
- b) O ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é atrativo ;
- c)  $\max\{Re(\lambda) : \lambda \text{ é autovalor de } A\} < 0$ .

**Demonstração:** a)  $\Rightarrow$  b) Segue diretamente da Definição 3.1.1:  $\bar{x}$  é assintoticamente estável, logo  $\bar{x}$  é estável e atrator.

b)  $\Rightarrow$  c) Suponha que  $\exists \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \geq 0$  e este  $\lambda$  seja um autovalor de  $A$ . Se  $v$  é um autovetor correspondente, definimos

$$x(s) := \operatorname{Re}(e^{\lambda s}v), \quad s \geq 0,$$

que é uma solução de (3.12), pois

$$(e^{\lambda s}v)' = \frac{d}{ds}e^{\lambda s}v = \lambda e^{\lambda s}v = e^{\lambda s}\lambda v = e^{\lambda s}Av = Ae^{\lambda s}v;$$

o mesmo valendo para as partes real e imaginária. Agora, como  $\alpha \geq 0$  temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t}v \neq 0.$$

Porém isso contraria o fato de  $\bar{x} = 0$  ser um ponto de equilíbrio atrator do sistema, portanto devemos ter  $\alpha < 0$  para qualquer dos autovalores de  $A$ .

c)  $\Rightarrow$  a) Usando o Teorema 1.1.21 temos que a solução do sistema, que é dada por  $x(t, x_0) = e^{tA}$ , satisfaz

$$\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = \|e^{tA}\| \leq ce^{(\gamma+\varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Note que  $c > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma < 0$ , tomando  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno e fazendo  $t \rightarrow +\infty$  temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0$$

Isto prova que  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável ■

**Observação 3.2.2.** Se o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável, podemos concluir do Teorema 3.2.1 que todas as soluções de (3.12) convergem exponencialmente para  $\bar{x} = 0$  quando  $t \rightarrow 0$ . Isto é o que chamamos de estabilidade exponencial. Quando o sistema é autônomo este conceito é equivalente ao conceito de estabilidade assintótica.

**Observação 3.2.3.** Caso o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  do sistema (3.12) seja assintoticamente estável, então o sistema

$$x' = Az + b(t), \quad t \geq 0, \tag{3.13}$$

é dito BIBO-estável (Bounded Input, Bounded Output ou entrada limitada, saída limitada). Isto é, se  $b \in L^\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ , então toda solução de (3.13) está também em  $L^\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ , porém isto não vale se  $\bar{x} = 0$  é apenas estável. Aqui  $L^\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^n) = \{f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^n : \operatorname{supess} |f(x)| < \infty\}$

Motivados pelo Teorema 3.2.1 vamos definir o que é uma matriz estável e vamos buscar condições para que uma matriz seja estável

**Definição 3.2.4.** Uma matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$  que satisfaz

$$\max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \text{ é autovalor de } A\} < 0$$

é denominada *matriz estável*.

**Exemplo 3.2.5.** A matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 22 & 6 \end{pmatrix}$$

é tal que seus autovalores são

$$\left\{ \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Portanto  $A$  é estável

De acordo com esta definição, uma matriz será estável se todos os seus autovalores estiverem no semi-plano esquerdo do plano complexo.

Sendo  $A$  a matriz do sistema (3.12), seus autovalores são as raízes do polinômio característico  $p_A(r) = \det(A - rI)$ , que com algumas manipulações pode ser escrito como:

$$p_A(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}.$$

Obtemos então

**Lema 3.2.6.** Se  $A$  é uma matriz estável, então todos os coeficientes  $a_1, \dots, a_n$  de  $p_A$  são positivos.

**Demonstração:** Vejamos inicialmente o caso  $n = 3$ . Neste caso, temos

$$p_A(r) = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2)(r - \lambda_3).$$

Suponha inicialmente que todas as raízes são reais, assim a hipótese nos dá  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ . Fazendo os produtos obtemos

$$\begin{aligned} p_A(r) &= (r - \lambda_1)(r - \lambda_2)(r - \lambda_3) = (r^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)r + \lambda_1\lambda_2)(r - \lambda_3) \\ &= r^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)r^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)r - \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Como todas as raízes são negativas fica claro que todos os coeficientes são positivos.

No caso em que uma das raízes possui parte imaginária não-nula necessariamente seu conjugado será outra raiz, podemos então escrever  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = \alpha - i\beta$ , com  $\alpha < 0$ , e neste caso

$$\begin{aligned} p_A(r) &= (r - \lambda_1)(r - \lambda_2)(r - \bar{\lambda}_2) = r^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \bar{\lambda}_2)r^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\bar{\lambda}_2)r - \lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_2 \\ &= r^3 - (\lambda_1 + 2\alpha)r^2 + (2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2)r - \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

e novamente podemos verificar que todos os coeficientes serão positivos.

No caso geral, denotando por  $\lambda_k$  os autovalores reais de  $A$  e por  $\lambda_j$  os autovalores com parte imaginária não-nula, temos

$$p_A(r) = \prod_k (r - \lambda_k) \prod_j (r^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_j)r + |\lambda_j|^2),$$

e vale  $-\lambda_k > 0$  e  $-2\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ; donde vê-se que todos os coeficientes são resultados de somas ou produtos dos números positivos  $-\lambda_k$ ,  $-2\operatorname{Re}(\lambda_j)$  e  $|\lambda_j|^2$ , portanto também são positivos. ■

O critério apresentado por este lema não garante a estabilidade assintótica, como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.2.7.** *Considere a EDO homogênea*

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

O polinômio característico do sistema correspondente é

$$p_A(r) = r^3 + r^2 + r + 1$$

e possui raízes  $-1, i, -i$ . Verifica-se que o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  do sistema correspondente é estável, mas não assintoticamente estável.

Para polinômios de grau menor ou igual a 4 podemos encontrar condições suficientes para garantir a estabilidade da matriz  $A$  através do estudo dos coeficientes de seu polinômio característico e utilizando o teorema fundamental da álgebra.

**Proposição 3.2.8.** ([7]) *Considere os polinômios  $p_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4$ , dados por  $p_i(x) = x^i + \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k x^k$  e considere os conjuntos  $\{r_1^1\}$ , que é a raiz de  $p_1$ ,  $\{r_1^2, r_2^2\}$  as raízes de  $p_2$  e da mesma forma  $\{r_1^3, r_2^3, r_3^3\}, \{r_1^4, r_2^4, r_3^4, r_4^4\}$ . Então, temos as seguintes implicações:*

$$\begin{aligned} \alpha_0 > 0 & \Rightarrow r_1^1 < 0; \\ \alpha_0 > 0 \text{ e } \alpha_1 > 0 & \Rightarrow \operatorname{Re}(r_1^2) < 0 \text{ e } \operatorname{Re}(r_2^2) < 0; \\ \alpha_i > 0, 0 \leq i \leq 2 \text{ e } \alpha_1 \cdot \alpha_2 > \alpha_0 & \Rightarrow \operatorname{Re}(r_1^3) < 0, \operatorname{Re}(r_2^3) < 0 \text{ e } \operatorname{Re}(r_3^3) < 0; \\ \alpha_i > 0, 0 \leq i \leq 3, \text{ e } \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 > \alpha_1^2 + \alpha_3^2 \alpha_0 & \Rightarrow \operatorname{Re}(r_1^4) < 0, \operatorname{Re}(r_2^4) < 0, \operatorname{Re}(r_3^4) < 0 \text{ e } \operatorname{Re}(r_4^4) < 0. \end{aligned}$$

Para obter um condição suficiente para o caso geral de (3.12), temos o chamado Critério de Routh-Hurwitz, que utiliza a possibilidade de fatorar polinômios a valores complexos para estudar suas raízes. Indicamos ao leitor as referências [6] Cap 3, p 213, [16] e [8].

Consideremos agora o caso particular de (3.1) em que  $f(x(t)) = Ax(t) + g(x(t))$ , isto é, sistemas da forma

$$x'(t) = Ax(t) + g(x(t)) \quad (3.14)$$

onde  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Suponha ainda que para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f(x(t)) := Ax(t) + g(x(t))$ , valham as hipóteses

(2.9)  $f(0) = 0$ ;

(2.10)  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Obtemos agora um teorema que nos fornece uma condição suficiente para garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (3.14).

**Teorema 3.2.9.** *Seja  $A$  uma matriz estável e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação satisfazendo*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Então o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  do sistema (3.14) é assintoticamente estável.

**Demonstração :** Das hipóteses temos que existem constantes  $c, \beta > 0$  tais que  $\|e^{At}\| \leq ce^{-2\beta t}$ ,  $\forall t \geq 0$ ; e dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|g(y)\| \leq \varepsilon\|y\|$ , para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|y\| \leq \delta$ . Pela arbitrariedade das constantes podemos tomar um  $0 < \varepsilon \leq c^{-1}\beta$  e obtemos  $\|g(y)\| \leq c^{-1}\beta\|y\|$ .

Seja  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma solução local do sistema  $z' = Az + g(z)$ , que existe pelo Teorema 1.1.6, já que  $f(x) = A \cdot x + g(x) \in C^1$ . Temos então

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|g(x(s))\| ds, \quad (3.15)$$

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \|x(0)\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|g(x(s))\| ds \quad (3.16)$$

$$\leq ce^{-2\beta t} \|x(0)\| + \beta \int_0^t e^{-2\beta(t-s)} \|x(s)\| ds, \quad t \in [0, T). \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Definindo  $w(t) := e^{2\beta t} \|x(t)\|$  para  $t \in [0, T)$ , e multiplicando ambos os lados da desigualdade por  $e^{2\beta t}$  obtemos a estimativa

$$w(t) \leq c\|x(0)\| + \beta \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T).$$

Utilizando o lema de Gronwall 3.1.5 obtemos que

$$w(t) \leq c\|x(0)\| e^{\beta t}, \quad t \in [0, T).$$

Agora multiplicando ambos os lados da desigualdade por  $e^{-2\beta t}$  temos

$$\|x(t)\| \leq c\|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad t \in [0, T). \quad (3.19)$$

Assim concluímos que a solução local  $x$  pode ser prolongada ao intervalo  $[0, \infty)$ . Logo, a estimativa (3.19) vale para  $T = \infty$  e vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

provando assim o teorema. ■

**Observação 3.2.10.** Os sistemas que satisfazem as hipóteses do Teorema 3.2.9 são chamados sistemas perturbados. Utilizamos o teorema acima com a ajuda da expansão de Taylor; de fato, tomando o campo de vetores  $f$  e o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$ , verificamos se o Teorema 3.2.9 é satisfeito. Tendo como hipótese que  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  podemos escrever

$$f(x) = f(0 + x) = f(0) + df(0).x + r_2(x) = df(0).x + r_2(x), \quad \text{com } \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{r_2(x)}{\|x\|} = 0.$$

Desta forma denotamos  $A = df(0)$  e  $g(x) = r_2(x)$ , e para aplicar o Teorema 3.2.9 basta verificar se  $A$  é uma matriz estável.

**Exemplo 3.2.11.** Considere a EDO

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + \sin x = 0.$$



Esta equação modela um sistema sujeito a oscilações, com constante de amortecimento  $a > 0$ , e é um caso mais geral do Exemplo 1.1.26. Vamos encontrar o sistema linearizado desta EDO. Reescrevendo em forma de sistema temos  $x' = f(x)$ , com

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2ax_2 - \text{sen}x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Claramente  $\bar{x} = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio e a linearização deste sistema em torno de  $\bar{x}$  nos fornece a matriz

$$A = df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + 1$ ; assim seus autovalores são  $\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  e  $\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ . Note agora que se  $a^2 - 1 < 0$ , então as partes reais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativas. No caso em que  $a^2 - 1 \geq 0$  ambos os autovalores serão reais e temos que

$$a = \sqrt{a^2} \Rightarrow a > \sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow -a < -\sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1} < 0,$$

logo  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 < 0$  por ser soma de números negativos. Portanto  $A$  é estável e  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável.

No caso particular em que  $a = 0$  temos o problema do pêndulo não linear, modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

O sistema correspondente é

$$x' = f(x) \text{ com } f(x) = (x_2, -\text{sen}x_1).$$

E ao procurarmos os pontos de equilíbrio do sistema obtemos

$$f(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -\text{sen}x_1 = 0 \end{cases}.$$

Isto implica que os pontos de equilíbrio são da forma  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; note que  $\bar{x} = (0, 0)$  é um destes pontos. Ao tomarmos a linearização do sistema no ponto  $\bar{x}$  obtemos a matriz

$$A = df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos polinômio característico é  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , assim seus autovalores são  $\{i, -i\}$  e portanto  $A$  não é estável.

**Exemplo 3.2.12.** Considere o sistema de Lorenz com equação  $x' = f(x)$  dada por  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} s(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde  $s, r, b > 0$  com  $r > 1$  e  $s > b + 1$ . Os pontos de equilíbrio foram obtidos anteriormente no Exemplo 3.5 e são

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

Linearizando o sistema temos

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r - z_3 & -1 & -z_1 \\ z_2 & z_1 & -b \end{pmatrix}.$$

Em particular, para os pontos de equilíbrio

$$Jf(\bar{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} = \bar{A};$$

$$Jf(\hat{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} = \hat{A};$$

$$Jf(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} p_{\bar{A}}(t) = \det(tI - \bar{A}) &= (t+s)(t+1)(t+b) - (t+b)sr \\ &= (t+b)(t^2 + (s+1)t + s - sr) = (t+b)(t^2 + (t+1)t - s(r-1)). \end{aligned}$$

Note que o coeficiente independente será  $-bs(r-1) < 0$ , logo  $\bar{A}$  não é estável. Para as outras matrizes temos

$$\begin{aligned} p_{\hat{A}} = p_{\tilde{A}}(t) = \det(tI - \hat{A}) &= (t+s)(t+1)(t+b) + sb(r-1) - s(t+b) + (t+s)(r-1)b \\ &= (t^2 + (s+1)t + s)(t+b) + sb(r-1) - st - sb + tb(r-1) + sb(r-1) \\ &= t^3 + bt^2 + (s-1)t^2 + (s+1)bt + 2sb(r-1) + b(r+1)t + st - st + bs - bs \\ &= t^3 + (b+s+1)t^2 + b(s+r)t + 2bs(r-1). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.2.8, precisamos provar que  $(b+s+1) > 0$ ,  $b(s+r) > 0$ ,  $2bs(r-1) > 0$  e  $(b+s+1)(b(s+r)) - 2bs(r-1) > 0$ . Os três primeiros seguem das nossas hipóteses iniciais. Por outro lado, utilizando a hipótese de que  $s > b+1$ , obtemos

$$\begin{aligned} (b+s+1)(b(s+r)) - 2bs(r-1) &> 0 \\ (b^2 + bs + b)(s+r) - 2bs(r-1) &> 0 \\ b^2s + b^2r + brs + bs^2 + bs + br - 2bsr + 2bs &> 0 \\ b^2r + b^2s + bs^2 - brs + 3bs + br &> 0 \\ b(br + bs + s^2 - sr + 3s + r) &> 0 \\ br + bs + s^2 - sr + 3s + r &> 0 \\ r(b+1-s) + s(s+3+b) &> 0 \\ r(b+1-s) &> -s(s+3+b) \\ r &> \frac{-s(s+b+3)}{(s-b-1)}. \end{aligned}$$

Obtemos então que para  $s > b+1$  e  $r < \frac{-s(s+b+3)}{(s-b-1)}$  os pontos  $\hat{z}$  e  $\tilde{z}$  são pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Finalizamos o capítulo estudando algumas igualdades matriciais que garantem a estabilidade de sistemas lineares. Os resultados aqui obtidos serão usados na parte de estabilização de sistemas.

**Definição 3.2.13.** Seja  $M \in M(n, \mathbb{R})$  uma matriz, dizemos que  $M$  é:

- i) *Simétrica* se vale  $M = M^*$ , isto é,  $M$  é igual a sua transposta, denotamos isto por  $M \in \mathcal{S}_n$ ;
- ii) *Semi-definida Positiva* se vale  $\langle x, Mx \rangle \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  e  $M \in \mathcal{S}_n$ , denotaremos isto por  $M \in \mathcal{S}_n^+$ ;
- iii) *Definida Positiva* se vale  $\langle x, Mx \rangle > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $M \in \mathcal{S}_n$ , denotaremos isto por  $M \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

**Observação 3.2.14.** Podemos também introduzir uma relação de ordem parcial no conjunto  $\mathcal{S}_n^+$ , que é a chamada ordem parcial de Löwner e é representada por  $\succeq$ : dizemos que  $M \succeq 0$  quando  $M \in \mathcal{S}_n^+$  e dadas  $A, B \in \mathcal{S}_n^+$  a ordem é definida por

$$A \succeq B \Leftrightarrow A - B \succeq 0.$$

Da definição temos que dadas  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $B \in M(l \times n, \mathbb{R})$  vale  $B^*B \in \mathcal{S}_n^+$  e se  $A - B^*B \in \mathcal{S}_n^+$ , então vale que  $A \in \mathcal{S}_n^+$ , pois da transitividade da relação temos

$$A - B^*B \in \mathcal{S}_n^+ \Rightarrow A - B^*B \succeq 0 \Rightarrow A \succeq B^*B \succeq 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^+.$$

Ou ainda, utilizando o produto interno, temos para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A - B^*B \in \mathcal{S}_n^+ \Rightarrow \langle x, (A - B^*B)x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x, Ax \rangle \geq \langle x, B^*Bx \rangle = \langle Bx, Bx \rangle \geq 0.$$

Vamos então aos resultados.

**Lema 3.2.15.** *Sejam  $U \in M(n, \mathbb{R})$ ,  $V \in M(m, \mathbb{R})$  e  $W \in M(n \times m, \mathbb{R})$ . Se  $U$  e  $V$  são matrizes estáveis, então a solução única da equação matricial*

$$UX + XV + W = 0 \quad (X \in M(n \times m, \mathbb{R}))$$

é a matriz estável

$$X := \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt.$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.1.21 e das hipóteses, temos que existem constantes  $c_1, c_2 \geq 0$  e  $\beta_1, \beta_2 > 0$  tais que

$$\|e^{tU}\| \leq c_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \|e^{tV}\| \leq c_2 e^{-\beta_2 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

Note que para  $T > 0$ , temos

$$\begin{aligned} e^{TU} W e^{TV} - W &= e^{TU} W e^{TV} - e^{0U} W e^{0V} = \int_0^T \frac{d}{dt} (e^{tU} W e^{tV}) \\ &= \int_0^T [U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W e^{tV} V] dt, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde usamos o fato de que uma matriz comuta com sua exponencial. Usando então (3.22) e o fato de que  $\|ABC\| \leq \|A\| \|B\| \|C\|$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \|e^{TU} W e^{TV}\| &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \|e^{TU}\| \cdot \|W\| \cdot \|e^{TV}\| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} c_1 e^{-\beta_1 T} \cdot \|W\| \cdot \lim_{T \rightarrow +\infty} c_2 e^{-\beta_2 T} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tomando o limite de  $T \rightarrow +\infty$  em (3.23) obtemos

$$-W = \int_0^\infty [Ue^{tU}We^{tV} + e^{tU}We^{tV}V] dt = U \int_0^\infty e^{tU}We^{tV} dt + \int_0^\infty e^{tU}We^{tV} dtV = UX + XV,$$

ficando assim provada a existência de soluções. Para provar a unicidade, suponha que  $X_1$  e  $X_2$  são soluções de  $UX + XV + W = 0$  e defina  $\hat{X} := X_1 - X_2$ . Logo,  $\hat{X} \in M(n \times m, \mathbb{R})$  é tal que

$$U\hat{X} + \hat{X}V = U(X_1 - X_2) + (X_1 - X_2)V = UX_1 + X_1V - (UX_2 + X_2V) = W - W = \mathbf{O}$$

Temos então

$$\frac{d}{dt}(e^{tU}\hat{X}e^{tV}) = Ue^{tU}\hat{X}e^{tV} + e^{tU}\hat{X}Ve^{tV} = e^{tU}(U\hat{X} + \hat{X}V)e^{tV} = e^{tU}(\mathbf{O})e^{tV} = \mathbf{O}$$

e portanto a expressão  $e^{tU}\hat{X}e^{tV}$  é constante e em particular,

$$e^{tU}\hat{X}e^{tV} = e^{0U}\hat{X}e^{0V} = \hat{X}.$$

Assim temos  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{X}\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tU}\hat{X}e^{tV}\|$  e prosseguindo como em 3.24 obtemos  $\hat{X} = \mathbf{O}$ . ■

Podemos agora relacionar estabilidade com uma equação matricial a partir do seguinte teorema.

**Teorema 3.2.16.** *Dada uma matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , temos que  $A$  é uma matriz estável se e somente se existe uma matriz  $P \in \mathcal{S}_n^{++}$  tal que*

$$A^*P + PA = -I \tag{3.25}$$

**Demonstração :** Se a matriz  $A$  é estável, podemos usar o Lema 3.2.15 com  $U = A^*$ ,  $V = A$  e  $W = I$ , donde segue a existência de uma matriz

$$P = \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt$$

que é estável. Note agora que dada  $P$  temos para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle x, Px \rangle &= \left\langle x, \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt x \right\rangle = \int_0^\infty \langle e^{tA} x, e^{tA} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \|e^{tA} x\|^2 dt \geq 0, \end{aligned}$$

e portanto  $P \in \mathcal{S}_n^+$ . Agora do fato de  $A$  ser estável temos que nenhum de seus autovalores é nulo, desta forma  $A$  é invertível, o mesmo valendo para  $e^{tA}$  e assim  $e^{tA}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , donde segue  $P \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

Reciprocamente, se  $P \in \mathcal{S}_n^{++}$  satisfaz a equação (3.25), defina

$$V(x) := \langle x, Px \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, a função  $V$  é diferenciável e satisfaz  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \neq 0$  e ainda

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), Ax \rangle &= \langle Px + P^*x, Ax \rangle = \langle A^*Px, x \rangle + \langle x, PAx \rangle \\ &= \langle (A^*P + PA)x, x \rangle = \langle -x, x \rangle = -\|x\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Isto é,  $V$  é uma função de Lyapunov estrita para o sistema  $x'(t) = Ax(t)$ . O Corolário 3.1.8 implica que o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  do sistema  $x'(t) = Ax(t)$  é assintoticamente estável. O Teorema 3.2.1 sobre sistemas lineares garante que os autovalores de  $A$  têm parte real negativa, sendo  $A$  portanto estável. ■

**Observação 3.2.17.** No Teorema 3.2.16, a equação (3.25) pode ser substituída por  $-A^*P - PA \in \mathcal{S}_n^{++}$

Note também um segundo resultado obtido na demonstração do Teorema 3.2.16, dado o sistema  $x'(t) = Ax(t)$  onde a matriz  $A$  é estável então a função  $V(x) = \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt$  é uma função de Lyapunov estrita para o sistema. A equação (3.25) é dita a equação matricial de Lyapunov.

**Exemplo 3.2.18.** Em casos de dimensão baixa nem sempre é preciso calcular a matriz  $P$  por meio de integrais, considere por exemplo a equação diferencial linear  $x' = Ax$ , onde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Note que  $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$ , assim  $A$  possui um único autovalor  $\lambda = -1$  de multiplicidade 2, sendo portanto estável. Pelo Teorema 3.2.16, aqui a equação  $A^*P + PA = -I$  nos dá

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a & a - 2b \\ a - 2c & b + c - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que equivale ao sistema

$$\begin{cases} -2a = -1 \\ 2b = 2c = a \\ 2d = b + c + 1 \end{cases}$$

e a solução encontrada é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

A função de Lyapunov correspondente é dada por:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2.$$

Vejamos mais um critério para determinar a estabilidade da matriz de um sistema linear autônomo. Precisaremos da propriedade de observabilidade de um sistema de controle (apresentada na Definição 2.1.7 e caracterizada no Teorema 2.1.8). Lembre que a formulação do sistema de controle linear autônomo é

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (3.26)$$

onde  $x(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  são como em (2.1),  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  é o vetor de observação, que nos dá informação sobre a saída do sistema e temos as matrizes  $A \in M(n, \mathbb{R})$ ,  $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$  e  $C \in M(d \times n)$ ; Vamos ao resultado.

**Teorema 3.2.19.** Sejam  $A, X, W \in M(n, \mathbb{R})$  e  $C \in M(l \times n, \mathbb{R})$  satisfazendo

- $A^*X + XA = -W$ ;
- $W - C^*C \in \mathcal{S}_n^{++}$ ;
- O sistema (3.26) é observável.

Então a matriz  $A$  é estável se e somente se  $X \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

**Demonstração :** Seja  $A$  uma matriz estável. Como  $X$  satisfaz a equação matricial  $A^*X + XA = -W$ , temos do Lema 3.2.15 que  $X = \int_0^\infty e^{tA^*} W e^{tA} dt$ ; Assim para  $x \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} \langle x, Xx \rangle &= \left\langle x, \int_0^\infty e^{tA^*} W e^{tA} dt x \right\rangle = \int_0^\infty \langle e^{tA} x, W e^{tA} x \rangle dt \\ &\geq \int_0^\infty \langle e^{tA} x, C^* C e^{tA} x \rangle dt = \int_0^\infty \|C e^{tA} x\|^2 dt. \end{aligned}$$

Como o sistema (3.26) é observável, concluímos da Definição 2.1.7 que  $C e^{tA} x = 0 \forall t \geq 0$ , se e somente se  $x = 0$ , o que prova que  $X \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

Reciprocamente, seja  $X \in \mathcal{S}_n^{++}$ . Defina a função

$$V(x) := \langle x, Xx \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como  $W - C^*C \in \mathcal{S}_n^+$ , novamente da Observação 3.2.14,  $W \in \mathcal{S}_n^+$  e temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x(t)), A(x(t)) \rangle &= \langle Xx(t) + X^*x(t), Ax(t) \rangle = \langle A^*Xx(t), x(t) \rangle + \langle x(t), XAx(t) \rangle \\ &= \langle x(t), A^*Xx(t) + XAx(t) \rangle = -\langle x(t), Wx(t) \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Seja agora  $\hat{x}$  uma solução de  $x'(t) = Ax(t)$  com  $\frac{d}{dx}V(x(t)) = 0, t \geq 0$ . Temos então

$$0 = \frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), A(x(t)) \rangle = -\langle x(t), Wx(t) \rangle, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.27)$$

portanto este produto interno também se anula no cálculo a seguir

$$0 \leq \langle x(t), (W - C^*C)x(t) \rangle = \langle x(t), Wx(t) \rangle - \langle Cx(t), Cx(t) \rangle = -\langle Cx(t), Cx(t) \rangle, \quad \forall t \geq 0.$$

Porém como  $C \in \mathcal{S}_n^+$  temos  $Cx(t) = 0, \forall t \geq 0$ , e da observabilidade do sistema (3.26) temos, pela Definição 2.1.7, que  $x(0) = 0$  e, pelo Teorema 2.1.8, que  $W \in \mathcal{S}_n^{++}$ , logo da equação (3.27) temos  $x(t) \equiv 0$ . Do Teorema 3.1.7 sobre a Função de Lyapunov o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável e do Teorema 3.2.1 sobre sistemas lineares segue que  $A$  é estável. ■

Já temos como estudar a estabilidade tanto de sistemas de EDO lineares quanto de sistemas mais gerais, o próximo passo é aplicar estes conceitos e resultados na teoria de sistemas de controle, onde encontramos a Estabilização de sistemas.

# Capítulo 4

## Estabilização

### 4.1 Estabilização em $\mathbb{R}^n$

A Estabilização de Sistemas de Controle se preocupa em analisar quando que um sistema de controle possui pontos de equilíbrio estáveis. Neste capítulo vamos estudar algumas estratégias de estabilização nos Espaços  $\mathbb{R}^n$  e também nas Variedades Diferenciáveis. Nos concentramos principalmente no caso linear pois, como dito anteriormente, podemos usar os resultados de sistemas lineares para estudar a estabilidade na vizinhança dos pontos de equilíbrio. Ao contrário do que foi feito nos outros capítulos, iniciamos com o estudo do caso linear e só depois verificamos o caso geral. A estratégia principal será procurar controles por realimentação de estado ou por realimentação de saída, obtendo assim um sistema de EDO's para aplicar os resultados obtidos no capítulo anterior.

#### 4.1.1 Estabilização de Sistemas de Controle Linear

Ao Longo desta seção vamos considerar o sistema de controle linear autônomo

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

onde  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$ . Representaremos este sistema pelo par  $(A, B)$ .

A primeira técnica de Estabilização que vamos estudar é a Realimentação de Estados. Supondo que o controle  $u$  possa ser obtido a partir do estado  $x$  por uma lei linear, dita lei Feedback, escrevemos

$$u(t) = Fx(t),$$

onde  $F \in M(m \times n, \mathbb{R})$ . Substituindo em (4.1), obtemos o sistema linear

$$x'(t) = (A + BF)x(t). \quad (4.2)$$

Do Teorema 3.2.1 sabemos que o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  será assintoticamente estável para o sistema (4.2) se escolhermos  $F$  de modo que  $A + BF$  seja uma matriz estável. Isto motiva a seguinte definição.

**Definição 4.1.1.** O sistema de controle (4.1) é denominado *estabilizável* quando existe  $F \in M(m \times n, \mathbb{R})$  tal que a matriz  $A + BF \in M(n, \mathbb{R})$  é estável. Neste caso dizemos que o par  $(A, B)$  é estabilizável.

Quando existe  $F \in M(m \times n, \mathbb{R})$  tal que  $u(t) = Fx(t)$  dizemos que o sistema de controle (4.1) é do tipo circuito fechado (closed-loop-control) e  $u$  é chamado de controle por realimentação de estados. O sistema (4.1), quando escrito com o controle de circuito fechado, é representado pelo par  $(A+BF, B)$  e temos os seguintes resultados.

**Lema 4.1.2.** ([1]) *Se o sistema (4.1) é controlável então para toda matriz  $F \in M(m \times n, \mathbb{R})$  o sistema (4.2) é controlável, i.e.,  $\text{rank}[A; B] = \text{rank}[A + BF; B]$ .*

**Demonstração:** Para a prova veja [1] página 46. ■

Além deste Lema precisamos dos Teoremas 2.1.12 e 2.1.5 para provar o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.3.** *Seja  $(A, B)$  um sistema autônomo controlável. Então  $(A, B)$  é estabilizável pela matriz de realimentação*

$$F := -B^*W_T^{-1},$$

onde

$$W_T := \int_0^T e^{-tA} B B^* e^{-tA^*} dt.$$

**Demonstração:** Considere inicialmente o sistema auxiliar

$$\begin{cases} x'(t) = (A + BF)^* x(t) \\ y(t) = B^* x(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Como o sistema (4.1) dado pelo par  $(A, B)$  é controlável, temos do critério de Kalmann, Teorema 2.1.11 item e), que  $(-A, B)$  também é, do Lema 4.1.2 segue que  $(-(A + BF), B)$  é controlável. Agora da implicação  $a) \Rightarrow d)$  do Teorema 2.1.12 segue que o par  $(-[-(A + BF)]^T, B^T)$  é observável

Por outro lado, a definição de  $W_T$  garante que  $W_T \in \mathcal{S}_n^+$ , pois dado  $x \in \mathbb{R}^n$  qualquer

$$\langle x, W_T x \rangle = \langle x, \int_0^T e^{-tA} B B^* e^{-tA^*} dt x \rangle = \int_0^T \langle e^{-tA^*} x, B B^* e^{-tA^*} x \rangle dt = \int_0^T \|B^* e^{-tA^*} x\|^2 dt \geq 0.$$

Agora como o sistema (4.1) é controlável a implicação  $a) \Rightarrow d)$  do Teorema 2.1.9 garante que  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ , logo  $W_T \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

Note agora que ao definirmos  $W = -(A + BF)W_T - W_T(A + BF)^*$  e utilizando tanto as propriedades de exponencial de matriz quanto o fato de  $W_T \in \mathcal{S}_n$  obtemos

$$\begin{aligned} -W &= (A + BF)W_T + W_T(A + BF)^* = AW_T + B(-B^*W_T^{-1})W_T + W_TA^* + W_T^*(-B^*W_T^{-1})^*B^* \\ &= AW_T - BB^* + W_TA^* - W_T^*(W_T^*)^{-1}BB^* = AW_T - BB^* + W_TA^* - BB^* \\ &= AW_T + W_TA^* - 2BB^* = A \left( \int_0^T e^{-As} B B^* e^{-A^*s} ds \right) + \left( \int_0^T e^{-As} B B^* e^{-A^*s} ds \right) A^* - 2BB^* \\ &= \int_0^T - \left[ A e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} - e^{-sA} B B^* A^* e^{-sA^*} \right] dt - 2BB^* = - \int_0^T \frac{d}{dt} \left( e^{-At} B B^* e^{-A^*t} \right) dt - 2BB^* \\ &= -(e^{-AT} B B^* e^{-A^*T} - BB^T) - 2BB^* = -e^{AT} B B^* e^{-A^*T} - BB^*. \end{aligned}$$

Donde segue que  $W = e^{-AT} B B^* e^{-A^*T} + BB^*$  e portanto  $W - BB^* = W_T \in \mathcal{S}_n^+$ . Note agora que, tomando  $(A^* = (A + BF)^*, C^* = B^*$  e  $X = W_T$ , podemos utilizar o Teorema 3.2.19, temos então



- (1)  $W_T \in \mathcal{S}_n^{++}$ ;
- (2) O sistema (4.3) é observável;
- (3)  $W := -(A + BF)W_T - W_T(A + BF)^*$  é tal que  $W - BB^* \in \mathcal{S}_n^+$ .

Isto garante que  $A + BF$  é uma matriz estável ■

**Observação 4.1.4.** O Teorema 4.1.3 garante que todo sistema autônomo controlável é estabilizável por realimentação de estado. A recíproca entretanto não é verdadeira, conforme podemos verificar no seguinte exemplo: Considere o sistema

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com  $B \equiv 0, x(t), u(t) \in \mathbb{R}^2$ . Temos que o sistema é estabilizável pois  $\forall F \in M(m \times n, \mathbb{R}), (A + BF) = A$  é uma matriz estável. Por outro lado o sistema não é controlável, pois

$$W_T = \int_0^T e^{-As} BB^T e^{-A^T s} ds \equiv 0 \notin \mathcal{S}_n^{++}$$

e do Teorema 2.1.9 temos que o sistema não é controlável.

O próximo resultados nos dá as condições suficientes para garantir a controlabilidade de um sistema estabilizável.

**Teorema 4.1.5.** *Seja  $(A, B)$  um sistema autônomo de controle. Então  $(A, B)$  é controlável se e somente se  $(A, B)$  e  $(-A, -B)$  são ambos estabilizáveis.*

**Demonstração:** Seja  $(A, B)$  controlável, então  $(-A, -B)$  também é controlável; de fato, como  $(A, B)$  é controlável o Teorema 2.1.12 item b) garante que se  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  então  $B^* e^{(t_1-t)A^*} x \neq 0$  para qualquer  $t \in [t_0, t_1]$ , dessa forma temos  $\int_0^t \|B^* e^{sA^*} x\|^2 ds > 0, \forall t \in [t_0, t_1]$ , donde segue que  $W_T = \int_0^T e^{sA} BB^* e^{sA^*} ds \in \mathcal{S}_n^{++}$ . Note agora que

$$W_T = \int_0^T e^{sA} BB^* e^{sA^*} ds = \int_0^T e^{-(-sA)} (-B) (-B^*) e^{-(-sA^*)} ds,$$

e portanto segue do Teorema 2.1.9 a)  $\Leftrightarrow$  d) que  $(-A, -B)$  é controlável. Agora a estabilidade de  $(A, B)$  e  $(-A, -B)$  segue do Teorema 4.1.3.

Reciprocamente, sejam  $(A, B)$  e  $(-A, -B)$  estabilizáveis. O Teorema 2.1.11 nos permite escrever os sistemas  $(\pm A, \pm B)$  na forma normal

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} x \pm \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

onde  $(\pm A_{11}, \pm B_1)$  são controláveis.

Os sistemas

$$\left( \pm \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

são estabilizáveis quando existe uma matriz  $F = (F_1, F_2)$  tal que

$$\pm \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \pm \hat{A}$$

são matrizes estáveis. Utilizando o polinômio característico temos

$$P_{\pm\hat{A}} = P_{\pm A_{11} + B_1 F_1} \cdot P_{\pm A_{22}},$$

Logo, para que  $\pm\hat{A}$  sejam estáveis, é necessário que os blocos  $\pm A_{22}$  possuam somente autovalores com parte real estritamente negativa, como isso não pode acontecer temos  $A_{22} = 0$ . O Teorema 2.1.11 nos garante então que existe  $P \in M(n; \mathbb{R})$  tal que

$$A = P^{-1} A_{11} P \text{ e } B = P^{-1} B_1,$$

onde  $P$  é não singular. A controlabilidade de  $(A, B)$  segue agora da controlabilidade de  $(A_{11}, B_1)$ . ■

Vejamos um exemplo

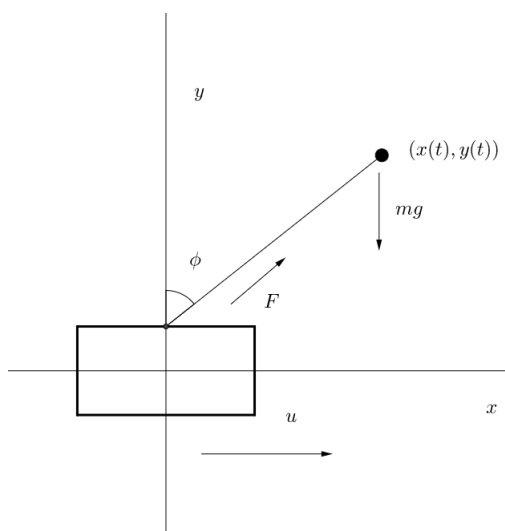


Figura 4.1: Equilíbrio de um bastão

**Exemplo 4.1.6.** Considere um bastão de massa desprezível e de comprimento unitário que possui em sua extremidade superior uma massa pontual  $m$ . A extremidade inferior pode ser deslocada ao longo do eixo  $x$  e a aceleração correspondente a este deslocamento corresponde ao controle. Denotamos por

$t$	tempo, $t > 0$ ;
$\xi(t)$	posição da base do bastão;
$u(t)$	aceleração horizontal da base do bastão;
$\phi(t)$	ângulo entre o bastão e o eixo vertical;
$(x(t), y(t))$	coordenada do ponto de massa $m$ .

Observe que a posição de repouso  $\phi = 0$  não é estável, no sentido de que pequenos deslocamentos do ponto de equilíbrio provocam a queda do bastão. Podemos então nos perguntar se é possível tornar o sistema estável, isto é, se o sistema é estabilizável.

Analisando o modelo temos que sobre a massa  $m$  agem a gravidade e uma força  $F$  na direção do bastão, provocada pelo movimento da base do bastão. Temos então

$$\text{Somatório das forças na direção } x : F \cdot \sin(\phi).$$

$$\text{Somatório das forças na direção } y : F \cdot \cos(\phi) - mg.$$

Supondo que tratamos apenas deslocamentos pequenos da posição de repouso  $\phi = 0$ , fazemos as seguintes hipóteses simplificadoras:

$$\sin(\phi) \sim \phi, \cos(\phi) \sim 1, y \sim 1, \ddot{y} \sim 0.$$

Da lei de Newton sabemos que

$$m\ddot{y} = F(t) - mg \text{ e } m\ddot{x} = F(t)\phi(t),$$

que implicam  $F(t) = mg$  e  $m\ddot{x} = F(t)\phi(t)$ . Das hipóteses obtemos ainda

$$x(t) = \xi(t) + \phi(t).$$

Observe que  $\ddot{\xi}(t) = u(t)$ , e assim temos a equação

$$\ddot{\phi}(t) = g\phi(t) - u(t), \quad (4.4)$$

que reescrita em forma de sistema é dada por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = gz_1 - u(t) \end{cases}. \quad (4.5)$$

Podemos verificar que a posição de repouso é de fato instável. Com efeito, a matriz do sistema é dada por

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são as soluções da equação  $\lambda^2 - g = 0$ , isto é,  $\lambda_1 = \sqrt{g}$ ,  $\lambda_2 = -\sqrt{g}$ . Portanto  $A$  não pode ser estável e uma das soluções do sistema cresce exponencialmente.

Podemos tomar a equação (4.4) e reescrevê-la como o sistema de controle autônomo

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ com } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Este sistema satisfaz a condição de posto, pois

$$[B; AB] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

logo é controlável, e assim o Teorema 4.1.3 garante a possibilidade de estabilizar o sistema. Calculando a matriz  $F$  dada no Teorema 4.1.3 obtemos

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{g}t) & -\frac{\sinh(\sqrt{g}t)}{\sqrt{g}} \\ -\sqrt{g} \cdot \sinh(\sqrt{g}t) & \cosh(\sqrt{g}t) \end{pmatrix}, \quad e^{-tA^*} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{g}t) & -\sqrt{g} \cdot \sinh(\sqrt{g}t) \\ -\frac{\sinh(\sqrt{g}t)}{\sqrt{g}} & \cosh(\sqrt{g}t) \end{pmatrix}$$

$$e^{-tA}BB^*e^{-tA^*} = \begin{pmatrix} \frac{\sinh^2(\sqrt{g}t)}{\sqrt{g}} & -\frac{\cosh(\sqrt{g}t)\sinh(\sqrt{g}t)}{\sqrt{g}} \\ -\frac{\cosh(\sqrt{g}t)\sinh(\sqrt{g}t)}{\sqrt{g}} & \cosh^2(\sqrt{g}t) \end{pmatrix}$$

$$W_T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{g}\cdot\sinh(2\sqrt{g}T)-2gT}{4g^2} & -\frac{\sinh(2\sqrt{g}T)+2\sqrt{g}T}{4g} \\ -\frac{\sinh(2\sqrt{g}T)+2\sqrt{g}T}{4g} & \frac{\cosh^2(\sqrt{g}T)}{2\sqrt{g}} \end{pmatrix}, \quad F = -b^*W_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8\omega^2\sinh^2(\omega T)}{\omega\sinh^2(2\omega T)-4\omega\sinh^4(\omega T)-4T^2} \\ \frac{4\omega^2(a-2\omega T)}{\omega\sinh^2(2\omega T)-4\omega\sinh^4(\omega T)-4T^2} \end{pmatrix}.$$

**Observação 4.1.7.** No exemplo anterior, poderíamos ter sido mais diretos e buscado estabilizar o sistema com um controle de realimentação de estados mais geral. Como queremos uma lei de Feedback linear, podemos definir um controle que seja proporcional ao ângulo entre o bastão e o eixo horizontal e também à taxa de variação deste ângulo, ou seja,

$$u = -k_1\phi - k_2\dot{\phi} = -k_1z_1 - k_2z_2,$$

onde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Daí obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = (g + k_1)z_1 + k_2z_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

cujas matriz é dada por

$$\bar{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g + k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são dados pela equação  $\lambda^2 - \lambda k_2 - g - k_1$ , isto é,

$$\lambda \in \left\{ \frac{k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4(-g - k_1)}}{2} \right\}.$$

Portanto, variando os valores de  $k_1$  e  $k_2$  podemos fazer com que a matriz do sistema seja estável, um exemplo é tomando  $k_1 = -g - 1$  e  $k_2 = -2$ , donde temos  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . A equação resultante é

$$\ddot{\phi}(t) + 2\dot{\phi}(t) + \phi(t) = 0$$

cujas soluções linearmente independentes são

$$\phi(t) = e^{-t} \text{ e } \phi(t) = te^{-t},$$

donde temos que a estratégia de controle  $u(t) = 2z_1(t) + (1+g)z_2(t)$  estabiliza o sistema.

Vejamos agora que o procedimento da Observação 4.1.7 sempre pode ser feito para sistemas controláveis, o que nos fornece uma outra forma de encontrar um controle de Realimentação de Estados que estabilize o sistema. Este procedimento, que consiste de designar a posição dos autovalores de uma matriz da forma  $A + BF$ , onde  $A \in M(n; \mathbb{R})$ ,  $B \in M(n \times m; \mathbb{R})$  e  $F \in M(m \times n; \mathbb{R})$ , no plano complexo, equivale a escolher os polos de uma função racional. Por isso este método é chamado de Colocação de Polos.

Demonstraremos inicialmente o caso  $m = 1$ , ou seja, sistemas da forma

$$x'(t) = Ax(t) + bu \text{ com } A \in M(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n. \quad (4.7)$$

O primeiro resultado nessa direção se baseia na forma normal (Teorema 2.1.11).

**Lema 4.1.8.** *O Sistema de Controle (4.7) é controlável se e somente se existe  $P \in M(n, \mathbb{R})$  invertível tal que o sistema  $(A, b)$  nas coordenadas  $z(t) = Px(t)$  tem a forma*

$$z'(t) = \bar{A}z(t) + \bar{b}u(t)$$

com

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Os números  $a_0, \dots, a_{n-1}$  são os coeficientes do polinômio característico de  $A$ ,  $p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ .

**Demonstração:**  $a) \Rightarrow b)$  Queremos construir a matriz  $P \in M(n; \mathbb{R})$  invertível tal que  $\bar{A} = PAP^{-1}$  e  $e_n = \bar{b} = Pb$ , ou seja, tal que sejam válidas as relações:

- (i)  $Pb = e_n$ ;
- (ii)  $PAP^{-1}e_1 = -a_0e_n$ ;
- (iii)  $PAP^{-1}e_{k+1} = e_k - a_ke_n$ ,  $1 \leq k < n$ .

Vamos então buscar uma base  $w_1, \dots, w_n$  para  $\mathbb{R}^n$  tal que  $Pw_k = e_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , isto será o bastante para que tenhamos (i), (ii) e (iii).

Definimos os vetores  $w_k$  recursivamente por

$$w_n = b, \quad w_k = Aw_{k+1} + a_kb, \quad 1 \leq k < n.$$

Temos então

$$\begin{aligned} w_k &= Aw_{k+1} + a_kb = A(Aw_{k+2} + a_{k+1}b) + a_kb \\ &= A^2(Aw_{k+3} + a_{k+2}b) + a_{k+1}Ab + a_kb \\ &= A^3w_{k+3} + a_{k+2}A^2b + a_{k+1}Ab + a_kb \\ &= A^{n-k}b + \sum_{j=1}^{n-k} a_{n-j}A^{n-k-j}b, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Agora como  $(A, b)$  é controlável, temos  $\text{rank}[A; b] = n$ , ou seja  $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$  são linearmente independentes, desta forma vemos que os vetores  $w_1, \dots, w_n$  também o são pois

$$\alpha_1 + w_1 + \dots + \alpha_n w_n = \alpha_1(A^{n+1}b + \dots + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}A^{n-k-j}b) + \dots + \alpha_n b = \sum_{i=1}^n \lambda_i A^{n-i}b,$$

e assim podemos verificar que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Note que já temos  $Pb = Pw_n = e_n$ , agora do Teorema de Cayley-Hamilton temos que  $P_A(A) = \mathbf{O}$ , logo

$$Aw_1 = A^n b + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}A^{n-j}b + a_0b - a_0b = p_A(A)b - a_0b = -a_0b = -a_0w_n.$$

Assim, como  $P^{-1}e_1 = w_1$  e  $P^{-1}e_n = w_n$  temos

$$PAP^{-1}e_1 = -a_0PP^{-1}e_n \Rightarrow PAP^{-1} = -a_0e_n$$

e finalmente

$$Aw_{k+1} = w_k - a_kb \Rightarrow PAP^{-1}e_{k+1} = e_k - a_ke_n, \quad 1 \leq k \leq n,$$

o que prova (i), (ii) e (iii).

$b) \Rightarrow a)$  Seja agora o sistema  $(\bar{A}, \bar{b})$  como no item (b), temos que  $\text{rank}[\bar{A}; \bar{b}] = n$ , logo este sistema é controlável. Como  $P^{-1}\bar{A}P = A$  e  $P^{-1}\bar{b} = b$  temos de 1.1.25 que as trajetórias de  $(A, b)$  são as mesmas de  $(\bar{A}, \bar{b})$ , logo  $(A, b)$  também é controlável. ■

**Teorema 4.1.9.** *Sejam  $(A, b)$  um sistema controlável e  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  números complexos dados, com  $r + 2(s - r) = n$ . Então existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que o polinômio característico de  $A + bv^*$  possui  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r, \{\lambda_j, \bar{\lambda}_j\}_{j=r+1}^s$  como raízes.*

**Demonstração:** Seja  $v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ . O Lema 4.1.8 nos garante que existe  $P \in M(n; \mathbb{R})$  invertível tal que  $P^{-1}AP = A$  e  $P^{-1}\bar{b} = b$ , onde o sistema  $(\bar{A}, \bar{b})$  é como no Lema 4.1.8. Portanto após uma mudança de variáveis é possível escrever o sistema  $A + bv^*$  na forma

$$A + bv^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ v_0 - a_0 & v_1 - a_1 & v_2 - a_2 & \dots & v_{n-2} - a_{n-2} & v_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix},$$

onde  $a_0, \dots, a_{n-1}, 1$  são os coeficientes do polinômio característico de  $A$ ,  $p_A$ . Podemos ver também que

$$p_{A+bv^*}(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - a_i)\lambda^i.$$

Note agora que os coeficientes  $\lambda_i - a_i, i = 0, \dots, n-1$  são determinados pelas raízes do polinômio, portanto conhecendo os  $a_i$ 's podemos definir os  $\lambda_i$ 's ao escolhermos quem serão as raízes de  $p_{A+bv^*}$ . ■

**Exemplo 4.1.10.** Considere novamente o exemplo do equilíbrio de um bastão

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A estabilização com  $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{R}^n$  nos dá a matriz

$$A + bv^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - v_0 & -v_1 \end{pmatrix},$$

logo o polinômio característico será  $p_{A+bv^*}(\lambda) = \lambda^2 + v_1\lambda + (v_0 - g)$ . Escolhendo as raízes  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  temos

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1) = p_{A+bv^*}(\lambda) \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = \lambda^2 + v_1\lambda + (v_0 - g).$$

Portanto  $v_0 = g + 1, v_1 = 2$ .

**Observação 4.1.11.** É possível obter um resultado semelhante ao apresentado no Teorema 2.1.11 para sistemas gerais  $(A, B)$ , i. e.,  $B \in M(n \times m), m \geq 1$ . Apresentamos de maneira superficial como seria a determinação da lei de Feedback. Considere o sistema de controle

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{com } A \in M(n, \mathbb{R}), \quad B \in M(n \times m, \mathbb{R}).$$

Dados os números  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$  vamos buscar uma matriz  $F \in M(m \times n, \mathbb{R})$  tal que os autovalores de  $A + BF$  sejam os  $\lambda_i$ 's. Para que isso aconteça o seguinte sistema linear deve ser satisfeito

$$(A + BF)v_i = \lambda_i v_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Assim, definindo  $q_i := Fv_i, 1 \leq i \leq n$ , obtemos o sistema equivalente

$$(A - \lambda_i I)v_i + Bq_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dessa forma,

$$\begin{pmatrix} v_i \\ q_i \end{pmatrix} \in \ker(A - \lambda_i I|B), 1 \leq i \leq n,$$

e podemos definir  $F = (q_1|\dots|q_n)(v_1|\dots|v_n)^{-1}$  no caso em que  $\det(v_1|\dots|v_n) \neq 0$ . Essa última condição é satisfeita quando  $A + BF$  é diagonalizável, o que por sua vez pode ser garantido pela escolha dos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ .

Portanto de posse do sistema  $(A, B)$  e dos candidatos a autovalores  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ , calculamos os núcleos das  $n$  matrizes  $(A - \lambda_i I|B) \in M(n \times (n + m); \mathbb{R})$  e definimos a matriz  $F$  como sendo a matriz cujas colunas são formadas por elementos desses núcleos.

**Exemplo 4.1.12.** Considere o sistema de controle dado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para  $u(t) \equiv 0$  temos os autovalores  $-1, -2$  e  $2$ . Vamos escolher para novos autovalores os números  $-2, -3$  e  $-4$ . Calculamos o núcleo de  $(A - \lambda_i I|B)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , onde

$$(A - \lambda_i I|B) = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \lambda_i - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Após alguns cálculos obtemos  $\ker(A - \lambda_i I|B)$  para  $i = 1, 2, 3$  respectivamente

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda_1 I|B) &= \text{span}\{(1, -2, 4, 0, 0), (1, 0, 0, -2, -4)\}; \\ \ker(A - \lambda_2 I|B) &= \text{span}\{(3, 2, -6, -5, 0), (2, -3, 9, 0, 26)\}; \\ \ker(A - \lambda_3 I|B) &= \text{span}\{(2, 1, -4, -9, 0), (-2, -4, 16, 0, -36)\}. \end{aligned}$$

Podemos tomar então

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 52 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ e } q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como  $\det(v_1|v_2|v_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$ , a matriz de realimentação

pode ser definida por

$$F = (q_1|q_2|q_3)(v_1|v_2|v_3)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -2 & \frac{52}{5} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ \frac{52}{5} & -12 & -5 \end{pmatrix}$$

Obtemos assim a matriz de realimentação

$$F = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ \frac{52}{5} & -12 & -5 \end{pmatrix},$$

e a matriz do sistema de circuito fechado é

$$A + BF = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{72}{5} & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora buscar estabilizar o seguinte sistema de controle autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad A \in M(n, \mathbb{R}), B \in M(n \times m, \mathbb{R}), C \in M(d \times n, \mathbb{R}), \quad (4.8)$$

através de uma estratégia de realimentação de saída  $u(t) = Fy(t) = FCx(t)$ ,  $F \in M(m \times d, \mathbb{R})$ . Note porém que as hipóteses

(4.8) é controlável e observável

não são suficientes para garantir a estabilidade da matriz  $(A + BFC)$ . Tal fato pode ser comprovado no simples exemplo a seguir.

**Exemplo 4.1.13.** *Considere o problema de controle descrito por*

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t) \text{ e } y(t) = x(t).$$

Na forma de sistema temos

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (4.9)$$

Claramente (4.9) é controlável pois  $\text{rank}[A; B] = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ; por outro lado, temos (4.9) observável pois  $\text{rank}[A^*; C^*] = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ . Vamos escolher uma estratégia de controle linear de realimentação de saída. Temos

$$u(t) := \alpha y(t), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R},$$

e obtemos assim a equação  $\ddot{x}(t) + (1 - \alpha)x(t) = 0$ , que corresponde ao sistema  $x'(t) = (A + B\alpha C)x(t)$  com

$$(A + B\alpha C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí segue que

$$p_{A+B\alpha C}(\lambda) = \lambda^2 + (1 - \alpha).$$

Como o coeficiente de  $\lambda$  é nulo já sabemos que a matriz não pode ser estável, independente do valor de  $\alpha$ . Outra forma de ver isso é encontrando as raízes:

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha - 1},$$

e vemos novamente que não existe  $\alpha$  que garanta  $\text{Re}(\lambda_+) < 0$  e  $\text{Re}(\lambda_-) < 0$  ao mesmo tempo. Portanto o sistema não é estabilizável.

A estratégia do Observador Dinâmico será a seguinte:

- Simulamos o sistema (4.8) por outro sistema com a mesma estrutura; a saber, pelo sistema

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + \bar{B}(t) \\ w(t) = Cz(t) \end{cases}, \quad A \in M(n, \mathbb{R}), \bar{B}(t) \in M(n, \mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad C \in M(d \times n, \mathbb{R});$$



- Vamos tomar o controle  $\bar{B}(t)$  do sistema simulado como  $\bar{B}(t) = Bu(t) + L(w(t) - y(t))$ , com  $L \in M(n \times d, \mathbb{R})$ , onde  $y(t) = Cx(t)$  é a saída do sistema original;
- Obtemos assim o sistema simulado dado por

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) + L(Cz(t) - y(t)) \\ w(t) = Cz(t) \end{cases}, A \in M(n, \mathbb{R}), B \in M(n \times m, \mathbb{R}), L \in M(n \times d, \mathbb{R}), C \in M(d \times n, \mathbb{R});$$

que denominamos *observador dinâmico*;

- Definimos a diferença entre o estado original e o simulado por  $\varepsilon(t) := z(t) - x(t)$ , que satisfaz

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) &= z'(t) - x'(t) = Az(t) + Bu(t) - Ax(t) - Bu(t) - L(Cx(t) - Cz(t)) \\ &= A(z(t) - x(t)) + L(C(z(t) - x(t))) = A\varepsilon(t) + LC\varepsilon(t) \\ &= (A + LC)\varepsilon(t); \end{aligned}$$

- Utilizamos os conhecimentos anteriores para definir  $L$  de modo que  $(A + LC)$  seja estável, garantindo assim  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ .

Vamos assim encontrar uma aproximação  $z(t)$  para o estado  $x(t)$  e a partir desta aproximação escolhemos um controle da forma  $u = Fx$ . Substituindo esse controle no sistema original obtemos o sistema acoplado

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + BFz(t) \\ z'(t) = (A + BF + LC)z(t) - LCx(t) \end{cases}, \quad (4.10)$$

que está associado à matriz

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{pmatrix}.$$

Se a matriz  $\hat{A}$  for estável garantimos que (4.8) é estabilizável através do sistema acoplado (4.10) (constituído de processo mais observador). Note que além de estabilizar o processo, conseguimos reconstruir os estados.

Definindo  $\eta := z - x$ . O sistema (4.10) se escreve nas novas variáveis  $(z, \eta)$  como

$$\begin{cases} z' = (A + BF)z + BF\eta \\ \eta' = (A + LC)\eta \end{cases}. \quad (4.11)$$

Como (4.11) foi obtido de (4.10) após uma simples mudança de coordenadas temos que os sistemas são equivalentes e assim a matriz  $\hat{A}$  é semelhante à matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix}.$$

A tarefa de estabilizar  $\hat{A}$  é então equivalente à de estabilizar  $\tilde{A}$ . Note porém que a estrutura de  $\tilde{A}$  nos permite escrever seu polinômio característico como

$$p_{\tilde{A}} = p_{(A+BF)}p_{(A+LC)}. \quad (4.12)$$

Sendo assim, precisamos

- (i) Determinar  $F$  tal que a matriz  $A + BF$  seja estável;

(ii) Determinar  $L$  tal que a matriz  $A + LC$  seja estável.

Já estudamos como determinar se (4.8) é estabilizável ou não, vamos então buscar condições para que tenhamos ii).

**Teorema 4.1.14.** *Sejam  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $C \in M(l \times n, \mathbb{R})$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) (4.8) é detectável;
- b) Dado um autovalor  $\lambda_j$  de  $A$  com  $Re(\lambda) \geq 0$ , temos que seu autovetor  $v_j \in \mathbb{C}^n$  é tal que  $Cv \neq 0$  ( $v \notin \ker C$ );
- c) (4.8) é estabilizável;
- d) Existe  $L \in M(n \times d, \mathbb{R})$  tal que a matriz  $(A + LC)$  é estável.

**Demonstração:** a)  $\Rightarrow$  b) Sejam  $v$  e  $\lambda$  como em (b). Considere o PVI  $z' = Az, z(0) = v$ , com soluções particulares

$$z_r(t) := Re(e^{\lambda t}v), \quad z_i(t) := Im(e^{\lambda t}v), \quad t \in \mathbb{R}$$

Note que se  $Cv = 0$ , então  $v$  pertence a  $\mathcal{N}$ ; neste caso,  $\lim_t z_r(t) \neq 0$ , o que contradiz a detectabilidade de  $(A, C)$ .

b)  $\Rightarrow$  c) Considere o sistema auxiliar

$$\{x'(t) = A^*x(t) - C^*u(t). \quad (4.13)$$

O Teorema 2.1.11 sobre a forma normal nos permite escrever o sistema (4.13) na forma normal

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_I & A_{III} \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C_I \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde o subsistema dado por  $A_I$  e  $C_I$  é controlável. Analisamos duas possíveis situações:

Se o bloco  $A_{II}$  não existir, temos  $A^* = P^{-1}A_I P$  e  $-C^* = P^{-1}C_I$ . Logo, (4.13) é controlável. O item (c) segue agora do Teorema 4.1.3.

Se o bloco  $A_{II}$  existir na forma normal, então dados um autovalor  $\mu$  de  $A_{II}^*$  e um autovetor correspondente  $w$ , temos para  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$  que

$$\bar{A}^* v = \mu v \text{ e } \bar{C}v = 0.$$

Da hipótese (b) temos  $Re(\mu) < 0$ , assim temos que  $A_{II}^*$  é uma matriz estável, logo  $A_{II}$  também é pois elas têm os mesmos autovalores. Do Teorema 4.1.5 temos que a controlabilidade de (4.13) garante sua estabilidade, ou seja, existe  $F_I$  tal que  $A_I + C_I F_I$  é estável. Temos então que a matriz

$$\bar{A} + \bar{C}(F_I|0) = \begin{pmatrix} A_I + C_I F_I & \times \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix}$$

é estável pois  $p_{\bar{A} + \bar{C}(F_I|0)} = p_{A_I + C_I F_I} \cdot p_{A_{II}}$ . Como  $\bar{F} = (F_I|0)$  estabiliza a forma normal do sistema (4.13) e temos  $A = P^{-1}\bar{A}P = A^*$ ,  $P^{-1}\bar{C} = -C^*$ , então  $F = \bar{F}P$  estabiliza (4.13).

c)  $\Rightarrow$  d) Pela hipótese, existe uma matriz  $D$  tal que a matriz  $A^* + (-C^*)(-D^*)$  é estável. Logo,  $A + LC$  é estável com a escolha  $L := D^*$ , pois  $A^* + (-C^*)(-D^*) = (A + DC)^*$  e assim seus autovalores são os mesmos.

d)  $\Rightarrow$  a) Dado  $z_0 \in \cap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k)$  defina  $z(t) := e^{tA}z_0, t \in \mathbb{R}$ . Por construção temos  $Cz_0 = 0$  e como  $CA^k z_0 = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , devemos ter  $A^k z_0 = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , donde  $Az_0 = 0$ . Por outro lado, segue do Teorema de Cayley-Hamilton que

$$\begin{aligned} Cz(t) &= Ce^{tA}z_0 = Cz_0 + tCAz_0 + \dots + \frac{t^k}{k!}CA^k z_0 + \dots + \frac{t^n}{n!}CA^n z_0 + \dots \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{t^j}{j!}CA^j z_0 = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{t^j}{j!}C \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^j A^k \right) z_0 = 0, \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ . Logo  $z(t)$  também é solução de

$$z'(t) = (A + LC)z(t).$$

Como por hipótese a matriz  $(A + LC)$  é estável e por construção  $z_0$  é um ponto crítico de  $(A + LC)$ , temos do Teorema 3.2.1 que  $z_0$  é um ponto assintoticamente estável de  $z'(t) = (A + LC)z(t)$ ; isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_0.$$

Porém o fato de todos os autovalores de  $(A + LC)$  possuírem parte real negativa implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Pela unicidade do limite temos que  $z_0 = 0$  e assim  $\cap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k) = \{0\}$ , logo o sistema  $(A, C)$  é detectável de acordo com o Teorema 2.1.9. ■

Finalizamos esta seção com um exemplo.

**Exemplo 4.1.15.** Considere o sistema da forma (4.8) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0),$$

Vamos aplicar a estratégia do observador dinâmico a este sistema. Pela condição do posto podemos ver que este sistema é controlável e observável, e portanto também detectável. Sendo  $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$  temos que os autovalores de  $(A + LC)$  são as raízes do polinômio

$$p_{A+LC}(r) = r^2 + (3 - l_1)r + (2 - 2l_1 - 3l_2). \quad (4.14)$$

Escolhendo autovalores  $r_1 = -9$  e  $r_2 = -10$ , temos

$$(r + 9)(r + 10) = P_{A+LC}(r) \Rightarrow r^2 + 19r + 90 = r^2 + (3 - l_1)r + (2 - 2l_1 - 3l_2)$$

$$\begin{cases} 3 - l_1 = 19 \\ 2 - 2l_1 - 3l_2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = -16 \\ 2 + 32 - 3l_2 = 90 \end{cases} \Rightarrow l_2 = -\frac{56}{3}.$$

O observador dinâmico terá a forma

$$x' = \hat{A}x + Bu - Ly,$$

com

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } L = (-16 \quad -56/3).$$

Como  $C = (1, 0)$ , a componente  $z_1$  já é observada, o observador dinâmico nos permite reconstruir a componente  $z_2$  do estado. Suponha as seguintes condições:

$$u(t) \equiv 1, z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \text{ e } x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com  $\xi \in \mathbb{R}$ . Então  $\varepsilon := z - x$  satisfaz

$$\begin{cases} \varepsilon' &= (A + LC)\varepsilon \\ \varepsilon(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Os autovalores de  $A + LC$  são  $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -10$  e os respectivos autovetores são  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ . Temos então

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 3e^{-9t} - 3e^{-10t} \\ 8e^{-9t} - 7e^{-10t} \end{pmatrix}.$$

Sendo agora  $F = (f_1, f_2)$ , os autovalores de  $A + BF$  são dados pelas raízes de

$$p_{A+BF}(r) = r^2 + (3 - f_1 - f_2)r + (2 - 5f_1 - f_2).$$

Escolhendo para  $A + BF$  os autovalores  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -6$ , obtemos para  $f_1 = -5$  e  $f_2 = -3$ . Portanto a matriz de (4.11) é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -17 & 3 \\ 0 & 0 & -56/3 & -2 \end{pmatrix},$$

que por nossa construção terá os autovalores  $-5, -5, -9$  e  $-10$ , sendo assim estável.

## 4.1.2 Estabilização de Sistemas Não-Lineares

Consideramos agora o sistema não-linear geral:

$$x' = f(x, u) \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \quad (4.15)$$

O resultado a seguir nos dá condições para a existência de um feedback estabilizante em uma vizinhança pequena da origem, e é obtido por uma técnica de linearização.

**Teorema 4.1.16.** *Considere o sistema de controle (4.15) e suponha que  $f \in C^1$  e  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  contenha uma vizinhança da origem. Suponha ainda as seguintes condições*

- (a)  $f(0, 0) = 0$ ;
- (b) Denotando

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } B = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad (4.16)$$

o sistema linearizado  $\dot{x} = Ax + Bu$  é completamente controlável.

Então existe uma vizinhança da origem  $\Omega$  tal que o sistema (4.15) restrito a  $\Omega$  admite um controle por realimentação de estados que é contínuo e estabiliza o sistema.

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.1.5, existe uma matriz  $F$  tal que  $\tilde{A} = A + BF$  tem apenas autovalores com a parte real negativa. Portanto pelo Teorema 3.2.16 existe uma matriz simétrica  $P$  tal que  $\tilde{A}^*P + P\tilde{A} = -I$ . Em particular, a forma quadrática  $V(x) := \langle x, Px \rangle$  é uma função de Lyapunov para o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + BFx.$$

Afirmamos que  $V$  é também uma função de Lyapunov para o sistema não-linear

$$x' = f(x, Fx) \quad (4.17)$$

restrito a uma vizinhança pequena da origem. De fato, pela hipótese podemos escrever

$$f(x, u) = Ax + Bu + R(x, u)$$

com

$$\lim_{(x,u) \rightarrow 0} \frac{R(x, u)}{|x| + |u|} = 0. \quad (4.18)$$

Portanto, toda trajetória de (4.17) suficientemente próxima da origem satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \langle \nabla V(x), f(x, Fx) \rangle = \langle 2Px, Ax + BFx + R(x, Fx) \rangle = 2\langle Px, \tilde{A}x \rangle + 2\langle Px, R(x, u) \rangle \\ &= \langle Px, \tilde{A}x \rangle + \langle Px, \tilde{A}x \rangle + 2\langle Px, R(x, u) \rangle = \langle \tilde{A}^*Px, x \rangle + \langle x, P^*\tilde{A}x \rangle + 2\langle Px, R(x, u) \rangle \\ &= \langle \tilde{A}^*Px, x \rangle + \langle P\tilde{A}^*x, x \rangle + 2\langle Px, R(x, u) \rangle = \langle \tilde{A}^*Px + P\tilde{A}^*x, x \rangle + 2\langle Px, R(x, u) \rangle \\ &= \langle -Ix, x \rangle + 2\langle Px, R(x, u) \rangle = -\|x\|^2 + 2\langle Px, R(x, u) \rangle < 0 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1.8, isto mostra que o sistema é Lyapunov estável, quando restrito a uma vizinhança da origem da forma  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < \delta\}$ ,  $\delta > 0$ . ■

Para sistemas lineares temos o critério de Kalman (item e) do Teorema 2.1.5), que nos diz que para cada sistema linear controlável a aplicação  $\Theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Theta(x, u) = Ax + Bu$ , é sobrejetiva e novamente do Teorema 4.1.5 temos que este sistema é estabilizável. Para o caso geral podemos formular uma condição necessária similar.

**Teorema 4.1.17.** *Considere o sistema de controle (4.15) e suponha que  $U = \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ . Se existe um feedback estabilizante suave em uma vizinhança da origem, então a aplicação  $f$  é aberta em 0, isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\{v \in \mathbb{R}^n : |v| < \delta\} \subset \{f(x, u) \in \mathbb{R}^n : |x| + |u| \leq \varepsilon\}. \quad (4.19)$$

**Demonstração:** Para a prova veja [18] página 253. ■

## 4.2 Estabilização em Variedades

Considere novamente o sistema de controle afim sobre uma variedade diferenciável  $M$ .

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + u(t)Y(x). \quad (4.20)$$

**Definição 4.2.1.** Se  $x_0 \in M$  é tal que  $X(x_0) = 0$ , então  $(X, Y)$  é dito *estabilizável em  $x_0$*  se existe uma função  $f$  em  $M$  com  $f(x_0) = 0$  tal que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do campo de vetores  $X + fY$ . Isto significa que

- i)  $x_0$  é um ponto estável de  $X + fY$ ;
- ii)  $\{x_0\}$  é o conjunto  $\omega$ -limite de cada curva integral de  $X + fY$ .

Dizemos que esta  $f$  é um feedback estabilizante do controle

**Observação 4.2.2.** Note que a função  $f$  está fazendo o papel do controle de realimentação de estados.

Temos também que toda curva integral  $\varphi(t, x)$  de  $X + fY$  corresponde a uma solução de (4.20) gerada pelo controle  $u(t) = f(x(t))$ . Portanto, se  $(X, Y)$  é estabilizável em  $x_0$ , então todo ponto de  $M$  pode ser  $(X, Y)$ -associado a pontos em  $B(x_0, \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$ . Se além disso  $x_0 \in \text{int}(A^-(x_0))$ , então  $A^-(x_0) = M$ .

**Definição 4.2.3.** Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definimos o campo de vetores  $ad^n X(Y)$  como

$$\begin{aligned} ad^0 X(Y) &= Y, \\ ad^{n+1} X(Y) &= [X, ad^n X(Y)]. \end{aligned}$$

Dizemos que um par de campos de vetores  $(X, Y)$  satisfaz a *ad-condition* se o subespaço vetorial gerado pelos vetores da forma  $ad^n X(Y)(x)$  é igual a  $T_x M$  para cada  $x \in M$ .

Em particular, se  $x \in M$  é tal que  $X(x) = 0$ , então a *ad-condition* é equivalente a  $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$  ser um conjunto linearmente independente, onde  $b = Y(x)$  e  $A = \left[ \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \right]_{ij}$ .

**Observação 4.2.4.** Novamente chamamos atenção para o fato de que o campo de vetores  $ad^n X(Y)$  possui uma base teórica que está exposta no Apêndice A, que é a Teoria de Lie, e a aplicação *ad* é apresentada na Definição 5.2.10.

Abordamos agora a questão da existência de controles estabilizantes. Dada  $f$  um função diferenciável em  $M$  qualquer, seja  $Z = X + fY$ . Se  $x \in M$  é tal que  $X(x) = 0$  e  $f(x) = 0$  então temos que se os autovalores da matriz que representa  $dZ(x)$  têm parte real negativa, então  $Z$  é assintoticamente estável em  $x$ .

Se além disso  $(X, Y)$  satisfaz a *ad-condition* então segue da teoria linear que o espectro de  $Z(x)$  pode ser completamente controlado para diferentes escolhas de  $df$ , e portanto temos estabilização local.

Exemplos simples mostram que em geral a estabilização local não se estende globalmente. O seguinte teorema no entanto nos dará condições sob as quais  $(X, Y)$  é globalmente estabilizável. Porém, antes de enunciá-los, vejamos alguns resultados necessários.

**Definição 4.2.5.** Dada uma equação diferencial  $x'(t) = f(t, x)$  e dados os fluxos  $\varphi(t, x)$  que representam as soluções da equação, dizemos que um conjunto  $C \subseteq M$  é *invariante pelo fluxo  $\varphi$*  se  $\varphi_t(C) \subseteq C, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Dizemos ainda que  $C$  é positivamente invariante se  $\varphi_t(C) \subseteq C, \forall t \geq 0$  e que  $C$  é negativamente invariante se  $\varphi_t(C) \subseteq C, \forall t \leq 0$ .

Em outras palavras, o conjunto invariante  $C$  é caracterizado pela propriedade de que se um ponto  $x_0$  pertence a  $C$  então toda a trajetória que passa por ele, tanto avançando quanto retrocedendo, está contida em  $C$ . Note que uma órbita que forma uma curva fechada é um conjunto invariante.

**Teorema 4.2.6.** (Teorema de Invariância de LaSalle) *Seja  $V(x)$  uma função escalar,  $V \in C^1$  para todo  $x$ . Suponha que  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$  e  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Seja  $E$  o conjunto dos pontos críticos de  $V$ , isto é,  $x \in E \Rightarrow \dot{V}(x) = 0$ , e seja  $M$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Então todas as soluções limitadas para  $t > 0$  tendem para  $M$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

*Se além disso soubermos que*

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

*então cada solução é limitada para  $t \geq 0$ , e podemos concluir que todas as soluções se aproximam de  $M$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Se  $M$  é a origem, temos estabilização completa.*

**Demonstração:** Como temos que  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$  e  $\dot{V}(x) \leq 0$ , então em particular isto vale para a região  $\Omega_l$  que consiste dos pontos  $x$  para os quais  $V(x) < l$ .

As condições em  $V$  implicam que  $V(t) = V(\varphi(t, x))$  é não crescente quando  $t \rightarrow \infty$  e que  $V(t) \geq 0$  dentro de  $\Omega_l$ . Portanto toda trajetória que começa em  $\Omega_l$  deve permanecer em  $\Omega_l$ . Assim  $V(t)$  tem um limite  $l_0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $l_0 < l$ . Por continuidade concluímos que  $V(x) = l_0$  no conjunto  $\omega$ -limite  $L_\omega$  da trajetória  $\varphi(t, x)$ . Portanto  $L_\omega \subset \Omega_l$  e  $\dot{V} = 0$  em  $L_\omega$ .

Consequentemente,  $L_\omega \subset E$ , e como  $L_\omega$  é um conjunto invariante ele está em  $M$ . Como  $\varphi(t, x)$  permanece em  $\Omega_l$ , esta trajetória é limitada para  $t \geq 0$  e então  $\varphi(t, x) \rightarrow M$  quando  $t \rightarrow \infty$ . ■

**Teorema 4.2.7.** *Sejam  $M = \mathbb{R}^n$  e  $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$  linear, isto é,  $X(x) = Ax, A \in M(n; \mathbb{R})$ , com o espectro de  $A$  consistindo de  $n$  autovalores imaginários distintos. Se  $Y$  é qualquer campo vetorial em  $M$  tal que  $(X, Y)$  satisfaz a ad-condition para todo  $x \neq 0$ , então  $(X, Y)$  é globalmente estabilizável em  $x = 0$ .*

**Demonstração:** Como  $A$  tem espectro puramente imaginário, existe uma base de  $\mathbb{R}^n$  na qual  $A$  satisfaz  $A = -A^*$ , isto é,  $A$  é antissimétrica; portanto não há perda de generalidade em supormos que  $A$  é antissimétrica. Seja  $f(x) = -\langle x, Yx \rangle$ , e seja  $Z = A + fY$ .

Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e^{tZ}(x)\|^2 &= \langle e^{tZ}(x), \frac{d}{dt} e^{tZ}(x) \rangle = \langle e^{tZ}x, Z(e^{tZ}x) \rangle = \langle e^{tZ}x, Ae^{tZ}x \rangle + f(e^{tZ}x) \langle e^{tZ}x, Y(e^{tZ}x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle e^{tZ}x, Ae^{tZ}x \rangle + \frac{1}{2} \langle e^{tZ}x, Ae^{tZ}x \rangle + f(e^{tZ}x) (-f(e^{tZ}x)) \\ &= \frac{1}{2} \langle e^{tZ}x, Ae^{tZ}x \rangle + \frac{1}{2} \langle A^* e^{tZ}x, e^{tZ}x \rangle - f(e^{tZ}x)^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle e^{tZ}x, Ae^{tZ}x \rangle - \frac{1}{2} \langle Ae^{tZ}x, e^{tZ}x \rangle - f(e^{tZ}x)^2 = -f(e^{tZ}x)^2 \leq 0 \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando  $\Omega = \{x : f(x) = 0\}$ , pelo Teorema da Invariância de LaSalle todas as curvas integrais de  $Z$  tenderão ao maior subconjunto de  $\Omega$  que é invariante por  $Z$ . Denotando por  $E$  este subconjunto invariante de  $\Omega$ , basta mostrar que  $E = \{0\}$ .

Seja  $x \in E$ . Como  $e^{tZ}x \in E \forall t$ , temos  $f(e^{tZ}x) \equiv 0$ . Assim,  $e^{tZ}x = e^{tA}x$ . Daí segue que  $\langle e^{tA}x, Y(e^{tA}x) \rangle \equiv 0 \forall t$ . Derivando sucessivamente em  $t = 0$  vemos que  $x$  é

ortogonal a todos os vetores da forma  $ad^k X(Y)(x)$ ,  $k > 0$ . Como o par  $(X, Y)$  satisfaz a  $ad$ -condition, segue que  $x = 0$ . Portanto  $E = \{0\}$  e assim  $f$  é o controle globalmente estabilizante em  $x = 0$ . ■

**Exemplo 4.2.8.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores matriciais em  $\mathbb{R}^2$  dados por*

$$X(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad e \quad Y(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

*É fácil mostrar que  $X$  e  $Y$  satisfazem a  $ad$ -condition em todos os pontos de  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .*

**Exemplo 4.2.9.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores matriciais em  $\mathbb{R}^2$  dados por*

$$X(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad e \quad Y(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

*É fácil mostrar que  $(X, Y)$  satisfaz a  $ad$ -condition em todos os pontos de  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .*



# Capítulo 5

## Apêndice A: Grupos e Álgebras de Lie

O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos de grupos de Lie e suas álgebras de Lie. A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de um grupo de Lie  $G$  é definida como o espaço dos campos invariantes (à esquerda ou à direita, conforme a escolha), com o colchete dado pelo colchete de Lie de campos de vetores. Os fluxos dos campos invariantes estabelecem a aplicação exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ , que é o principal elo de ligação entre  $\mathfrak{g}$  e  $G$ . Essas construções utilizam alguns resultados sobre campos de vetores em variedades e seus colchetes de Lie, estes resultados também podem ser encontrados neste apêndice. Outro instrumento de ligação entre os grupos de Lie e suas álgebras de Lie são as representações adjuntas. As fórmulas envolvendo essas representações são apresentadas nesse capítulo.

### 5.1 Grupos e Álgebras de Lie

**Definição 5.1.1.** O conjunto não vazio  $G$  é um *grupo de Lie* se possui as seguintes estruturas:

- $(G, *_G)$  é um grupo algébrico com a operação  $*_G$ ;
- $G$  é uma variedade diferenciável de tal forma que o produto do grupo, denotado por

$$\begin{aligned} p : (G, *_G) \times (G, *_G) &\rightarrow (G, *_G) \\ (g, h) &\mapsto p(g, h) = g *_G h, \end{aligned}$$

é uma aplicação diferenciável.

**Exemplo 5.1.2.**  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  é um grupo de Lie de dimensão 1. De fato,  $S^1$  pode ser visto como grupo com relação à multiplicação de números complexos, ou seja,

$$\begin{aligned} p : S^1 \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (z, w) &\mapsto p(g, h) = z \cdot w = e^{i\theta_z} \cdot e^{i\theta_w} = e^{i(\theta_z + \theta_w)} \end{aligned}$$

que é diferenciável pela diferenciabilidade da aplicação exponencial complexa. A estrutura de variedade diferenciável foi mostrada no exemplo ??.

**Proposição 5.1.3.** Se  $(G_1, p_1), (G_2, p_2)$  são grupos de Lie, então  $G_1 \times G_2$  é um grupo de Lie

**Demonstração:** Sabemos que o produto cartesiano de grupos ainda é um grupo. Também temos que o produto cartesiano de variedades diferenciáveis é uma variedade diferenciável.

Definindo

$$p : ((G_1, *_{G_1}) \times (G_2, *_{G_2}) \times (G_1, *_{G_1}) \times (G_2, *_{G_2})) \rightarrow ((G_1, *_{G_1}) \times (G_2, *_{G_2})) \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mapsto p((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = (p_1(g_1, g_2), p_2(h_1, h_2))$$

vemos que  $p$  é diferenciável pois cada uma de suas coordenadas é diferenciável. ■

**Corolário 5.1.4.** De maneira geral, dados  $(G_i, p_i), 1 \leq i \leq n$ , grupos de Lie, temos que  $(\prod_{i=1}^n G_i, p)$  é um grupo de Lie com a operação definida por

$$p((g_1, \dots, g_n), (h_1, \dots, h_n)) = (p_1(g_1, h_1), \dots, p_n(g_n, h_n)).$$

**Exemplo 5.1.5.** O toro bidimensional  $T^2$  é um grupo de Lie. De fato,  $T^2 = S^1 \times S^1$ , e portanto segue da Proposição 5.1.3 que  $T^2$  é um grupo de Lie

**Exemplo 5.1.6.**  $\mathbb{R}^n$  é um grupo de Lie, pois é o produto de  $n$  grupos de Lie  $(\mathbb{R}, +)$ .

Vejamos algumas aplicações importantes para trabalharmos com os grupos de Lie.

**Definição 5.1.7.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Dado  $g \in G$  qualquer, definimos as aplicações

$$Lg : G \rightarrow G \quad Rg : G \rightarrow G \\ h \mapsto Lg(h) = gh \quad h \mapsto Rg(h) = hg,$$

chamadas *translação à esquerda* e *translação à direita*, respectivamente.

É possível verificar que  $Rg$  e  $Lg$  são diferenciáveis.

**Definição 5.1.8.** Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $g \in G$ . Chama-se *automorfismo interno* a aplicação

$$Cg : G \rightarrow G \\ h \mapsto Cg(h) = g^{-1}hg,$$

isto é,  $Cg = Lg^{-1} \circ Rg$ .

**Observação 5.1.9.** Note que  $Cg$  é um difeomorfismo pois, por definição, é a composta de  $Lg^{-1}$  e  $Rg$  que são difeomorfismos.

**Proposição 5.1.10.** Se  $G$  é um grupo de Lie, então a aplicação

$$i : G \rightarrow G \\ g \mapsto i(g) = g^{-1}$$

é um difeomorfismo. Além disso, a diferencial de  $i$  é dada por

$$d(i)_g : T_g G \rightarrow T_{i(g)} G \equiv T_{g^{-1}} G \\ v \mapsto d(i)_g \cdot v = -d(L^{-1}g)_e \circ d(Rg^{-1})_g.$$

Em particular,

$$d(i)_e = -d(L^{-1}e)_e \circ d(R_e)_e = -Id : T_e G \rightarrow T_e G.$$

**Demonstração:** Para a prova veja [17] página 92. ■

Em posse das aplicações de traslação podemos classificar um tipo de campos de vetores que aparece nos Grupos de Lie.

**Definição 5.1.11.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Um campo de vetores  $X$  em  $G$  é dito *invariante à esquerda* se

$$\forall g, h \in G, d(Lg)_h(X(h)) = X(gh) = X(Lg(h)),$$

ou resumidamente  $Lg_*X = X$ .

Analogamente dizemos que o campo  $Y$  em  $G$  é *invariante à direita* se vale

$$\forall g, h \in G, d(Rg)_h(X(h)) = X(hg) = X(Rg(h)),$$

ou resumidamente  $Rg_*X = X$ .

Definimos então os conjuntos

$$Inv^r = \{X \in \mathfrak{X}(G) : Rg_*X = X, \forall g \in G\} \text{ e } Inv^l = \{X \in \mathfrak{X}(G) : Lg_*X = X, \forall g \in G\}$$

**Observação 5.1.12.** Como  $Rg$  e  $Lg$  são difeomorfismos, vemos que os conjuntos  $Inv^r$  e  $Inv^l$  são subespaços vetoriais de  $\mathfrak{X}(G)$ , pois são imagem das aplicações lineares  $d(Rg)$  e  $d(Lg)$  respectivamente.

Sendo  $X$  um campo invariante à esquerda ou à direita, se  $h = e$  temos

$$X(g) = X(ge) = d(Rg)_e(X(e)) \text{ ou } X(g) = X(eg) = d(Lg)_e(X(e)).$$

Portanto cada elemento de  $T_eG$  determina um único campo invariante à direita e outro à esquerda. Dado  $A \in T_eG$  denotamos por  $A^r$  o único campo invariante à direita determinado por  $A$  e por  $A^l$  o único campo invariante à esquerda determinado por  $A$ .

**Exemplo 5.1.13.** Para  $G = (\mathbb{R}^n, +)$  os campos de vetores invariantes à esquerda são constantes. Isto é,  $X(x) = v, v \in \mathbb{R}^n$  fixado. De fato, para  $v \in G$  fixo, a traslação à esquerda é dada por

$$\begin{aligned} L_v : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto L_v(x) = v + x \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (dL_v)_y : T_y\mathbb{R}^n &\rightarrow T_{L_v(y)}\mathbb{R}^n \\ \xi &\mapsto d(L_v)_y(\xi) = Id\xi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Seja agora  $X$  um campo invariante à esquerda. Segue da definição que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, d(L_v)_y(X(y)) = X(v + y);$$

logo, de (5.1)  $X(y) = X(v + y) \forall y \in \mathbb{R}^n$ . Como  $v \in \mathbb{R}^n$  é arbitrário,  $X$  é constante, ou seja,

$$X \in Inv^l \Rightarrow \exists \xi \in T_eG = \mathbb{R}^n \text{ tal que } X(x) = \xi, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Exemplo 5.1.14.** Se  $G = GL(n, \mathbb{R})$  os campos invariantes à esquerda são da forma  $X(g) = gA, A \in T_eG, g \in G$ . Com efeito, a traslação à esquerda em  $G$  é dada por  $Lg(h) = g.h, g, h \in G$ , produto de matrizes, que é a restrição a  $GL(n, \mathbb{R})$  de uma transformação linear de  $M(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ . Assim,  $d(Lg)_h = Lg$ .

Se  $X \in Inv^l$ , então para cada  $g \in G$  fixo vale

$$X(g) = d(Lg)_eX(e) = Lg(X(e)) = gX(e).$$

De maneira análoga os campos invariantes à direita são da forma  $X(g) = Ag, g \in G, A \in T_eG$ .

**Proposição 5.1.15.** *Seja  $G$  um grupo de Lie. Os conjuntos  $Inv^l$  e  $Inv^r$  são isomorfos a  $T_eG$ .*

**Demonstração:** Sejam  $Rg$  e  $Lg$  as translações à direita e à esquerda respectivamente. Como  $Rg_* = dRg$  e  $Lg_* = dLg$  são aplicações lineares segue que  $Inv^r$  e  $Inv^l$  são subespaços vetoriais de  $\mathfrak{X}(G)$ . Assim as aplicações

$$\begin{aligned} r : T_eG &\rightarrow Inv^r & l : T_eG &\rightarrow Inv^l \\ A &\mapsto r(A) = A^r = d(Rg)_e(A) & A &\mapsto l(A) = A^l = d(Lg)_e(A) \end{aligned}$$

são bijeções, pois possuem inversas

$$\begin{aligned} r^{-1} : Inv^r &\rightarrow T_eG & l^{-1} : Inv^l &\rightarrow T_eG \\ X &\mapsto r^{-1}(X) = X(e) & X &\mapsto l^{-1}(X) = X(e). \end{aligned}$$

Donde obtemos o resultado. Temos ainda que  $Inv^r$  e  $Inv^l$  são isomorfos, pois  $\Phi = l \circ r^{-1}$  é um isomorfismo. ■

A próxima definição identifica os espaços vetoriais que preservam o colchete de Lie.

**Definição 5.1.16.** Uma *álgebra de Lie* consiste de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto, denominado colchete, denotado por  $[\cdot, \cdot]$ , que satisfaz as propriedades:

(i) Bilinearidade, i.e.,  $\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} [X_1 + \lambda X_2, X_3] &= [X_1, X_3] + \lambda[X_2, X_3] \\ [X_1, \lambda X_2 + X_3] &= \lambda[X_1, X_2] + [X_1, X_3] \end{aligned}$$

(ii) Anti-simetria, i.e.,  $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$

$$[X_1, X_1] = 0 \Rightarrow [X_1, X_2] = -[X_1, X_2]$$

(iii) Identidade de Jacobi,  $\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$

$$[X_1, [X_2, X_3]] = [[X_1, X_2]X_3] + [X_2, [X_1, X_3]]$$

**Exemplo 5.1.17.**  $\mathbb{R}^3$  munido do colchete dado pelo produto vetorial,  $[u, v] = u \times v, \forall u, v \in \mathbb{R}^3$ , é uma álgebra de Lie.

**Exemplo 5.1.18.** O conjunto  $M(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  com o colchete dado pelo comutador

$$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$$

é uma álgebra de Lie.

**Exemplo 5.1.19.** Considere o conjunto  $\mathfrak{X}^\infty(M)$  dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  sobre uma variedade diferenciável  $M$ . Este conjunto é um espaço vetorial e ao ser munido do comutador ele se torna uma álgebra de Lie.

Para cada par de campos de vetores  $(X, Y)$  denotamos por  $\mathcal{L}(X, Y)$  a álgebra de Lie gerada por  $X$  e  $Y$ . Para cada  $x \in M$  seja  $\mathcal{L}(X, Y)(x) := \{V(x) : V \in \mathcal{L}(X, Y)\}$ . Geralmente  $\mathcal{L}(X, Y)$  é uma álgebra de dimensão infinita, mas para cada  $x \in M$ ,  $\mathcal{L}(X, Y)(x)$  é um subespaço vetorial de  $T_xM$ .

**Definição 5.1.20.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  é dito uma *subálgebra de Lie* se é fechado sob o colchete de  $\mathfrak{g}$ , isto é,

$$\forall X, Y \in \mathfrak{h}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

**Exemplo 5.1.21.** Seja  $tr : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação que nos dá o traço de uma matriz. Então o conjunto  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : tr(X) = 0\}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , pois dadas  $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  temos

$$tr([X, Y]) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0.$$

Daí  $[X, Y] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  e é fácil ver que a soma de duas matrizes de traço zero ainda possui traço zero e o mesmo vale para o produto de uma matriz de traço zero por um escalar.

Para definir a álgebra de Lie de um grupo de Lie precisamos de alguns resultados que relacionem campos em variedades com o colchete de Lie.

**Definição 5.1.22.** Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Para cada  $p \in M$  definimos a aplicação  $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ , denominada o *pushforward* associado a  $F$ , por

$$dF_p(X_p(f)) = (F_* X)(f) = X(f \circ F), \forall f \in C^\infty(N), \forall X \in \mathfrak{X}^r(M).$$

**Definição 5.1.23.** Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Dizemos que dois campos de vetores  $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$  e  $Z \in \mathfrak{X}^\infty(N)$  são *F-relacionados* se

$$\forall p \in M, F_* Y_p = Z_{F(p)}.$$

**Proposição 5.1.24.** Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Dados  $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}^\infty(M)$  e  $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}^\infty(N)$  tais que  $V_i$  e  $W_i$  são *F-relacionados*, para  $i = 1, 2$ , então  $[V_1, V_2]$  e  $[W_1, W_2]$  são *F-relacionados*.

**Demonstração:** Para a prova veja [11] página 188. ■

**Corolário 5.1.25.** Se além das hipóteses da Proposição 5.1.24 temos que  $F : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo, então  $F_*[V_1, V_2] = [F_*V_1, F_*V_2]$ .

De fato, este é o caso em que  $W_i = F_*V_i, i = 1, 2$ .

**Lema 5.1.26.** Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $X, Y \in \text{Inv}^r$ , então  $[X, Y] \in \text{Inv}^r$ . Analogamente para  $X, Y \in \text{Inv}^l$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $Rg$  é um difeomorfismo e como  $X, Y \in \text{Inv}^r$  temos

$$Rg_*X = X \text{ e } Rg_*Y = Y.$$

Assim,  $X$  e  $Y$  são *Rg-relacionados* a si mesmos. Do Corolário 5.1.25 temos

$$Rg_*[X, Y] = [Rg_*X, Rg_*Y] = [X, Y].$$

■

Dados o grupo de Lie  $G$  e  $A, B$  em  $T_eG$  definimos os colchetes

$$[A, B]_r = [A^r, B^r](e) \text{ e } [A, B]_l = [A^l, B^l](e),$$

os quais utilizaremos para definir álgebras de Lie nos conjuntos  $Inv^r$  e  $Inv^l$ . Vejamos agora suas propriedades e qual a relação entre eles.

**Proposição 5.1.27.** *Para cada Grupo de Lie  $G$  os espaços  $Inv^r$  e  $Inv^l$  são subálgebras de Lie da álgebra de Lie  $(\mathfrak{X}(G), [\cdot, \cdot])$ .*

**Demonstração:** Segue da Observação 5.1.12, do Lema 5.1.26 e da definição de subálgebras de Lie. ■

**Lema 5.1.28.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie,  $A \in T_eG$  e  $i(g) = g^{-1} \forall g \in G$  a inversa em  $G$ . Vale que*

$$i_*(A^r) = (-A)^l \text{ e } i_*(A^l) = (-A)^r,$$

ou detalhadamente

$$di_{g^{-1}} * (A^r(g^{-1})) = -A^l(g) \text{ e } di_{g^{-1}}(A^l(g^{-1})) = -A^r(g).$$

**Demonstração:** Para a prova veja [17] página 99. ■

**Proposição 5.1.29.** *Se  $G$  é um grupo de Lie e  $A, B \in T_eG$ , então  $[A, B]_r = -[A, B]_l$ .*

**Demonstração:** Para a prova [17] página 100. ■

Esta proposição nos mostra então que  $i_* = di_e$  é um isomorfismo entre os espaços vetoriais  $Inv^r$  e  $Inv^l$  que preserva as operações dos colchetes  $[\cdot, \cdot]_r$  e  $[\cdot, \cdot]_l$ . Como da Proposição 5.1.27 temos que  $(Inv^r, [\cdot, \cdot]_r)$  e  $(Inv^l, [\cdot, \cdot]_l)$  são álgebras de Lie, temos que  $i_* = -Id$  é um isomorfismo entre estas álgebras de Lie.

Podemos então fazer a seguinte definição:

**Definição 5.1.30.** Dado um grupo de Lie  $G$ , a álgebra de Lie de  $G$ , denotada por  $\mathfrak{g}$  ou  $\mathcal{L}(G)$ , é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas

$$(Inv^r, [\cdot, \cdot]_r) \approx (Inv^l, [\cdot, \cdot]_l) \approx (T_eG, [\cdot, \cdot]_r) \approx (T_eG, [\cdot, \cdot]_l)$$

**Exemplo 5.1.31.** *Considere novamente o grupo de Lie  $G = GL(n, \mathbb{R})$ , temos que para todo  $g \in G$  vale*

$$\begin{aligned} X \in Inv^r &\Rightarrow \exists A \in T_eG \text{ tal que } X(g) = Ag; \\ X \in Inv^l &\Rightarrow \exists A \in T_eG \text{ tal que } X(g) = gA. \end{aligned}$$

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$  o colchete de Lie em coordenadas locais é expresso como

$$[X, Y] = dY(X) - dX(Y). \quad (5.2)$$

Desta forma, ao atuar em  $\mathcal{L}(G) = (Inv^r, [\cdot, \cdot]_r)$  sabemos que existem  $A, B \in T_eG$  tais que  $X = A^r$  e  $Y = B^r$ , assim temos

$$[X, Y] = dY(X) - dX(Y) = BA - AB.$$

Para o caso  $\mathcal{L}(G) = (Inv^l, [\cdot, \cdot]_l)$  obtemos  $[X, Y] = AB - BA$ .

**Proposição 5.1.32.** *Se  $G$  e  $H$  são grupos de Lie, com álgebras de Lie  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$  e  $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$  respectivamente, então a álgebra de Lie de  $G \times H$  é  $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, [\cdot, \cdot])$  com o colchete*

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}), \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}. \quad (5.3)$$

**Demonstração:** Como  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  são álgebras de Lie, temos que são espaços vetoriais, e como o produto cartesiano de espaços vetoriais também é um espaço vetorial temos que  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  é um espaço vetorial.

A bilinearidade, a anti-simetria e a Identidade de Jacobi são satisfeitas pelo colchete definido em (5.3) pelo fato de serem satisfeitas pelos colchetes definidos em  $\mathfrak{g}$  e em  $\mathfrak{h}$ . ■

**Corolário 5.1.33.** *Sejam  $G_i, 1 \leq i \leq n$ , grupos de Lie com álgebras de Lie  $(\mathfrak{g}_i, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_i}), 1 \leq i \leq n$ . Então  $(\prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_i, [\cdot, \cdot])$  é uma álgebra de Lie com o colchete*

$$[(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)] = ([X_1, Y_1]_{\mathfrak{g}_1}, \dots, [X_n, Y_n]_{\mathfrak{g}_n}), \forall X_i, Y_i \in \mathfrak{g}_i, 1 \leq i \leq n.$$

Agora que sabemos o que são grupos de Lie e como surgem suas álgebras de Lie vamos estudar a aplicação exponencial, que relaciona estes dois objetos. Começamos apresentando uma propriedade importante dos vetores em uma álgebra de Lie.

**Proposição 5.1.34.** *Um campo invariante em um grupo de Lie é completo.*

**Demonstração:** Veja [17] página 102, ou ainda [11] páginas 191 e 192; em particular o Teorema 8.37 e o Corolário 8.38. ■

Já podemos definir a aplicação exponencial de um grupo de Lie

**Definição 5.1.35.** Para  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $X \in T_e G = \mathfrak{g}$ , definimos a *aplicação exponencial*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \exp(X) = \exp X \end{aligned}$$

que de forma explícita é dada por

$$\exp(X) = (X^r)_{t=1}(e) = (X^l)_{t=1}(e).$$

**Observação 5.1.36.** Como os campos são completos, a solução de  $\dot{g} = Xg$  com  $g(0) = e$  se estende para  $t = 1$ , logo  $\exp X$  está bem definida.

Podemos ver que a aplicação  $\exp$  tem a seguinte propriedade:

$$\exp((t+s)X) = \exp(tX) \exp(sX) = \exp(sX) \exp(tX);$$

logo,  $\exp$  é um homomorfismo entre o grupo  $(\mathbb{R}, +)$  e o subgrupo de  $G$   $Im(\exp) = \{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ . Este subgrupo é denominado o subgrupo a 1-parâmetro gerado por  $X \in \mathfrak{g}$ . Os próximos resultados trazem outras propriedades dessa aplicação.

**Proposição 5.1.37.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie,  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie e  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  a aplicação exponencial. Valem as seguintes afirmações:*

- (i)  $X \in Inv^r \Rightarrow X_t = L \exp(tX)$ , isto é,  $X_t(g) = \exp(tX)g$ ;
- (ii)  $X \in Inv^l \Rightarrow X_t = R \exp(tX)$ , isto é,  $X_t(g) = g \exp(tX)$ ;

(iii)  $\exp(0) = e$ ;

(iv)  $(\exp X)^n = \exp(nX) \forall n \in \mathbb{Z}$ . Em particular  $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ .

**Demonstração:** Seja  $X \in \text{Inv}^r$ . Então  $X_t(hg) = X_t(h)g, \forall g, h \in G$ . Por definição  $\exp X = X_t|_{t=1}(e)$ , por outro lado vemos que  $\forall Z \in \mathfrak{X}(G)$  e  $\forall a \in \mathbb{R}$  vale  $(aZ)_t = Z_{at}$ ; assim vale

$$X_t(g) = X_t(eg) = X_t(e)g = tX_1(e)g = \exp(tX)g,$$

o que prova (i), o item (ii) é análogo.

Para o item (iii) considere  $X \in \mathfrak{g} \approx \text{Inv}^r$ . Então  $\forall g \in G$  temos de 1. que

$$\exp(0)g = \exp(0X)g = X_0g = X_0(e)g = e(g).$$

Portanto  $\exp(0) = e$ . Analogamente para  $X \in \text{Inv}^l$ .

Finalmente, provamos 4. usando a propriedade de  $\exp$  ser um homomorfismo de  $R$  em  $G$  temos para  $n \in \mathbb{Z}$

$$(\exp(X))^n = (X_1(e))^n = X_1(e) \cdot X_1(e) \cdot \dots \cdot X_1(e) \quad (5.4)$$

$$= \exp(X) \cdot \exp(X) \cdot \dots \cdot \exp(X) = \exp(nX). \quad (5.5)$$

Em particular, para  $n = -1$  vale  $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ . ■

**Exemplo 5.1.38.** A aplicação exponencial em  $GL(n; \mathbb{R})$  coincide com a exponencial de matrizes. De fato, sendo  $X \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$  temos a equação diferencial associada

$$\frac{dg}{dt} = Xg$$

que é um sistema linear, logo a solução é dada por  $g(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} = \exp(X)$ .

**Proposição 5.1.39.** Sejam  $G$  um grupo de Lie,  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie e  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  a aplicação exponencial. Então  $(d\exp)_0 = Id : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

**Demonstração:** Dado  $X \in \mathfrak{g}$  qualquer, temos

$$(d\exp)_0(X) = \frac{d}{dt} \exp(0 + tX)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(tX)|_{t=0} = X \exp(tX)|_{t=0} = X.$$

Portanto segue que  $(d\exp)_0 = Id$ . ■

**Corolário 5.1.40.** Dados o grupo de Lie  $G$ ,  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie e  $\exp \mathfrak{g} \rightarrow G$  a aplicação exponencial temos que existem vizinhanças  $U = U(0) \subset \mathfrak{g}$  e  $V = V(e) \subset G$  tais que  $\exp|_U : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo

De fato, da Proposição temos que para qualquer  $X \in \mathfrak{g}$  temos que  $(d\exp)_0(X) = Id(X)$  é invertível, assim o Teorema de Função Inversa garante que existem vizinhanças  $U = U(0) \subset \mathfrak{g}$  e  $V = V(e) \subset G$  tais que  $\exp$  é um difeomorfismo de  $U$  em  $V$ .

**Observação 5.1.41.** A Proposição 5.1.39 nos mostra que podemos definir aplicação  $\log = \exp^{-1} : V \rightarrow U$  e esta aplicação é um difeomorfismo local de  $G$  em  $\mathfrak{g}$ .

Uma importante ferramenta que obtemos com a existência da aplicação exponencial é a seguinte:

**Definição 5.1.42.** Dados um grupo de Lie  $G$  e  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de  $G$ , a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é a solução da equação

$$Z = \log(e^X e^Y) \quad (5.6)$$

Para  $X, Y \in \mathfrak{g}$  possivelmente não comutativos. Esta fórmula faz uma ligação entre  $G$  e  $\mathfrak{g}$  ao expressar o logaritmo do produto de dois elementos  $e^X$  e  $e^Y$  de  $G$  como um elemento  $Z$  de  $\mathfrak{g}$  usando apenas operações de álgebras de Lie.



## 5.2 Representações Adjuntas

Vamos agora estudar as Representações Adjuntas. Estas aplicações são homomorfismos e nos dão informações sobre o grupo de Lie ou álgebra de Lie em que estão definidas.

**Definição 5.2.1.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie. Um homomorfismo diferenciável entre  $G$  e  $H$ ,  $\varphi : G \rightarrow H$ , é dito um *homomorfismo de grupos de Lie*. Análogo para isomorfismos e automorfismos de grupos de Lie.

**Definição 5.2.2.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie e  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  suas álgebras de Lie, uma aplicação linear  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  que satisfaz  $\theta[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [\theta X, \theta Y]_{\mathfrak{h}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$  é dita um *homomorfismo de álgebras de Lie*.

**Lema 5.2.3.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  respectivamente. Seja  $\varphi : G \rightarrow H$  um homomorfismo diferenciável e tome  $X \in \mathfrak{g}$ . Então vale

$$\forall g \in G, (d\varphi)_g(X^r(g)) = (d\varphi)_e^r(X) \cdot (\varphi(g)) \quad e \quad (d\varphi)_g(X^l(g)) = (d\varphi)_e^l(X) \cdot (X)(\varphi(g)).$$

**Demonstração:** Seja  $X^r \in Inv^r$ . A definição nos dá

$$(d\varphi)_g(X^r(g)) = (d\varphi)_g(X^r(eg)) = (d\varphi)_g(dRg)_e(X) = d(\varphi \circ Rg)_e(X).$$

Por outro lado vale

$$d(\varphi \circ Rg)_e(X) = d(R\varphi(g) \cdot \varphi)_e(X) = d(R\varphi(g))_e \circ (d\varphi)_e(X).$$

donde segue  $(d\varphi)_g(X^r(g)) = d(R\varphi(g))_e \circ (d\varphi)_e(X) = (d\varphi)_e^r(X) \cdot (\varphi(g))$ . O caso em que  $X^l \in Inv^l$  é análogo. ■

**Proposição 5.2.4.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , respectivamente. Seja  $\varphi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos de Lie e  $X \in \mathfrak{g}$ . Então,

$$\varphi(\exp(X)) = \exp((d\varphi)_e(X)).$$

**Demonstração:** Para a prova veja [20] página 104. ■

Uma consequência da Proposição 5.2.4 é a seguinte:

**Proposição 5.2.5.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , respectivamente. Seja  $\varphi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos de Lie. Então  $(d\varphi)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  é homomorfismo de álgebras de Lie, isto é,  $(d\varphi)_e$  é linear e vale

$$(d\varphi)_e[X, Y] = [(d\varphi)_e X, (d\varphi)_e Y].$$

**Demonstração:** Dados  $Z = (d\varphi)_e X \in \mathfrak{h}$  e  $W = (d\varphi)_e Y \in \mathfrak{h}$ , os campos  $X^r$  e  $Z^r$  assim como  $Y^r$  e  $W^r$  são  $\varphi$ -relacionados. Daí temos

$$[Z, W]_d = [Z, W]^d(e) = (d\varphi)_e[X, Y]_d.$$

O homomorfismo  $(d\varphi)_e$  é também denominado homomorfismo infinitesimal associado a  $\varphi$ . ■

**Exemplo 5.2.6.** A aplicação determinante  $\det : GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  é um homomorfismo de grupos de Lie. Para obter  $d(\det)_{In}$  tome  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  e uma curva  $g_t = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $g_0 = (a_{ij}(0))_{i,j=1}^n = In$  e  $g'(0) = (a'_{ij}(0))_{i,j=1}^n = A$ . Assim temos

$$\det(g_t) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)}(t) \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Derivando em  $t = 0$ , obtemos

$$\frac{d}{dt}(\det(g_t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\det)g_t|_{t=0} \cdot g'_t|_{t=0} = d(\det)_{In} \cdot A = \text{tr}A.$$

É claro que  $\text{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  é linear e preserva o colchete, i.e., é um homomorfismo de álgebras de Lie. Da Proposição 5.2.4 segue que

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}A}.$$

Vejamos agora um caso particular de homomorfismo.

**Definição 5.2.7.** Sejam  $G$  um grupo de Lie,  $V$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que o homomorfismo de grupos  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  é uma *representação de  $G$  no espaço  $V$*  e denotamos por  $(\rho, V)$  ou somente  $\rho$ .

$V$  é dito o espaço de representação, a álgebra de Lie do grupo  $GL(V)$  é dada por  $\mathfrak{gl}(V) = (\mathcal{L}(V; V); \cdot)$ , onde o colchete é dado pelo comutador. Assim podemos definir de maneira análoga a representação de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  no espaço vetorial  $V$  através de uma aplicação  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

Como vimos anteriormente  $(d\rho)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  é um homomorfismo de álgebras de Lie e portanto é uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Essa representação é denominada a representação infinitesimal associada a  $(\rho, V)$ .

Da Proposição 5.2.4 temos a fórmula que relaciona as duas representações

$$\rho(\exp_G(X)) = \exp_{GL(V)}((d\rho)_e X).$$

Como  $\exp_{GL(V)}$  está definida em um grupo linear, podemos escrevê-lo como uma série de potências.

Vamos estudar a representação de um grupo de Lie  $G$  na sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Na Definição 5.1.8 definimos os automorfismos internos  $C_g$  de um Grupo de Lie. Note que  $C_g(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e$ , e temos que  $(C_g)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é uma aplicação linear pois

$$d(C_g)_e = d(Lg \circ Rg^{-1})_e = (dLg)_{g^{-1}} \cdot (dRg)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Assim dados  $g, h \in G$  temos

$$(C_g \circ C_h)(x) = (C_g)(h x h^{-1}) = g h x h^{-1} g^{-1} = C_{gh}(x),$$

donde temos  $d(C_g)_e \circ d(C_h)_e = d(C_{gh})_e$ . Assim podemos definir a seguinte aplicação

**Definição 5.2.8.** A *representação adjunta* de  $G$  em sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é definida por

$$\begin{aligned} Ad : G &\rightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad(g) = d(C_g)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Esta aplicação é diferenciável pois é a composição de duas aplicações diferenciáveis.

Das considerações acima temos que  $Ad$  é uma representação de  $G$  em  $\mathfrak{g}$ , isto é, um homomorfismo de  $G$  em  $GL(\mathfrak{g})$ . Além disso, para cada  $g \in G$  temos que  $Ad(g) = d(C_g)_e$  é um endomorfismo de  $\mathfrak{g}$  e portanto  $Im(Ad) \subset End(\mathfrak{g})$  (Note que  $End(\mathfrak{g})$  pode ser visto como um grupo de Lie de matrizes).

Aplicando a fórmula da Proposição 5.1.34 ao caso particular em que  $\varphi : G \rightarrow G$ ,  $\varphi(g) = C_g$  para algum  $g$  em  $G$ , temos

$$C_g(\exp_G(X)) = \exp_G(d(C_g)_e X) \equiv g(\exp_G(X))g^{-1} = \exp_G(Ad(g)X). \quad (5.7)$$

**Exemplo 5.2.9.** Se  $G = GL(n, \mathbb{R})$ , então  $Ad(g) = C_g \quad \forall g \in G$ . Com efeito, se  $C_g : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  é a conjugação pela matriz  $g \in GL(n, \mathbb{R})$ , então  $(dC_g)_e : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ , donde  $dC_g$  é uma transformação linear e assim  $dC_g = C_g \quad \forall g \in G$ . Portanto  $Ad(g) = (dC_g)_e = C_g \quad \forall g \in G$ .

Vamos agora estudar a representação infinitesimal de  $Ad$ .

**Definição 5.2.10.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie, definimos sua *representação adjunta* como a aplicação

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto ad(X) = ad_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ &Y \mapsto ad_X(Y) = [X, Y]. \end{aligned}$$

Note que da identidade de Jacobi temos, para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} ad_{[X, Y]}Z &= [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y] \\ &= [X[Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = ad_X(ad_Y(Z)) - ad_Y(ad_X(Z)) \\ &= [ad_X, ad_Y]Z. \end{aligned}$$

Portanto  $ad_{[X, Y]} = [ad_X, ad_Y]$ . Logo  $ad$  é um homomorfismo de álgebras de Lie, onde o colchete em  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  é dado pelo comutador. Outro resultado que obtemos com a identidade de Jacobi é o seguinte: dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  quaisquer, vale

$$\begin{aligned} ad_X[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [[X, Z], Y] \\ &= [ad_X Y, Z] + [ad_X Z, Y]; \end{aligned}$$

ou seja,  $\forall X \in \mathfrak{g}$ ,  $ad_X$  é uma derivação.

**Proposição 5.2.11.** Seja  $G$  um grupo de Lie, com álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \approx (Inv^l, [\cdot, \cdot]_l)$ . Então  $d(Ad)_e(X) = ad_X, \forall X \in \mathfrak{g}$  e vale a igualdade

$$Ad(\exp_G(X)) = \exp_G(ad_X). \quad (5.8)$$

**Demonstração:** Para a prova veja [17] página 111. ■

A igualdade  $[X, Y]_l = -[X, Y]_r$  implica que para campos invariantes à direita acrescenta-se um sinal na fórmula desta proposição, ou seja, sendo  $G$  um grupo de Lie, com álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \approx (Inv^r, [\cdot, \cdot]_r)$ , tem-se  $d(Ad)_e(X) = -ad_X \quad \forall X \in \mathfrak{g}$  e

$$Ad(\exp_G(X)) = \exp_G(-ad_X). \quad (5.9)$$

As fórmulas (5.7) e (5.8)(ou(5.9)) são a base para que possamos estabelecer relações entre as propriedades de  $G$  e  $\mathfrak{g}$ . O primeiro membro de (5.7) envolve o produto em  $G$  enquanto que o segundo membro de (5.8) depende apenas do colchete em  $\mathfrak{g}$ , sendo ambos são ligados por um termo intermediário envolvendo  $Ad(g), g \in G$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Baumeister, J. e Leitão, A., *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica* . 1.ed., Rio de Janeiro : IMPA, 2014.
- [2] Birkhoff, G., MacLane, S., *A survey of modern algebra*. Macmillan , 4.ed., Michigan State University, MIT, 1977.
- [3] Bressan, A., Piccoli, B., *Introduction to the Mathematical Theory of Control*. AIMS Series on Applied Mathematics Vol2, . Springfield, MO : AIMS, 2007.
- [4] Doering, C.I., Lopes, A.O.: *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro : IMPA, 2016.
- [5] Figueiredo, D.G., Neves, A.F.: *Equações Diferenciais Aplicadas* , 3.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2018.
- [6] Gantmahcher, F.R.: *Applications of the Theory of Matrices*. Intersciences Publishers, New York, 1959.
- [7] Gonçalves, A.: *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides, 7.ed., IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [8] Hurwitz, A. *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt* *Mathematische Annalen*, 1895, Volume 46, Number 2, p 273.
- [9] Jurdjevic, V. and Quinn, J.P., *Controllability and stability J. Differential Equations*, 28, 1978, 381-389.
- [10] LaSalle, J. and Lefschetz, S.: *Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press, New Yorkm 1961
- [11] Lee, J. M.: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, 2002.
- [12] Lee, J. M.: *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature*. Springer, New York, 1997.
- [13] Lima, Elon Lages *Curso de Análise Volume 2*. 11.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2015.
- [14] Lyapunov, A. M., *The General Problem of the Stability of Motion (In Russian)*, Doctoral dissertation, National University of Kharkov, 1892.
- [15] Maxwell, J. C., *On Governors. Proceedings of the Royal Society*, vol. 16 1867–1868, p. 270-283.

- [16] Routh, E. J., *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. Macmillan, 1877.
- [17] San Martin, L. A. B., *Grupos de Lie*. Campinas, SP : Editora da Unicamp, 2017.
- [18] Sontag E.D., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2nd ed, Springer-Verlag, 1998.
- [19] Sotomayor, J. M., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1.ed., IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [20] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983.