UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Manoel Anilton Lima Reis

MANAUS
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Manoel Anilton Lima Reis

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS
2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R375u

Reis, Manoel Anilton Lima
A utilização do GeoGebra no ensino das Transformações Lineares / Manoel Anilton Lima Reis. 2020
63 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Disney Douglas de Lima Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Transformação Linear. 2. GeoGebra. 3. Álgebra Linear. 4. Matrizes. 5. Ensino. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

MANOEL ANILTON LIMA REIS

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06 de Março de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro

Prof. Dra. Jeanne Moreira de Sousa
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder saúde e tempo de vida para realizar esse sonho.

A minha mãe, Antonia Souza Lima Reis, que com muita dedicação me criou e me incentivou a estudar e a buscar melhor condição de vida.

A meu pai, Amilton Barbosa Reis (in memorium), que enquanto vivo esteve, sempre cuidou da família, arriscando a vida para nos proporcionar bem estar.

A meus irmãos, Amilton Barbosa Reis Filho e Ailza Betânia Lima Reis que torceram muito por mim.

A minha esposa Aucirete Medeiros e filhos: Anilton Carlos, Adriel Matheus, Daniel Abraão, Davi Emanuel, e Pedro Amilton, que me incentivaram e se alegraram comigo nessa conquista.

Ao meu orientador, Disney Douglas, por aceitar me orientar e me guiar nesse trabalho desde quando foi meu professor durante as aulas do mestrado.
À UFAM, pela oportunidade de cursar o mestrado.

À CAPES, por me incentivar no estudo e na pesquisa através da concessão da bolsa durante o curso.

A todos os professores que com maestria nos ensinou muita matemática de qualidade.

Enfim, a todos os meus colegas que comigo estiveram nessa caminhada, apoiando-me nos momentos difícies.

Muito obrigado...

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo mostrar maneiras de se utilizar o GeoGebra no ensino das Transformações Lineares.

O GeoGebra é um programa de Geometria dinâmica livre criado por Markus Hohenwarterem, 2001, na University of Salzburg, sendo atualizado na Florida Atlantic University. Ele vem sendo utilizado em ambiente de sala de aula e em pesquisas como estudo de sistemas dinâmicos entre outros.

Palavras-chave: Algebra Linear, Transformações Lineares, Visualização e experimentação, Geogebra.

ABSTRACT

This research aims to show ways to use Geogebra in the teaching of Linear Transformations. Geogebra is a free dynamic geometry program, created by Markus Hohenwarter, 2001, in University of Salzburg being updated in Florida Atlantic University.It has been used in classrom environments and in research as a study of dynamical systems among others.

Keywords: Linear Algebra, Linear Transformations, Visualization and experimentation, Geobebra.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$P(x_p, y_p)$	Ponto P do plano.
$P(x_p, y_p, z_p)$	Ponto P do espaço.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior que.
$<$	Menor que.
$\geq$	Maior ou igual que.
$\leq$	Menor ou igual que.
$\subset$	Está contido.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$\oplus$	Soma direta.
I	Matriz Identidade.
$A_{m\times n}$	Matriz A de ordem $m \times n$.
A^T	Matriz transposta da matriz A.
A^{-1}	Matriz inversa da matriz A.
$\det(A)$	Determinante da matriz A.
D_f	Domínio da função f.
CD_f	Contra-domínio da função f.
f^{-1}	Função Inversa.
$(gof)(x)$	Função composta das funções g e f.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Matemática rigorosa em suas demonstrações desenvolvida no século XIX por alguns matemáticos, tais como Bolzano, Karl Weiterstrass e Cauchy contribuiram para elitizar, de certa forma, a aprendizagem da disciplina. Nos dias atuais os professores têm procurado maneiras de dar significado aos conteúdos, encurtando assim a distância existente entre teoria e aplicação prática, popularizando alguns antes difíceis de serem compreendidos pela maioria dos alunos.

Esse encurtamento passa hoje pelo uso da tecnologia em sala de aula. Os alunos já chegam nas escolas com conhecimento tecnológico muitas vezes maior do que o do professor, por isso, este profissional precisa estar aprendendo e inovando no uso das ferramentas tecnológicas existentes para o ensino da Matemática. O dinamismo do software gratuito GeoGebra [1] tem contribuído muito devido a possibilidade de visualização e manipulação das construções geométricas. Importante ressaltar também, que é possível usá-lo mesmo na ausência de laboratório, pois é possível baixá-lo em smartphones.

Este trabalho falará sobre Transformações Lineares. Assunto que faz parte do curriculum da matemática superior, mais precisamente da disciplina Álgebra Linear II. Isso, porém, não o distancia do ensino fundamental e médio. Os autores de livros do ensino fundamental, obedecendo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) , já tratam desse assunto com o nome Transformações Geométricas, dando ênfase as definições através de imagens: translação, reflexão ou simetria axial, rotação e a composição destes, como é orientado pelo objetivo de aprendizagem EF07MA21 [2]:

> *Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão ou simetria axial, rotação), com o uso de instrumento de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.*

Nessa fase de ensino o aluno já terá alguns conhecimentos que o ajudarão a entender as construções no GeoGebra, por exemplo: sistema bidimensional cartesiano, ponto, reta, plano, polígonos, dentre outros. No ensino médio, especificamente no terceiro ano, a disciplina de Geometria Analítica reforça esses conteúdos.

Dentro das Transformações Lineares temos os Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e suas propriedades geométricas com aplicações na computação gráfica e utilização em alguns algorítmos numéricos. Em computação as transformações ajudam na animação de imagens bidimensionais e tridimensionais na tela do computador. A linguagem de programação PostScript utiliza as transformações para manipular fontes, leiaute e imagens gráficas.

O capítulo 1 fará uma revisão dos assuntos: Sistemas de Coordenadas Cartesianas, Função, Relações trigonométricas no triângulo retângulo, Matrizes, Determinantes e Vetores. Vetores é estudado na disciplina de Física no ensino fundamental e médio, de maneira superficial, com aplicações determinadas. Em Matemática é estudado em Álgebra Linear, no ensino superior, com definição e aplicação genéricas. Matrizes e Determinantes são, sem dúvida, os assuntos mais importantes quando se trata de Transformações Lineares, tanto que, eles são estudados no ensino médio, segundo ano, e na maioria dos livros de Álgebra Linear eles são revisados e aprofundados.

O capítulo 2 falará dos conjuntos onde as transformações acontecerão. Eles são chamados de Espaço Vetorial, e seus elementos de vetores. O espaço vetorial estudado nesse trabalho é o $\mathbb{R}^n$. Esse espaço vetorial possui dois subespaços vetoriais importantíssimos, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, representados no sistema bidimensional e tridimensional respectivamente.

O capítulo 3 mostrará no GeoGebra os efeitos sofridos pela imagem, letra " F ", quando nela é aplicada as Transformações Lineares. Esta letra foi escolhida por ser assimétrica. Para finalizar, será explicado como foi construída a imagem da letra " F " no sistema bidimensional e tridimensional.

Espero que este trabalho ajude no processo ensino-aprendizagem incentivando os professores e alunos a buscarem informações sobre o GeoGebra e a utilizá-lo constantemente em suas atividades .

Capítulo 1

Conceitos básicos

Se o leitor já tiver conhecimento dos conceitos aqui apresentados pode começar a leitura deste trabalho a partir do capítulo seguinte.

1.1 Sistemas Ortogonais de Coordenadas Cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas, ou plano cartesiano, foi criado por René Descartes (1596-1650) com o objetivo de localizar pontos em um plano.

Um sistema de coordenadas 2D (duas dimensões) é definido traçando-se no plano duas retas concorrentes e perpendiculares chamadas de eixos. O eixo horizontal é chamado de abscissa e o vertical de ordenada. O ponto de interseção entre os dois eixos é chamado de origem do sistema. Os eixos são orientados e uma unidade de medida é associado a eles. Da origem para a direita no eixo horizontal e para cima no eixo vertical localizam-se os números positivos e da origem para a esquerda no eixo horizontal e para baixo no eixo vertical localizam-se os números negativos.

O plano fica assim dividido em quatro partes chamadas de quadrantes, ordenados no sentido anti-horário, vide Figura 1.1. Observe que os eixos horizontal e vertical foram representados pelas letras x e y respectivamente.

Localiza-se um ponto no sistema bidimensional trançando uma reta (r) paralela ao eixo dos y tocando no eixo dos x no ponto denominado x_p e outra reta $(r‘)$ paralela ao eixo dos x tocando no eixo dos y no ponto denominado y_p, com isso, observa-se que as retas r e $r‘$ se interceptarão em um ponto P de coordenadas (x_p, y_p). Dessa forma pode-se dizer que um ponto qualquer do plano cartesiano passa a ser localizado através de suas coordenadas (x, y) chamado de par ordenado, e que $(x_p, y_p) \neq (y_p, x_p)$, a menos que x_p seja igual a y_p.

A origem $(0, 0)$ e ponto $P = (x_p, y_p)$, ficam assim representados. Veja Figura 1.2

No GeoGebra a costrução do ponto P de abscissa 2 e ordenada 3, por exemplo, segue os passos abaixo:

1) digite $P = (2, 3)$ no campo $\boxed{\text{Entrada}}$;

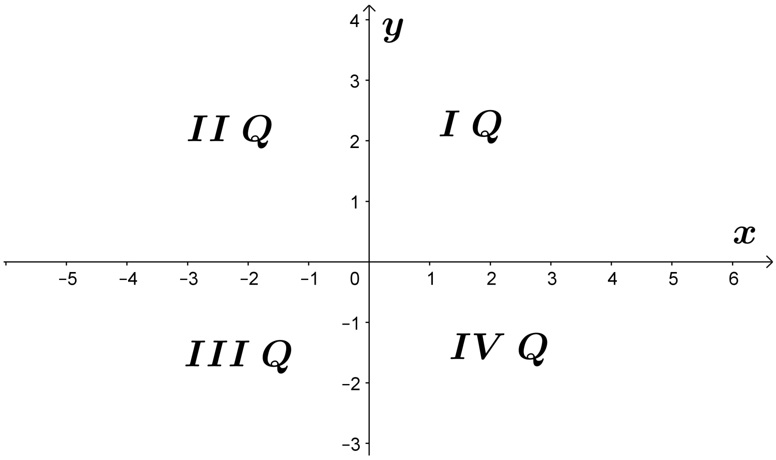

Figura 1.1: Quadrantes no sistema de coordenadas 2D

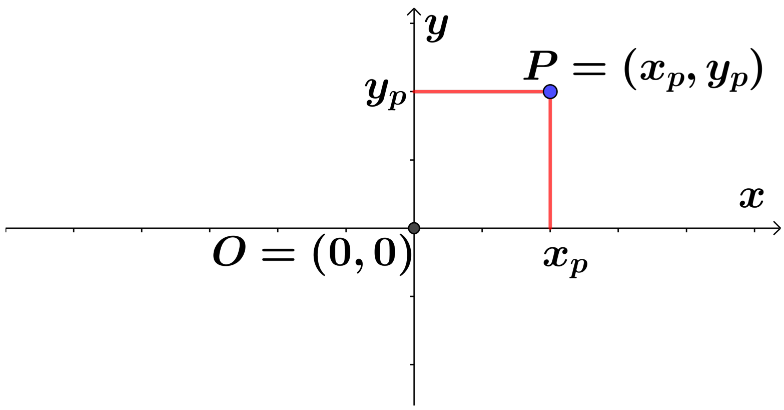

Figura 1.2: Localizando um ponto P no sistema de Coordenadas 2D

2) tecle Enter.

Observa-se que a descrição do ponto aparece no campo Janela de Álgebra.

Outra forma prática de escrever um ponto é clicando com o cursor no comando em destaque no canto superior à esquerda, vide Figura 1.3, em seguida clicando no local onde se queira o ponto no plano. Ele aparecerá automaticamente na janela de álgebra.

A partir do sistema 2D, pode-se estender os conceitos apresentados para o sistema 3D (tridimensional) ou sistema espacial, para isso, basta considerar outra reta perpendicular, não coplanar, as já existentes no sistema 2D passando pela origem. Chama-se de eixo dos z, dessa forma a origem passará a ser representada $O(0, 0, 0)$ e o ponto $P(x_p, y_p, z_p)$.

Para visualizar o sistema 3D no GeoGebra clica-se no comando Exibir fazendo aparecer uma lista de outros comandos, então, clica-se em Janela de Visualização 3D. O eixo na cor vermelha representa a coordenada x, na cor verde a coordenada y e o de cor azul a coordenada z.

Agrupando os três eixos dois a dois obtem-se três planos: o plano xy, o plano xz e o plano yz dividindo o espaço em oito partes, cada uma chamada de octante. A interseção desses é a

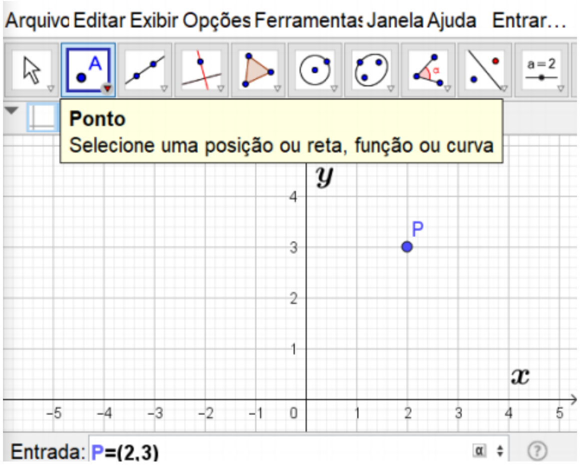

Figura 1.3: Localizando um ponto P no sistema de Coordenadas 2D no Geogebra

origem do sistema, como se pode observar na Figura 1.4.

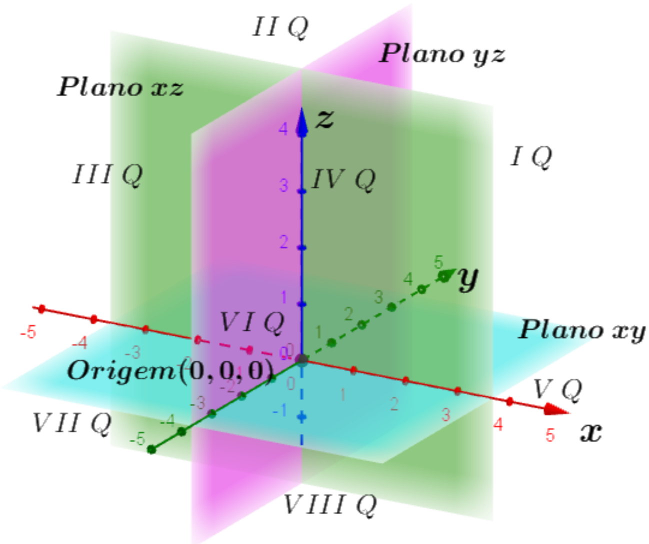

Figura 1.4: Planos definidos pelos eixos do Sistema de Coordenadas 3D

Dessa forma, faz-se a localização de um ponto P qualquer no sistema 3D através da interseção de três planos, como mostra a Figura 1.5.

A construção de um ponto em 3D no GeoGebra é feita digitando as coordenadas na $\boxed{\text{Entrada}}$. Por exemplo: $T = (1, 2, 3)$, depois a tecla $\boxed{\text{Enter}}$.

1.2 Função

No ensino fundamental é visto conceito intuitivo de função através de exemplos que possam levar o aluno a conceituá-la formalmente como sendo a relação entre dois conjuntos A e B não vasios em que a cada elemento x de A associa um único elemento y de B através de uma

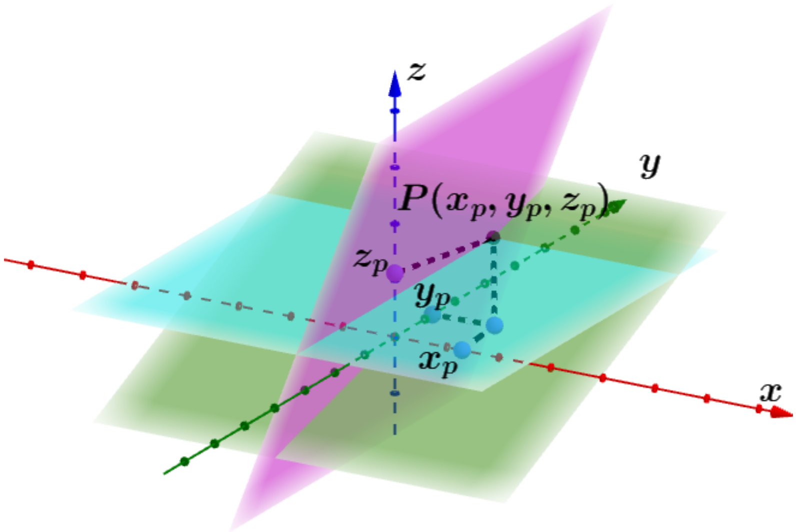

Figura 1.5: Localizando um ponto P no Sistema de Coordenadas 3D

lei ou regra (representada por uma letra minúscula, por exemplo f), de modo que $y = f(x)$. O conjunto A é chamado de Domínio e o conjunto B de Contra-Domínio. A representação matemática é feita da seguinte forma:

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

Cada correspondência gerará um par ordenado (x, y), onde y será a imagem de x por f. Ao conjunto formado por essas imagens chamamos de conjunto imagem de f. Convém atentar para o fato de que esse conjunto é subconjunto de $B(Imf \subset B)$, ou seja, do contra-domínio de f.

No livro Conecte [6] está escrito que o matemático alemão G.W. Leibniz (1646-1716) introduziu as expressões "Função Constante" e "Variável" na linguagem matemática, enquanto que o suíço L. Euler (1707-1783) a notação $f(x)$ para indicar a lei de uma função. O matemático alemão P.G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu a definição de função muito próxima da que se usa hoje em dia.

No ensino médio, mais precisamente no primeiro ano, o aluno estuda com mais rigor o assunto função. Lá ele estuda como classificar funções em: sobrejetoras, injetoras e bijetoras. Também os conceitos de função inversa e composição de funções. No livro Introdução a Álgebra [4] encontramos estas definições.

Uma função $f : A \to B$ é dita *sobrejetora ou sobrejetiva* se o seu conjunto imagem coincidir com o seu contra-domínio, ou seja, se $Imf = B$.

Diz-se que uma função $f : A \to B$ é *injetora ou injetiva* se para quaisquer que sejam $x, y \in A$, tivermos $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$ (ou equivalente, quaisquer que sejam $x, y \in A$, se

$f(x) = f(y)$ então $x = y$).

Se $f : A \to B$ é simultaneamente injetiva e sobrejetiva dizemos que f é uma função bijetora ou bijetiva.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são duas funções, denota-se por $gof : A \to C$ a função definida por $(gof)(x) = g(f(x))$ qualquer que seja $x \in A$, a qual chama-se de *função composta de g e f*.

A função $I_A : A \to A$ definida pela regra $I_A(x) = x$ qualquer que seja $x \in A$ é chamada de *função identidade de* A.

Observe que se $f : A \to B$ é uma função bijetiva então existe uma função $g : A \to B$ definida por: se $y \in B, g(y) = x$ onde x é o único elemento de A tal que $f(x) = y$ (o elemento x existe pois f é sobrejetiva e ele é único pois f é injetiva).

É de fácil verificação as propriedades:

$gof = I_A$ e $fog = I_B$

A função g com as propriedades acima é dita ser a função $inversa$ da função f, e será denotada(não confundir com imagem inversa) por $g = f^{-1} : B \to A$.

A função afim ou função polinomial do primeiro grau é qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei da forma $f(x) = ax + b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Um caso particular da função afim é quando $b = 0$, ou seja, $f(x) = ax$. Neste caso, denomina-se *função linear*.

No GeoGebra pode-se construir um controle deslizante, nomeado primeiramente pela letra (a), usando o comando em destaque na Figura 1.6. Esse controle permite ao usuário alterar o valor da variável, que pode ser do tipo Número, Ângulo ou Inteiro. Pode-se também fazer com que o controle funcione sozinho, para isso clique com o lado direito do mouse sobre o controle deslizante, depois no comando $\boxed{\text{Animar}}$. Observe que aparecerá embaixo, no canto esquerdo da $\boxed{\text{Janela de Visualização}}$, um símbolo de $\boxed{\text{pause}}$ onde se pode pausar ou dar continuidade ao movimento. Usar-se-á nesse trabalho somente os do tipo Número e Ângulo.

Criado o controle, escreve-se na caixa de $\boxed{\text{Entrada}}$ $f(x) = ax$ para plotar o gráfico da função linear, Figura 1.7. Visualise-o no endereço: (https://www.geogebra.org/m/tnqbeqjj).

Verifica-se que qualquer que seja o valor de (a) o gráfico de f sempre tocará o plano cartesiano em sua origem $(0, 0)$, ou seja, $f(0) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

A função afim é injetiva, pois para $x_1, x_2 \in$ domínio de $f(D_f)$, com $x_1 \neq x_2$ tem-se que $f(x_1) = ax_1 + b \neq ax_2 + b = f(x_2)$ e é claramente sobrejetiva, visto que para cada $x \in D_f$ existe um $y \in$ contra-domínio de CD_f tal que $y = f(x)$, portanto a função admite inversa, e ela será do tipo $f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}$, lembrando que $a \neq 0$.

A função afim é base para o assunto principal deste trabalho, devido a propriedade da relação de proporcionalidade entre os elementos do domínio e da imagem.

1.3 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As razões trigonométricas seno e cosseno no triângulo retângulo são estudadas no ensino fundamental, 9^o ano, e tem aprofundamento no ensino médio, 2^o ano. Vamos relembrar as

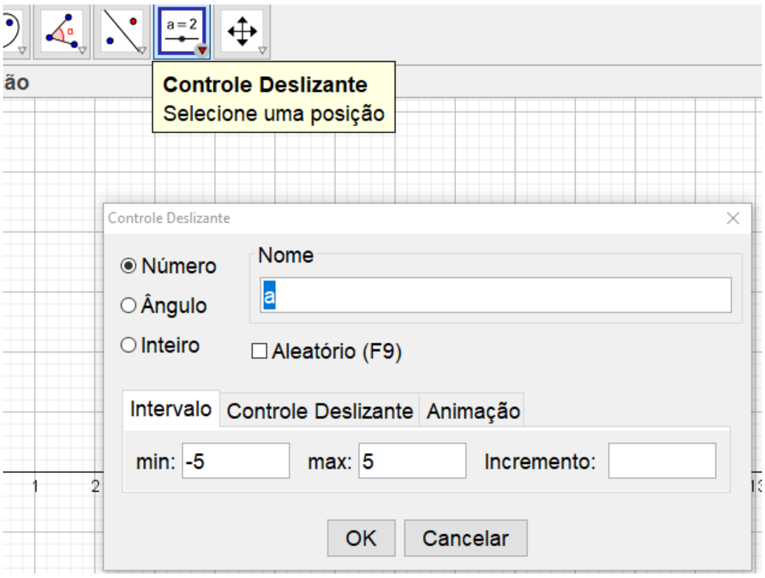

Figura 1.6: Comando controle deslizante

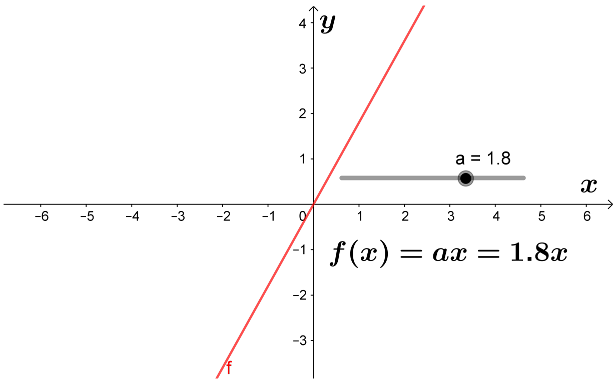

Figura 1.7: Gráfico de $f(x) = ax$ para $a = 1.8$

definições e alguns resultados que serão úteis para o entendimento de algumas demonstrações, para isso, utilizar-se-á como parâmetro o livro do Márcio Goulart [5].

Considere um arco $\widehat{AM}$ de medida α no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico (raio igual a 1 centrado na origem e orientado positivamente no sentido anti-horário), chama-se cosseno de α a abscissa do ponto M e seno de α a ordenada do ponto M, observe a Figura 1.8.

Por isso, pode-se chamar o eixo das abscissas de **eixo dos senos** e o eixo das ordenadas de **eixo dos cossenos**. Dessa forma pode-se notar que o cosseno e o seno podem assumir valores positivos ou negativos, dependendo do quadrante ao qual o arco pertencer.

Um resultado importante, válido para qualquer α real, é a chamada relação fundamental da trigonometria, obtido a partir do triângulo retângulo OM_1M da Figura 1.8. Nele aplica-se o teorema de Pitágoras, resultando na relação:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1.1}$$

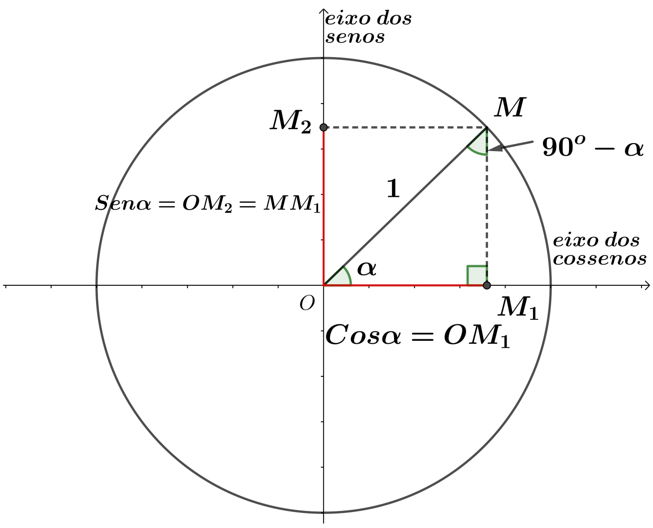

Figura 1.8: seno de α e cosseno de α, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Também é importante notar que:

$\cos\alpha = \operatorname{sen}(90^o - \alpha)$ e $\operatorname{sen}\alpha = \cos(90^o - \alpha)$ para todo $0 \leq \alpha \leq 90^o$, ou seja, o cosseno e seno de ângulos complementares são congruentes.

Agora, para finalizar esta revisão, serão listadas algumas fórmulas que ajudarão ao leitor a entender o processo de encontro de algumas matrizes no capítulo 3.

Dados os números reais **a** e **b**, no ciclo trigonométrico, tem-se:

i) cosseno da soma e da diferença de dois arcos:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \tag{1.2}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \tag{1.3}$$

ii) seno da soma e da diferença de dois arcos:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a \tag{1.4}$$

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \tag{1.5}$$

Das fórmulas de adição chega-se a duas consequências importantíssimas:

iii) Seno do arco duplo:

$$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cdot \cos a \tag{1.6}$$

iv) Cosseno do arco duplo

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \tag{1.7}$$

1.4 Matrizes

Há muitas literaturas boas para pesquisas sobre esse assunto. Aqui indica-se o livro da coleção do matemático Gelson Iezzi [7].

Uma matriz A de ordem $m \times n$ ($A_{m\times n}$) agrupa elementos em uma disposição retangular de m linhas e n colunas. Seus elementos são representados por letras minúsculas ($a_{i,j}$), elemento a que ocupa a i-ésima linha e j-ésima coluna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nos casos em que o número de linhas é igual ao número de colunas $(m = n)$, chama-se tal matriz de quadrada de ordem n, como a matriz A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Em particular este trabalho está interessado em matrizes cujos elementos representam valores reais.

Na matriz quadrada, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, constituem a *diagonal principal* e os elementos em que $i + j = n + 1$, constituem a *diagonal secundária*.

Uma matriz quadrada muito importante é a matriz unidade ou identidade, representada pela letra I. Nela os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1(um), enquanto os demais são iguais a 0 (zero).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

As matrizes do tipo $C_{m\times 1}$ são chamadas matrizes coluna.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

As matrizes do tipo $L_{1\times n}$ matrizes linha.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \end{pmatrix}$$

Para construir-se uma matriz no GeoGebra, Figura 1.9, basta especificar uma letra maiúscula, por exemplo M, no campo de Entrada e, entre chaves, colocar os elementos de cada linha, também entre chaves, separados por vírgula, por fim tecla-se em enter:

$$M = \{\{a, b\}, \{c, d\}\},$$

a matriz aparecerá na Janela de Álgebra. Os elementos são controles deslizantes. Se a quiser como texto na Janela de Visualização, clique no comando controle deslizante, depois em ABC texto, aparecendo assim uma caixa onde teclaremos no comando Fórmula Latex, depois em Matrizes e escolhendo a sua ordem, por último, escreva como mostra a Figura 1.9.

As letras a, b, c e d dentro dos retângulos são objetos. Elas são escritas teclando no comando de nome Objetos dentro da caixa de texto, em seguida na letra.

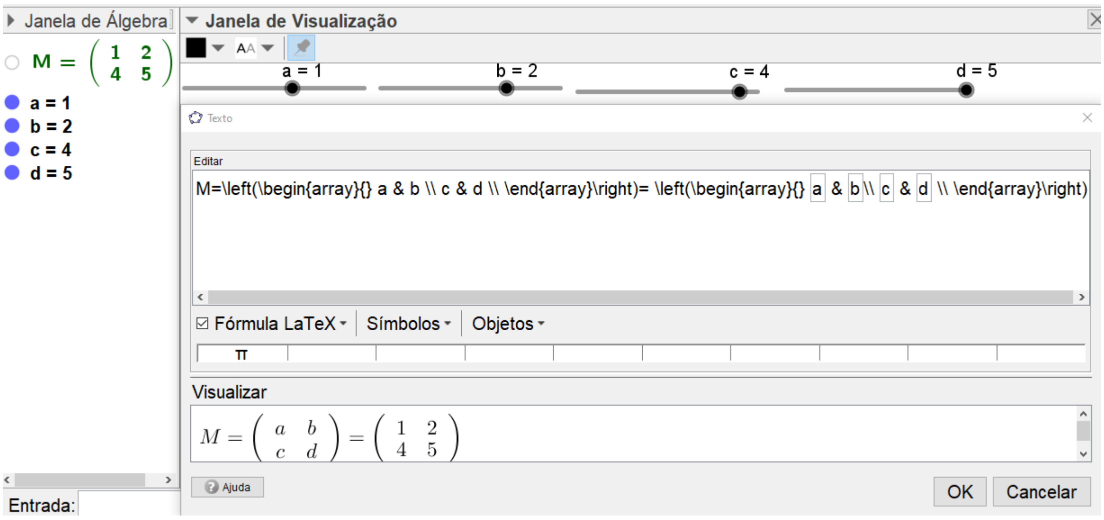

Figura 1.9: Matriz M de ordem 2.

Duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} & \cdots & a_{1n} = b_{1n} \\ a_{21} = b_{21} & a_{22} = b_{22} & \cdots & a_{2n} = b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} = b_{m1} & a_{m2} = b_{m2} & \cdots & a_{mn} = b_{mn} \end{pmatrix}$$

A soma e subtração de duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ é uma matriz $C_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} c_{11} = a_{11} \pm b_{11} & c_{12} = a_{12} \pm b_{12} & \cdots & c_{1n} = a_{1n} \pm b_{1n} \\ c_{21} = a_{21} \pm b_{21} & c_{22} = a_{22} \pm b_{22} & \cdots & c_{2n} = a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} = a_{m1} \pm b_{m1} & c_{m2} = a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & c_{mn} = a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Se α é uma escalar, o produto de uma matriz $A_{m\times n}$ por esse escalar é uma matriz $B_{m\times n}$, tal que: $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, ou seja, encontra-se a matriz B multiplicando cada elemento da matriz A por α.

$$B = \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} = \alpha \cdot a_{11} & b_{12} = \alpha \cdot a_{12} & \cdots & b_{1n} = \alpha \cdot a_{1n} \\ b_{21} = \alpha \cdot a_{21} & b_{22} = \alpha \cdot a_{22} & \cdots & b_{2n} = \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} = \alpha \cdot a_{m1} & b_{m2} = \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & b_{mn} = \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para que duas matrizes sejam multiplicadas, exige-se que o número p de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda. O resultado da multiplicação será uma matriz com o número m de linhas da primeira e o número n de colunas da segunda: $C_{m\times n} = A_{m\times p} \cdot B_{p\times n}$.

Cumprida essa exigência, para multiplicar as matrizes, procede-se da seguinte forma: o elemento c_{ij} de C é encontrado somando-se os produtos dos elementos da matriz linha i de A pelos elementos j da coluna de B:

$$C_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mp}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}$$

Embora possamos achar casos em que $AB = BA$, essa não é uma propriedade geral da multiplicação de matrizes.

A matriz identidade I é matriz neutra na multiplicação de matrizes, assim como, o número 1 é na multiplicação de números reais. Esta propriedade é escrita como:

$$AI = IA = A$$

No conjunto dos números reais se o número é diferente de zero ele possui inverso multiplicativo:

$$a \in \mathbb{R} \to a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

De forma análoga, a inversa de uma matriz, se existir, será representada pelo superescrito -1, atendendo a propriedade:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Esta propriedade permite que a matriz seja interpretada como a matriz que desfaz a operação aplicada pela original, porém lembre-se que nem todas as matrizes possuem inversa, logo nem todas as operações descritas por matrizes poderá ser desfeita.

A operação conhecida como transposta de uma matriz, simbolizada pelo uso de um T superescrito, realiza a troca de posicionamento de seus elementos de maneira que m_{ij} passa para a posição m_{ji}. Como exemplo, escreve-se a transposta da matriz genérica A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dadas as matrizes A, B e C e o número real α, as propriedades das operações com matrizes são:

P1) Adição comutativa: $A + B = B + A$

P2) Adição associaiva: $A + (B + C) = (A + B) + C$

P3) Multiplicação Associativa: $(AB)C = A(BC)$

P4) Multiplicação Distributiva: $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B / A(B+C) = AB + AC / (A+B)C = AB + AC$

P5) Identidade multiplicativa: $A \cdot I = I \cdot A$

P6) Propriedades da transposta: $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot (A)^T; (A + B)^T = A^T + B^T; (A^T)^T = A$

P7) Propriedade da inversa: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

A manipulação de matrizes dá suporte às transformações lineares.

1.5 Determinantes

Segundo Márcio Goulart [5] O determinante D de uma matriz A (indica-se $D = \det B$) é o número real associado às matrizes quadradas. Toda matriz quadrada possui determinante. Será falado, especificamente, das matrizes de ordem 2 e 3.

Se a matriz B é de ordem 2

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

calcula-se o determinante subtraindo o produto dos elementos da diagonal principal, em vermelho, pelo produto dos elementos da diagonal secundária, em azul:

$$\det B = \begin{vmatrix} {\color{red}b_{11}} & {\color{blue}b_{12}} \\ {\color{blue}b_{21}} & {\color{red}b_{22}} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}$$

Agora, se a matriz B for de terceira ordem :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

repete-se as duas primeiras colunas e procede-se da seguinte forma:

- Efetuamos os produtos dos elementos situados na direção da diagonal principal(vermelho):

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33}$
$b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31}$
$b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32}$

- Efetua-se os produtos dos elementos situados na direção da diagonal secundária:

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31}$
$b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32}$
$b_{12} \cdot b_{21} \cdot b_{33}$

Agora usa-se fórmula (1.8):

$$\det B = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31} - b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32} - b_{12} \cdot b_{21} \cdot b_{33} \quad (1.8)$$

Algumas propriedades importantes de determinantes:

P1) Multiplicando-se todos os elementos de uma fila da matriz quadrada por um número k, o determinante inicial também fica multiplicado pelo mesmo número k;

P2) Trocando entre si as posições de duas filas paralelas na matriz quadrada, de ordem 2 ou maior que 2, o determinante associado à nova matriz é o oposto do anterior;

P3) Não se altera o determinante quando adicionamos a uma dada fila da matriz uma outra fila paralela a ela, multiplicada por outra constante.

P4) Determinante do produto de matrizes quadradas A e B de mesma ordem: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

P5) Para qualquer matriz quadrada A, temos: $\det A^T = \det A$

Consequências importantes dessas propriedades:

C1) Supondo a matriz A de ordem n, o que ocorre é: $\det(kA) = k^n \cdot \det A$, para $k \in \mathbb{R}$;

C2) Sendo A^{-1} a inversa de A o $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$;

C3) A é inversível se e somente se $\det A \neq 0$. Se $\det A = 0$ dizemos que a matriz A é singular.

1.6 Vetores

O estudo sistemático e o uso de vetores foram fenômenos do século XIX e início do século XX, apesar de outros pensadores já terem lidado com estas entidades, como Isaac Newton (1642-1727). O que hoje sabemos sobre vetores começou com a descoberta dos Quartérnios pelo então matemático William Rowan Hamilton (1805-1865) e se desenvolveu com os trabalhos de outros cientistas, J.Willard Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925).

Os alunos do primeiro ano do ensino médio estudam superficialmente vetores na disciplina de Física, na caracterização de grandezas vetorias, como velocidade, aceleração e força. Nesse contexto, um vetor v, no plano $(\mathbb{R}^2)$, é geometricamente representado por segmento orientado($\rightarrow$), com comprimento proporcional ao seu módulo $(\mid v \mid)$ o que é intuitivo. Um vetor v é dito unitário se $\mid v \mid = 1$. Todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento são representantes de um mesmo vetor. Em seguida, fazendo-se uso das regras do paralelogramo ou do polígono, passa-se à adição de vetores e então à multiplicação de um vetor por um escalar (número real), também geometricamente intuitivo, uma vez que se associa ao produto o aumento ou diminuição do comprimento da seta e/ou inversão de seu sentido.

No GeoGebra a costrução do vetor u de coordenadas 2 e 3, por exemplo, segue os passos abaixo:

1) digite $u = (2, 3)$ no campo $\boxed{\text{Entrada}}$;

2) tecle $\boxed{\text{Enter}}$.

Observa-se que diferentemente da construção do ponto, usa-se uma letra minúscula para nomear o vetor.

Para melhor compreensão, representar-se-á as operações com vetores no Geogebra, Figura 1.10.

Se u e v são vetores quaisquer e α e β números reais, tem-se as seguintes propriedades da Adição e Multiplicação por escalar:

P1 Associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$

P2 Comutativa: $u + v = v + u$

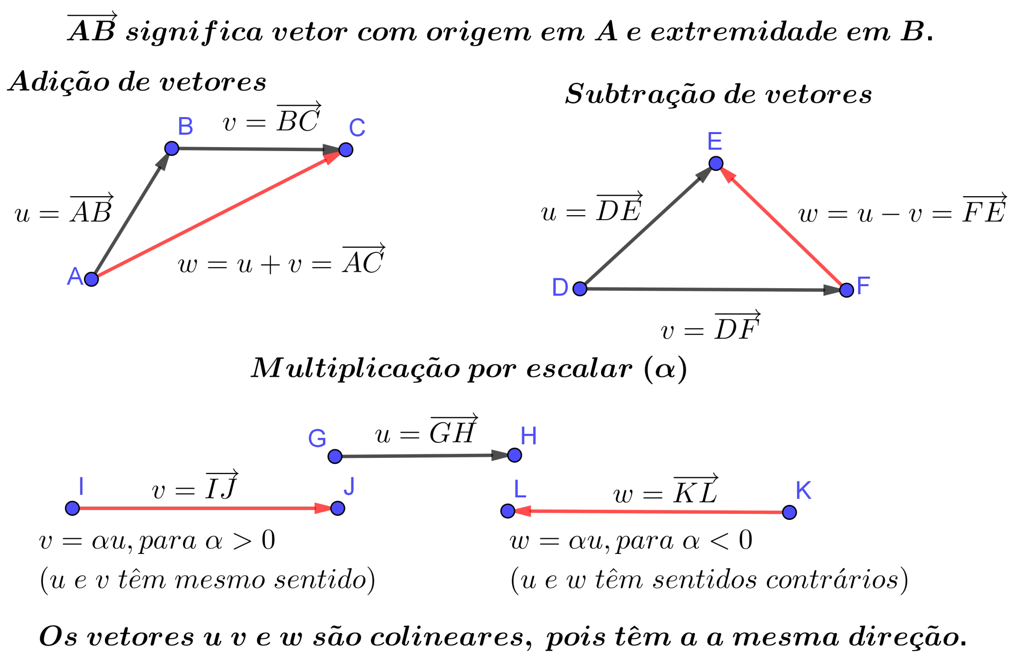

Figura 1.10: Operações com vetores

P3 Existe um só vetor nulo 0 tal que, para todo vetor v, se tem: $v + 0 = 0 + v$

P4 Qualquer que seja o vetor v, existe um só vetor $-v$, tal que: $v + (-v) = -v + v = 0$

P5 $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

P6 $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Esses conceitos são ampliados no ensino superior, mais precisamente na disciplina de Álgebra Linear, onde também é possível a visualização e manipulação do vetor no plano $(\mathbb{R}^2)$, assim como no espaço $(\mathbb{R}^3)$.

O saudoso matemático *Elon Lages Lima*, em seu livro intitulado Álgebra Linear [8], defini vetor no espaço Euclidiano como sendo uma uma lista ordenada $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de números reais, onde o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetoria n-dimensional e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são as coordenadas do vetor u e v, respectivamente. .

Partindo dessa premissa, defini-se também:

- A igualdade vetorial $(u = v)$ como sendo as n igualdades numéricas $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$;

- As operações de adição e multiplicação por escalar:

  a) $u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$;

  b) $\alpha \cdot u = (\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n)$.

O $vetor\ zero$ é, por definição, aquele cujas coordenadas são todas iguais a zero: $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

O vetor simétrico de $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é $-u = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$.

- Chama-se *produto interno canônico* ou $produto\ escalar$ de dois vetores u e v e se representa por $u \cdot v$, ao número real:

$$u \cdot v = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \dots + \alpha_n \cdot \beta_n \tag{1.9}$$

.

- O número não-negativo $\mid v \mid = \sqrt{v \cdot v}$ chama-se módulo, norma ou comprimento do vetor v. Então:

$$\mid v \mid = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \tag{1.10}$$

- O ângulo θ entre dois vetores, Figura 1.11, u e v, com $0 \leq \theta \leq \pi$, pode ser calculado pela fórmula:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\mid u \mid \cdot \mid v \mid} \tag{1.11}$$

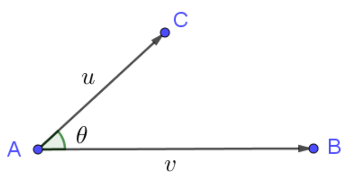

Figura 1.11: Ângulo de dois vetores

- Se dois vetores u e v são colineares ou paralelos, existe um número k tal que: $u = k \cdot v$. E se eles forem ortogonais, o ângulo θ formado por eles é 90^o, o que implica: $\cos\theta = \cos 90^o = \dfrac{u \cdot v}{\mid u \mid \cdot \mid v \mid} = 0$, portanto $u \cdot v = 0$, ou $\alpha_1 \cdot \beta_1 + \dots + \alpha_n \cdot \beta_n = 0$.

Os conjuntos $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ são interpretados geometricamente como sendo o plano cartesiano $x0y$ e o espaço cartesiano tridimensional $0xyz$, respectivamente.

Os assuntos matrizes e vetores se relacionam em Álgebra Linear. As matrizes linha e coluna podem ser chamadas de vetor-linha e vetor-coluna, respectivamente. Portanto, pode-se dizer que uma matriz é formada por vetores.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Esse assunto antecede o estudo das Transformações Lineares em Algebra Linear II, no ensino superior. Mesmo a abordagem sendo superficial, os conceitos aqui apresentados serão importantes no entendimento do capítulo 3, mas se eles já são de conhecimento do leitor, pode naturalmente ignorá-lo.

2.1 Espaços Vetoriais

Segundo o matemático Elon Lages de Lima [8], espaço vetorial E é um conjunto cujos elementos são chamados de *vetores*, no qual estão definidas duas operações: a *adição*, que a cada par de vetores u e $v \in E$ faz corresponder um novo vetor $u + v \in E$, chamado a soma de u e v, e a *multiplicação por um número real*, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in E$ faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v$, ou αv, chamado o *produto* de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas de *axiomas* de espaço vetorial:

- **comutatividade** : $u + v = v + u$;
- **associatividade** : $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- **vetor nulo** : existe um vetor $0 \in E$, chamado *vetor nulo*, ou *vetor zero*, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$;
- **inverso aditivo** : para cada vetor $v \in E$, existe um vetor $-v \in E$, chamado o *inverso aditivo*, ou o *simétrico* de v, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
- **distributividade**: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta u$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- **multiplicação por 1** : $1 \cdot v = v$.

Os exemplos mais importantes e significativos para o nosso trabalho é o espaço vetorial euclidiano n-dimensional, onde os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas $u = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), v =$

$(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ de números reais e o espaço vetorial do conjunto M $(m \times n)$ de todas as matrizes $m \times n$.

Convém observarmos que o vetor $u = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ aparecerá muitas vezes com a notação matricial (matriz- coluna $n \times 1$):

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Deixamos a cargo do leitor verificar os axiomas e concluir que de fato os dois exemplos são espaços vetoriais, bem como a verificação das seguintes propriedades oriundas da definição:

P1) Existe um único vetor nulo em E (elemento neutro da adição);

P2) Cada vetor $u \in E$ admite apenas um simétrico $(-u) \in E$;

P3) Para quaisquer $u, v, w \in E$, se $u + w = v + w$, então $u = v$;

P4) Qualquer que seja $v \in E$, tem-se: $-(-v) = v$ isto é, o oposto de $-v$ é v;

P5) Qualquer que sejam $u, v \in E$, existe um e somente um $x \in E$ tal que: $u + x = v$. Esse vetor x será representado por: $x = v - u$;

P6) Qualquer que seja $v \in E$, tem se: $0v = 0$. Naturalmente, o primeiro zero é o número real zero, e o segundo é o vetor $0 \in E$.

Para o espaço vetorial euclidiano o vetor nulo é $u = (0, \cdots, 0)$ e para o espaço vetorial das matrizes, é a matriz nula:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

P7) Qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in E$, tem-se:

a) $\lambda 0 = 0$;

b) se $\lambda v = 0$ então $\lambda = 0$ ou $v = 0$;

c) $(-1)v = -v$

d) $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$.

2.2 Subespaços Vetoriais

O subconjunto não-vazio F de um espaço vetorial E é dito subespaço vetorial se estiverem satisfeitas as seguintes condições:

1. Para quaisquer $u, v \in F$, tem-se: $u + v \in F$
2. Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}, u \in F$, tem-se: $\alpha u \in F$.

Feito isso, os subespaços vetorias serão ainda espaços vetoriais, não tendo a necessidade de verificação dos axiomas, visto que $F \subset E$.

Todo espaço vetorial E admite pelo menos dois subespaços triviais: o conjunto $\{0\}$, com um único elemento 0, e o espaço inteiro E. Outros subespaços importantes, são:

1. Para $E = \mathbb{R}^2$: retas que passam pela origem. Figura 2.1 :

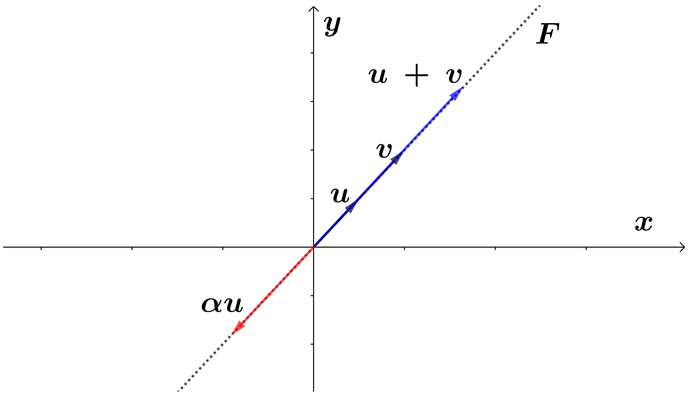

Figura 2.1: Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$

2. Para $E = \mathbb{R}^3$: retas e os planos que passam pela origem. Figura 2.2 e Figura 2.3, respectivamente:

No espaço vetorial das matrizes quadradas, os conjuntos das matrizes triangulares superiores, triangulares inferiores e das matrizes diagonais, são subespaços vetoriais.

A intersecção de dois espaços vetorias ainda é um espaço vetorial. Exemplo disso é os espaço das matrizes diagonais, resultado da intersecção do espaço das matrizes triangulares superiores com a espaço das matrizes triangulares inferiores. Em relação a união de espaços vetoriais, não se pode fazer a mesma afirmação.

A adição de espaços vetoriais também resulta em outro espaço vetorial. Para exemplificar, tomemos em $\mathbb{R}^3$ um plano, subespaço E_1 e uma reta contida nesse plano, subespaço E_2, ambas passando pela origem, é fácil ver que $E_1 + E_2 = E_1$.

Quando a interseção de $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$, então $E_1 + E_2$ é chamada de soma direta de E_1 com E_2, representada por $E_1 \oplus E_2$.

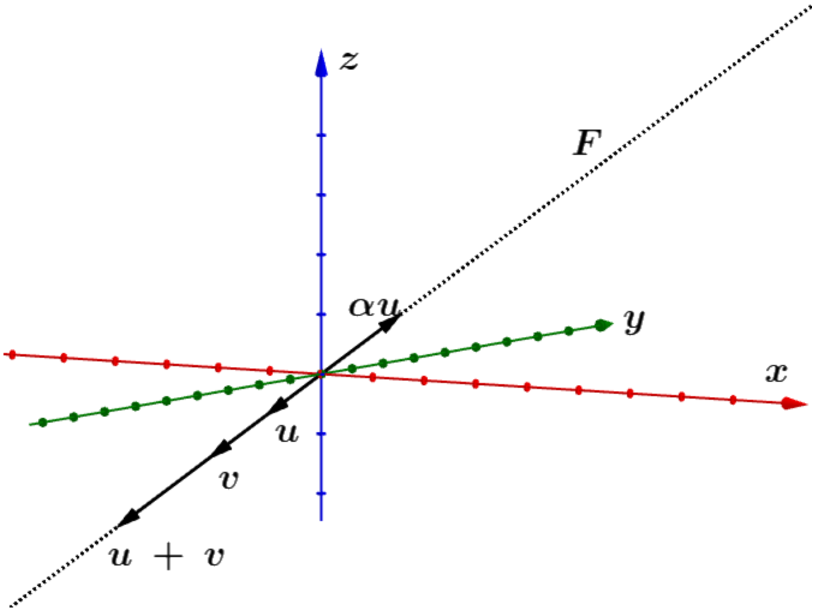

Figura 2.2: Subespaço vetorial (reta) de $\mathbb{R}^3$

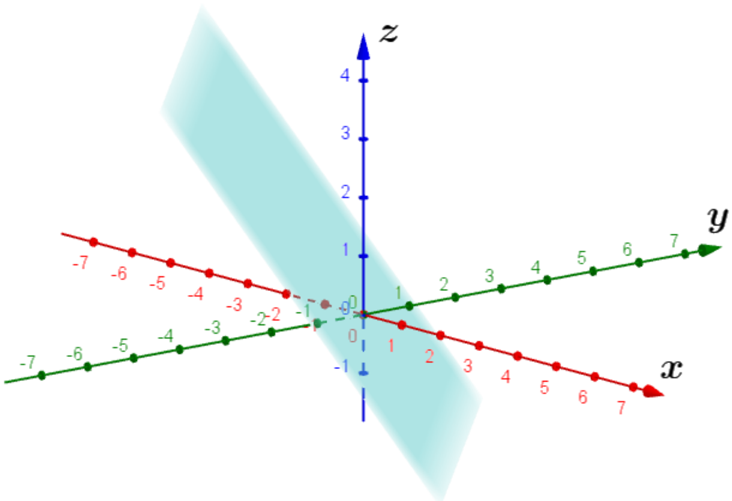

Figura 2.3: Subespaço vetorial (plano) de $\mathbb{R}^3$

2.3 Bases

Antes da definição de base de espaço vetorial, faz-se necessário definir combinação linear, conjunto linearmente independente e conjunto gerador.

Sejam os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ do espaço vetorial E e os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Qualquer vetor $u \in E$ da forma:

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$

é uma ***combinação linear*** dos vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Se a equação $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$ tiver como solução apenas a solução trivial, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ dizemos que o conjunto $E_1 \subset E$ formado pelos vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ é ***Linearmente Independente*** ou simplesmente ***LI***, em outras palavras, não é possível escrever nenhum dos vetores $u \in E_1$ como combinação linear dos outros vetores de E_1 , caso contrário, dizemos que o conjunto E_1 é ***Linearmente Dependente*** ou simplesmente ***LD***.

Na condição de $E_1 \subset E$ ser LI e todos os outros vetores de E puderem ser escritos como combinação linear dos vetores de E_1, diremos então que o conjunto E_1 é ***gerador de E***.

Agora temos condições para definir ***Base*** de um espaço vetorial **E**: Uma base é um conjunto $\mathbf{E}_1 \subset E$ linearmente independente que gera E.

Exemplos de bases são os vetores canônicos $\{(1,0); (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Isto significa que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear de seus vetores canônicos. Para melhor exemplificar, vamos considerar o vetor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, então:

$(u_1, u_2) = u_1(1,0) + u_2(0,1)$

Nesse caso dizemos que os números u_1, u_2 são as coordenadas do vetor u na base $\{(1,0); (0,1)\}$.

Se o espaço vetorial E admite uma base E_1 com *n elementos* , qualquer outra base de E possuirá também *n elementos* e diremos que o espaço vetorial E terá ***dimensão finita*** se essa quantidade n for finita. A essa quantidade n chamaremos de ***dimensão*** do espaço vetorial E. Dessa forma dizemos que os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 2 e 3 respectivamente.

O espaço vetorial das matrizes $M(m \times n)$ possui dimensão finita $m \cdot n$, por exemplo: M_1 (2×2) tem dimensão $2 \cdot 2 = 4$. Sua base canônica é:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Capítulo 3

Transformações Lineares

3.1 Resumo teórico

No Capítulo 1 foi revisado o assunto função estudado no ensino fundamental, médio e em cálculo 1 no ensino superior. Agora será visto um tipo especial de função chamada de *Transformação*. Esta se difere das outras funções porque os conjuntos envolvidos são espaços vetoriais e os elementos chamados de *vetores*. É usual denotar as transformações por letras maiúsculas como $T,\ F,\ L$ etc. Assim, uma transformação $T : E \to F$ é uma correspondência que associa a cada vetor v do espaço vetorial E um vetor $T(v) = T \cdot v = Tv$ do espaço vetorial F. A transformação é dita *linear* se satisfizer as duas seguintes propriedades chamadas, respectivamente, de **aditividade** e **homogeniedade**. Considere c um escalar, u e v vetores do espaço vetorial E e $T(u),\ T(v)$ vetores do espaço vetorial F:

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(cu) = c\,T(u)$

As duas propriedades podem ser combinadas para se chegar ao seguinte resultado, chamado de ***princípio da superposição***, segundo Anton [3]:

> *Se $u_1,\ u_2, \cdots, u_n$ são vetores e $c_1,\ c_2, \cdots, c_n$ são escalares quaisquer, então:*
> $T(c_1u_1,\ c_2u_2, \cdots, c_nu_n) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \cdots + c_nT(u_n)$

Fazendo $c = 0$ em (ii) temos que $T(0) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = 0$, ou seja, $T(0) = 0$ e fazendo $c = -1$ temos $T(-v) = T(-1 \cdot u) = -1 \cdot T(u) = -T(u)$, de onde pode-se concluir que: $T(u - v) = T(u) - T(v)$.

Um teorema importantíssimo, demonstrado no livro do Elon [8], que torna as transformações lineares muito práticas e de fácil manuseio, diz o seguinte:

> *Sejam $E,\ F$ espaços vetoriais e β uma base de E, A cada vetor $u \in \beta$, faz-se corresponder (de maneira arbitrária) um vetor $u' \in F$. Então existe uma única transformação linear $T : E \to F$ tal que $T \cdot u = u'$ para cada $u \in \beta$.*

Esse mesmo teorema está enunciado no livro de Anton [3] da seguinte forma:

> *Dada $T = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear , com os vetores em forma de colunas. Se $e_1, e_2, \cdots, e_n$ são vetores unitários canônicos de $\mathbb{R}^n$ e se x é um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$, então $T(x)$ pode ser expresso como $T(x) = Ax$, passando a se chamar* ***Transformação Matricial*** : $A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}$

A ordem da matriz A, denominada matriz canônica de T, é $m \times n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^m$.

Quando se quer enfatizar a relação entre T e a sua matriz canônica, denota-se A por $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$. Com isso, a notação é dada por: $T(x) = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} x$.

Para exemplificar, seja $T(x) = 5x$ com $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, então sua matriz canônica será:

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(e_1) & 5(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

sendo $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.

As transformações que ocorrem de um espaço vetorial E para o mesmo espaço vetorial, $T : E \to E$, são chamadas de ***operadores lineares*** em E.

Quando os operadores lineares preservam comprimentos , $\| T(x) \| = \| x \|$, e ângulos entre os vetores , $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$, são denominados **operadores ortogonais** ou **isometrias lineares**. Um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é ortogonal, se e somente se, sua matriz canônica é ortogonal, ou seja, se $A^{-1} = A^T$. Aplicando a matriz A nesta igualdade pela direita ou pela esquerda, conclui-se que uma matriz quadrada A é ortogonal quando $A^T \cdot A = I$ ou $A \cdot A^T = I$. Agora se for aplicado o determinante em ambos os lados, $\det(A \cdot A^T) = \det(I)$ e usado os resultados: $\det(A^T) = \det(A)$ e $\det(I) = 1$, concluir-se-á também que uma matriz A é ortogonal se $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

Outra observação muito importante é que numa matriz A ortogonal suas linhas e colunas são vetores ortonormais, ou seja, possuem norma igual a 1 e produto interno igual a zero. Pode-se concluir este fato considerando as linhas e colunas vetores ortonormais e verificando a igualdade $A \cdot A^T = I$.

Quando se trata de operador linear no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, a matriz canônica de T pode ser expressa nas formas:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \; H_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \; P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

ou seja, T é uma rotação em torno da origem, denotado por R_θ, uma rotação/reflexão numa reta(bissetriz) pela origem, denotado por H_θ, ou uma Projeção ortogonal sobre retas pela origem, denotado por P_θ. Os operadores R_θ e H_θ são operadores ortogonais, enquanto operador P_θ não.

3.2 Operadores Lineares de $\mathbb{R}^2$ que preservam comprimentos

3.2.1 Matriz Reflexão R_θ e suas particularidades

A Figura 3.1 mostra a linearidade do operador rotação e a Figura 3.2 a forma mais simples de se visualizar a matriz canônica de R_θ

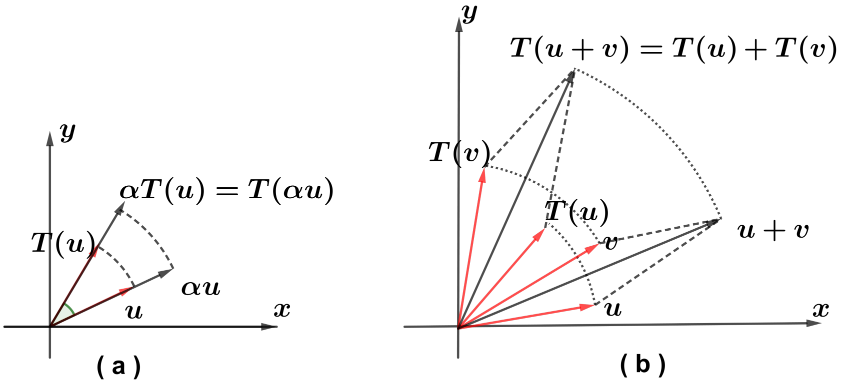

Figura 3.1: Linearidade do operador Rotação

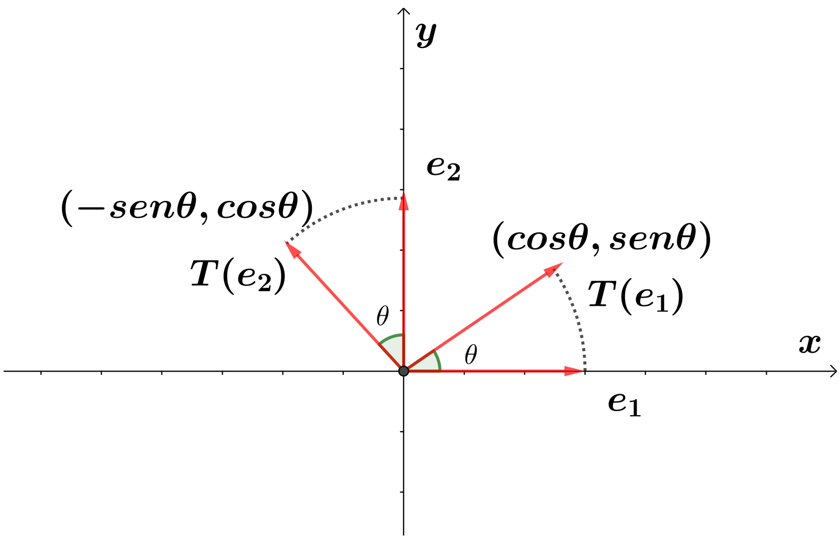

Figura 3.2: Rotaçaõ de um ângulo θ

Para três valores de θ específicos tem-se resultados especiais que serão ilustrados através de figuras. Vamos a eles:

(a) **Reflexão na origem**

A Figura 3.3 mostra a imagem refletida quando $\theta = 180^o$. Nesse caso, diz-se que se trata de reflexão na origem, cuja matriz canônica é:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

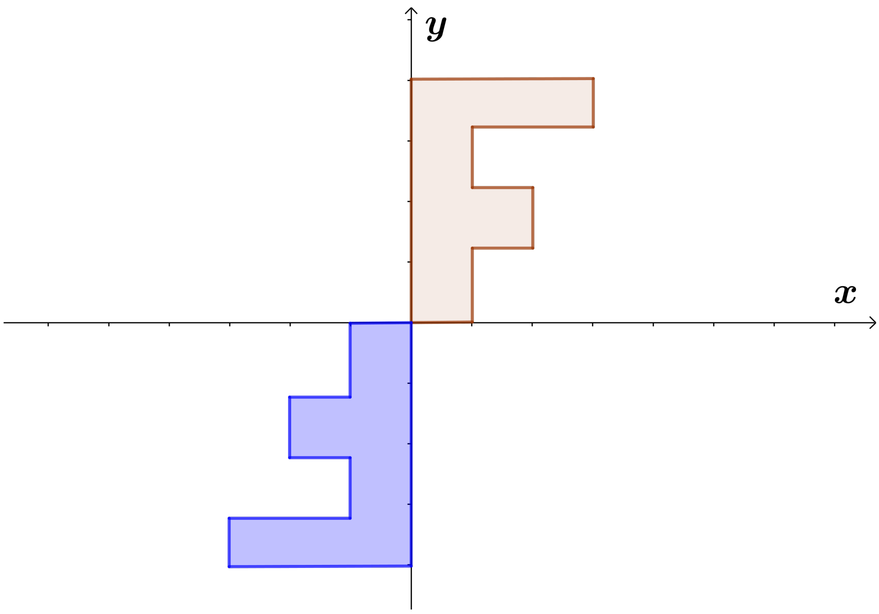

Figura 3.3: Rotação em torno da origem quando $\theta = 180^o$

(b) **Matriz Identidade**

Surge quando $\theta = 0$ ou $\theta = 360^o$, fazendo com que a imagem virtual se sobreponha a imagem real, veja Figura 3.4.

3.2.2 Matriz Reflexão H_θ e suas particularidades

Os argumentos usados para mostrar a linearidade do operador rotação podem também ser usados para mostrar a linearidade de H_θ.

Na Figura 3.5 pode-se visualizar a forma de se encontrar a matriz canônica de H_θ:

$$H_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\pi/2-\theta) \\ \sin\theta & -\sin(\pi/2-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

A igualdade matricial se dá devido a propriedade trigonométrica revisada no capítulo 1, seção 1.3: ângulos complementares tem igual valor de seno e cosseno.

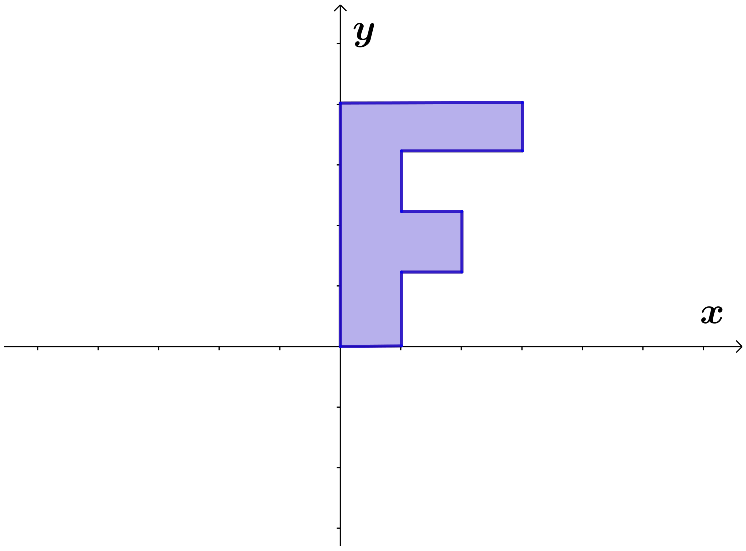

Figura 3.4: Rotaçaõ em torno da origem quando $\theta = 360^o$ ou $\theta = 0^o$

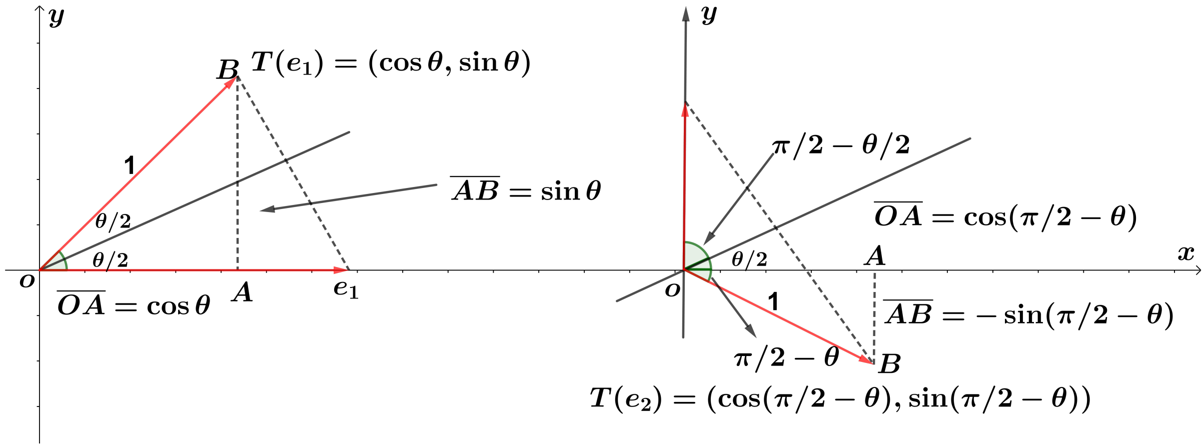

Figura 3.5: Matriz canônica da rotação/reflexão na reta(bissetriz) pela origem

Aplicando a matriz no polígono F e selecionando alguns ângulos específicos obtem-se algumas reflexões mais básicas num sitema de coordenadas xy:

a) **Reflexão na reta y=x**

Reflexão na reta $y = x$, Figura 3.6, acontecerá quando $\theta = 90^o$. A matriz será:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) **Reflexão no eixo** y

Reflexão no eixo y, Figura 3.7, quando $\theta = 180^o$. A matriz será:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) **Reflexão na reta y=-x**

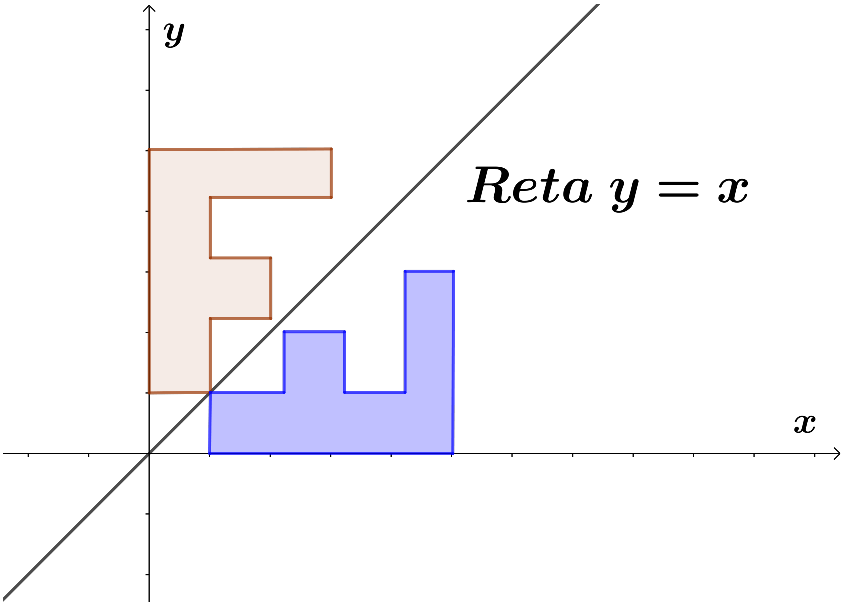

Figura 3.6: Reflexão na reta $y = x$

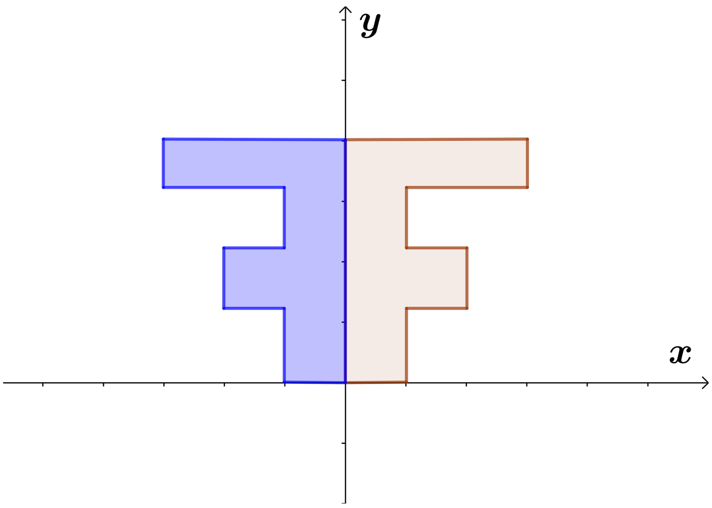

Figura 3.7: Reflexão no eixo Y

Reflexão na reta $y = -x$, Figura 3.8, quando $\theta = 270^o$. A matriz será:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

d) **Reflexão no eixo x**
Reflexão no eixo x, Figura 3.9, quando $\theta = 0^o$ ou $\theta = 360^o$. A matriz será:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

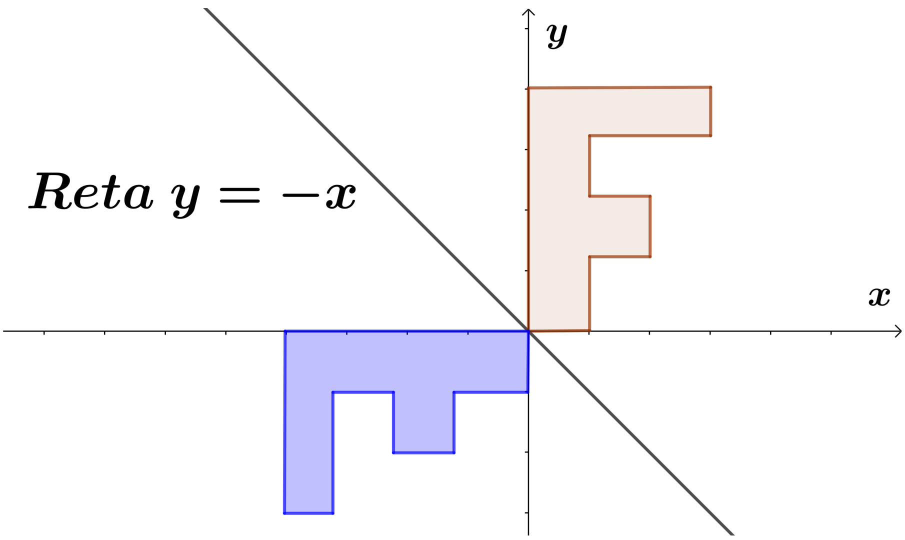

Figura 3.8: Reflexão na reta $y = -x$

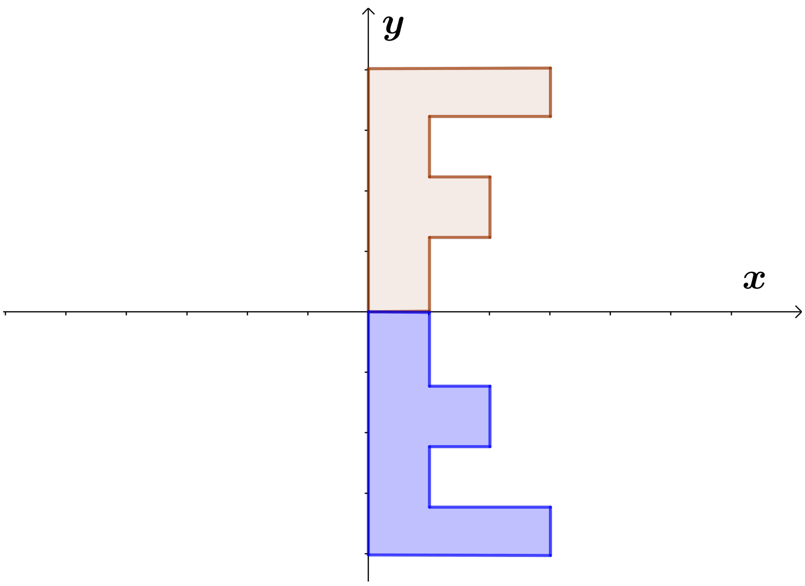

Figura 3.9: Reflexão no eixo x

A seguir, serão vistos alguns operadores lineares que não preservam comprimentos. São eles: projeções, contrações e dilatações, compressões e expansões horizontais e verticais e cisalhamentos.

3.2.3 Matriz Projeção P_θ e suas particularidades

Encontra-se a matriz canônica de P_θ a partir do operador H_θ, como mostra a Figura 3.10.
O vetor $P_\theta x$ está relacionado ao vetor $H_\theta x$ pela equação:

$$P_\theta x - x = \frac{1}{2}(H_\theta x - x)$$

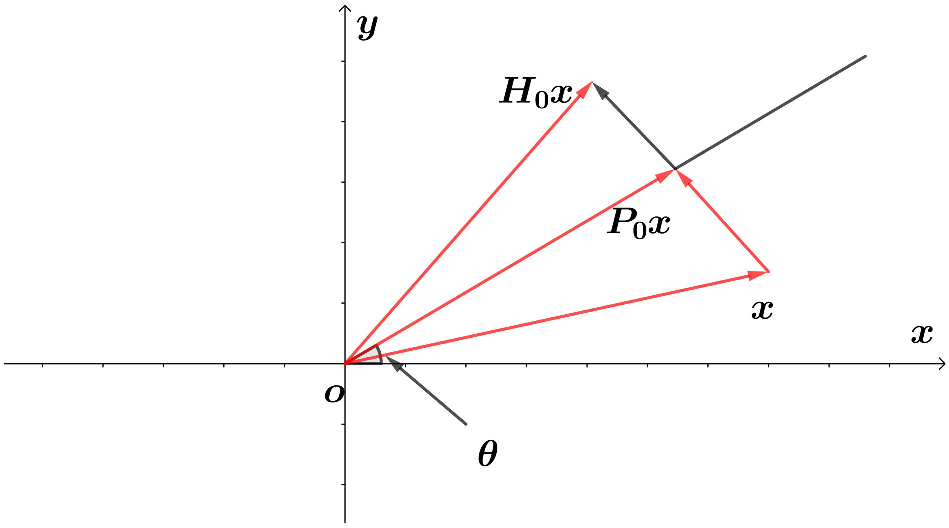

Figura 3.10: Projeção sobre retas pela origem

Resolvendo em $P_\theta x$ obtem-se:

$$P_\theta x = \frac{1}{2}H_\theta x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}H_\theta x + \frac{1}{2}Ix = \frac{1}{2}(H_\theta + I)x$$

Implicando em:

$$P_\theta = \frac{1}{2}(H_\theta + I)x$$

Desenvolvendo a implicação acima obtem-se a seguinte matriz:

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) & \frac{1}{2}\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{bmatrix}$$

Substituindo as expressões pelas suas respectivas identidades trigonométricas (revisadas no capítulo 1, seção 1.5) chega-se a matriz canônica:

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

As projeções ortogonais mais básicas são as projeções no eixo x, quando $\theta = 0^o$, 180^o ou 360^o, Figura 3.11, tendo como matriz canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e no eixo y, quando $\theta = 90^o$ ou 270^o, Figura 3.12, cuja matriz é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

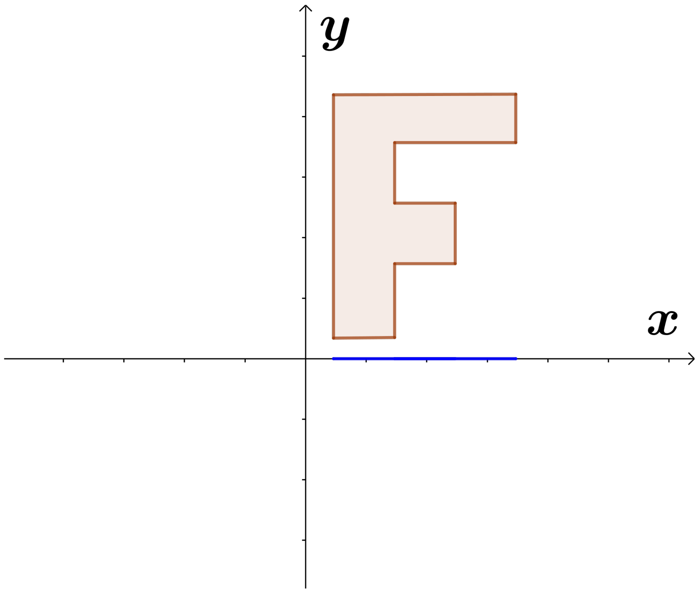

Figura 3.11: Projeção sobre o eixo dos x

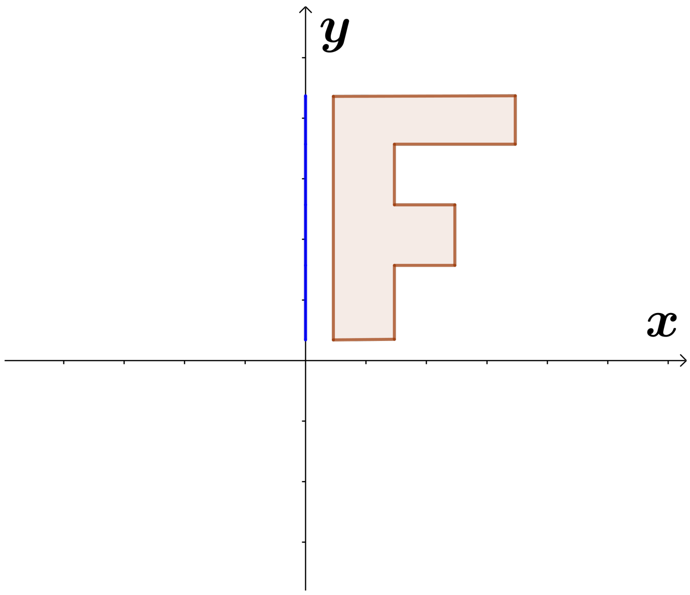

Figura 3.12: Projeção sobre o eixo dos y

3.3 Outros operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ que não preservam comprimentos

a) **Contrações e dilatações**

Homotetia é a redução ou ampliação de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo.

Tem-se uma homotetia de razão k quando o operador linear for do tipo $T(x, y) = (kx, ky)$ para k escalar não-negativo. Se $0 \leq k < 1$ o operador é uma contração e se $k > 1$ uma dilatação. O ponto fixo é a origem, pois $T(0) = 0$ em todas as transformações lineares.

A matriz canônica de $T(x, y) = (kx, 0) + (0, ky) = x(k, 0) + y(0, k)$ é:

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

.

A Figura 3.13 ilustra uma dilatação para $k = 2$. Observe que a direção e o sentido da figura não se alteraram, somente seus comprimentos na razão de 2.

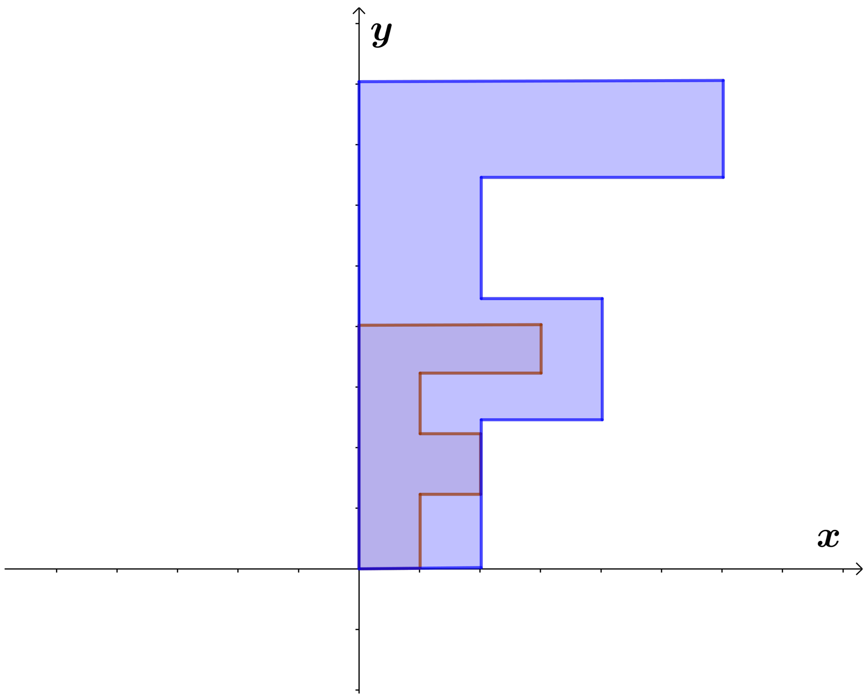

Figura 3.13: Dilatação para $k = 2$

A Figura 3.14 ilustra uma contração para $k = 0.5$. Observe que a direção e o sentido da figura também não se alteraram, somente seus comprimentos foram reduzidos na razão de 0.5.

b) **Compressões e expansões horizontais e verticais**

Multiplicando a abscissa ou a ordenada do ponto (x, y) por um valor não-negativo k tem-se o efeito de comprimir ou expandir cada ponto figura do plano na direção x ou y. O operador responsável pelos efeitos é $T(x, y) = (kx, y)$ ou $T(x, y) = (x, ky)$. Se $0 \leq k < 1$ tem-se compressão e se $k > 1$ expansão.

Para $T(x, y) = (kx, y) = x(k, 0) + y(0, 1)$ a matriz canônica é:

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

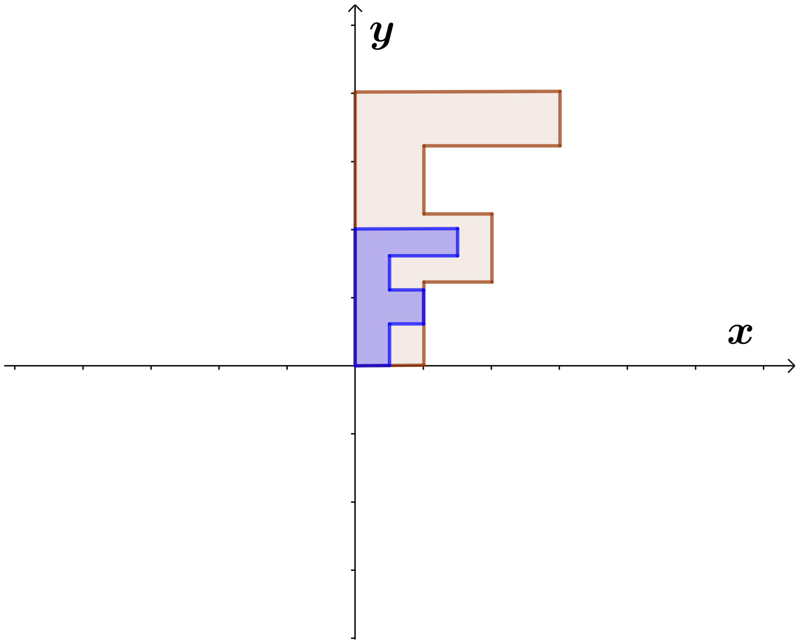

Figura 3.14: Contração para $k = 0.5$

A Figura 3.15 e a Figura 3.16 ilustram uma compressão e uma expansão na direção x, respectivamente.

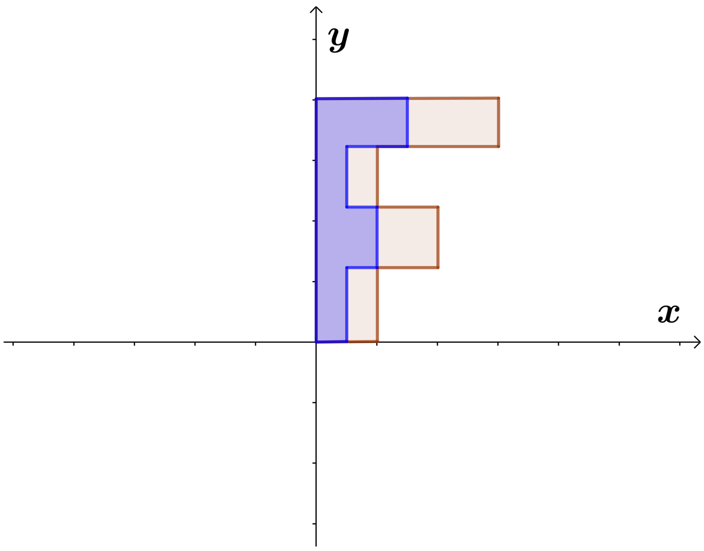

Figura 3.15: Compressão na direção x de razão $k = 0.5$

Para $T(x, y) = (x, ky) = x(1, 0) + y(0, k)$ a matriz canônica é:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

A Figura 3.17 e a Figura 3.18 ilustram uma compressão e uma expansão na direção y, respectivamente.

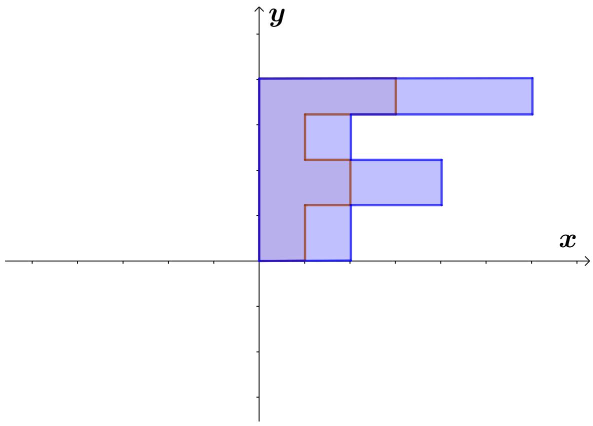

Figura 3.16: Expansão na direção x de razão $k = 2$

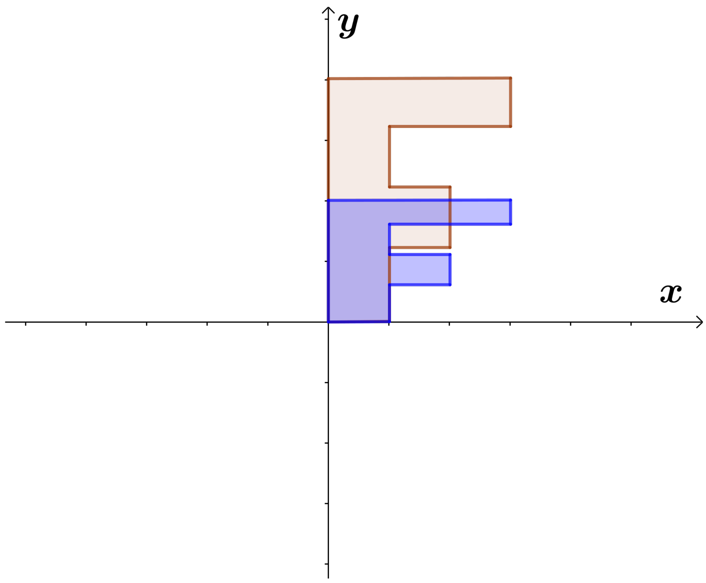

Figura 3.17: Compressão na direção y de razão $k = 0.5$

c) **Cisalhamentos**

O efeito de cisalhamento é transformar o retângulo num paralelogramo de mesma base e altura.

Da definição acima, ver-se que o cisalhamento na direção x consiste no deslocamento dos pontos da figura paralelamente ao eixo dos x, exceto os pontos do próprio eixo dos x, que permanecem na mesma posição, pois para eles $y = 0$. Um operador da forma $T(x, y) = (x + ky, y)$ realiza em $\mathbb{R}^2$ esse efeito. Para tal, a matriz canônica de $T(x, y) = x(1, 0) + y(k, 1)$, logo $T = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$. Observe a Figura 3.19.

O cisalhamento na direção y consiste no deslocamento dos pontos da figura paralelamente ao eixo dos y, exceto os pontos do próprio eixo dos y, que permanecem na mesma posição, pois para eles $x = 0$. Um operador da forma $T(x, y) = (x, y + kx)$ tem matriz canônica

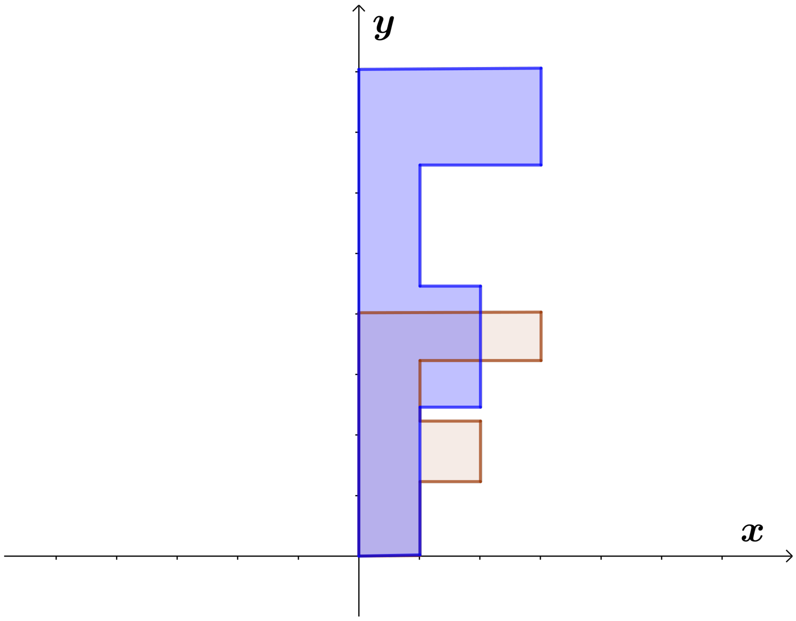

Figura 3.18: Expansão na direção y de razão $k = 2$

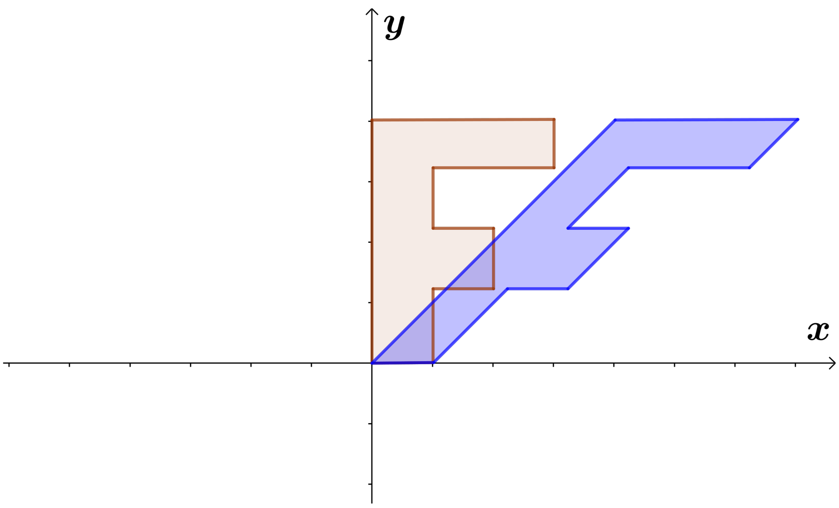

Figura 3.19: Cisalhamento na direção x de razão $k = 1$

$T(x, y) = x(1, k) + y(0, 1)$, logo $T = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$. Observe a Figura 3.20.

3.4 Operadores Lineares de $\mathbb{R}^3$ que preservam comprimentos

Assim como em $\mathbb{R}^2$, será feita distinção entre operadores ortogonais, que preservam comprimentos e ângulos, daqueles que não preservam.

As matrizes ortogonais de ordem 3, correspondentes aos operadores lineares de $\mathbb{R}^3$, são as rotações em torno das retas pela origem, reflexões em planos pela origem e rotação em torno

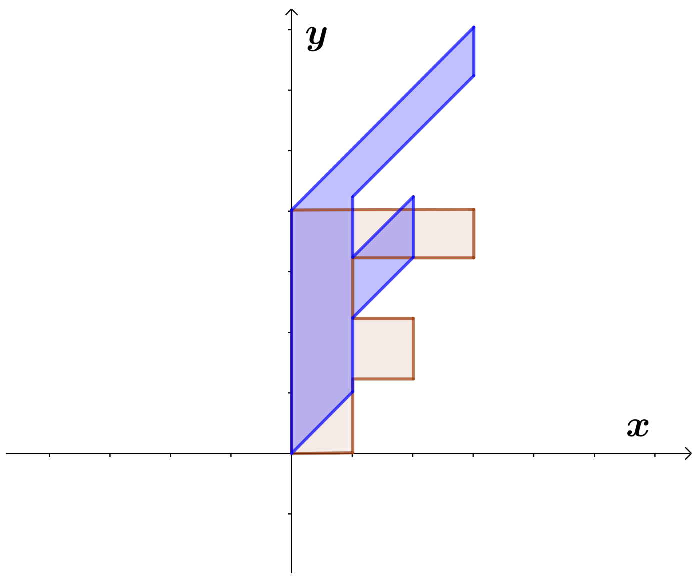

Figura 3.20: Cisalhamento na direção y de razão $k = 1$

de uma reta pela origem seguida de uma reflexão num plano pela origem que é perpendicular à reta. Uma prova de que são apenas essas matrizes pode ser encontrada no livro em inglês *Linear Algebra and Geometry* de David Bloom, 1979. As seis matrizes abaixo esgotam todos os tipos de operadores ortogonais em $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essas matrizes fixam, da esquerda para a direita, os eixos coordenados x,y e z.

Para $\alpha = 180^{\text{o}}$, tem-se as reflexões no eixo dos x (Figura 3.21), dos y (Figura 3.22) e dos z (Figura 3.23) respectivamente, também pode-se ter a matriz identidade (I) para $\alpha = 0^{\text{o}}$ ou $\alpha = 360^{\text{o}}$, nesse caso a imagem fica sobreposta. Observe que o determinante delas tem valor igual a um (1).

Agora, as seguintes matrizes causam uma rotação seguida de reflexão simétrica em torno dos planos coordenados:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para $\alpha = 0^{\text{o}}$ ou $\alpha = 360^{\text{o}}$, tem-se que a matriz D é a reflexão simétrica em relação ao plano $y0z$ (Figura 3.24); a matriz E em relação ao plano $x0z$ (Figura 3.25) e a matriz F em relação ao plano $x0y$ (Figura 3.24). Também pode-se ter a matriz identidade negativa $(-I)$ para $\alpha = 180^{\text{o}}$,

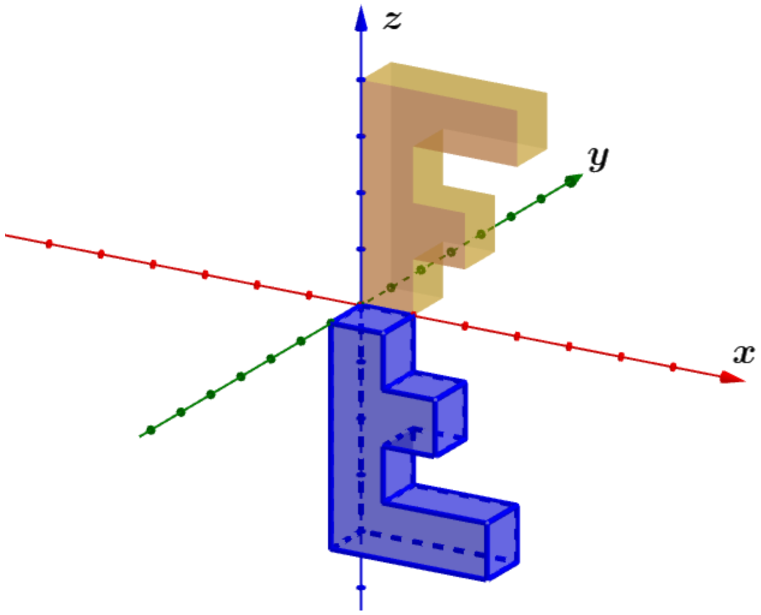

Figura 3.21: Reflexão no eixo dos x quando $\alpha = 180^{\text{o}}$

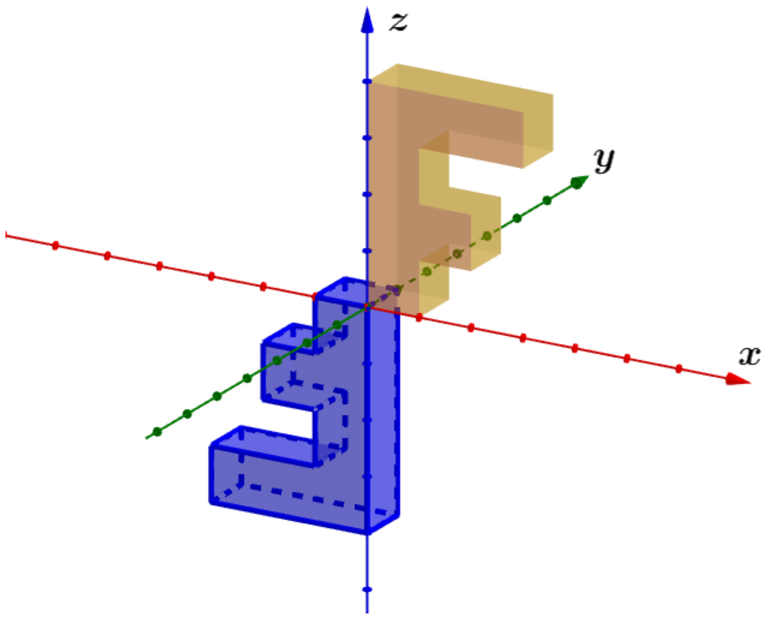

Figura 3.22: Reflexão no eixo dos y quando $\alpha = 180^{\text{o}}$

nesse caso tem-se uma imagem simétrica em relação a origem (Figura 3.27). As matrizes, nesse caso, tem determinante igual a (-1).

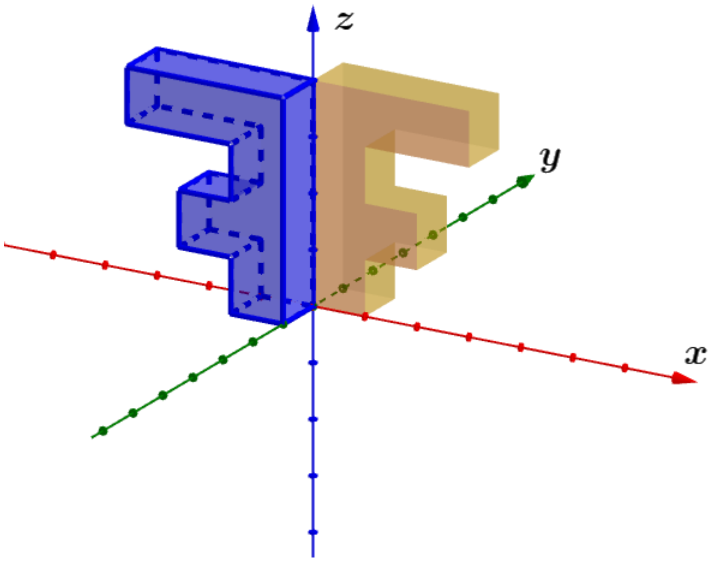

Figura 3.23: Reflexão no eixo dos z quando $\alpha = 180^{\text{o}}$

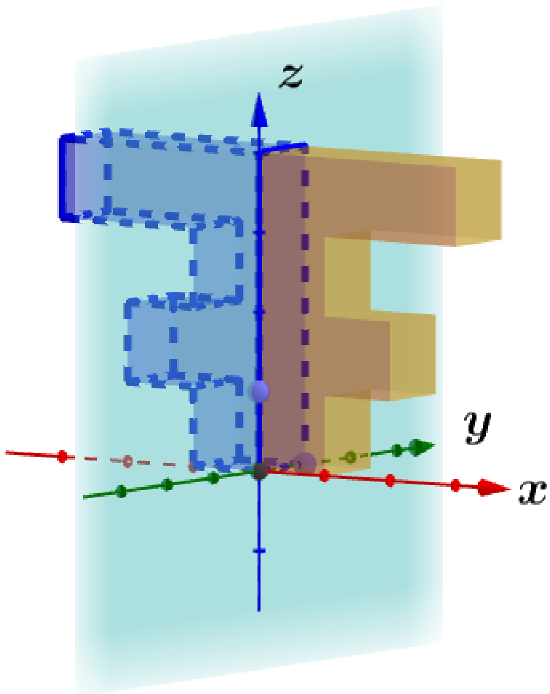

Figura 3.24: Reflexão simétrica em relação ao plano $y0z$ quando $\alpha = 360^{\text{o}}$

3.5 Operadores Lineares de $\mathbb{R}^3$ que não preservam comprimentos

Dentre os operadores lineares que não preservam comprimentos estão as projeções ortogonais sobre subespaços e o cisalhamentos nas direções dos planos xy, xz e yz.

As projeções mais simples são aquelas sobre os planos coordenados, cujas matrizes canôni-

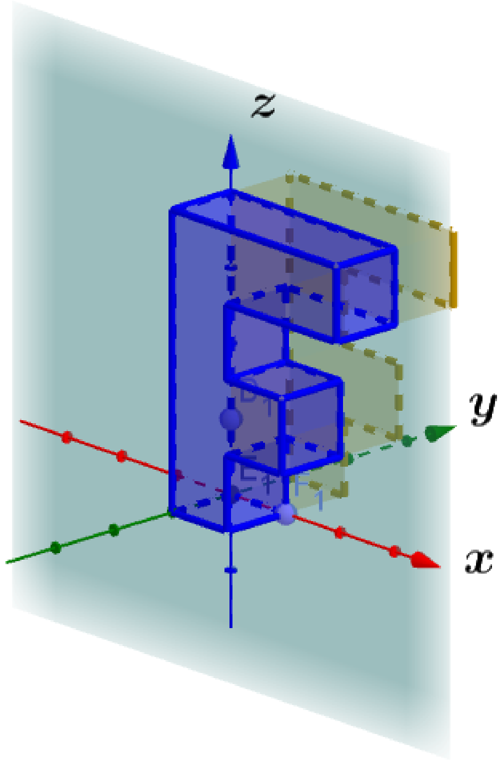

Figura 3.25: Reflexão simétrica em relação ao plano $x0z$ quando $\alpha = 360º$

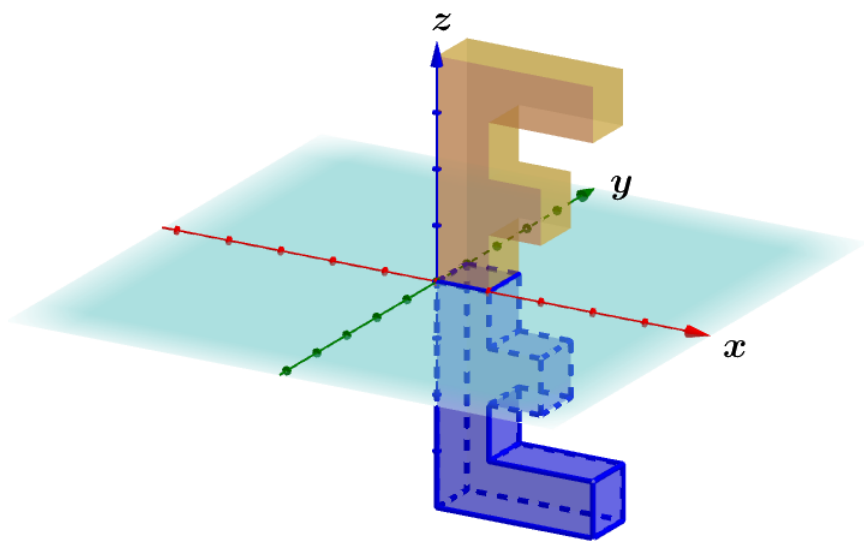

Figura 3.26: Reflexão simétrica em relação ao plano $x0y$ quando $\alpha = 360º$

cas são:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

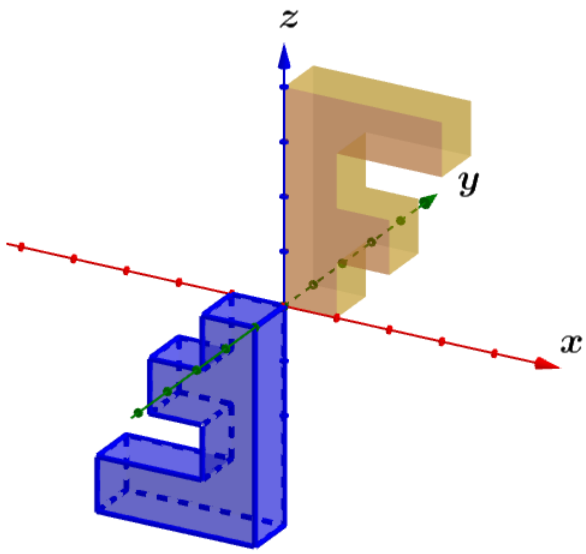

Figura 3.27: Reflexão simétrica em relação a origem

A matriz P_1 é a projeção ortogonal sobre o plano xy. A matriz P_2 é a projeção ortogonal sobre o plano xz. A matriz P_3 é a projeção ortogonal sobre o plano yz.

Observe as imagens na Figura 3.28.

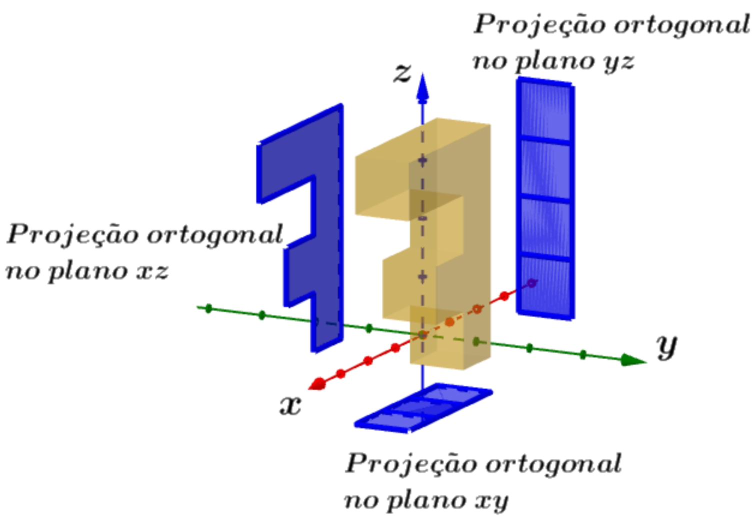

Figura 3.28: Projeção ortogonal nos planos coordenados

As transformações lineares que movem o ponto (x, y, z) paralelamente aos planos xy, xz e yz, respectivamente para a nova posição $(x+kz, y+kz, z)$, $(x+ky, y, z+ky)$, $(x, y+kx, z+kx)$ são chamadas de cisalhamentos na direção xz, xy e yz de razão k, cujas matrizes canônicas são:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & k & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veja as imagens:

Figura 3.29: A imagem cisalha paralelamente ao eixo de coordenada z, perpendicular ao plano xz

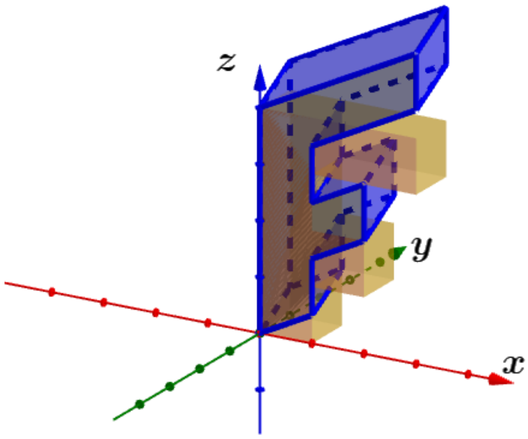

Figura 3.29: Cisalhamento na direção do plano xz

Figura 3.30: A imagem cisalha paralelamente ao eixo de coordenada y, perpendicular ao plano yz

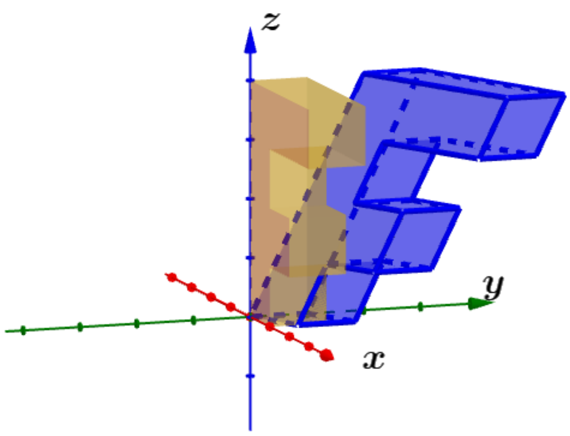

Figura 3.30: Cisalhamento na direção do plano yz

Figura 3.31: A imagem cisalha paralelamente ao eixo de coordenadoa x, perpendicular ao plano xy

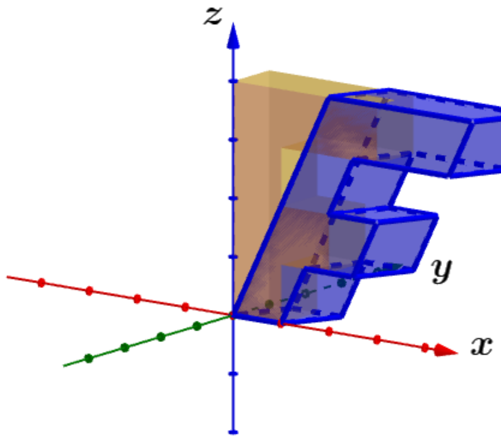

Figura 3.31: Cisalhamento na direção do plano xy

Pode-se também dilatar ou contrair a imagem mantendo seu formato original através da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Assim como em $\mathbb{R}^2$ observe que:

(a) se $|k| > 1$ a figura dilatará;

(b) se $|k| < 1$ a figura contrairá;

(c) se $k < 1$ a imagem dilatará e contrairá no sentido invertido;

(d) se $k = 1$ a imagem manterá seu tamanho normal. É a matriz identidade I.

Na Figura 3.32 veja a dilatação e na Figura 3.33 a contração.

Agora, se forem usados três parâmetros diferentes, nomeados por k, v e w, visualizar-se-á dilatações ou contrações na direção do eixo dos x ou dos y ou dos z conforme se altere os valores de k, v e w respectivamente. A matriz abaixo é a responsável por tal resultado:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

É importante que ao alterar o valor de um dos parâmetros os outros estejam fixados no valor um (1) para melhor visualizar a dilatação em determinado eixo.

A Figura 3.34 ilustrará a dilatação na direção do eixo dos x para $k = 2$.

A Figura 3.35 ilustrará a dilatação na direção do eixo dos y para $v = 2$.

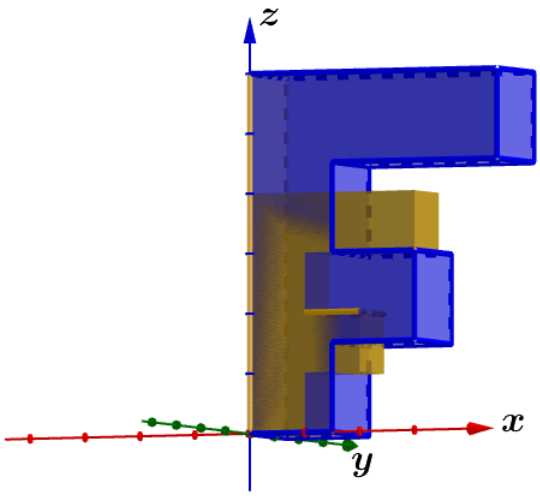

Figura 3.32: Dilatação quando $k = 1.5$

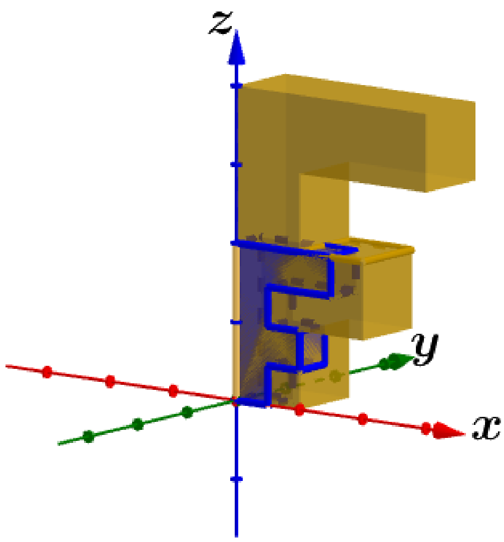

Figura 3.33: Contração quando $k = 0.5$

A Figura 3.36 ilustrará a dilatação na direção do eixo dos z para $w = 1,5$.

3.6 Composição de Operadores Lineares

A composição de operadores lineares é similar a composição de funções estudada no primeiro ano do ensino médio.

Compor duas funções ou transformações significa aplicar uma em sequência da outra, ou seja, o contra-domínio de uma será o domínio da outra. Simbolicamente tem-se:

Se $T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $T_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ são transformações lineares, a composição de T_2 com T_1, denotada por T_2 o T_1 (lê-se "T_2 bola T_1") é assim definida:

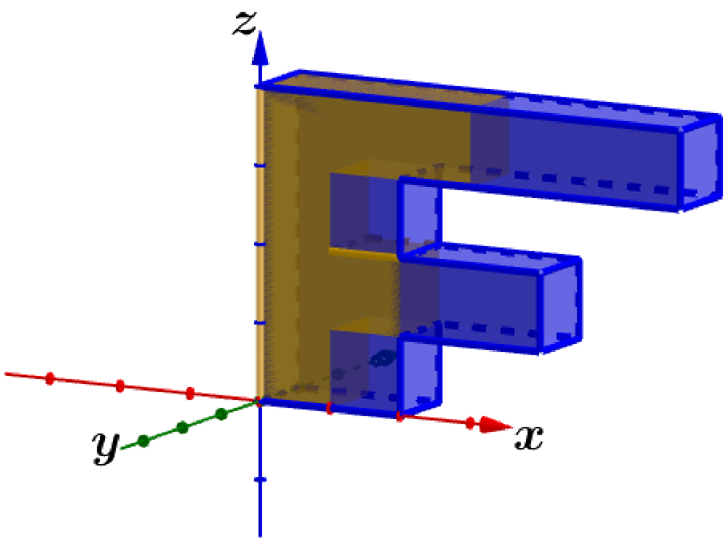

Figura 3.34: Dilatação na direção do eixo dos x

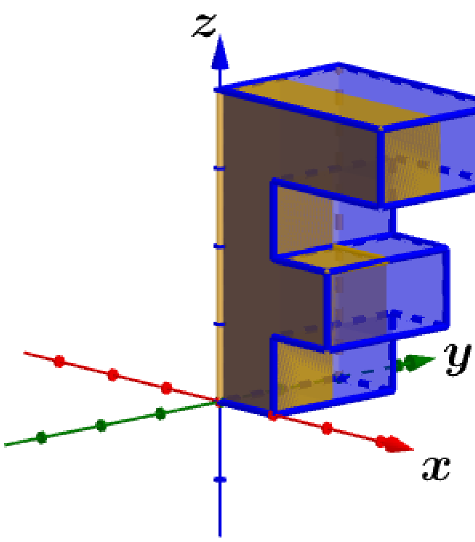

Figura 3.35: Dilatação na direção do eixo dos y

$(T_2 \text{ o } T_1)(x)$= $T_2(T_1(x))$

O livro Anton [3] mostra que a composição de transformações lineares também é uma transformação linear e mais, conclui que a composição de transformações lineares é o produto de suas matrizes canônicas na ordem apropriada, portanto, só haverá igualdade nas composições T_1 o T_2 = T_2 o T_1 se as suas matrizes comutarem, $AB = BA$, onde A é a matriz canônica de T_1 e B de T_2. Combinando os domínios e contradomínios corretamente é possível compor transformações e obter resultados variados e interessantes não encontrados nas operaçoes entre

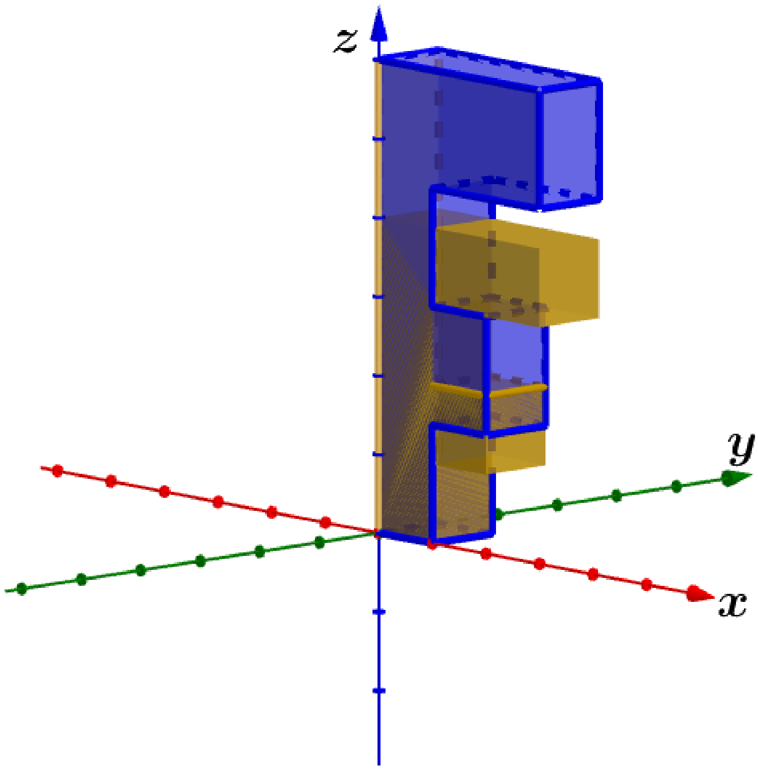

Figura 3.36: Dilatação na direção do eixo dos Z

números e vetores. Adiante serão vistas aplicações no GeoGebra de composição de matrizes, tanto em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^3$.

3.7 Translação

Transladar uma imagem significa mudá-la de lugar sem modificar suas características. A translação não é uma transformação linear, pois não preserva a origem, não podendo, portanto, ser escrita na forma matricial:

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ onde (x, y) representa os pontos da imagem e (x', y') os pontos da imagem transladada.

Esse fato dificulta a composição da translação com as outras matrizes. Então, como faremos para transladar uma imagem e, ao mesmo tempo, obter os efeitos obtidos até agora?

A computação gráfica usa um método elegante para resolver esse problema. Ela enxerga o espaço de dimensão 2 imerso no espaço de dimensão 3 e o de dimensão 3 imerso no de dimensão 4, com isso, as matrizes de ordem 2 passam a ser de ordem 3 e as de ordem 3 de ordem 4. Esses novos espaços são chamados de espaços homogêneos. No entanto, como o objetivo principal desse trabalho é mostrar, ao mesmo tempo, transformações lineares e translacões em imagens na tela do aplicativo matemático GeoGebra e esse software só permite a construção e visualização de imagens em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, ou seja, utiliza somente matrizes quadradas de ordem 2 e 3, não é possível o uso desse método nesse aplicativo.

O próximo item mostrará como esse problema foi solucionado.

3.8 Transformações lineares e translações em 2D no GeoGebra

Será mostrado agora como as imagens que aparecem nesse trabalho foram obtidas a partir do aplicativo GeoGebra.

A construção da letra F requer conhecimento de algumas ferramentas: criação de pontos, polígonos, matrizes, controles deslizantes, entre outros. No primeiro capítulo já foram descritas algumas.

Ao clicarmos no ícone do GeoGebra, abrir-se-á a tela principal, então clica-se em Arquivo depois em Novo. Dessa forma, o programa estará pronto para o início da construção.

Os passos seguintes descrevem como se obtém a construcão:

1. Criação de sete controles deslizante: seis do tipo "Número"e um do tipo "Ângulo".

   Quatro controles servirão como elementos da matriz responsável pelas deformações: reflexões, dilatações, contrações, compressões, expansões e cisalhamentos; dois como elementos para o ponto que será usado para a translação. O controle do tipo "Ângulo"será usado para criar a matriz responsável pela rotação. A nomeação segue a ordem alfabética, mas poderá ser alterada, caso seja necessário, portanto, os controles criados serão: a, b, c, d, e, f e α.

2. Construção das matrizes

   Na caixa de Entrada escreve-se: $M = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ para criar a matriz responsável pelas deformações já citadas e $R = \{\{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\}, \{-\sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$ para criar a matriz responsável pela rotação. O símbolo α é encontrado no lado direito da caixa de Entrada.

   Antes de continuar, uma observação: os pontos servirão apenas como referência, não precisando aparecer, para isso, basta clicar na bolinha azul ao lado de sua localização na Janela de Álgebra e eles sumirão da Janela de Visualização. Isso pode ser feito com qualquer objeto.

3. Translação: criação do ponto T.

   É digitado na caixa de Entrada, $T = (e, f)$. Onde e e f são controles deslizantes.

   As coodenadas desse ponto serão somadas as coordenadas dos demais pontos para causar a translação.

4. Criação da letra F fixa

   Nas imagens aparecem sempre duas letras F, uma na cor marrom, que é a fixa, e outra na cor azul, que sofre as transformações e translações. Ambas tem 10 vértices. Os pontos, vértices da letra F fixa, são construídos na seguinte ordem e valores: $A = (0, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (3, 4)$, $D = (3, 3)$, $E = (1, 3)$, $F = (1, 2)$, $G = (2, 2)$, $H = (2, 1)$, $I = (1, 1)$ e $J = (1, 0)$. Agora, para aparecer a letra F, clica-se no comando polígono, representado por um triângulo na barra de ferramentas, em seguida, nos pontos construídos acima, na ordem: $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ A$. Pronto, letra fixa está construída.

   O próximo passo descreve a construção da segunda letra, chamada de letra F transformada.

5. Criação letra F transformada

   Para essa construção, usa-se as matrizes M, R, os vértices da letra anterior e o ponto T. Aqui os vértices e o ponto T são vistos pelo aplicativo como vetores coluna e ficam na cor preta. Veja o exemplo da criação do vértice representado pela letra K:

$$K = M \cdot R \cdot A + T,$$

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}\,(\alpha) \\ -\text{sen}\,(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

   Os demais vértices ficam assim:

   - $L = M \cdot R \cdot B + T$;
   - $N = M \cdot R \cdot C + T$;
   - $O = M \cdot R \cdot D + T$;
   - $P = M \cdot R \cdot E + T$;
   - $Q = M \cdot R \cdot F + T$;
   - $S = M \cdot R \cdot G + T$;
   - $U = M \cdot R \cdot H + T$;
   - $V = M \cdot R \cdot I + T$;
   - $W = M \cdot R \cdot J + T$;

   As letras M, R e T foram omitidas porque elas já nomeiam outras construções e o GeoGebra segue a ordem alfabética.

Agora, para aparecer a letra F, clica-se no comando $\boxed{\text{polígono}}$, em seguida, nos pontos construídos acima, na ordem: $K\ L\ N\ O\ P\ Q\ S\ U\ V\ W\ K$. Pronto, letra F transformada está construída e pode ser visualizada em (https://www.geogebra.org/m/uuqchdt4).

Para mudá-la para a cor azul, clica-se como o lado direito do mouse sobre a imagem, depois em $\boxed{\text{propriedades}}$, seguido de $\boxed{\text{cor}}$.

Para tirar a malha e/ou os eixos coordenados, clica-se na tela com o lado direito do mouse, depois em $\boxed{\text{malha}}$ e/ou $\boxed{\text{Eixos}}$.

A Figura 3.37 é uma sugestão de organização dos caracteres para fins didáticos. As palavras, translações, efeitos e rotação, assim como a matriz são feitas usando o comando $\boxed{\text{Texto}}$, como explicado no capítulo 1. Dessa forma, ao se movimentar os parâmetros, é possível a visualização na tela de como fica a matriz, deixando clara a função de cada controle deslizante e o efeito na imagem causado por ele.

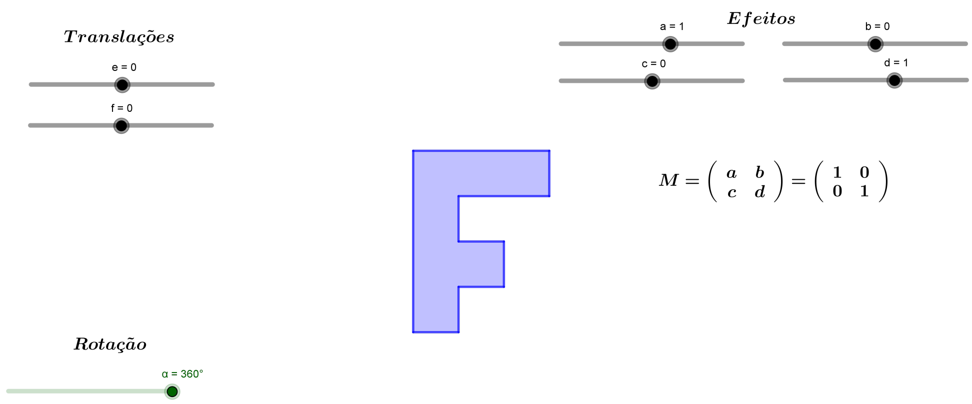

Figura 3.37: Polígono F

A construção da letra F é uma oportunidade do professor e aluno explorarem mais o assunto Transformações Lineares e o software GeoGebra.

Há outra forma de mostrar aos alunos o resultado das transformações aplicadas a uma imagem em 2D. Os procedimentos são os seguintes:

1. Constrói-se os pontos $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ e $C = (0, 4)$;
2. Agora, constrói-se os pontos D, E e F assim:
   - $D = M \cdot R \cdot A + T$;
   - $E = M \cdot R \cdot B + T$;

- $F = M \cdot R \cdot C + T$;

3. Baixa-se uma imagem da internet;

4. No GeoGebra, no comando Editar seguido do comando Inserir Imagem de, procura-se o arquivo baixado anteriormente para abrí-lo;

5. Clica-se com o lado direito do mouse sobre a imagem aberta, depois em propriedades, na sequência em posição. Aparecerá os comandos: Canto 1, Canto 2 e Canto 4 e suas posições na imagem. Altera-se essas posiçoes para D, E e F respectivamente. Vide Figura 3.38

Figura 3.38: Imagem salva da internet

Pronto, a imagem está vinculada aos controles de translação e deformações e pode ser visualizada e manipulada em (https://www.geogebra.org/m/pbatxd65).

3.9 Transformações lineares e translações em 3D no GeoGebra

Agora será mostrado como construir a letra F tridimensional. A metodologia usada anteriormente pode ser usada aqui também, porém, outra forma de construção será usada.

Os passos são os seguintes:

1. Criação de 15 controles deslizantes: doze do tipo "Número"e três do tipo "Ângulo".

Nove servirão como elementos da matriz responsável pelas deformações; três para as translações nas direções x, y e z; os do tipo "Ângulo"servirão para a construção das matrizes responsáveis pelas rotações nos eixos dos x, y e z. As nomeações sugeridas pelo Geogebra são: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, \alpha, \beta$ e λ.

2. Construção das matrizes

   A matriz $M = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}, \{g, h, i\}\}$ será a responsável pelas deformações.

   No caso das rotações, serão feitas composições das matrizes de rotação nos eixos coordenados obtend-se assim, a matriz R:

$$R = R_z \cdot R_y \cdot R_x$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

   Essas matrizes, R_x, R_y R_z, correspondem as matrizes A, B e C vistas na seção 3.4.

3. Translação: construção do ponto T.

   Digita-se na caixa de $\boxed{\text{Entrada}}$, $T = (j, k.l)$. Onde j, k e l são controles deslizantes.

4. Construção dos vetores u, v e w

   Serão construídos a partir dos vetores canônicos $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e das matrizes M e R, ficando assim:

   - $u = R * M * (1, 0, 0)$
   - $v = R * M * (0, 1, 0)$
   - $w = R * M * (0, 0, 1)$

5. Construção dos vértices

   Exatamente aqui reside a diferença entre o método usado na construção da letra F bidimensional e o que será usado agora. A letra F tridimensional possuirá 20 vértices, porém, somente em 4 deles serão aplicados os efeitos, rotações e translações e, a partir deles, usando também os vetores construídos no item anterior, serão construídos os outros 16.

   Esses quatro vértices A, B, C e D serão construídos usando também os seguintes pontos: $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 4)$, ficando, portanto, assim:

   - $A = R \cdot M \cdot (0, 0, 0) + T$
   - $B = R \cdot M \cdot (1, 0, 0) + T$

- $C = R \cdot M \cdot (0,1,0) + T$
- $D = R \cdot M \cdot (0,0,4) + T$

6. Construção dos 16 vértices:

   - $E = B + w$
   - $F = E + u$
   - $G = F + w$
   - $H = E + w$
   - $I = H + w$
   - $J = I + 2u$
   - $L = J + w$

   Antes da construção dos demais vértices, usa-se o comando $\boxed{\text{Polígono}}$ na seguinte seqüência: $A\ B\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ L\ D\ A$, construindo-se, dessa forma, o polígono F bidimensional sobre o plano que contém os eixos dos x e z.

   Os outros vértices serão:

   - $N = C + u$
   - $O = N + w$
   - $P = O + u$
   - $Q = P + w$
   - $S = O + v$
   - $U = S + w$
   - $V = U + 2u$
   - $X = V + w$
   - $Z = D + v$

   Usando novamente o comando $\boxed{\text{Polígono}}$ na sequência: $C\ N\ O\ P\ Q\ S\ U\ V\ X\ Z\ C$, constrói-se outra letra F bidimensional, paralela a anterior.

7. Construção dos quadriláteros

   Finalmente, usando ainda o comando $\boxed{\text{Polígono}}$ e seguindo as sequências abaixo, constrói-se os quadriláteros que darão forma a letra F tridimensional. São elas:

   $X\ L\ J\ V\ X$, $J\ V\ U\ I\ J$, $U\ I\ H\ S\ U$, $H\ S\ Q\ G\ H$, $Q\ G\ F\ P\ Q$

   $P\ F\ E\ O\ P$, $O\ E\ B\ N\ O$, $N\ B\ A\ C\ N$, $A\ C\ Z\ D\ A$, $D\ Z\ X\ L\ D$

A Figura 3.39 ilustra o resultado final depois das nomeações dos controles deslizantes.

Através do endereço eletrônico:(https://www.geogebra.org/m/jy6gyvgk) é possível visualizar e interagir com a construção.

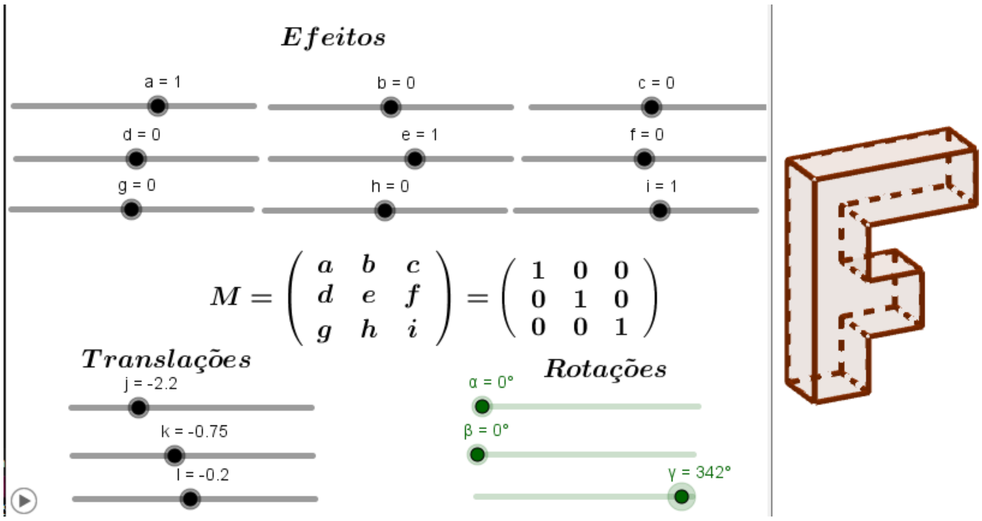

Figura 3.39: Polígono F tridimensional

Para a construção da letra F em 2D foi usada uma metodologia diferente da usada em 3D, sugiro ao leitor refazer as construções trocando essas metodologias, construindo, inclusive, outra letra ou número.

Considerações Finais

Os professores de matemática são muito cobrados a contextualizar os conteúdos explicados e alguns softwares: Winmat, Geo Plan, Winplot, dentre outros, como o próprio GeoGebra, ajudam nessa tarefa, mas para isso, é necessário formação, estudo, quebra de paradigmas do professor e demais envolvidos no processo ensino-aprendizagem. A escola, principalmente a pública, precisa se adaptar também, oferecendo espaços adequados com computadores e acesso a internet de qualidade, contribuindo assim, inclusive, na inclusão social, pois a maioria dos alunos que lá estudam não tem aparelhos tecnológicos em casa.

Este trabalho foi planejado pensando em aprofundar a formação do profissional da matemática na Educação Básica, atendendo assim, ao objetivo do PROFMAT, apesar do assunto explorado pertencer a grade curricular do Ensino Superior. Transformação Linear remete a assuntos importantes do Ensino Fundamental, como plano cartesiano e função, também a assuntos do Ensino Médio, como Matrizes, todos podendo ser explorados pelo aplicativo GeoGebra. O uso deste Software para mostrar os efeitos de uma transformação numa imagem mostra que é possível tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas, uma vez que o aluno visualiza a contextualização do conteúdo estudado.

É importante destacar que as atividades desenvolvidas, construções das letras F bidimensional e tridimensional, permitem a participação ativa do aluno que passa a ser sujeito menos passivo no processo ensino-aprendizagem, como diz a pensadora matemática, Maria Alice Gravina (1998):

> *no contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o "fazer matemática": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento.*

Uma maior participação do aluno contribuirá também para a diminuição da evasão escolar:

> *São inúmeros os problemas que decorrem da questão: evasão escolar; pavor diante da disciplina; medo e aversão à escola, dentre outros. Em larga medida, o problema pode estar atrelado a uma metodologia amplamente adotada nas escolas*

para o ensino em geral e especificamente para o da Matemática (VALENTE, 1999, p. 78).

Destaca-se também que o professor passa a ser mais exigido nesse contexto, por isso, a academia também precisa se modernizar, pensando numa formação onde a tecnologia faça parte da grade curricular dos novos professores, pois não basta apenas usar o software, é necessário o fazer pedagógico para que bons resultados sejam alcançados.

[...] a presença isolada e desarticulada dos computadores na escola não é, jamais, sinal de qualidade de ensino [. . .] (CORTELLA, 1995, p. 34).

Diante do exposto, para estudos futuros sobre o assunto, sugere-se aos leitores continuarem se aprimorando nas ferramentas oferecidas pelo GeoGebra, usando-o em assuntos diversos da Educação Básica ou no Ensino Superior. Em Álgebra Linear, por exemplo, há o estudo das Formas Quadráticas: Elipse, hipérbole e parábola, onde o uso do aplicativo ajudará muito.

Referências Bibliográficas

[1] *https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra*. 2013.

[2] *basenacionalcomum.mec. gov.br*. 2018.

[3] Howard Anton and Robert C Busby. *Álgebra linear contemporânea*. Bookman Editora, 2006.

[4] Adilson Gonçalves. *Introdução à álgebra*. Impa, 1979.

[5] Márcio Cintra Goulart. *Matemática no ensino médio*. Scipione, 1999.

[6] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, and Antonio dos Santos Machado. *Matemática e realidade*. Atual, 1993.

[7] Gelson Iezzi and Samuel Hazzan. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Atual, 2006.

[8] E.L. Lima and Instituto de Matematica Pura e Aplicada (Brasil). *Álgebra linear*. Coleção matemática universitária. IMPA, 2008.