Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Quase Sólitons de Ricci Imersos em Variedades Semi-Riemannianas Carregando Campos de Vetores Conformes

João Filipe Bezerra Pereira

Manaus, Amazonas, Brasil

Maio, 2021

Quase Sólitons de Ricci Imersos em Variedades Semi-Riemannianas Carregando Campos de Vetores Conformes

João Filipe Bezerra Pereira

Orientador: Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev

Coorientador: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, Amazonas, Brasil

Maio, 2021

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P436q

Pereira, João Filipe Bezerra

Quase sólitons de Ricci imersos em variedades semi-Riemannianas carregando campos de vetores conformes / João Filipe Bezerra Pereira . 2021

65 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Dragomir Mitkov Tsonev

Coorientador: José Nazareno Vieira Gomes

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Quase sólitons de Ricci. 2. Campos conformes. 3. Campos concirculares. 4. Hipersuperfícies totalmente umbílicas. I. Tsonev, Dragomir Mitkov. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática

João Filipe Bezerra Pereira

Quase Sólitons de Ricci Imersos em Variedades Semi-Riemannianas
Carregando Campos de Vetores Conformes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria.

Manaus, 14 de Maio de 2021.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....
Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (membro externo)
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

....
Prof. Dr. Cicero Pedro de Aquino (membro externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

....
Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista (membro externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

....
Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (membro externo)
Universidade Federal do ABC - UFABC

Documento assinado eletronicamente por **Rondinelle Marcolino Batista**, **Usuário Externo**, em

16/12/2021, às 14:11, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Dragomir Mitkov Tsonev**, **Professor do Magistério Superior**, em 16/12/2021, às 14:44, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Henrique Fernandes de Lima**, **Usuário Externo**, em 16/12/2021, às 15:52, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Mendonça Marrocos**, **Usuário Externo**, em 16/12/2021, às 23:24, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Cícero Pedro de Aquino**, **Usuário Externo**, em 17/01/2022, às 05:46, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0804068** e o código CRC **D077C375**.

Av. General Rodrigo Octávio, 6200 - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho, Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181 / Ramal 2405
CEP 69080-900, Manaus/AM, pos-matematica@ufam.edu.br

Referência: Processo nº 23105.014960/2021-17 SEI nº 0804068

À minha tia Jobilina da Silva Moraes
À minha avó Alaíde Rodrigues da Silva
(in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, a minha mãe Maria da Conceição e a minha avó Alaíde pelo apoio, pelo carinho, pela confiança, pelo amor incondicional.

Aos meus familiares, meu tio Sebastião, minha tia Lina, meu pai João, meu irmão, minhas irmãs, meus primos e minhas primas pelos votos de confiança, apoio, carinho e amor incondicionais.

Aos professores Dr. Dragomir Mitkov Tsonev e Dr. José Nazareno Vieira Gomes pela orientação, pela ajuda na elaboração deste trabalho e por terem me acompanhado ao longo do Mestrado e do Doutorado.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática que participaram da minha formação acadêmica durante o Doutorado: professor José Nazareno Vieira Gomes, professor Dragomir Mitkov Tsonev, professor Michel Pinho, professora Maria Rosilene B. dos Santos, professora Juliana Miranda, professor Raul Mesquita, professora Inês Padilha, que contribuiram para a minha formação acadêmica e o meu desenvolvimento na Matemática, que me ajudaram a obter ferramentas para a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos de Doutorado: Clebes, Adrian, Abrãao, Andrea, Marcos Aurélio, Elzimar, Francisco Eteval, Airton Freitas, Manoel, Roberto, Cristiano, Danilo, Matheus Hudson.

Agradeço também a quem não citei nessa lista de agradecimentos, que contribuiu também para minha formação na Matemática.

À Fapeam pelo apoio financeiro.

"A persistência é o caminho do êxito.

(Charles Chaplin)

RESUMO

Nesta tese vamos considerar variedades Riemannianas imersas isometricamente em uma variedade semi-Riemanniana de curvatura seccional constante. Estabelecendo uma conexão entre campos concirculares e campos conformes, bem como supondo que nossas variedades Riemannianas são totalmente umbílicas, vamos determinar uma estrutura de quase sóliton de Ricci nelas. Além disso, vamos apresentar uma manifestação do Teorema de Tashiro neste contexto e assim vamos construir vários exemplos concretos.

Palavras-chave: Quase sólitons de Ricci, Campos conformes, Campos concirculares, Hipersuperfícies totalmente umbílicas.

ABSTRACT

In this thesis we will consider Riemannian manifolds isometrically immersed in semi-Riemannian manifolds with constant sectional curvature. By establishing a connection between concircular fields and conformal fields, as well as by assuming that our Riemannian manifolds are totally umbilical, we will determine a Ricci almost soliton structure on them. In addition, we will study a manifestation of the Tashiro's Theorem in this context by means of which we will construct three new examples of gradient Ricci almost solitons.

Keywords: Ricci almost soliton, Conformal fields, Concircular fields, Totally umbilic hypersurfaces.

Conteúdo

Introdução

A questão que relaciona hipersuperfícies totalmente umbílicas e campos vetoriais conformes foi investigada pelos autores Kim et al. [23], onde eles obtiveram os seguintes resultados: Todo campo conforme de uma hipersuperfície totalmente umbílica conexa em um espaço-forma semi-Riemanniano de curvatura seccional constante é obtido como projeção tangente de um campo conforme do espaço ambiente. Estabeleceram também uma conexão entre campos concirculares e campos conformes, o que os permitiu fazer uma descrição completa de campos conformes de hipersuperfícies totalmente umbílicas em espaços-formas semi-Riemannianos. Produziram também um resultado afirmando que se uma hipersuperfície semi-Riemanniana conexa em um espaço-forma semi-Riemanniano de curvatura seccional constante carregando um campo conforme, tal que a sua projeção tangente é um campo conforme na hipersuperfície, então ocorrem dois casos mutualmente exclusivos: ou a hipersuperfície é totalmente umbílica ou o campo conforme restrito à hipersuperfície só tem parte tangente (Kim et al. [23, p.672, Teorema 1]). Nisso, fomos levados a pensar no seguinte problema para dar origem a esta tese: O que acontece se tivermos uma hipersuperfície carregando uma estrutura de quase sóliton de Ricci obtida pela projeção tangente de um campo conforme do espaço ambiente, sendo um espaço-forma de curvatura seccional constante? Poderia ocorrer algo semelhante ao que acontece no artigo de Kim et al. [23]? Qual seria a diferença?

No decorrer da investigação deste problema, assim como no trabalho de Kim et al. [23], percebemos que a componente normal do campo conforme do espaço ambiente é uma função ângulo que se comporta como um campo escalar concircular especial. Nisso fomos atraídos a estudar a teoria dos campos concirculares que foram originados pela teoria das tranformações concirculares, que são transformações conformes que preservam círculos geodésicos, questão natural e clássica de geometria Riemanniana e exaustivamente estudada por muitas pessoas. A principal ferramenta para estudar esta teoria passou a ser o conceito de campos escalares concirculares. Em 1965, Tashiro [37] coletou alguns dos fatos conhecidos até então, bem como comprovou alguns novos resultados nesse sentido. Entre outras coisas, ele provou um teorema que revelou a estrutura das variedades que admitem campos escalares concirculares, que é o Teorema 1.2 (Tashiro [37, p.252, Teorema 2]) que vamos exibir no Capítulo 1.

Nesta tese exploramos uma nova aplicação do Teorema de Tashiro em um contexto um pouco mais rico do que o contexto do trabalho de Tashiro. O ápice desta tese é uma aplicação do Teorema de Tashiro (Teorema 1.2) no contexto dos quase sólitons de Ricci imersos em uma variedade semi-Riemanniana. Esta aplicação será percebida da seguinte maneira. Começamos considerando uma variedade Riemanniana n-dimensional M isometricamente imersa na variedade semi-Riemanniana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}$. Em seguida, provamos que se M é uma hipersuperfície Riemanniana umbílica e completa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ de curvatura seccional constante, então todo campo que determina uma estrutura de quase sóliton de Ricci para M pode ser obtido como componente tangente de um campo conforme no espaço ambiente $\overline{M}$. É este último fato que constitui uma ligação para o espaço dos campos que determinam uma estrutura de quase sólitons de Ricci. Mais precisamente, estudamos as condições que relacionam um campo que determina uma estrutura de quase sólitons de Ricci para M com um campo conforme em $\overline{M}$. É esta relação que nos permitirá obter uma classificação de quase sólitons de Ricci imersos no espírito do Teorema de Tashiro [37, p.252, Teorema 2]. A aplicação do Teorema de Tashiro no contexto de quase sólitons de Ricci imersos é mais restrita do que o resultado de Tashiro, sendo que o Teorema de Tashiro consiste em cinco tipos de variedades diferentes, enquanto que a nossa classificação é mais reduzida a três tipos diferentes.

A tese está organizada da seguinte forma: O Capítulo 1 contém os conceitos necessários para o entendimento do que será tratado nos capítulos posteriores. No Capítulo 2 são provados quatro importantes lemas que são usados fortemente na demonstração de um dos teoremas do Capítulo 3, a saber, o Teorema 3.1. No Capítulo 4, elaboramos dois exemplos e uma observação que são captados pelo Teorema 3.1 e também comentamos a relação do Teorema 3.1 com os teoremas feitos no artigo de Aquino et al. [2]. No Capítulo 5 apresentamos o Teorema 5.1 e elaboramos três exemplos muito importantes que, além de intrinsecamente interessantes, também são usados na prova do Corolário 5.1, que é a manifestação do Teorema de Tashiro em nosso contexto.

Capítulo 1

Preliminares

Como fica evidente no título e na introdução, o contexto desta tese é uma mistura de algumas sub-áreas da geometria diferencial. Por esta razão, e por uma questão de clareza, esboçamos rapidamente neste capítulo preliminar algumas concepções básicas da geometria semi-Riemanniana, a teoria das subvariedades e a teoria de quase sólitons de Ricci, bem como discutimos a teoria das transformações concirculares, as quais deram origem aos campos concirculares. Não nos detemos, no entanto, em discussões a respeito de quaisquer noções da geometria Riemanniana; porém estas serão apresentadas no Apêndice, para aquele leitor sem muita familiaridade com o conteúdo.

1.1 Noções Básicas de Geometria Semi-Riemanniana e Um Pouco da Teoria das Subvariedades

Nesta seção, faremos uma apresentação de dois tópicos básicos de Geometria Diferencial: noções de geometria semi-Riemanniana e um pouco da teoria das subvariedades. Na parte da teoria de geometria semi-Riemanniana, vamos apenas discutir seus elementos básicos, como por exemplo métrica, conexão e curvaturas, sempre nos preocupando em fazer uma oportuna comparação com a geometria Riemanniana. A diferença notória entre as geometrias Riemanniana e semi-Riemanniana é a questão do índice da métrica numa variedade diferenciável. Quanto à parte da teoria de subvariadades, vamos dar atenção às hipersuperfícies tipo-espaço em uma variedade semi-Riemanniana, isto é, à teoria de imersões isométricas de uma variedade Riemanniana em uma variedade semi-Riemanniana. Para deixar claro, não iremos exibir todos os detalhes sobre tais teorias, pois nosso objetivo é apenas apresentá-los ao leitor, para que ele possa seguir a leitura do trabalho da maneira mais natural possível. Caso se queira saber mais detalhes de geometria Riemanniana, recomendamos as referências Carmo [9], Petersen [34] e Lee [28] e os detalhes de geometria semi-Riemanniana e de teoria das subvariedades, a referência O'Neill [33]. Para o leitor fazer um estudo de tais geometrias, ele precisa estudar a teoria de variedades diferenciáves ou suaves, e com essa fim ele pode consultar as referências Lee [26, 27] e Brickell-Clark [7].

Ambas as geometrias, Riemanniana e semi-Riemanniana, estudam objetos abstratos conhecidos como variedades diferenciáveis (ou suaves), as quais elas sempre estarão munidas de um tensor métrico. Tais variedades suaves munidas do tensor métrico vão ser chamadas de variedades Riemannianas ou em geral de variedades semi-Riemannianas. Na geometria Riemanniana, o tensor métrico tem índice zero, enquanto na geometria semi-Riemanniana, tal tensor tem índice maior ou igual a zero. Podemos dizer que uma variedade semi-Riemanniana é uma generalização de uma variedade Riemanniana, onde as conexões de Levi-Civita e os tensores curvatura são expressos da mesma maneira, contudo existem resultados que valem para o caso Riemanniano, mas não valem para o caso semi-Riemanniano. Para maiores informações consultar O'Neill [33].

Organizando notações, devemos sempre escrever uma barra superior para distinguir o contexto semi-Riemanniano do contexto Riemanniano. Faremos toda a adaptação dos conceitos e propriedades que ocorrem em variedades Riemannianas para variedades semi-Riemannianas. Agora vamos apresentar a definição de tensores, para chegarmos ao conceito de variedade semi-Riemanniana.

No que segue denotaremos por $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade diferenciável $(n+1)$-dimensional, $C^\infty(\overline{M}^{n+1})$ o espaço das funções diferenciáveis definidas em $\overline{M}^{n+1}$ com valores reais, $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis reais em $\overline{M}^{n+1}$ e $T_p\overline{M}^{n+1}$ o espaço tangente de $\overline{M}^{n+1}$ no ponto $p \in \overline{M}^{n+1}$.

Definição 1.1. *Um $(1, r)$-tensor em uma variedade diferenciável $\overline{M}^{n+1}$ é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \ldots \times \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$$

multilinear sobre o anel das funções diferenciáveis $C^\infty(\overline{M}^{n+1})$. Em um $(0, r)$-tensor, o contradomínio é o $C^\infty(\overline{M}^{n+1})$. Além disso, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, pede-se que $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ seja uma função diferenciável em um aberto $\mathcal{U} \subset \overline{M}^{n+1}$ e T seja $C^\infty(\mathcal{U})$-linear em cada variável, isto é,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ *e* $f, h \in C^\infty(\mathcal{U})$.

Definição 1.2. *Um tensor métrico* $\overline{g}$ *em uma variedade diferenciável* $\overline{M}^{n+1}$ *é um* $(0,2)$*-tensor simétrico em* $\overline{M}^{n+1}$*, tal que* $\overline{g}_p$ *é não-degenerado para todo* $p \in \overline{M}^{n+1}$*, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto* $p \in \overline{M}^{n+1}$ *um produto escalar* $\overline{g}_p$ *no espaço tangente* $T_p\overline{M}^{n+1}$ *que varia diferenciavelmente.*

Definição 1.3. *Uma variedade semi-Riemannana é uma variedade diferenciável* $\overline{M}^{n+1}$ *munida de um tensor métrico* $\overline{g}$ *de índice constante em* $\overline{M}^{n+1}$*. Neste caso,* $\overline{g}$ *é uma métrica semi-Riemanniana em* $\overline{M}^{n+1}$ *e denotar-se-á por* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ *uma variedade semi-Riemanniana.*

Em particular, se para cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, $\overline{g}_p$ é positivo definido, dizemos que $\overline{g}$ é uma *métrica Riemanniana* de $\overline{M}^{n+1}$ e que $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ é uma *variedade Riemanniana*.

Vale relembrar que para cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, $\overline{g}_p$ é:

(a) *positivo (negativo) definido*, se para todo $v \in T_p\overline{M}^{n+1}$, tal que $v \neq 0$, tem-se $\overline{g}_p(v,v) > 0$ (< 0);

(b) *positivo (negativo) semi-definido*, se $\overline{g}_p(v,v) \geq 0$ (≤ 0), para todo $v \in T_p\overline{M}^{n+1}$;

(c) *não-degenerado*, se para todo $w \in T_p\overline{M}^{n+1}$, $\overline{g}_p(v,w) = 0$, implica que $v = 0$.

Além disso, dizemos que um vetor não-nulo $v \in T_p\overline{M}^{n+1}$ é:

(i) *tipo-espaço*, se $\overline{g}_p(v,v) > 0$;

(ii) *tipo-tempo*, se $\overline{g}_p(v,v) < 0$;

(iii) *tipo-luz*, se $\overline{g}_p(v,v) = 0$.

Para cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, o *índice* de $\overline{g}_p$, denotado por τ, é o maior número inteiro que é a dimensão de um subespaço vetorial de $T_p\overline{M}^{n+1}$, no qual $\overline{g}_p$ restrito a esse subespaço é negativo definido. Enquanto que a *assinatura* de $\overline{g}_p$ é o par $(n+1-\tau, \tau)$. Consequentemente, $0 \leq \tau \leq n+1$ e $\tau = 0$ se, e somente se, $\overline{g}_p$ é positivo semi-definido.

É sábido que o valor de τ é constante em cada componente conexa da variedade $\overline{M}^{n+1}$. Em especial, se $\tau = 0$, então $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana e se $\tau = 1$ e $n+1 \geq 2$, dizemos que $\overline{M}^{n+1}$ é uma *variedade de Lorentz*.

Quando necessário, adotaremos a notação $\overline{M}_\tau^{n+1}$ para uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ de índice τ, onde $0 \leq \tau \leq n+1$. Podemos relacionar explicitamente o tensor métrico $\overline{g}$ com o índice τ da variedade. Isto pode ser feito da seguinte maneira: Considere $\mathbb{R}_\tau^{n+1}$ o *espaço semi-Euclidiano* com o tensor métrico canônico $\overline{g}$ de índice τ, onde $0 \leq \tau \leq n+1$. Dado um sistema de coordenadas locais, considere sua base coordenada padrão $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n+1}\}$. Então a *métrica canônica semi-Euclidiana* $\overline{g}$ é escrita da forma

$$\overline{g} = \sum_{i=1}^{n+1-\tau} dx_i^2 - \sum_{i=n+2-\tau}^{n+1} dx_i^2.$$

Isto é,

$$\overline{g}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j, \; i, j = 1, \ldots, n+1-\tau \\ -1, & \text{se} \quad i = j, \; i, j = n+2-\tau, \ldots, n+1 \end{cases}$$

Observe que tal base coordenada $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n+1}\}$ forma um referencial ortonormal na métrica $\overline{g}$. Escreva para cada $i = 1, \ldots, n+1$, $\varepsilon_i = \overline{g}_{ii} = \overline{g}(\partial_i, \partial_i)$. Então $\varepsilon_i = 1$, se $i = 1, \ldots, n+1-\tau$, e $\varepsilon_i = -1$, se $i = n+2-\tau, \ldots, n+1$.

Em particular, denotamos por $\mathbb{R}_0^{n+1}$ o *espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$ e por $\mathbb{R}_1^{n+1}$ o *espaço de Lorentz* $\mathbb{L}^{n+1}$.

Observação 1.1. *Uma variedade diferenciável sempre possui uma métrica Riemanniana, contudo nem sempre possui uma métrica semi-Riemanniana, devido às obstruções topológicas.*

Uma vez que uma variedade diferenciável tem uma métrica semi-Riemanniana, é garantida a existência e a unicidade de uma conexão afim, simétrica, compatível com a métrica, chamada *conexão de Levi-Civita*, a qual denotaremos por $\overline{\nabla}$, que é útil para definir derivação covariante de campos e de tensores, conforme veremos a seguir. Para maiores detalhes consultar O'Neill [33, p.61, Teorema 11].

Definição 1.4. *A derivada covariante de um $(1, r)$-tensor T é um $(1, r+1)$-tensor $\overline{\nabla} T$ dado por*

$$\overline{\nabla} T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \overline{\nabla}_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\overline{\nabla}_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \overline{\nabla}_X Y_r). \quad (1.1)$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$, define-se a derivada covariante $\overline{\nabla}_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\overline{\nabla}_X T(Y_1, \ldots Y_r) := \overline{\nabla} T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0, r)$-tensor T é um $(0, r+1)$-tensor $\overline{\nabla} T$ dado como em (1.1).

No que segue, considere o $(1,1)$-tensor $\overline{\nabla} Z : \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \to \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ dado por $\overline{\nabla} Z(X) = \overline{\nabla}_X Z$. Assim, pela Definição 1.4, teremos o $(1,2)$-tensor dado por

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^2_{X,Y} Z &:= \overline{\nabla}\,\overline{\nabla} Z(X,Y) \\
&= \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla} Z(Y)) - (\overline{\nabla} Z)(\overline{\nabla}_X Y) \\
&= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_X Y} Z,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$. Analogamente,

$$\overline{\nabla}^2_{Y,X} Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_Y X} Z. \tag{1.3}$$

Subtraindo (1.3) de (1.2) obtemos, para cada $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$, o $(1,2)$-tensor dado por

$$\overline{\nabla}^2_{X,Y} Z - \overline{\nabla}^2_{Y,X} Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Fazendo Z variar na equação anterior, uma conta direta mostra que teremos um $(1,3)$-tensor. O que motiva a definição seguinte.

Definição 1.5. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor*

$$\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$$

dado por

$$\overline{R}(X,Y)Z = -(\overline{\nabla}^2_{X,Y} Z - \overline{\nabla}^2_{Y,X} Z) = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \to C^\infty(\overline{M}^{n+1})$$

dado por

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) = \overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z, W).$$

O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\overline{R}(X,Y,Z,W) = -\overline{R}(Y,X,Z,W) = \overline{R}(Y,X,W,Z)$

(ii) $\overline{R}(X,Y,Z,W) = \overline{R}(Z,W,X,Y)$

(iii) $\overline{R}(X,Y)Z + \overline{R}(Y,Z)X + \overline{R}(Z,X)Y = 0$ (primeira identidade de Bianchi)

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

Definição 1.6. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$-dimensional e p um ponto de $\overline{M}^{n+1}$. A curvatura seccional $\overline{K}(x,y)$ segundo um subespaço bidimensional Π do espaço tangente $T_p\overline{M}^{n+1}$, onde $x, y \in \Pi$ são vetores linearmente independentes, é definida por:*

$$\overline{K}(x,y) = \frac{\overline{g}(\overline{R}(x,y)x,y)}{\overline{g}(x,x)\overline{g}(y,y) - \overline{g}(x,y)^2}.$$

Segue-se da Álgebra linear que esta definição não depende da escolha dos vetores linearmente independentes $x, y \in \Pi$. Além disso, para uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ de $T_p\overline{M}^{n+1}$, temos

$$\overline{K}(e_i, e_j) = \overline{g}(\overline{R}(e_i, e_j)e_i, e_j) = \overline{R}(e_i, e_j, e_i, e_j).$$

O leitor pode encontrar a prova do fato acima em O'Neill [33, p.77, Lema 39].

Proposição 1.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana e $p \in \overline{M}^{n+1}$. Se $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante igual a $\overline{c}$, então*

$$\overline{g}(\overline{R}(x,y)z,w) = \overline{c}\left\{\overline{g}(x,z)\overline{g}(y,w) - \overline{g}(y,z)\overline{g}(x,w)\right\},$$

para todo $x, y, z, w \in T_p\overline{M}^{n+1}$, onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Ver O'Neill [33, p.80, Corolário 43]. □

Definição 1.7. *Definimos o tensor curvatura de Ricci de uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ como o traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é, se $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\} \subset T_p\overline{M}^{n+1}$ é uma base ortonormal e $\varepsilon_i = \overline{g}(e_i, e_i) = \pm 1$, então para todo $x, y \in T_p\overline{M}^{n+1}$*

$$\overline{Ric}(x,y) = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \overline{g}(\overline{R}(e_i, x)e_i, y) = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \overline{g}(\overline{R}(e_i, y)e_i, x),$$

onde a última igualdade segue do item (ii) das propriedades do tensor curvatura. Portanto, $\overline{Ric}$ é um $(0,2)$-tensor simétrico.

Se $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante $\overline{c}$, então o seu tensor de Ricci é dado por

$$\overline{Ric} = \overline{c}n\overline{g}. \tag{1.4}$$

De fato, segue da Proposição 1.1 e da Definição 1.7 que

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(x,y) &= \sum_{i=1}^{n+1}\varepsilon_i\overline{g}(\overline{R}(e_i,x)e_i,y)\\
&= \overline{c}\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\varepsilon_i\overline{g}(x,y)\overline{g}(e_i,e_i)-\sum_{i=1}^{n+1}\varepsilon_i\overline{g}(e_i,y)\overline{g}(x,e_i)\right\}\\
&= \overline{c}\left\{(n+1)\overline{g}(x,y)-\overline{g}(x,y)\right\}\\
&= \overline{c}n\overline{g}(x,y),
\end{aligned}$$

para todos $x, y \in T_p\overline{M}^{n+1}$.

Definição 1.8. *A curvatura escalar de* $\overline{M}^{n+1}$ *é uma função* $\overline{S} \in C^\infty(\overline{M}^{n+1})$ *dada por*

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n+1}\overline{Ric}(e_i,e_i) = 2\sum_{i<j}\overline{K}(e_i,e_j),$$

enquanto que $\overline{s} = \frac{\overline{S}}{(n+1)n}$ *é a curvatura escalar normalizada de* $\overline{M}^{n+1}$.

Agora faremos um breve resumo da teoria das subvariedades, mais precisamente, sobre hipersuperfícies tipo-espaço em uma variedade semi-Riemanniana. Para isso, vamos denotar por (M^n, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica g e por $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$-dimensional com métrica $\overline{g}$. As conexões de Levi-Civita correspondentes serão denotadas por ∇ e $\overline{\nabla}$, respectivamente, assim como os tensores curvatura correspondentes serão denotados por R e $\overline{R}$, respectivamente. Com isso, denote uma *imersão isométrica* da primeira variedade na última por $f : (M^n, g) \to (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, isto é, para cada ponto $p \in M^n$, df_p é injetiva e $g_p(X,Y) = \overline{g}_{f(p)}(df_p(X), df_p(Y))$, para todos $X, Y \in T_pM^n$. Normalmente omitiremos escrever explicitamente as dimensões das variedades, pois acreditamos que isso não deve causar muita confusão. Seja $\mathfrak{X}(M)$ o anel dos campos de vetores tangentes suaves em M, N o *campo de vetores normais unitários* em M, $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o *operador de forma* (ou *operador de Weingarten*) e $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ a *segunda forma fundamental* da imersão f. Então, as seguintes relações são bem conhecidas:

Fórmula de Gauss.

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y).$$

Fórmula de Weingarten.

$$\overline{\nabla}_X N = -\mathcal{A}X.$$

Equação de Weingarten.

$$\overline{g}(\alpha(X,Y),N) = g(\mathcal{A}X,Y).$$

Adotamos a seguinte notação padrão: Escrevemos $\{e_1,\ldots,e_n,N\}$ para o referencial adaptado à imersão f e $\varepsilon_N = \overline{g}(N,N) = \pm 1$ para o sinal do campo de vetores normais unitários N a M. Se $\varepsilon_N = 1$, temos uma hipersuperfície Riemanniana imersa em uma variedade Riemanniana com a orientação padrão e se $\varepsilon_N = -1$, temos uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em uma variedade semi-Riemanniana *temporalmente orientada*, isto é, munida de um vetor tipo-tempo, que no caso é o N. Para o caso $\varepsilon_N = 1$, definimos a função curvatura média da imersão f por $H = \frac{1}{n}tr(\mathcal{A})$ e para o caso $\varepsilon_N = -1$, definimos a função curvatura média da imersão f por $H = -\frac{1}{n}tr(\mathcal{A})$. Assim, em ambos os casos definimos a *função curvatura média* da imersão f por $H = \frac{\varepsilon_N}{n}tr(\mathcal{A})$. Enquanto que $\vec{H} = HN = \frac{\varepsilon_N}{n}tr(\mathcal{A})N = \frac{1}{n}tr(\alpha)$ é o *vetor curvatura média* de f.

As equações de Gauss e Codazzi para a imersão f serão de suma importância para nossas considerações. No contexto semi-Riemanniano eles lêem como segue.

Equação de Gauss. *O'Neill [33, p.100, Teorema 5]*

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) = \overline{g}(R(X,Y)Z,W) - \overline{g}(\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)) + \overline{g}(\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)).$$

Equação de Codazzi. *O'Neill [33, p.115, Proposição 33]*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z).$$

Note que a equação de Gauss pode ser reescrita como

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) = \overline{g}(R(X,Y)Z,W) - \varepsilon_N g(\mathcal{A}X,Z)g(\mathcal{A}Y,W) + \varepsilon_N g(\mathcal{A}Y,Z)g(\mathcal{A}X,W),$$

enquanto que a equação de Codazzi pode ser reescrita como

$$-(\overline{R}(X,Y)N)^{T} = (\nabla_Y\mathcal{A})X - (\nabla_X\mathcal{A})Y.$$

Quanto ao referencial adaptado $\{e_1,\ldots,e_n,N\}$ à imersão $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$, considerando $\varepsilon_i = \overline{g}(e_i,e_i) = \pm 1$ e $\varepsilon_N = \overline{g}(N,N) = \pm 1$, o tensor curvatura de Ricci de $\overline{M}$ é definido por

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\overline{g}(\overline{R}(e_i,X)e_i,Y)+\varepsilon_N\overline{g}(\overline{R}(N,X)N,Y)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\overline{g}(\overline{R}(X,e_i)Y,e_i)+\varepsilon_N\overline{g}(\overline{R}(X,N)Y,N),\end{aligned}$$

enquanto que o tensor curvatura de Ricci de M é definido por

$$Ric(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(e_i,X)e_i,Y)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(X,e_i)Y,e_i).$$

Então, contraindo a equação de Gauss obtém-se

$$\overline{Ric}=Ric+\varepsilon_N\Omega_N-nH\mathcal{A}+\varepsilon_N\mathcal{A}^2, \tag{1.5}$$

onde $\Omega_N(\cdot,\cdot)=\overline{g}(\overline{R}(\cdot,N)\cdot,N)$. Agora, se o espaço ambiente $(\overline{M}^{n+1}(\overline{c}),\overline{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana com curvatura seccional constante $\overline{c}$, segue da Proposição 1.1 que $\Omega_N=\varepsilon_N\overline{c}g$. De fato,

$$\begin{aligned}\Omega_N(X,Y) &= \overline{g}(\overline{R}(X,N)Y,N)\\ &= \overline{c}\,\{\overline{g}(X,Y)\overline{g}(N,N)-\overline{g}(N,Y)\overline{g}(X,N)\}\\ &= \varepsilon_N\overline{c}g(X,Y).\end{aligned}$$

Assim, pela Eq. (1.4), temos que a Eq. (1.5) reduz a

$$Ric=\overline{c}(n-1)g+nH\mathcal{A}-\varepsilon_N\mathcal{A}^2. \tag{1.6}$$

Definição 1.9. *Dizemos que uma imersão isométrica $f:(M^n,g)\to(\overline{M}^{n+1},\overline{g})$ é totalmente umbílica, se existe um campo de vetores normais $\zeta\in\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ tal que*

$$\alpha(X,Y)=g(X,Y)\zeta,$$

para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

A Definição 1.9 é equivalente às seguintes afirmações:

- $\zeta=\vec{H}$, ou seja, $\alpha(X,Y)=g(X,Y)\vec{H}$, onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média de f, para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$;

- $\overline{g}(\alpha(X,Y),N)=\varepsilon_N Hg(X,Y)$, para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, onde H é a função curvatura média de f;

- Existe uma função z suave em M^n tal que $\mathcal{A} = zI$, onde I é o operador identidade sobre $\mathfrak{X}(M)$. Tal função z é chamada de *fator de umbilicidade*. Além disso, $z = \varepsilon_N H$, ou seja, $\mathcal{A} = \varepsilon_N HI$.

Neste caso, se o espaço ambiente $(\overline{M}^{n+1}(\overline{c}), \overline{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana com curvatura seccional constante $\overline{c}$, segue da equação de Codazzi que H é constante.

1.2 Descrição dos Campos Conformes em Espaços Semi-Euclidianos

Nesta seção, faremos comentários sobre o trabalho dos autores Kim et al. [23], onde eles descreveram a construção dos campos vetoriais conformes do espaço semi-Euclidiano com índice qualquer, motivados por um resultado provado por eles. Cujo o enunciado é o seguinte:

Teorema 1.1. *Kim et al. [23, p.675, Teorema 3] Seja M^n uma hipersuperfície totalmente umbílica conexa de um espaço-forma semi-Riemanniano $\overline{M}_k^{n+1}(\overline{c})$. Então todo campo vetorial conforme em M^n pode ser obtido como parte tangente V^T de um campo vetorial conforme V em $\overline{M}_k^{n+1}(\overline{c})$. Além disso, para todo campo vetorial conforme W em M^n existe um único campo vetorial conforme V em $\overline{M}_k^{n+1}(\overline{c})$ que satisfaz $V|_{M^n} = W$.*

O Teorema 1.1 vai ser de grande motivação para as discussões do Capítulo 3 que desempenharão importante papel nas discussões do Capítulo 4. Em vista disso, vamos começar a definir o que é um campo conforme de vetores em uma variedade semi-Riemanniana.

Definição 1.10. *Dada uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$, um campo de vetores $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é chamado conforme com respeito à métrica $\overline{g}$, com fator conforme $\sigma \in C^\infty(\overline{M})$, quando a seguinte equação ocorre*

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g} = 2\sigma\overline{g}.$$

Se $(\overline{M}(\overline{c}), \overline{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$-dimensional com curvatura seccional constante $\overline{c}$, então temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2. *Se $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{M}(\overline{c}))$ é um campo conforme de vetores na métrica $\overline{g}$, com fator conforme σ, então*

$$\overline{Hess}\sigma = -\overline{c}\sigma\overline{g}.$$

Demonstração. Desde que $\overline{M}(\overline{c})$ é uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$-dimensional carregando um campo de vetores conformes $\overline{V}$ com fator conforme σ, temos duas fórmulas bastante exploradas no contexto semi-Riemanniano, a saber,

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{Ric} = -(n-1)\overline{Hess}\sigma - \overline{\Delta}\sigma\overline{g} \tag{1.7}$$

e

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{s} = -\frac{2}{n+1}\overline{\Delta}\sigma - 2\overline{s}\sigma, \tag{1.8}$$

onde $\overline{Ric}$ é o tensor de Ricci, $\overline{Hess}\sigma$ é o Hessiano de σ, $\overline{\Delta}\sigma$ é o Laplaciano de σ na métrica $\overline{g}$ e $\overline{s} = \frac{\overline{S}}{(n+1)n}$, onde $\overline{s}$ e $\overline{S}$ denotam a curvatura escalar normalizada e a curvatura escalar não-normalizada, respectivamente. O leitor poderá encontrar as fórmulas (1.7) e (1.8) nas referências Yano [41, 40].

Por outro lado, desde que $\overline{M}(\overline{c})$ tem curvatura seccional constante $\overline{c}$, então $\overline{s} = \overline{c}$. Além disso,

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{Ric} = 2\overline{c}n\sigma\overline{g} \tag{1.9}$$

e

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{s} = 0. \tag{1.10}$$

Assim, comparando as fórmulas (1.7) e (1.8) com as fórmulas (1.9) e (1.10), temos

$$(n-1)\overline{Hess}\sigma = -2\overline{c}n\sigma\overline{g} - \overline{\Delta}\sigma\overline{g} \tag{1.11}$$

e

$$\frac{2}{n+1}\overline{\Delta}\sigma = -2\overline{c}\sigma. \tag{1.12}$$

Substituindo (1.12) em (1.11), concluímos a prova da Proposição 1.2. □

Agora estamos prontos para discutir a ideia da construção dos campos de vetores conformes nos espaços semi-Euclidianos. Vamos considerar o espaço semi-Euclidiano $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ com o tensor métrico $\overline{g} = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \varepsilon_{n+1}dx_{n+1}^2$, onde $\varepsilon_{n+1} = \pm 1$. Note que, se $\varepsilon_{n+1} = 1$, $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e se $\varepsilon_{n+1} = -1$, $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ é o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$. Se $\overline{V}$ é um campo vetorial conforme em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g} = 2\sigma\overline{g}$, então, como a curvatura seccional $\overline{c}$ do espaço semi-Euclidiano é igual a zero, temos pela Proposição 1.2 que $\overline{Hess}\sigma = 0$, que implica

$$\sigma(\overline{x}) = \sigma(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i + \overline{\beta} = \overline{g}(\overline{\alpha}, \overline{x}) + \overline{\beta}, \tag{1.13}$$

para todo $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1})$ é um vetor constante em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\overline{\beta}$ é uma constante real.

Considerando a base coordenada $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n+1}\}$ do $\mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$(\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g})_{ij} = 2\sigma\overline{g}_{ij},$$

onde

$$\overline{g}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j,\ i,j = 1, \ldots, n \\ \varepsilon_{n+1}, & \text{se} \quad i = j = n+1 \end{cases}$$

Se $i = j$, então

$$\begin{array}{rcl} \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_i}\overline{V}, \partial_i) & = & \sigma \\ & \text{e} & \\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_{n+1}}\overline{V}, \partial_{n+1}) & = & \varepsilon_{n+1}\sigma. \end{array} \tag{1.14}$$

Se $i \neq j$, então

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_i}\overline{V}, \partial_j) = -\overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_j}\overline{V}, \partial_i). \tag{1.15}$$

Sabendo que $\overline{\nabla}$ é a derivada usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ na métrica $\overline{g}$, podemos reescrever as equações (1.14) e (1.15), respectivamente como:

$$\begin{array}{rcl} \overline{g}(\partial_i\overline{V}, \partial_i) & = & \sigma \\ & \text{e} & \\ \overline{g}(\partial_{n+1}\overline{V}, \partial_{n+1}) & = & \varepsilon_{n+1}\sigma \end{array} \tag{1.16}$$

e

$$\overline{g}(\partial_i\overline{V}, \partial_j) = -\overline{g}(\partial_j\overline{V}, \partial_i),\ i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n+1. \tag{1.17}$$

Escrevendo $\overline{V} = (V_1, \ldots, V_{n+1})$, então a equação (1.16) passa a ser

$$\partial_i V_i = \sigma,\ i = 1, \ldots, n+1, \tag{1.18}$$

enquanto que a equação (1.17) se traduzirá como

$$\begin{array}{rcl} \partial_i V_j & = & -\partial_j V_i,\ i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n \\ & \text{e} & \\ \partial_{n+1} V_j & = & -\varepsilon_{n+1}\partial_j V_{n+1},\ j \neq n+1,\ j = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{1.19}$$

Segue da equação (1.18) que

$$\partial_j\partial_i V_j = \partial_i\partial_j V_j = \partial_i\sigma = \alpha_i,\ i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n+1. \tag{1.20}$$

Decorre das equações (1.18) e (1.19) que

$$
\begin{aligned}
\partial_i\partial_i V_j &= -\partial_i\partial_j V_i = -\partial_j\partial_i V_i = -\partial_j\sigma \\
&= -\alpha_j,\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n, \\
\partial_{n+1}\partial_{n+1} V_j &= -\varepsilon_{n+1}\partial_{n+1}\partial_j V_{n+1} \\
&= -\varepsilon_{n+1}\partial_j\partial_{n+1} V_{n+1} \\
&= -\varepsilon_{n+1}\partial_j\sigma \\
&= -\varepsilon_{n+1}\alpha_j,\ j \neq n+1,\ j = 1,\ldots,n, \\
\partial_i\partial_i V_{n+1} &= -\varepsilon_{n+1}\partial_i\partial_{n+1} V_i \\
&= -\varepsilon_{n+1}\partial_{n+1}\partial_i V_i \\
&= -\varepsilon_{n+1}\partial_{n+1}\sigma \\
&= -\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1},\ i \neq n+1,\ i = 1,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

e

$$\partial_i\partial_j V_k = 0,\ i \neq j \neq k,\ i,j,k = 1,\ldots,n+1. \tag{1.22}$$

Integrando a primeira equação de (1.21) com respeito a x_i, temos que

$$\partial_i V_j = -\alpha_j x_i + \phi_i, \tag{1.23}$$

onde ϕ_i é uma função que não depende de x_i.

Derivando a equação (1.23) em relação a x_j, temos que

$$\partial_j\partial_i V_j = \partial_j\phi_i.$$

Por outro lado, devido à equação (1.20), obteremos

$$\partial_j\phi_i = \alpha_i. \tag{1.24}$$

Integrando (1.24) com respeito a x_j, chegamos a

$$\phi_i = \alpha_i x_j + \phi_j,$$

onde ϕ_j é uma função que não depende de x_j e nem de x_i.

Assim, a equação (1.23) se nos apresentará como

$$\partial_i V_j = -\alpha_j x_i + \alpha_i x_j + \phi_j. \tag{1.25}$$

Derivando a equação (1.25) em relação a x_k, para todo $k \neq i \neq j$, chegaremos a

$$\partial_k\partial_i V_j = \partial_k\phi_j.$$

Pela equação (1.22), teremos $\partial_k \phi_j = 0$. Assim, ϕ_j não depende de nenhum x_k, para todo $k \neq i \neq j$. O que implica em $\phi_j = b_{ji}$ é uma constante real. Assim, (1.25) assumirá

$$\partial_i V_j = \alpha_i x_j - \alpha_j x_i + b_{ji}, \tag{1.26}$$

para todo $i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n$, onde $b_{ji} \in \mathbb{R}$.

Integrando a segunda equação de (1.21) com respeito a x_{n+1}, teremos

$$\partial_{n+1} V_j = -\varepsilon_{n+1} \alpha_j x_{n+1} + \phi_{n+1}, \tag{1.27}$$

onde ϕ_{n+1} é uma função que não depende de x_{n+1}.

Derivando a equação (1.27) em relação a x_j, chegaremos a

$$\partial_j \partial_{n+1} V_j = \partial_j \phi_{n+1}.$$

Por outro lado, a equação (1.20) nos fornecerá

$$\partial_j \phi_{n+1} = \alpha_{n+1}. \tag{1.28}$$

Integrando (1.28) com respeito a x_j, poderemos escrever

$$\phi_{n+1} = \alpha_{n+1} x_j + \phi_j,$$

onde ϕ_j é uma função que não depende de x_j e nem de x_{n+1}.

Assim, a equação (1.27) assumirá a forma

$$\partial_{n+1} V_j = -\varepsilon_{n+1} \alpha_j x_{n+1} + \alpha_{n+1} x_j + \phi_j. \tag{1.29}$$

Derivando a equação (1.29) em relação a x_i, para todo $i \neq j \neq n+1$, chegaremos à relação

$$\partial_i \partial_{n+1} V_j = \partial_i \phi_j.$$

A equação (1.22) nos informa que $\partial_i \phi_j = 0$. Portanto, ϕ_j não depende de nenhum x_i, para todo $i \neq j \neq n+1$. O que implica em $\phi_j = b_{j,n+1}$ é uma constante real. Assim, (1.29) deverá ser escrita como

$$\partial_{n+1} V_j = \alpha_{n+1} x_j - \varepsilon_{n+1} \alpha_j x_{n+1} + b_{j,n+1}, \tag{1.30}$$

para todo $j \neq n+1,\ j = 1, \ldots, n$, onde $b_{j,n+1} \in \mathbb{R}$.

Integrando a terceira equação de (1.21) com respeito a x_i, teremos obtido

$$\partial_i V_{n+1} = -\varepsilon_{n+1} \alpha_{n+1} x_i + \phi_i, \tag{1.31}$$

onde ϕ_i é uma função que não depende de x_i.

Derivando a equação (1.31) em relação a x_{n+1}, obtemos

$$\partial_{n+1}\partial_i V_{n+1} = \partial_{n+1}\phi_i.$$

Por outro lado, a equação (1.20) nos fornece também

$$\partial_{n+1}\phi_i = \alpha_i. \tag{1.32}$$

Integrando (1.32) com respeito a x_{n+1}, chega-se à relação

$$\phi_i = \alpha_i x_{n+1} + \phi_{n+1},$$

onde ϕ_{n+1} é uma função que não depende de x_{n+1} e nem de x_i.

Portanto, a equação (1.31) será escrita como

$$\partial_i V_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1}x_i + \alpha_i x_{n+1} + \phi_{n+1}. \tag{1.33}$$

Derivando a equação (1.33) em relação a x_j, para todo $j \neq i \neq n+1$, encontraremos

$$\partial_j\partial_i V_{n+1} = \partial_j\phi_{n+1}.$$

Pela equação (1.22), tem-se $\partial_j\phi_{n+1} = 0$. Portanto, ϕ_{n+1} não depende de nenhum x_j, para todo $j \neq i \neq n+1$. O que implica em $\phi_{n+1} = b_{n+1,i}$ é uma constante real. Assim, (1.33) estará assumindo a forma

$$\partial_i V_{n+1} = \alpha_i x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1}x_i + b_{n+1,i}, \tag{1.34}$$

para todo $i \neq n+1,\ i = 1,\ldots,n$, onde $b_{n+1,i} \in \mathbb{R}$ e segue das equações (1.19) e (1.26) que

$$b_{ij} + b_{ji} = 0, \tag{1.35}$$

para todo $i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n$ e segue das equações (1.19), (1.30) e (1.34),

$$b_{i,n+1} + \varepsilon_{n+1}b_{n+1,i} = 0, \tag{1.36}$$

para todo $i \neq n+1,\ i = 1,\ldots,n$.

Segue da equação (1.18) que

$$\partial_1 V_1 = \sigma = \overline{g}(\overline{\alpha},\overline{x}) + \overline{\beta}. \tag{1.37}$$

Integrando (1.37) com respeito a x_1, encontra-se

$$V_1 = \sigma x_1 - \frac{\alpha_1}{2}x_1^2 + \delta_1, \tag{1.38}$$

onde δ_1 é uma função que não depende de x_1.

Derivando (1.38) em relação a x_2, obtém-se a relação

$$\partial_2 V_1 = \alpha_2 x_1 + \partial_2 \delta_1.$$

Por outro lado, a equação (1.26) nos fornecerá

$$\partial_2 \delta_1 = -\alpha_1 x_2 + b_{12}. \tag{1.39}$$

Integrando (1.39) com respeito a x_2, chega-se à relação

$$\delta_1 = -\frac{\alpha_1}{2} x_2^2 + b_{12} x_2 + \delta_2,$$

onde δ_2 é uma função que não depende de x_2 e nem de x_1.

Portanto, (1.38) assume a forma

$$V_1 = \sigma x_1 - \frac{\alpha_1}{2} x_1^2 - \frac{\alpha_1}{2} x_2^2 + b_{12} x_2 + \delta_2.$$

A ideia básica aqui é a de se repetir o processo para x_3, depois x_4, até se chegar a x_{n+1}.

$$V_1 = \sigma x_1 - \frac{\alpha_1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + b_{12} x_2 + \ldots + b_{1n} x_n + \delta_n, \tag{1.40}$$

onde δ_n depende somente de x_{n+1}.

Derivando (1.40) em relação a x_{n+1}, chegamos à relação

$$\partial_{n+1} V_1 = \alpha_{n+1} x_1 + \partial_{n+1} \delta_n.$$

Por outro lado, pela equação (1.30),

$$\partial_{n+1} \delta_n = -\varepsilon_{n+1} \alpha_1 x_{n+1} + b_{1,n+1}. \tag{1.41}$$

Integrando (1.41) em relação a x_{n+1}, temos

$$\delta_n = -\varepsilon_{n+1} \frac{\alpha_1}{2} x_{n+1}^2 + b_{1,n+1} x_{n+1} + \delta_{n+1}, \tag{1.42}$$

onde δ_{n+1} é uma função que não depende de nenhum x_i, para todo $i = 1, \ldots, n+1$, que se torna, portanto, δ_{n+1} é uma constante real.

Podemos tomar $\delta_{n+1} = \frac{\gamma_1}{2}$, onde γ_1 é uma constante real. Assim, (1.42) se reescreve como

$$\delta_n = -\varepsilon_{n+1} \frac{\alpha_1}{2} x_{n+1}^2 + b_{1,n+1} x_{n+1} + \frac{\gamma_1}{2}. \tag{1.43}$$

Portanto, (1.40) assume a forma

$$V_1 = \sigma x_1 - \frac{\alpha_1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \varepsilon_{n+1} x_{n+1}^2) + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + b_{1,n+1}x_{n+1} + \frac{\gamma_1}{2}. \quad (1.44)$$

A equação (1.44) pode ser reescrita como

$$V_1(\overline{x}) = V_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sigma(\overline{x})x_1 - \frac{\alpha_1}{2}\overline{g}(\overline{x}, \overline{x}) + \sum_{j \neq 1} b_{1j}x_j + \frac{\gamma_1}{2}. \quad (1.45)$$

Similarmente, podemos obter

$$V_i(\overline{x}) = V_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sigma(\overline{x})x_i - \frac{\alpha_i}{2}\overline{g}(\overline{x}, \overline{x}) + \sum_{j \neq i} b_{ij}x_j + \frac{\gamma_i}{2}, \quad (1.46)$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Segue da equação (1.18) que

$$\partial_{n+1} V_{n+1} = \sigma = \overline{g}(\overline{\alpha}, \overline{x}) + \overline{\beta}. \quad (1.47)$$

Integrando (1.47) com respeito a x_{n+1}, temos

$$V_{n+1} = \sigma x_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}}{2} x_{n+1}^2 + \delta_{n+1}, \quad (1.48)$$

onde δ_{n+1} é uma função que não depende de x_{n+1}.

Derivando (1.48) em relação a x_1, chegaremos a

$$\partial_1 V_{n+1} = \alpha_1 x_{n+1} + \partial_1 \delta_{n+1}.$$

Por outro lado, pela equação (1.34),

$$\partial_1 \delta_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1}x_1 + b_{n+1,1}. \quad (1.49)$$

Integrando (1.49) com respeito a x_1, ficaremos com a relação

$$\delta_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}x_1^2 + b_{n+1,1}x_1 + \delta_1,$$

onde δ_1 é uma função que não depende de x_1 e nem de x_{n+1}.

Portanto, (1.48) será escrita como

$$V_{n+1} = \sigma x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}(x_1^2 + \varepsilon_{n+1}x_{n+1}^2) + b_{n+1,1}x_1 + \delta_1.$$

Repita-se o processo para x_2, depois x_3, até se chegar a x_n. Ao se chegar ao sub-índice $n-1$, ter-se-á

$$V_{n+1} = \sigma x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \varepsilon_{n+1}x_{n+1}^2) + b_{n+1,1}x_1 + \ldots + b_{n+1,n-1}x_{n-1} + \delta_{n-1}, \quad (1.50)$$

onde δ_{n-1} depende somente de x_n.

Derivando-se (1.50) em relação a x_n, chega-se a

$$\partial_n V_{n+1} = \alpha_n x_{n+1} + \partial_n \delta_{n-1}.$$

Por outro lado, a equação (1.34) nos informa que

$$\partial_n \delta_{n-1} = -\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1} x_n + b_{n+1,n}. \tag{1.51}$$

Integrando-se (1.51) em relação a x_n, obtém-se

$$\delta_{n-1} = -\varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}x_n^2 + b_{n+1,n}x_n + \delta_n, \tag{1.52}$$

onde δ_n é uma função que não depende de nenhum x_i, para todo $i = 1, \dots, n+1$, o que torna, δ_n uma constante real.

Podemos tomar $\delta_n = \frac{\gamma_{n+1}}{2}$, onde γ_{n+1} é uma constante real. Assim, (1.52) será lida como

$$\delta_{n-1} = -\varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}x_n^2 + b_{n+1,n}x_n + \frac{\gamma_{n+1}}{2}.$$

Portanto, (1.50) assumirá o formato

$$V_{n+1} = \sigma x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2 + \varepsilon_{n+1}x_{n+1}^2) + b_{n+1,1}x_1 + \dots + b_{n+1,n}x_n + \frac{\gamma_{n+1}}{2}. \tag{1.53}$$

A equação (1.53) será reescrita como

$$V_{n+1}(\overline{x}) = V_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sigma(\overline{x})x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{2}\overline{g}(\overline{x}, \overline{x}) + \sum_{j \neq n+1} b_{n+1,j}x_j + \frac{\gamma_{n+1}}{2}. \tag{1.54}$$

Portanto, pelas equações (1.46) e (1.54) temos

$$\overline{V}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})\overline{x} - \frac{1}{2}\overline{g}(\overline{x}, \overline{x})\overline{\alpha} + B\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{\gamma}, \tag{1.55}$$

onde $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1})$ e $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1})$ são vetores constantes, σ é uma função dada por (1.13) e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ com entradas satisfazendo as equações (1.35) e (1.36) e $b_{ii} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n+1$.

1.3 Produtos Warped

Nesta seção, vamos rapidamente discutir a definição de produto warped, que é um dos objetos bem conhecidos tanto no contexo Riemanniano como no contexto semi-Riemanniano. Ele é bastante utilizado como protótipo para descrever exemplos de quase sólitons de Ricci, que vamos apresentar na Seção 1.4 deste capítulo. Produtos warped estão presentes em muitos trabalhos importantes, como por exemplo no artigo de Pigola et al. [35], no artigo de Feitosa, Gomes et al. [16], no artigo de Catino [10], na tese de Freitas [17] e também no próprio trabalho de Tashiro [37].

Definição 1.11. *Sejam* (B, g_B) *e* (F, g_F) *variedades Riemannianas. Considere-se a variedade produto* $M = B \times F$ *e sejam* $\pi_B : M \to B$ *e* $\pi_F : M \to F$ *as projeções canônicas de* M *sobre* B *e* F*, respectivamente. Defina-se uma função suave e positiva* $f : B \to \mathbb{R}$ *e um* $(0, 2)$*-tensor simétrico em* M *por*

$$g = \pi_B^* g_B + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^* g_F, \tag{1.56}$$

onde $\pi_B^* g_B$ *e* $\pi_F^* g_F$ *denotam o pull-back de* g_B *pela aplicação* π_B *e de* g_F *pela aplicação* π_F*, respectivamente. O tensor* (1.56) *define uma métrica Riemanniana em* M*, isto é, cumpre as condições de ser não-degenerada e de ser positiva definida. Munindo* M *com a métrica* g*, dizemos que* M *é o produto warped de* B *e* F *com função warping* f*, e denotamos* $M = B \times_f F$*. Denominamos a variedade* B *a base e a variedade* F *por fibra do produto warped* M*.*

O produto warped que vai servir para o nosso propósito é do tipo em que a base é um intervalo da reta ou o próprio $\mathbb{R}$. Neste caso, a métrica warped de M é da forma

$$g = dt^2 + (f(t))^2 \pi_F^* g_F,$$

onde a função warping f depende apenas do parâmetro real t. Este tipo de produto warped vai servir de protótipo para os nossos Exemplos 5.1 e 5.2 do Capítulo 5, a saber, os produtos warped $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$.

Para finalizar esta seção, vamos mostrar que as variedades $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ têm curvatura seccional constante igual a -1. Para isto, utilizaremos um fato sobre a curvatura seccional do produto warped $M^n = I \times_f F^{n-1}$ mais geral, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto da reta, podendo ser o próprio $\mathbb{R}$, e F^{n-1} é uma variedade Riemanniana $(n-1)$-dimensional. Esse fato é o de que M^n tem curvatura seccional constante se, e somente se, F^{n-1} tem curvatura seccional constante (veja Neto [31, p.162, Exercício 13]). Este fato ocorre nos exemplos $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$. Além disso, denotando por c o valor da constante da curvatura seccional de $M^n = I \times_f F^{n-1}$, temos uma fórmula que expressa c (veja Neto [31, p.162, Exercício 13]),

$$c = -\frac{f''}{f}, \tag{1.57}$$

onde f'' denota a derivada ordinária de segunda ordem da função warping f. Tomando sucessivamente $f = e^t$ e $f = cosht$, concluímos que $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ são variedades Riemannianas, com curvatura seccional constante igual a -1.

1.4 Quase Sólitons de Ricci

Nesta seção, faremos uma nota sobre quase sólitons de Ricci. Para isso, vamos iniciar com um pequeno comentário sobre sólitons de Ricci, que são soluções auto-similares do fluxo de Ricci, conceito introduzido por Hamilton [20]. Para maiores detalhes sobre fluxo de Ricci, o leitor pode consultar as referências Chow-Ni [13] e Chow-Knopf [14].

Também pode-se definir um sóliton de Ricci considerando uma variedade Riemanniana (M^n, g), com um campo de vetores X e uma constante λ satisfazendo a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g. \tag{1.58}$$

Em conexão com isso, denotamos um sóliton de Ricci por (M^n, g, X, λ). A equação (1.58) foi estudada pelos autores Pigola et al. [35] com a condição de que o parâmetro λ seja uma função suave em M^n, onde eles se referiam a esta nova classe como um *quase sóliton de Ricci*. Assim como com o sóliton de Ricci, denotamos um quase sóliton de Ricci por (M^n, g, X, λ), que por definição é dado como segue.

Definição 1.12. *Uma métrica Riemanniana g em uma variedade suave M^n é chamada um quase sóliton de Ricci se o tensor de Ricci de g satisfaz a equação*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{1.59}$$

para algum campo de vetores X e uma função sóliton $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$.

Quando X é um campo de vetores gradiente de alguma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, a métrica g é conhecida como um *quase sóliton de Ricci gradiente*, a função f é chamada uma *função potencial* e X é chamado um *campo potencial*. Assim, a equação (1.59) é expressa como

$$Ric + Hessf = \lambda g,$$

onde $Hessf$ denota o Hessiano da função potencial f. Denotamos um quase sóliton de Ricci gradiente por (M^n, g, f, λ).

Destacamos neste momento que os quase sólitons de Ricci que vamos considerar nesta tese sempre serão completos, o que garantirá a conexidade das variedades em consideração.

Para $n \geq 3$, se X é um *campo de vetores Killing*, que por definição é um campo que satisfaz $\mathcal{L}_X g = 0$, então M é uma *variedade de Einstein*, que por definição é uma variedade que satisfaz a equação $Ric = \lambda g$. Neste caso, segue do Teorema de Schur (veja Carmo [9, p.118, Exercício 8]), que λ é uma constante. Além disso, quando o campo X é nulo ou a função potencial f é constante, o quase sóliton de Ricci é *trivial*, enquanto que um quase sóliton de Ricci não trivial está associado a um campo de vetores X não nulo ou a uma função potencial f não constante.

Pigola et al. [35] produziram um lema (veja Pigola et al. [35, p.10, Lema 1.1]) que permite construir uma estrutura de quase sóliton de Ricci num produto warped em que a base é um intervalo da reta ou o próprio $\mathbb{R}$ e as fibras são variedades de Einstein. Tal lema é de grande motivação para elaboração dos nossos Exemplos 5.1 e 5.2. Assim, pode-se afirmar que a variedade do tipo $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ com a métrica warped $g = dt^2 + (cosht)^2 g_{\mathbb{H}^{n-1}}$, em que $g_{\mathbb{H}^{n-1}}$ é a métrica padrão da variedade $\mathbb{H}^{n-1}$ (vamos explanar sobre esta variedade antes de apresentar o Exemplo 1.1) tem uma estrutura de quase sóliton de Ricci com função potencial $f(t) = senht$ e função sóliton $\lambda(t) = senht - (n-1)$. No nosso Exemplo 5.2 vamos descrever uma estrutura de quase sóliton de Ricci em $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ à luz de nosso Teorema 5.1. Além disso, Pigola et al. [35] apresentaram resultados de obstruções de quase sólitons de Ricci, isto é, variedades que não admitem estrutura de quase sóliton de Ricci, como a variedade produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Barros-Ribeiro Jr. [5] estudaram os quase sólitons de Ricci não triviais compactos, onde eles obtiveram teoremas de rigidez. Posteriormente Batista, Barros et al. [3] mostraram que um quase sóliton de Ricci não trivial compacto (M^n, g, X, λ) com curvatura escalar constante é isométrico a uma esfera $\mathbb{S}^n$ (vamos explicitar uma estrutura de quase sóliton de Ricci desta variedade no Exemplo 1.1). Além disso, concluíram que todo quase sóliton de Ricci não trivial compacto é gradiente. Calviño-Louzao et al. [8] denominaram por *quase sóliton de Ricci próprio* um quase sóliton de Ricci em que a função sóliton λ não pode ser constante.

No decorrer do desenvolvimento da teoria de quase sólitons de Ricci, Feitosa, Gomes et al. [16] apresentaram uma condição necessária e suficiente para que um produto warped de Einstein tenha um estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente. Catino [10] provou que em todo ponto regular da função potencial f de um quase sóliton de Ricci gradiente (M^n, g, f, λ) localmente conformemente flat, existe uma vizinhança na qual (M^n, g, f, λ) é localmente um produto warped com fibras de curvatura seccional constante.

Com o passar do tempo, os quase sólitons de Ricci foram estudados por muitos autores também como subvariedades Riemannianas imersas isometricamente. Citando apenas alguns, por exemplo, Barros et al. [4] estudaram imersões isométricas de um quase sóliton de Ricci (M^n, g, X, λ) em uma variedade Riemanniana $(\widetilde{M}^{n+p}, \widetilde{g})$, onde obtiveram resultados de obstruções com a finalidade de obter imersões mínimas sujeitas à curvatura seccional de $\widetilde{M}^{n+p}$. Aquino et al. [2] estudaram hipersuperfícies que admitem estrutura de quase sóliton de Ricci em espaços-formas de curvatura seccional constante, a saber, nos espaços hiperbólico, de Sitter e de anti-Sitter, onde eles obtiveram resultados que caracterizam as totalmente umbílicas nestes três casos. Citamos também Açikgöz Kaya-Onat [1], que estudaram os quase sólitons de Ricci (M^n, g, X, λ) compactos com a condição do campo de vetores X ser concircular, o que permitiu mostrar que M^n é isométrica a $\mathbb{S}^n$. Esses autores também estudaram os quase sólitons de Ricci (M^n, g, X, λ) como subvariedades Riemannianas em uma variedade Riemanniana $(N^m, \widetilde{g})$ com a condição do campo de vetores X ser parte tangente de um campo concircular (vamos discutir sobre isso na Seção 1.5) do ambiente N^m, obtendo um resultado de caracterização para subvariedades totalmente umbílicas. Esses artigos ampliaram nossas ideias para o desenvolvimento do problema desta tese. No Capítulo 4, vamos relacionar o nosso Teorema 3.1 com os resultados de Aquino et al. [2].

Vale ressaltar que nem todos os quase sólitons de Ricci são soluções auto-similares de um fluxo geométrico. Isto só ocorre em casos especiais que são os sólitons ρ-Einstein gradientes para alguma constante ρ específica, não-nula, a saber, $\rho \in \Big(-\infty \ , \ \frac{1}{2(n-1)} \Big)$, onde n é a dimensão destes objetos. Recentemente, Catino et al. [12] provaram que tais estruturas especiais são geradas por um fluxo geométrico mais geral do que o fluxo de Ricci, chamado *fluxo de Ricci-Bourguignon*, descoberto por Bourguignon [6]. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um *sóliton ρ-Einstein gradiente*, se existe uma função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$, tal que a métrica g satisfaz a equação

$$Ric + Hess f = \rho S g + \lambda g,$$

para alguma constante real λ, onde S é a curvatura escalar de M^n. Para maiores detalhes sobre essas estruturas especiais consultar Catino-Mazzieri [11].

Para terminar esta seção, faremos uma descrição sobre as variedades Riemannianas $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$, com $\varepsilon_N = \pm 1$, mais especificamente, $\mathbb{M}^n(1) = \mathbb{S}^n$ e $\mathbb{M}^n(-1) = \mathbb{H}^n$. Em consonância com nosso interesse, vamos apresentar uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente para $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ no Exemplo 1.1. No Exemplo 4.1 e na nossa Observação

4.1, vamos determinar uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ em vista do nosso Teorema 3.1.

Consideremos o espaço semi-Euclidiano $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ já definido na Seção 1.2 com o tensor métrico

$$\overline{g} = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \varepsilon_{n+1} dx_{n+1}^2,$$

onde $\varepsilon_{n+1} = \pm 1$. Se $\varepsilon_{n+1} = 1$, $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e se $\varepsilon_{n+1} = -1$, $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ é o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$. Já vimos na Seção 1.2 que a sua conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ é exatamente a derivada usual do espaço Euclidiano. Considere (M^n, g) uma hipersuperfície imersa isometricamente em $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ com campo de vetores normais unitários N. Então

$$\mathcal{A}X = -\overline{\nabla}_X N = -dN(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, onde dN denota a diferencial da aplicação $N : M^n \to \mathbb{S}^n$, onde, $\mathbb{S}^n$ é a *esfera canônica* definida por

$$\mathbb{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \overline{g}(x, x) = 1 \right\}.$$

O *espaço hiperbólico canônico* é definido por

$$\mathbb{H}^n = \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+1}; \overline{g}(x, x) = -1, x_{n+1} \geq 1 \right\},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. O espaço $\mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, isto é, $\overline{g}$ restrito a $\mathbb{H}^n$ é uma métrica Riemanniana.

Vamos denotar estas duas variedades acima simplesmente por $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$, com $\varepsilon_N \in \{-1, 1\}$.

Dados $x \in \mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ e $v \in T_x\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$, existe uma curva suave $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ tal que $\beta(0) = x$ e $\frac{d\beta}{dt}(0) = v$. Assim, $\overline{g}(\beta(t), \beta(t)) = \varepsilon_N$. Derivando em t e aplicando em $t = 0$, temos

$$0 = \overline{g}\Big(\frac{d\beta}{dt}(0), \beta(0)\Big) = \overline{g}(v, \vec{x}),$$

onde $\vec{x}$ é o vetor posição em x. Esta conta mostra que $\vec{x} \perp T_x\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$. Com isso, podemos definir o campo de vetores normais unitários a $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ por $N(x) = \vec{x}$, com $\overline{g}(\vec{x}, \vec{x}) = \varepsilon_N$. Assim, o operador de Weingarten da imersão isométrica de $(\mathbb{M}^n(\varepsilon_N), g)$ em $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$, onde $g = \overline{g}|_{\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)}$ é a métrica canônica de $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$, é dado por

$$\mathcal{A}X = -\overline{\nabla}_X \vec{x} = -X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^n(\varepsilon_N))$.

Agora utilizando a fórmula de Gauss da imersão isométrica, temos que a conexão de Levi-Civita ∇ de $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ é dada por

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \varepsilon_N \overline{g}(X, Y)\vec{x},$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^n(\varepsilon_N))$. Além disso, utilizando a equação de Gauss, podemos obter que a curvatura seccional de $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ é igual a ε_N.

Agora, estamos pronto para apresentar um discurso no qual $(\mathbb{M}^n(\varepsilon_N), g)$ admite uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente:

Exemplo 1.1. *Seja $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ com sua métrica padrão g, para $\varepsilon_N = 1$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ com sua métrica padrão g, para $\varepsilon_N = -1$. Seja X um campo vetorial suave em $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ tal que para cada $x \in \mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$, $X(x) = v^T(x)$, onde v é um vetor arbitrário fixo do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ ou o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$, conforme $\varepsilon_N = 1$ ou $\varepsilon_N = -1$, respectivamente. Seja $h_v : \mathbb{M}^n(\varepsilon_N) \to \mathbb{R}$ a função altura em $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ correspondendo ao vetor v, dada por $h_v(x) = \overline{g}(\vec{x}, v)$, para todo $x \in \mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$. Portanto, $X(x) = \nabla h_v(x)$ e $Hessh_v = -\varepsilon_N h_v g$. É sabido que $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ é uma variedade de Einstein, cujo tensor de Ricci é dado por $Ric = \varepsilon_N(n-1)g$. Portanto, $(\mathbb{M}^n(\varepsilon_N), g, \nabla h_v, \lambda_v)$ é um quase sóliton de Ricci gradiente com função sóliton $\lambda_v = \varepsilon_N(n-1) - \varepsilon_N h_v$.*

Observação 1.2. *As únicas estruturas de quase sóliton de Ricci gradiente não triviais em $\mathbb{S}^n$ são tais que as funções potenciais são as funções alturas, a menos de constantes e reescalonamento (veja a tese de Gomes [19]). Para o caso de $\mathbb{H}^n$, no momento ainda não foi dada uma caracterização.*

1.5 Uma Breve Discussão da Teoria das Transformações Concirculares

Nesta seção, faremos uma introdução sucinta da teoria das transformações concirculares, que é muito vasta e foi desenvolvida por muitos autores. Para isso, iremos nos centrar apenas nos trabalhos de Yano [39] e Tashiro [37]. Para maiores detalhes sobre a teoria o leitor pode consultar Fialkow [18], Ishihara-Tashiro [22], Ishihara [21] e Tashiro-Miyashita [38]. Em 1939, Fialkow [18] estudou círculos geodésicos sob uma mudança conforme na métrica, onde deu origem as transformações concirculares. Entre 1940 e

1942, Yano [39] desenvolveu a teoria das transformações concirculares, que são as transformações conformes que preservam círculos geodésicos. Mais precisamente, considere (M,g) e $(M,\tilde{g})$ variedades Riemannianas n-dimensionais. Uma transformação concircular T entre as variedades Riemannianas (M,g) e $(M,\tilde{g})$ é uma transformação conforme, isto é, um difeomorfismo suave $T:(M,g)\to(M,\tilde{g})$ tal que

$$T^*\tilde{g} = \rho^2 g, \tag{1.60}$$

onde $T^*\tilde{g}$ denota o pull-back da métrica $\tilde{g}$ pela aplicação T e ρ é uma função suave em M. Além disso, T preserva círculos geodésicos, isto é, dado um círculo geodésico $\mathcal{C}$ em (M,g), $T(\mathcal{C})$ é um círculo geodésico em $(M,\tilde{g})$.

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita com respeito à métrica g. Dada uma curva suave $\mathcal{C}$ em (M,g) parametrizada pelo comprimento de arco s, podemos definir as *curvaturas geodésicas* de $\mathcal{C}$ por

$$\kappa_1 = \kappa_1(s) = g\Big(\nabla_{\frac{d\mathcal{C}}{ds}}\frac{d\mathcal{C}}{ds}, \nabla_{\frac{d\mathcal{C}}{ds}}\frac{d\mathcal{C}}{ds}\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\kappa_2 = \kappa_2(s) = g\Big(\nabla_{\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}}\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}, \nabla_{\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}}\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

e por fim até a n-ésima curvatura geodésica,

$$\kappa_n = \kappa_n(s) = g\Big(\nabla_{\frac{d^n\mathcal{C}}{ds^n}}\frac{d^n\mathcal{C}}{ds^n}, \nabla_{\frac{d^n\mathcal{C}}{ds^n}}\frac{d^n\mathcal{C}}{ds^n}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $\frac{D}{ds}$ a derivação covariante ao longo de $\mathcal{C}$ com respeito à métrica g. Tais derivadas $\frac{d^i\mathcal{C}}{ds^i}$, para $i=2,\ldots,n$, podem ser obtidas através de $\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2} = \frac{D}{ds}\left(\frac{d\mathcal{C}}{ds}\right) = \nabla_{\frac{d\mathcal{C}}{ds}}\frac{d\mathcal{C}}{ds}$, e assim sucessivamente $\frac{d^i\mathcal{C}}{ds^i} = \frac{D}{ds}\left(\frac{d^{i-1}\mathcal{C}}{ds^{i-1}}\right) = \nabla_{\frac{d\mathcal{C}}{ds}}\frac{d^{i-1}\mathcal{C}}{ds^{i-1}}$. Se as derivadas $\frac{d\mathcal{C}}{ds}, \frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\mathcal{C}}{ds^n}$ são linearmente independentes, podemos definir um referencial $\xi_1,\ldots,\xi_n$ ao longo da curva $\mathcal{C}$ dado pelas equações

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \kappa_1\xi_2,$$
$$\frac{d\xi_i}{ds} = -\kappa_{i-1}\xi_{i-1} + \kappa_i\xi_{i+1},$$

para $i=2,\ldots,n-1$, onde $\frac{d}{ds}$ é a derivação covariante ao longo da curva na métrica g. Esse referencial é chamado o *referencial de Frenet*. Se $\kappa_1 = 0$, dizemos que a curva $\mathcal{C}$ é uma *geodésica*, e se κ_1 é uma constante e $\kappa_2 = 0$, dizemos que a curva $\mathcal{C}$ é um *círculo geodésico*. Doravante, vamos estabelecer as derivações covariantes ao longo de $\mathcal{C}$ na métrica g.

Uma equação diferencial que caracteriza um círculo geodésico $\mathcal{C}$ é

$$\frac{d^3\mathcal{C}}{ds^3} = -g\Big(\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}, \frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}\Big)\frac{d\mathcal{C}}{ds}.$$

De fato, se $\mathcal{C}$ é um círculo geodésico, então $\kappa_1 = \kappa$ é uma constante. Assim, as duas primeiras equações de Frenet se tornam

$$\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2} = \frac{d\xi_1}{ds} = \kappa\xi_2,$$

$$\frac{d\xi_2}{ds} = -\kappa\xi_1.$$

Então

$$\frac{d^3\mathcal{C}}{ds^3} = \frac{d}{ds}(\kappa\xi_2) = \kappa\frac{d\xi_2}{ds} = -\kappa^2\xi_1 = -\kappa^2\frac{d\mathcal{C}}{ds},$$

onde $\kappa^2 = g\Big(\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}, \frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}\Big)$. Reciprocamente, supondo que $\frac{d^3\mathcal{C}}{ds^3} = -\kappa^2\xi_1$, então

$$\frac{d^3\mathcal{C}}{ds^3} = \frac{d}{ds}\Big(\frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2}\Big) = \frac{d}{ds}(\kappa\xi_2) = \frac{d\kappa}{ds}\xi_2 + \kappa\frac{d\xi_2}{ds} = \frac{d\kappa}{ds}\xi_2 - \kappa^2\xi_1 = \frac{d\kappa}{ds}\xi_2 + \frac{d^3\mathcal{C}}{ds^3}.$$

Assim, $\frac{d\kappa}{ds}\xi_2 = 0$, o que implica que κ é constante. Logo, $\mathcal{C}$ é um círculo geodésico. Esta caracterização de círculo geodésico pode ser encontrada em Yano [39]. Sabe-se que em geral transformações conformes não preservam círculos geodésicos.

Se uma transformação conforme transforma todo círculo geodésico num círculo geodésico (transformação concircular), então a função ρ dada na Eq. (1.60) deve satisfazer a equação diferencial

$$Hess\rho = \phi g, \tag{1.61}$$

para algum $\phi \in C^\infty(M)$. Reciprocamente, se a função ρ dada na Eq. (1.60) satisfaz a Eq. (1.61), então a transformação é concircular. Para maiores detalhes consultar Yano [39].

O termo *concircular* se tornou presente no desenvolvimento dos estudos neste ramo, principalmente no trabalho de Tashiro [37], cuja linha de trabalho, que doravante, será seguida por nós. Dada uma variedade Riemanniana (M, g), dizemos que uma função $\rho \in C^\infty(M)$ é uma *função concircular* ou um *campo escalar concircular* se ela satisfaz a Eq. (1.61) e a função ϕ dado na Eq. (1.61) é chamada a *função característica*. Segue imediatamente da Eq. (1.61) que

$$\phi = \frac{\Delta\rho}{n}.$$

Se a função característica ϕ é da forma $\phi = -k\rho + b$, onde b e k são constantes reais, dizemos que ρ é um *campo escalar concircular especial*.

Devido à importância desses conceitos, faremos aqui uma pequena discussão. Para obter todos os detalhes, no entanto, recomendamos a leitura completa do artigo de Tashiro [37]. Comece com um campo concircular ρ definido pela Eq. (1.61). Sabe-se que as trajetórias do campo vetorial $\nabla\rho$ são arcos geodésicos, exceto em pontos críticos de ρ (pontos onde $\nabla\rho$ se anula), e uma curva geodésica em M contendo tal arco é chamada de ρ-curva. Além disso, dada uma família de hipersuperfícies de M satisfazendo $\rho =$ constante, exceto em pontos críticos de ρ, uma componente conexa de tal hipersuperfície é chamada de ρ-hipersuperfície. Considere-se um campo escalar concircular especial ρ satisfazendo a equação

$$Hess\rho = (-k\rho + b)g.$$

Dada uma curva geodésica l com comprimento de arco s, pode-se reduzir a última equação à seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\,s^2} + k\rho = b. \tag{1.62}$$

Agora, levando em consideração a assinatura da constante característica k, é necessário considerar os três casos a seguir

$$k = 0 \;\; (I), \quad k = -c^2 \;\; (II), \quad k = c^2 \;\; (III),$$

onde c é uma constante positiva. Sabe-se que, escolhendo adequadamente o comprimento do arco s, a solução de (1.62) é dada por

$$\rho(s) = \begin{cases} (I, A) & as \;(b = 0), \\ (I, B) & \frac{1}{2}bs^2 + a \;(b \neq 0), \\ (II, A_0) & a\exp cs - \frac{b}{c^2}, \\ (II, A\_) & a\sinh cs - \frac{b}{c^2}, \\ (II, B) & a\cosh cs - \frac{b}{c^2}, \\ (III) & a\cos cs + \frac{b}{c^2}, \end{cases} \tag{1.63}$$

onde a é uma constante arbitrária. Sabe-se que se M é *completa*, ou seja, para cada ponto p de M, toda geodésica partindo de p está definida em todo valor do parâmetro real. Então nos casos (I, A), (II, A_0) e $(II, A\_)$ não existem pontos críticos, nos casos (I, B) e (II, B) existe um ponto crítico correspondente a $s = 0$, e no caso (III) existem dois pontos críticos correspondentes a $s = 0$ e $s = \frac{\pi}{c}$. Agora, nos casos (I, A), (II, A_0) e $(II, A\_)$ escolhemos o comprimento do arco s das ρ-curvas de modo que os pontos correspondentes a $s = 0$ estejam na mesma ρ-hipersuperfície. Como consequência, o coeficiente a é o mesmo para todas as ρ-curvas. Tomando s como a n-ésima coordenada

u^n, segue do Lema 1.2 em Tashiro [37] que a forma métrica de M é dada por

$$\mathrm{d}\,s^2 = \begin{cases} (I, A) & a^2\,\overline{\mathrm{d}\,s^2} + (\mathrm{d}\,u^n)^2, \\ (II, A_0) & (ac\exp cu^n)^2\overline{\mathrm{d}\,s^2} + (\mathrm{d}\,u^n)^2, \\ (II, A\_) & (ac\cosh cu^n)^2\overline{\mathrm{d}\,s^2} + (\mathrm{d}\,u^n)^2. \end{cases} \tag{1.64}$$

Note que $\overline{\mathrm{d}\,s^2}$ é a forma métrica de V, onde V é uma hipersuperfície de M. Uma variedade Riemanniana completa, que é topologicamente um produto $V \times I$ e tem a métrica da forma (II, A_0) ou $(II, A\_)$ de (1.64), é chamada *espaço pseudo-hiperbólico do tipo zero* ou *tipo negativo*, respectivamente.

Observação 1.3. *Para esboçar a definição dos conceitos de espaços pseudo-hiperbólicos do tipo zero e negativo seguimos estritamente a notação de Tashiro segundo a qual $V \subset M$ e, portanto, o símbolo $\overline{\cdots}$ representa as características da subvariedade V, e em particular $\overline{\mathrm{d}\,s^2}$ denota a forma métrica em V. Lembramos ao leitor que nossa convenção é o oposto, ou seja, sempre usaremos a barra superior para denotar as características da variedade ambiente. Devemos usar exclusivamente V para denotar campos de vetores (consulte os capítulos posteriores).*

Com o discurso acima, Tashiro [37] obteve seu clássico Teorema 1.2 já mencionado na Introdução e sem risco de confusão denotamos N como o número de pontos críticos isolados de ρ, o que nos faz enunciá-lo da seguinte forma:

Teorema 1.2. *[Tashiro [37, p.252, Teorema 2]] Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ e suponha que ela admite um campo concircular especial ρ satisfazendo a equação*

$$Hess\rho = (-k\rho + b)g,$$

onde $b, k \in \mathbb{R}$ e g é a métrica Riemanniana em M. Então, M é uma das seguintes variedades:

1. *Se $b = k = 0$, o produto direto $V \times I$ de uma variedade Riemanniana completa $(n-1)$-dimensional V com uma linha reta I,*
2. *Se $k = 0$ mas $b \neq 0$, um espaço Euclidiano,*
3. *Se $k = -c^2 < 0$ e $N = 0$, um espaço pseudo-hiperbólico do tipo zero ou negativo;*
4. *Se $k = -c^2 < 0$ e $N = 1$, um espaço hiperbólico de curvatura $-c^2$, e*

5. Se $k = c^2 > 0$, um espaço esférico de curvatura c^2, onde c é uma constante positiva.

Talvez valha a pena mencionar, como o próprio Tashiro comentou em seu artigo, que o item (1) é um caso especial do teorema da decomposição de de Rham [15] e o item (2) foi discutido pela primeira vez por Sasaki-Goto [36]. Além disso, o teorema de Obata [32] é um caso particular do item (5), o que é uma caracterização da esfera euclidiana de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ pela equação

$$Hess\rho = -k\rho g, \tag{1.65}$$

onde $k > 0$ é uma constante real.

A Eq. (1.65) acima também foi estudada por Masahiko [30] para os casos $k = 0$ e $k < 0$, onde ele obteve os seguintes resultados: se $k = 0$, tem-se que a Eq. (1.65) caracteriza o produto direto $V \times \mathbb{R}$ de uma variedade Riemanniana completa $(n-1)$-dimensional V com a reta real $\mathbb{R}$; e se $k < 0$, tem-se dois casos: a solução não trivial da Eq. (1.65) ter um ponto crítico caracteriza o espaço hiperbólico e a solução não trivial da Eq. (1.65) não ter nenhum ponto crítico caracteriza o produto warped $\mathbb{R} \times_f V$ de uma reta real $\mathbb{R}$ com uma variedade Riemanniana completa $(n-1)$-dimensional V, tal que a função warping $f > 0$ satisfaz a equação diferencial $f'' + kf = 0$.

Capítulo 2

Lemas Técnicos

Neste capítulo, provamos quatro lemas técnicos que serão empregados nos capítulos posteriores. Antes de começarmos com suas provas, dois comentários merecem ser mencionados. Em primeiro lugar, esses lemas permanecerão válidos para hipersuperfícies semi-Riemannianas M^n isometricamente imersas em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ incluindo um sinal de assinatura. Em segundo lugar, impomos a exigência de que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ seja uma variedade semi-Riemanniana a fim de capturar tantos casos quanto possível; o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ e um produto warped são dois exemplos. Denotando V a projeção tangente por $\overline{V}$ em M e por $C := \overline{g}(\overline{V}, N)$ a função ângulo, apresentamos tais lemas com suas provas:

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana isometricamente imersa em uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$. Seja $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Então, em M vale*

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g} - \mathcal{L}_V g = -2\varepsilon_N C\mathcal{A}.$$

Demonstração. Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Escreva $\overline{V} = V + \varepsilon_N \overline{g}(\overline{V}, N)N$. Então em M

$$\overline{\nabla}_Y \overline{V} = \nabla_Y V + \alpha(Y, V) + \varepsilon_N Y\overline{g}(\overline{V}, N)N - \varepsilon_N \overline{g}(\overline{V}, N)\mathcal{A}Y.$$

Note que esta mesma equação também é valida trocando Y por Z, de modo que podemos deduzir

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g})(Y, Z) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_Y \overline{V}, Z) + \overline{g}(\overline{\nabla}_Z \overline{V}, Y) \\
&= (\mathcal{L}_V g)(Y, Z) - 2\varepsilon_N \overline{g}(\overline{V}, N)g(\mathcal{A}Y, Z).
\end{aligned}$$

□

Observe que esse lema mede até que ponto a componente tangente de um campo vetorial conforme se desvia de ser conforme. O segundo lema é uma consequência imediata do primeiro.

Lema 2.2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana isometricamente imersa em uma variedade semi-Riemanniana* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ *dotada de um campo vetorial conforme* $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *com fator conforme* σ*. A componente tangente de* $\overline{V}$ *traz uma estrutura de quase sóliton de Ricci em* M *se, e somente se,* $Ric = -\psi I - \varepsilon_N C\mathcal{A}$*, onde* λ *é a função sóliton e* $\psi = \sigma|_M - \lambda$ *e* I *é a aplicação identidade.*

Demonstração. Se V oferece uma estrutura de quase sóliton de Ricci em M, então $Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = \lambda g$. Por hipótese, $\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g} = 2\sigma\overline{g}$. Então pelo Lema 2.1

$$\mathcal{L}_V g = 2\sigma|_M g + 2\varepsilon_N C\mathcal{A}, \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{A}$ é o $(0,2)$-tensor simétrico associado ao $(1,1)$-tensor $\mathcal{A}$. Substituindo (2.1) na equação $Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = \lambda g$, obtemos

$$Ric = -\psi g - \varepsilon_N C\mathcal{A},$$

onde λ é a função sóliton e $\psi = \sigma|_M - \lambda$.

Reciprocamente, suponha que $Ric = -\psi I - \varepsilon_N C\mathcal{A}$. Então

$$Ric = \lambda g - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g} - \varepsilon_N C\mathcal{A}.$$

Pelo Lema 2.1, temos $Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = \lambda g$. □

Lema 2.3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana isometricamente imersa em uma variedade semi-Riemanniana* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ *dotada de um campo vetorial conforme* $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *com fator conforme* σ*. O gradiente da função ângulo é obtido por* $\nabla C = -(\overline{\nabla}_N \overline{V})^T - \mathcal{A}V$*.*

Demonstração. Pela definição de gradiente, temos para $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} XC &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X \overline{V}, N) + \overline{g}(\overline{V}, \overline{\nabla}_X N) \\ &= (\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g})(X, N) - \overline{g}(\overline{\nabla}_N \overline{V}, X) - \overline{g}(\overline{V}, \mathcal{A}X) \\ &= 2\sigma\overline{g}(X, N) - \overline{g}((\overline{\nabla}_N \overline{V})^T, X) - g(V, \mathcal{A}X) \\ &= -g((\overline{\nabla}_N \overline{V})^T, X) - g(\mathcal{A}V, X). \end{aligned}$$

□

Lema 2.4. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana isometricamente imersa em uma variedade semi-Riemanniana* $(\overline{M}^{n+1}(\overline{c}), \overline{g})$ *de curvatura seccional constante* $\overline{c}$ *e dotada de um campo vetorial conforme* $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *com fator conforme* σ. *O Hessiano da função ângulo é calculado como segue:*

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= -(\overline{c}C + N\sigma)g(X,Y) + \sigma g(\mathcal{A}X,Y) + \varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2X,Y) \\ &\quad -g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X). \end{aligned}$$

Além disso, o Laplaciano de C *é dado por*

$$\Delta C = -(\overline{c}C + N\sigma)n - \varepsilon_N \sigma n H - \varepsilon_N C\|\mathcal{A}\|^2 - \varepsilon_N n V(H).$$

Demonstração. O Hessiano de C é prontamente obtido pelo uso do Lema 2.3 como segue:

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= g(\nabla_X\nabla C,Y) \\ &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_N\overline{V})^T,Y) - \overline{g}(\nabla_X\mathcal{A}V,Y) \\ &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_N\overline{V})^{\perp},Y) - g(\nabla_X\mathcal{A}V,Y) \\ &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_N\overline{V})^{\perp},Y) - g((\nabla_X\mathcal{A})V,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y). \end{aligned}$$

Note que

$$(\overline{\nabla}_N\overline{V})^{\perp} = \varepsilon_N\overline{g}(\overline{\nabla}_N\overline{V},N)N = \frac{\varepsilon_N}{2}(\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g})(N,N)N = \varepsilon_N(\sigma\overline{g}(N,N))N = \sigma N.$$

Usando esta última igualdade e o fato de que $\mathcal{A}$ é Codazzi, temos que

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X(\sigma N),Y) - g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) \\ &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) + \sigma\overline{g}(\overline{\nabla}_X N,Y) - g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) \\ &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) - \sigma g(\mathcal{A}X,Y) - g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y). \end{aligned}$$

Considere agora as extensões locais $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de X e Y, respectivamente, de forma que

$$\overline{\nabla}_N\overline{X} = \overline{\nabla}_N\overline{Y} = 0. \tag{2.2}$$

Assim,

$$-\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) = \overline{g}(\overline{R}(\overline{X},N)\overline{V},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{[\overline{X},N]}\overline{V},\overline{Y}).$$

Usando que $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante $\overline{c}$ e a relação (2.2), temos

$$\begin{aligned} -\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_N\overline{V},Y) &= -\overline{c}C\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{\overline{X}}N}\overline{V},\overline{Y}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_N\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) \\ &= -\overline{c}Cg(X,Y) - N\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{\nabla}_N\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_X N}\overline{V},\overline{Y}) \\ &= -\overline{c}Cg(X,Y) - N\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}\overline{V},Y). \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= -\bar{c}Cg(X,Y) - N\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}\overline{V},Y) - \sigma g(\mathcal{A}X,Y) \\ &\quad -g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}\overline{V} &= \overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}(V+\varepsilon_N CN) \\ &= \overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}V + \varepsilon_N C\overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}N + \varepsilon_N\mathcal{A}X(C)N \\ &= \overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}V - \varepsilon_N C\mathcal{A}^2X + \varepsilon_N\mathcal{A}X(C)N. \end{aligned}$$

Tomando a projeção tangencial, obtemos $(\overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}\overline{V})^T = \nabla_{\mathcal{A}X}V - \varepsilon_N C\mathcal{A}^2X$. Assim,

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}\overline{V},Y) = \overline{g}((\overline{\nabla}_{\mathcal{A}X}\overline{V})^T,Y) = g(\nabla_{\mathcal{A}X}V,Y) - \varepsilon_N Cg(\mathcal{A}^2X,Y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= -\bar{c}Cg(X,Y) - N\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) + g(\nabla_{\mathcal{A}X}V,Y) - \varepsilon_N Cg(\mathcal{A}^2X,Y) \\ &\quad -\sigma g(\mathcal{A}X,Y) - g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y). \end{aligned}$$

Escrevendo

$$HessC(X,Y) = \mathcal{S}(X,Y) + \mathcal{T}(X,Y),$$

onde

$$\mathcal{S}(X,Y) = -\bar{c}Cg(X,Y) - \varepsilon_N Cg(\mathcal{A}^2X,Y) - \sigma g(\mathcal{A}X,Y) - g((\nabla_V\mathcal{A})X,Y) \tag{2.3}$$

e

$$\mathcal{T}(X,Y) = -N\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) + g(\nabla_{\mathcal{A}X}V,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y),$$

obtemos que $\mathcal{T}$ é um tensor simétrico, como $Hess\,C$ e $\mathcal{S}$. Assim,

$$\begin{aligned} 2\mathcal{T}(X,Y) &= \mathcal{T}(X,Y) + \mathcal{T}(Y,X) \\ &= -N[\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V},\overline{Y}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{V},\overline{X})] + g(\nabla_{\mathcal{A}X}V,Y) + g(\nabla_{\mathcal{A}Y}V,X) \\ &\quad -g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X) \\ &= -N[(\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g})(\overline{X},\overline{Y})] + (\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}X,Y) - g(\nabla_Y V,\mathcal{A}X) \\ &\quad +(\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}Y,X) - g(\nabla_X V,\mathcal{A}Y) - g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X). \end{aligned}$$

Usando o fato de que o campo é conforme, temos

$$\begin{aligned}
2\mathcal{T}(X,Y) &= -2N[\sigma\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})] + (\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}X,Y) + (\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}Y,X) \\
&\quad -2g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - 2g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X) \\
&= -2N(\sigma)\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) - 2\sigma N[\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})] \\
&\quad +(\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}X,Y) + (\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}Y,X) - 2g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - 2g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X) \\
&= -2N(\sigma)\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) - 2\sigma[\overline{g}(\overline{\nabla}_N\overline{X},\overline{Y}) + \overline{g}(\overline{X},\overline{\nabla}_N\overline{Y})] \\
&\quad +(\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}X,Y) + (\mathcal{L}_V g)(\mathcal{A}Y,X) - 2g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - 2g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X).
\end{aligned}$$

Agora, segue-se da equação (2.2) e do Lema 2.1 que

$$\begin{aligned}
2\mathcal{T}(X,Y) &= -2N(\sigma)g(X,Y) + 2\sigma g(\mathcal{A}X,Y) + 2\varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2X,Y) \\
&\quad +2\sigma g(\mathcal{A}X,Y) + 2\varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2X,Y) - 2g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - 2g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X) \\
&= -2N(\sigma)g(X,Y) + 4\sigma g(\mathcal{A}X,Y) + 4\varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2X,Y) \\
&\quad -2g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - 2g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(X,Y) &= -N(\sigma)g(X,Y) + 2\sigma g(\mathcal{A}X,Y) + 2\varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2X,Y) \\
&\quad -g(\mathcal{A}\nabla_X V,Y) - g(\mathcal{A}\nabla_Y V,X).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

As equações (2.3) e (2.4) concluem a prova da primeira parte do lema.

Para a segunda parte, tomamos o traço de $Hess\, C$ para obter

$$\begin{aligned}
\Delta C &= -(\overline{c}C + N\sigma)n + \varepsilon_N \sigma n H + \varepsilon_N C\|\mathcal{A}\|^2 - tr\{X \mapsto (\nabla_V \mathcal{A})X\} \\
&\quad -2tr\{X \mapsto g(\nabla_X V, \mathcal{A}X)\}.
\end{aligned}$$

Uma vez que o traço comuta com a derivada covariante, segue-se que

$$tr\{X \mapsto (\nabla_V \mathcal{A})X\} = \varepsilon_N n V(H).$$

Para calcular a última soma consideramos um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ em M.

$$\begin{aligned}
-2tr\{X \mapsto g(\nabla_X V, \mathcal{A}X)\} &= -\sum_{i=1}^n [g(\nabla_{e_i} V, \mathcal{A}e_i) + g(\nabla_{e_i} V, \mathcal{A}e_i)] \\
&= -\sum_{i=1}^n (\mathcal{L}_V g)(e_i, \mathcal{A}e_i).
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned}
-2tr\{X \mapsto g(\nabla_X V, \mathcal{A}X)\} &= -\sum_{i=1}^{n}\Big[2\sigma g(\mathcal{A}e_i, e_i) + 2\varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2 e_i, e_i)\Big] \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}[\sigma g(\mathcal{A}e_i, e_i) + \varepsilon_N C g(\mathcal{A}^2 e_i, e_i)] \\
&= -2\varepsilon_N \sigma n H - 2\varepsilon_N C\|\mathcal{A}\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta C = -(\overline{c}C + N\sigma)n - \varepsilon_N \sigma n H - \varepsilon_N C\|\mathcal{A}\|^2 - \varepsilon_N n V(H).$$

$\square$

Embora a fórmula acima para ΔC não seja utilizada no presente trabalho, poderá ser utilizada em futuros textos correlatos.

Capítulo 3

Quase Sólitons de Ricci Determinados por Campos Conformes

Neste capítulo, provamos o primeiro teorema principal desta tese, que em essência pode ser pensado como uma identificação adequada de campos que geram os quase sólitons de Ricci com campos conformes, o que nos fornece uma conexão imediata entre a teoria dos quase sólitons de Ricci e a teoria dos campos conformes e, em particular, dos campos concirculares. Esse primeiro teorema foi pensado como uma adaptação do Teorema 1.1 (Kim et al. [23, p.679, Teorema 3]) citado na Seção 1.2 do Capítulo 1, onde fizemos uma adaptação do caso de campos conformes para o caso de campos que geram uma estrutura de quase sóliton de Ricci, com a simples observação de que o espaço dos campos conformes coincide com o espaço dos campos que geram uma estrutura de quase sóliton de Ricci, momento em que reproduzimos a mesma demonstração do Teorema 1.1 feita pelos autores Kim et al. [23]. Agora, vamos preparar o terreno para o Teorema 3.1, com as observações que se seguem.

No caso de hipersuperfícies totalmente umbílicas M^n de $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ obtém-se o campo escalar concircular especial em M^n

$$Hess\, C = (-kC + b)g, \tag{3.1}$$

onde $k = \dfrac{S}{n(n-1)}$ e $b = -N\sigma - \varepsilon_N \sigma H$ são constantes. Na verdade, para as hipersuperfícies umbílicas em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ a curvatura média H é constante e $\mathcal{A}X = \varepsilon_N H X$. Segue-se do Lema 2.4 que

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= -(\overline{c}C + N\sigma)g(X,Y) + \varepsilon_N \sigma H g(X,Y) + \varepsilon_N C H^2 g(X,Y) \\ &\quad -\varepsilon_N H g(\nabla_X V, Y) - \varepsilon_N H g(\nabla_Y V, X) \\ &= -[\overline{c}C + N\sigma - \varepsilon_N \sigma H - \varepsilon_N C H^2] g(X,Y) - \varepsilon_N H (\mathcal{L}_V g)(X,Y). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned} HessC(X,Y) &= -[\overline{c}C + N\sigma - \varepsilon_N \sigma H - \epsilon_N C H^2] g(X,Y) - 2\varepsilon_N H[\sigma + CH] g(X,Y) \\ &= -[(\overline{c} + \varepsilon_N H^2)C + N\sigma + \varepsilon_N \sigma H] g(X,Y). \end{aligned}$$

Pela Eq. (1.6) a curvatura escalar S de M é dada por $\dfrac{S}{n(n-1)} = \overline{c} + \varepsilon_N H^2$ que é constante. A soma $N\sigma + \varepsilon_N \sigma H$ também é constante, pois para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ a Proposição 1.2 nos indicará que

$$\begin{aligned} X(N\sigma + \varepsilon_N \sigma H) &= XN\sigma + \varepsilon_N H X\sigma \\ &= \overline{Hess}\sigma(X,N) + (\overline{\nabla}_X N)\sigma + \varepsilon_N H X\sigma \\ &= -\overline{c}\sigma\overline{g}(X,N) - \mathcal{A}X\sigma + \varepsilon_N H X\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, estamos prontos para obter o primeiro resultado principal desta tese.

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g) uma hipersuperfície Riemanniana, totalmente umbílica, completa, de uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}(\overline{c}), \overline{g})$ de curvatura seccional constante $\overline{c}$. Então, cada campo que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci para M^n pode ser obtido como a componente tangente de um campo vetorial conforme $\overline{V}$ em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$. Além disso, para qualquer campo V que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci para M^n existe um único campo vetorial conforme $\overline{V}$ em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ satisfazendo $\overline{V}|_{M^n} = V$.*

Demonstração. Segue da Eq. (1.6) que as hipersuperfícies totalmente umbílicas de uma variedade semi-Riemanniana de curvatura seccional constante são variedades de Einstein. Assim, um campo vetorial V que determina uma estrutura de quase sóliton de Ricci para M^n é um campo vetorial conforme em M^n. Reciprocamente, um campo vetorial conforme em M^n é um campo vetorial que determina uma estrutura de quase sóliton de Ricci para o mesmo. Assim, o espaço vetorial dos campos vetoriais que geram uma estrutura de quase sóliton de Ricci para M^n coincide com o espaço vetorial dos campos vetoriais conformes em M^n.

No que se segue, $\mathcal{C}(\overline{M})$ denota o espaço vetorial dos campos vetoriais conformes em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ e $\mathcal{C}(M)$ o espaço vetorial dos campos vetoriais conformes em M^n. Estamos em posição de elaborar nossa prova usando alguns argumentos bem conhecidos na literatura (ver por exemplo Kim et al. [23]).

Defina a aplicação linear $\Psi : \mathcal{C}(\overline{M}) \to \mathcal{C}(M)$ por $\Psi(\overline{V}) = V$, onde V é a componente tangente de $\overline{V}$ em M. Como M é umbílica, segue-se do Lema 2.1 que Ψ é bem definida. Se $\overline{V} \in Ker(\Psi)$, então $\overline{V} = \varepsilon_N CN$ e como M^n é totalmente umbílica segue da equação (3.1) que C satisfaz equação $HessC = (-kC + b)g$. Denote por $\mathcal{FC}(M^n)$ o espaço de todas as funções suaves em M^n satisfazendo esta última equação. Então a aplicação $\Phi : Ker(\Psi) \to \mathcal{FC}(M^n)$ dada por $\Phi(\overline{V}) = \varepsilon_N C$ é linear e bem definida. Note que Φ é injetiva, pois se $\overline{V} \in Ker(\Phi)$, então $C = 0$ e $\overline{V}^{\perp} = 0$, e por outro lado, $\overline{V} \in Ker(\Psi)$ implica $\overline{V} = 0$. Afirmamos que $\dim \mathcal{FC}(M^n) = n + 2$ (ver Tashiro-Miyashita [38]). Consequentemente, pelo Teorema do Núcleo e Imagem aplicado a Φ, vale a desigualdade

$$\dim Ker(\Psi) \leq \dim \mathcal{FC}(M^n) = n + 2. \tag{3.2}$$

Aplicando o Teorema do Núcleo e da Imagem a Ψ, sabendo que $\dim \mathcal{C}(\overline{M}) = \dfrac{(n+2)(n+3)}{2}$ e $\dim \mathcal{C}(M) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ (ver Kobayashi [24]), concluímos que $(n+2) \leq \dim Ker(\Psi)$, e portanto, $\dim Ker(\Psi) = \dim \mathcal{FC}(M^n)$. Decorre portanto que, Φ é sobrejetiva, e portanto bijetiva. Isto implica que Ψ é sobrejetiva.

Então, para qualquer campo vetorial conforme V em M^n existe um campo vetorial conforme $\overline{V}$ em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ tal que $\overline{V}^T = V$. Desta forma, para qualquer campo vetorial conforme fixado V em M^n podemos escolher um campo vetorial conforme $\overline{V}_0$ em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ tal que $\Psi(\overline{V}_0) = \overline{V}_0^T = V$. Considerando a componente normal de $\overline{V}_0$ dada por $\overline{V}_0^{\perp} = \varepsilon_N CN$, então $C, -C \in \mathcal{FC}(M^n)$, e sendo Φ uma bijeção, existe um único $\overline{V}_1 \in Ker(\Psi)$ tal que $\overline{V}_1|_M = -\varepsilon_N CN$. Portanto, $\overline{V} = \overline{V}_0 + \overline{V}_1$ é o campo vetorial conforme encontrado em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ tal que $\overline{V}|_M = V$. □

O Teorema 3.1 é muito importante para esta tese pelos seguintes motivos. Primeiro, vai ter grande utilidade para o Capítulo 4, em especial por sua conexão com os Exemplos 4.1 e 4.2. Segundo, o Teorema 3.1 captando os Exemplos 4.1 e 4.2 que já são bem conhecidos, o Teorema 3.1 é não-vazio. Além disso, devido ao caráter de generalidade nas técnicas lá utilizadas, ele poderia servir para construir novos exemplos, o que vai permitir relacionar esse teorema com aqueles obtidos por Aquino et al. [2]. Maiores detalhes sobre considerações aqui feitas poderão ser encontrados no Capítulo 4.

Capítulo 4

Alguns Exemplos de Campos Potenciais em Hipersuperfícies Totalmente Umbílicas nos Espaços Euclidianos e de Lorentz

Neste capítulo, elaboramos alguns exemplos concretos que ilustram o Teorema 3.1, mostrando que o mesmo é não-vazio. Vamos também relacioná-lo com os resultados de Aquino et al. [2]. Nosso ponto de partida é relembrar sobre a descrição de campos conformes em espaços semi-Euclidianos feita na Seção 1.2 do Capítulo 1, que resumidamente seria o seguinte: Dado um espaço-forma $(\overline{M}(\overline{c}), \overline{g})$ com curvatura seccional constante $\overline{c}$ e carregando campo conforme $\overline{V}$ com fator conforme σ, é válida a relação

$$\overline{Hess}\,\sigma = -\overline{c}\sigma\overline{g}. \tag{4.1}$$

Vamos relembrar esta descrição em dois casos separados. Considere o espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ com o tensor métrico padrão $\overline{g} = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2$. Seja $\overline{V}$ um campo vetorial conforme em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\mathcal{L}_{\overline{V}}\overline{g} = 2\sigma\overline{g}$. Então, temos pela Eq. (4.1) que $\overline{Hess}\sigma = 0$, o que implica em

$$\sigma(\overline{x}) = \sigma(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i + \overline{\beta} = \overline{g}(\overline{\alpha}, \overline{x}) + \overline{\beta}, \tag{4.2}$$

para todo $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ é um vetor constante em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\overline{\beta}$ é uma constante real. Portanto,

$$\overline{V}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})\overline{x} - \frac{1}{2}\overline{g}(\overline{x}, \overline{x})\overline{\alpha} + B\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{\gamma}, \tag{4.3}$$

onde $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ e $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ são vetores constantes e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ com entradas satisfazendo $b_{ij} + b_{ji} = 0$ e $b_{ii} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n+1$. Em outro caso, considere um espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+1}$ com seu tensor métrico padrão $\overline{g} = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 - dx_{n+1}^2$. Então um campo vetorial conforme $\overline{V}$ em $\mathbb{L}^{n+1}$ será novamente dado pela Eq. (4.3) com a pequena diferença de que neste caso $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, -\alpha_{n+1})$ e $b_{i,n+1} - b_{n+1,i} = 0$, para $i \neq n+1$, $i = 1, \ldots, n$.

Agora, por esta breve discussão e em virtude do Teorema 3.1 estamos em posição de obter prontamente campos que determinam uma estrutura de quase sóliton de Ricci para as hipersuperfícies totalmente umbílicas nos espaços euclidiano e de Lorentz. A rigor, tais hipersuperfícies umbílicas passarão a ser o espaço euclidiano, o espaço esférico e o espaço hiperbólico.

Exemplo 4.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ uma hipersuperfície do espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$, onde $g = \overline{g}|_{\mathbb{R}^n}$. Escolhendo $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ para um referencial adaptado à imersão, onde e_i são os vetores canônicos do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e tomando o campo vetorial normal $N = e_{n+1}$ ao espaço $\mathbb{R}^n$, temos que a função ângulo é dada por*

$$C = \overline{g}(\overline{V}, e_{n+1}) = V_{n+1},$$

onde V_{n+1} é a $(n+1)$-ésima coordenada do campo de vetores conformes $\overline{V}$ de $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ dado na Eq. (4.3), que em coordenadas é representado como

$$\overline{V} = (V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i e_i = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{g}(\overline{V}, e_i) e_i.$$

Pelo Teorema 3.1 temos que o campo V que determina uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{R}^n$ pode ser obtido tomando a projeção tangente do campo conforme $\overline{V}$ de $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$. Isto é:

$$\begin{aligned} V &= \overline{V} - Ce_{n+1} = \overline{V} - V_{n+1}e_{n+1} \\ &= (V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}) - (0, \ldots, 0, V_{n+1}) \\ &= (V_1, \ldots, V_n, 0) = \overline{V}|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Como o tensor de Ricci de $\mathbb{R}^n$ é identicamente nulo a seguinte equação é válida

$$\mathcal{L}_V g = 2\lambda g,$$

onde λ é a função sóliton de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, temos uma hipersuperfície totalmente geodésica, isto é, o operador de Weingarten $\mathcal{A}$ é identicamente nulo, e segue do Lema 2.2 que $\sigma|_{\mathbb{R}^n} = \lambda$, onde σ é dada pela Eq. (4.2).

Vale lembrar que apresentamos as variedades Riemannianas $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$, para $\varepsilon_N = \pm 1$, com a finalidade de obter o Exemplo 1.1. Havíamos nos comprometido a explicitar $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ com a estrutura de quase sóliton de Ricci em vista do Teorema 3.1, o que será feito agora.

Exemplo 4.2. *Considere $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ como uma hipersuperfície totalmente umbílica não-geodésica do espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ se $\varepsilon_N = 1$ ou do espaço de Lorentz $(\mathbb{L}^{n+1}, \overline{g})$ se $\varepsilon_N = -1$. Para todo $x \in \mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$, tome o campo vetorial normal $N = \vec{x}$ a $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ como o vetor posição em $x \in \mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$. Relembrando que $\overline{g}(\vec{x}, \vec{x}) = \varepsilon_N$, pela Eq. (4.3) e pela Eq. (4.2), obtemos*

$$\begin{aligned}
C &= \overline{g}(\overline{V}, \vec{x}) \\
&= \varepsilon_N \sigma - \frac{1}{2}\varepsilon_N \overline{g}(\vec{x}, \overline{\alpha}) + \overline{g}(B\vec{x}, \vec{x}) + \frac{1}{2}\overline{g}(\vec{x}, \overline{\gamma}) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_N \overline{g}(\vec{x}, \overline{\alpha}) + \overline{g}(B\vec{x}, \vec{x}) + \frac{1}{2}\overline{g}(\vec{x}, \overline{\gamma}) + \varepsilon_N \overline{\beta} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_N h_{\overline{\alpha}} + \overline{g}(B\vec{x}, \vec{x}) + \frac{1}{2} h_{\overline{\gamma}} + \varepsilon_N \overline{\beta},
\end{aligned}$$

onde $h_{\overline{\alpha}} = \overline{g}(\vec{x}, \overline{\alpha})$ e $h_{\overline{\gamma}} = \overline{g}(\vec{x}, \overline{\gamma})$ denotam as funções altura com respeito aos vetores $\overline{\alpha}$ e $\overline{\gamma}$, respectivamente. Desde que $\overline{g}(B\vec{x}, \vec{x}) = 0$ (isto segue do fato de que B é uma matriz anti-simétrica com os elementos da diagonal principal nulos), então

$$C = \frac{1}{2}\varepsilon_N h_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2} h_{\overline{\gamma}} + \varepsilon_N \overline{\beta}. \tag{4.4}$$

Pelo Teorema 3.1 temos que o campo V que determina uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ pode ser obtido tomando-se a projeção tangente do campo conforme $\overline{V}$ dado pela Eq. (4.3) como segue:

$$\begin{aligned}
V &= \overline{V}|_{\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)} - \varepsilon_N C\vec{x} = \sigma\vec{x} - \frac{1}{2}\varepsilon_N \overline{\alpha} + B\vec{x} + \frac{1}{2}\overline{\gamma} - \varepsilon_N\Big(\frac{1}{2}\varepsilon_N h_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}} + \varepsilon_N\overline{\beta}\Big)\vec{x} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_N(\overline{\alpha} - \varepsilon_N h_{\overline{\alpha}}\vec{x}) + \frac{1}{2}(\overline{\gamma} - \varepsilon_N h_{\overline{\gamma}}\vec{x}) + B\vec{x} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_N \overline{\alpha}^T + \frac{1}{2}\overline{\gamma}^T + B\vec{x}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Por outro lado, o Exemplo 1.1 mostra que $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ tem uma estrutura de quase sóliton de Ricci já conhecida na literatura e como $Ric = \varepsilon_N(n-1)g$ e $\mathcal{L}_V g = (h_{\overline{\alpha}} - \varepsilon_N h_{\overline{\gamma}})g$, então a função sóliton é dada por

$$\lambda = \varepsilon_N\Big(n - 1 - \frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}} - \varepsilon_N h_{\overline{\alpha}})\Big). \tag{4.6}$$

Com isso, a técnica do Teorema 3.1 traz uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ com campo V dado por (4.5) e uma função sóliton λ dada por (4.6).

Observação 4.1. *O Teorema 3.1 também garante que é possível associar todo campo V que determina uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ a um único campo conforme $\overline{V}$ em $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ se $\varepsilon_N = 1$ ou em $(\mathbb{L}^{n+1}, \overline{g})$ se $\varepsilon_N = -1$ de tal maneira que $\overline{V}|_{\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)} = V$. Neste caso, o campo conforme $\overline{V}$ restrito a $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ só tem parte tangente. Isto ocorre se, e somente se, $C = 0$ em $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ e se, e somente se, pela Eq. (4.4), $\overline{\alpha} = -\varepsilon_N \overline{\gamma}$ e $\overline{\beta} = 0$. Desta maneira, o campo V é dado por*

$$V = \overline{V}|_{\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)} = \overline{\gamma}^T + B\vec{x},$$

com a função sóliton dada por

$$\lambda = \lambda_{\overline{\gamma}} = \varepsilon_N \Big(n - 1 - h_{\overline{\gamma}} \Big).$$

O Teorema 3.1 capta os Exemplos 4.1 e 4.2, mostrando ser um resultado não-vazio. Além disso, é um resultado que em geral vale para todas as subvariedades Riemannianas de codimensão um, totalmente umbílicas e completas de um espaço ambiente semi-Riemanniano $\overline{M}(\overline{c})$ de curvatura seccional constante $\overline{c}$. Assim, o espaço ambiente $\overline{M}(\overline{c})$ pode ser o espaço esférico $\mathbb{S}^{n+1}$, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ que são variedades Riemannianas de curvatura seccional constante 1 e -1, respectivamente, e também pode ser os *espaços de Sitter* e *de anti-Sitter*, ou seja, são espaços-formas Lorentzianos simplesmente conexos, definidos respectivamente por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^{n+2}; \langle x, x \rangle = 1 \right\} \tag{4.7}$$

e

$$\mathbb{H}_1^{n+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}_2^{n+2}; \langle x, x \rangle = -1 \right\}, \tag{4.8}$$

onde $\mathbb{R}_1^{n+2}$ é o espaço Euclidiano semi-Riemanniano $(n+2)$-dimensional de índice 1 com métrica

$$\langle \ , \ \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 - dx_{n+2}^2$$

e $\mathbb{R}_2^{n+2}$ é o espaço Euclidiano semi-Riemanniano $(n+2)$-dimensional de índice 2 com métrica

$$\langle \ , \ \rangle = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 - dx_{n+1}^2 - dx_{n+2}^2.$$

O espaço Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e o espaço anti-Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$ são variedades semi-Riemannianas de curvatura seccional constante iguais a 1 e -1, respectivamente.

Portanto, o Teorema 3.1 tem o poder de captar mais exemplos, considerando os espaços ambientes mencionados acima. Além disso, vai nos permitir elaborar mais novos exemplos (os Exemplos 5.1 e 5.2 que vamos apresentar no Capítulo 5).

Agora, vamos relacionar o Teorema 3.1 com os teoremas do artigo de Aquino et al. [2]. Primeiro, vamos apresentar o enunciado dos teoremas desse artigo com seus respectivos corolários.

Teorema 4.1. *[2, p.6, Teorema 1] Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Suponha que para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ o campo de vetores a^T fornece uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente para Σ^n. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n contém uma hipersuperfície totalmente umbílica tipo-espaço de $\mathbb{S}^{n+1}_1$ determinada por a, então Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Corolário 4.1. *[2, p.7, Corolário 1] Se Σ^n é uma hipersuperfície completa de $\mathbb{H}^{n+1}$ tal que, para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$, o campo de vetores a^T fornece uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente e a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n contém uma hipersuperfície totalmente umbílica tipo-espaço de $\mathbb{S}^{n+1}_1$ determinada por a, então Σ^n é isométrica ao $\mathbb{H}^n$.*

Teorema 4.2. *[2, p.8, Teorema 2] Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}_1$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathbb{S}^{n+1}_1$. Suponha que para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ o campo de vetores a^T fornece uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente para Σ^n. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n contém uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$ determinada por a, então Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}_1$.*

Corolário 4.2. *[2, p.10, Corolário 2] Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathbb{S}^{n+1}_1$ tal que, para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$, o campo de vetores a^T fornece uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente e a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n contém uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$ determinada por a. Então Σ^n é isométrica a $\mathbb{S}^n$.*

Teorema 4.3. *[2, p.10, Teorema 3] Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathbb{H}^{n+1}_1$. Suponha que para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_2$ o campo de vetores a^T fornece uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente para Σ^n. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n contém uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}_1$ determinada por a. Então Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}_1$.*

Corolário 4.3. *[2, p.10, Corolário 3] Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathbb{H}^{n+1}_1$ tal que, para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_2$, o campo de vetores a^T fornece uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente e a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n contém uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}_1$ determinada por a. Então Σ^n é isométrica ao $\mathbb{H}^n$.*

Observe que nos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 (ver Aquino et al. [2]), a condição de uma hipersuperfície ser totalmente umbílica é uma condição necessária para uma hipersuperfície ter uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente, quando se toma o campo que determina tal estrutura como parte tangente de um vetor constante no $\mathbb{R}_1^{n+2}$ (ou no $\mathbb{R}_2^{n+2}$), em que os espaços ambientes são $\overline{M}(\bar{c}) = \mathbb{H}^{n+1}$, $\overline{M}(\bar{c}) = \mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\overline{M}(\bar{c}) = \mathbb{H}_1^{n+1}$. No caso de nosso Teorema 3.1 a condição de uma hipersuperfície ser totalmente umbílica é uma condição suficiente para uma hipersuperfície ter uma estrutura de quase sóliton de Ricci, tomando o campo que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci como parte tangente do campo conforme nos espaços ambientes $\overline{M}(\bar{c}) = \mathbb{H}^{n+1}$, $\overline{M}(\bar{c}) = \mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\overline{M}(\bar{c}) = \mathbb{H}_1^{n+1}$. Além disso, os Corolários 4.1, 4.2 e 4.3 (ver Aquino et al. [2]) acima apontam que essas hipersuperfícies totalmente umbílicas são geodésicas. Por outro lado, nosso Teorema 3.1 também inclui as hipersuperfícies totalmente geodésicas.

Capítulo 5

Uma Aplicação do Teorema de Tashiro

Neste capítulo, apresentamos a prova do segundo teorema principal deste trabalho, que não é apenas interessante por si próprio, mas, mais importante ainda, compreende o resultado através do qual o teorema de Tashiro se aplica em nosso contexto. Tal teorema traz à luz a existência de um campo escalar concircular especial que leva à aplicação do teorema de Tashiro no contexto de quase sólitons de Ricci.

Faremos aqui uma breve discussão que motiva nosso segundo teorema. Inicialmente, para hipersuperfícies totalmente umbílicas M^n de $\overline{M}^{n+1}(\bar{c})$, temos pela Eq. (3.1) do Capítulo 3 que a função ângulo C é um campo escalar concircular especial. Mais precisamente,

$$Hess\, C = (-kC + b)g,$$

onde $k = \dfrac{S}{n(n-1)}$ and $b = -N\sigma - \varepsilon_N \sigma H$ são constantes.

A densidade de um subconjunto de um espaço métrico M fornece uma propriedade muito importante: a extensão de uma aplicação contínua. Vamos escrever de maneira formal esta propriedade como segue:

Proposição 5.1. *Sejam $\mathcal{U}$ um subconjunto denso de um espaço métrico M e $f : \mathcal{U} \to N$ uma aplicação uniformemente contínua, onde N é um espaço métrico completo. Existe uma única extensão contínua $\overline{f} : M \to N$, isto é, $\overline{f}|_{\mathcal{U}} = f$, a qual é uniformemente contínua.*

Demonstração. Ver Lima [29, p.157-158, Proposição 8] □

A Proposição 5.1 juntamente com os conceitos de conjunto denso vão ser fundamentais para a conclusão da nossa prova do Teorema 5.1. Lembramos que na nossa situação estamos tratando (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, que do ponto de vista topológico é um espaço topológico metrizável, com métrica completa.

Agora estamos em posição de enunciar e provar nosso segundo teorema.

Teorema 5.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana isometricamente imersa em uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}(\overline{c}), \overline{g})$ de curvatura seccional constante $\overline{c}$ e dotada de um campo vetorial conforme $\overline{V}$ de modo que a componente tangente de $\overline{V}$ gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci sobre M. Sejam σ o fator conforme de $\overline{V}$ e λ a função sóliton. Suponha que $\psi = \sigma|_M - \lambda$ é diferente de zero em algum subconjunto denso de M e $Ric = \mu\mathcal{A}$, para alguma função suave μ em M. Então C é um campo escalar concircular especial em (M^n, g).*

Demonstração. Pelo Lema 2.2 obtemos

$$\mu\mathcal{A} = -\psi I - \varepsilon_N C\mathcal{A}. \tag{5.1}$$

Observemos que

$$\mathcal{A} = -\frac{\psi}{\mu + \varepsilon_N C} I,$$

para todo $p \in M$ tal que $\mu(p) + \varepsilon_N C(p) \neq 0$. Então, o conjunto aberto

$$\mathcal{U} = \{p \in M; \mu(p) + \varepsilon_N C(p) \neq 0\}$$

de M^n é totalmente umbílica em $\overline{M}^{n+1}(\overline{c})$ com curvatura média constante $H = -\dfrac{\varepsilon_N \psi}{\mu + \varepsilon_N C}$. Neste caso, como já visto na equação (3.1), é válido em $\mathcal{U}$ que

$$HessC = (-kC + b)g, \tag{5.2}$$

onde $k = \dfrac{S}{n(n-1)}$ e $b = -N\sigma - \varepsilon_N \sigma H$ são constantes. Portanto, C é um campo escalar concircular especial em $\mathcal{U}$. Se $\mathcal{U}$ é denso em M, então pela continuidade da Eq. (5.2), segue da Proposição 5.1 que $HessC = (-kC + b)g$ em todo M. Se $\mathcal{U}$ não é denso em M, então deve existir uma vizinhança aberta $\mathcal{W}$ em $M - \mathcal{U}$ tal que $\mu + \varepsilon_N C = 0$ em $\mathcal{W}$. Agora, isso em conjunto com (5.1) implicará que ψ é identicamente nula em $\mathcal{W}$, o que é uma contradição. □

Este Teorema 5.1 mostra que em certas hipóteses, a função ângulo C é um campo escalar concircular especial. Isto nos permite aplicar o Teorema de Tashiro [37] em nosso contexto. Agora, vamos elaborar exemplos que vão mostrar que este Teorema 5.1 é não-vazio. Além disso, esses exemplos vão permitir uma classificação de quase sólitons de

Ricci imersos em nosso contexto, que vamos apresentar no Corolário 5.1. Em primeiro lugar, vamos mostrar que o Exemplo 4.2 que foi elaborado no Capítulo 4 em vista da técnica do Teorema 3.1 satisfaz as hipóteses do Teorema 5.1, isto é, verificaremos todas as hipóteses do Teorema 5.1.

No que segue, seja $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$ como no Exemplo 4.2 do Capítulo 4. Considerando a função ângulo C definida pela Eq. (4.4) do Exemplo 4.2, temos que o Hessiano de C é

$$\begin{aligned} HessC &= \frac{\varepsilon_N}{2}Hessh_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}Hessh_{\overline{\gamma}} \\ &= -\frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}}g - \frac{\varepsilon_N}{2}h_{\overline{\gamma}}g \\ &= \Big[-\varepsilon_N\Big(\frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}} + \frac{\varepsilon_N}{2}h_{\overline{\alpha}} + \varepsilon_N\overline{\beta}\Big) + \overline{\beta}\Big]g \\ &= (-\varepsilon_N C + \overline{\beta})g. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Assim, C é um campo escalar concircular especial. Além disso, $Ric = \varepsilon_N(n-1)I = -\varepsilon_N(n-1)\mathcal{A}$, onde $\mu = -\varepsilon_N(n-1)$, e ainda

$$\psi = \sigma|_{\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)} - \lambda = -\varepsilon_N(n-1) + \frac{\varepsilon_N}{2}h_{\overline{\gamma}} + \frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}} + \overline{\beta}$$

não pode se anular em algum subconjunto denso de $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N)$. De fato, a única possibilidade de ψ se anular, seria aquela onde os termos $-\varepsilon_N(n-1)$, $\frac{\varepsilon_N}{2}h_{\overline{\gamma}} + \frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}}$ e $\overline{\beta}$ seriam nulos. Mas isso acarretaria por exemplo em que $n = 1$ (o que não pode ocorrer, pois $n \geq 3$). Portanto, todas as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas neste exemplo, e portanto o Exemplo 4.2 é contemplado pelo Teorema 5.1.

O Exemplo 4.2 envolve dois casos: Se $\varepsilon_N = 1$, $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N) = \mathbb{S}^n$ e se $\varepsilon_N = -1$, $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N) = \mathbb{H}^n$.

No caso $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N) = \mathbb{S}^n$, a curvatura escalar $S > 0$ é constante, pela Eq. (4.4), a função ângulo C é dada por

$$C = \frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}} + \overline{\beta}. \tag{5.4}$$

Além disso, a função ângulo C em $\mathbb{S}^n$ tem dois pontos críticos, pois C é um campo escalar concircular especial em $\mathbb{S}^n$.

O campo V que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{S}^n$ é

$$V = -\frac{1}{2}\overline{\alpha}^T + \frac{1}{2}\overline{\gamma}^T + B\vec{x}, \tag{5.5}$$

onde $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$, com função sóliton

$$\lambda = \Big(n - 1 - \frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}} - h_{\overline{\alpha}})\Big). \tag{5.6}$$

No caso $\mathbb{M}^n(\varepsilon_N) = \mathbb{H}^n$, a curvatura escalar $S < 0$ é constante, a função ângulo C é dada por:

$$C = -\frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}} - \overline{\beta}. \tag{5.7}$$

Além disso, a função ângulo C em $\mathbb{H}^n$ tem um ponto crítico, pois C é um campo escalar concircular especial em $\mathbb{H}^n$.

O campo V que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{H}^n$ é

$$V = \frac{1}{2}\overline{\alpha}^T + \frac{1}{2}\overline{\gamma}^T + B\vec{x}, \tag{5.8}$$

onde $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, -\alpha_{n+1})$, com função sóliton

$$\lambda = -\Big(n - 1 - \frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}} + h_{\overline{\alpha}})\Big). \tag{5.9}$$

Além do Exemplo 4.2, vamos apresentar dois novos exemplos que também vão ilustrar o Teorema 5.1, a saber, produtos warped. A motivação na elaboração destes exemplos é, por um lado o trabalho de Tashiro [37], onde ele apresentou os espaços pseudo-hiperbólicos do tipo zero e do tipo negativo (apresentados na Eq. (1.64) da Seção 1.5) e, por outro lado, um lema feito no trabalho de Pigola et al. [35, p.10, Lema 1.1](já havíamos discutido à respeito na seção de quase sólitons de Ricci) que permite construir uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente em produtos warped cuja base é um intervalo real ou o próprio $\mathbb{R}$ e as fibras são variedades de Einstein. Deste lema, podemos obter que os produtos warped dos tipos $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ possuem estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente com as suas respectivas funções potenciais $f_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}(t) = e^t$ e $f_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}(t) = senht$ e as suas respectivas funções sólitons $\lambda_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}(t) = e^t - (n-1)$ e $\lambda_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}(t) = senht - (n-1)$. Além disso, $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ são variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante igual a -1 (fato apresentado na Eq. (1.57) da seção de produtos warped). Assim, ambos os produtos warped são isométricos ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, devido ao Teorema de Cartan (veja Carmo [9, p.181, Teorema 4.1]). As isometrias destes produtos warped envolvendo espaço hiperbólico, juntamente com a técnica adotada pelo Teorema 3.1, serão de grande importância na elaboração destes exemplos, que vão depender do caso particular do Exemplo 4.2, que trata do caso hiperbólico.

Exemplo 5.1. *Levando em conta as considerações acima, o espaço pseudo-hiperbólico* $(\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}})$ *do tipo zero é isométrico a* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$*. Então, temos uma isometria* $G : (\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}) \to (\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$*, isto é,* G *é um difeomorfismo suave que satisfaz*

$$g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}(X, Y) = g_{\mathbb{H}^n}(dG(X), dG(Y)),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1})$, *onde* $g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *e* $g_{\mathbb{H}^n}$ *denotam as métricas Riemannianas de* $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ *e* $\mathbb{H}^n$, *respectivamente. A isometria* G *é dada por* $G(t, x) = (x, e^{-t})$, *para todo* $(t, x) \in \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ *(veja Neto [31, p.162]). Com isso, podemos considerar* $(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}})$ *como uma hipersuperfície tipo-espaço do espaço de Lorentz* $(\mathbb{L}^{n+1}, \overline{g})$.

Assim, para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$, *temos a decomposição ortogonal*

$$T_{G(t,x)}\mathbb{L}^{n+1} = T_{(t,x)}(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}) \oplus \left\langle \overrightarrow{G(t, x)} \right\rangle, \tag{5.10}$$

onde $\overrightarrow{G(t, x)}$ *é o vetor posição em* $G(t, x) \in \mathbb{H}^n$ *e* $T_{G(x,t)}\mathbb{H}^n = dG_{(t,x)}(T_{(t,x)}(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}))$.

Desta maneira, utilizando a isometria G, *temos que* $\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}$ *tem curvatura escalar constante* $S < 0$. *Denotando por* $C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *a função ângulo em* $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$, *temos pela Eq. (5.7) que*

$$C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} = C \circ G = -\frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}} \circ G + \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}} \circ G - \overline{\beta}. \tag{5.11}$$

Denotemos por $V_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *o campo que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci para* $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$. *Pela decomposição ortogonal dada por* (5.10) *e em vista da técnica do Teorema 3.1, podemos obtê-lo tomando a projeção tangente do campo vetorial conforme* $\overline{V}$ *de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *definida pela Eq. (4.3). Para qualquer* $(t, x) \in \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$, *temos*

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}(t, x) &= dG^{-1}\Big(V_{\mathbb{H}^n}(G(t, x))\Big) \\ &= dG^{-1}\Big[\frac{1}{2}\overline{\alpha}^T(G(t, x)) + \frac{1}{2}\overline{\gamma}^T(G(t, x)) + B\Big(\overrightarrow{G(t, x)}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}dG^{-1}\Big(\overline{\alpha}^T(G(t, x))\Big) + \frac{1}{2}dG^{-1}\Big(\overline{\gamma}^T(G(t, x))\Big) \\ &+ dG^{-1}\Big[B\Big(\overrightarrow{G(t, x)}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $V_{\mathbb{H}^n}$ *é o campo de* $\mathbb{H}^n$ *dado por (5.8). Denotemos por* $Ric_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *e* $Ric_{\mathbb{H}^n}$ *os tensores de Ricci de* $(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}})$ *e de* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$, *respectivamente. Uma vez que* G *é uma isometria, levando em conta que toda isometria preserva tensores de Ricci, derivadas de Lie e funções sólitons via pull-back, temos as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} Ric_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} &= G^*Ric_{\mathbb{H}^n} = -(n-1)G^*g_{\mathbb{H}^n} \\ &= -(n-1)g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}} g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} &= G^*\mathcal{L}_{V_{\mathbb{H}^n}} g_{\mathbb{H}^n} \\ &= \Big((h_{\overline{\alpha}} + h_{\overline{\gamma}}) \circ G\Big)G^*g_{\mathbb{H}^n} \\ &= \Big((h_{\overline{\alpha}} + h_{\overline{\gamma}}) \circ G\Big)g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} \\ &= \Big(h_{\overline{\alpha}} \circ G + h_{\overline{\gamma}} \circ G\Big)g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} &= \lambda_{\mathbb{H}^n}\circ G = -\Big(n-1-\frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}}+h_{\overline{\alpha}})\Big)\circ G \\ &= -\Big(n-1-\frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}}\circ G+h_{\overline{\alpha}}\circ G)\Big), \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde $\lambda_{\mathbb{H}^n}$ *é a função sóliton de* $\mathbb{H}^n$ *dada na Eq. (5.9). Portanto,* $(\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}, g)$ *tem uma estrutura de quase sóliton de Ricci com campo* $V_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *dado por* (5.12) *e uma função sóliton dada por* (5.13).

De posse das informações acima, verificaremos todas as hipóteses do Teorema 5.1 neste exemplo. Considerando a função ângulo $C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *definida acima pela Eq. (5.11), segue da Eq. (5.3) que o Hessiano de* $C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *é dado por*

$$\begin{aligned} HessC_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} &= G^*HessC \\ &= (C\circ G+\overline{\beta})G^*g_{\mathbb{H}^n} \\ &= (C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}+\overline{\beta})g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Assim, $C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *é um campo escalar concircular especial. Então,* $C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *não tem nenhum ponto crítico. Além disso,*

$$Ric_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} = -(n-1)I = (n-1)\mathcal{A}_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}},$$

onde $\mathcal{A}_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ *denota o operador de Weingarten da hipersuperfície* $(\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}})$ *do espaço de Lorentz* $\mathbb{L}^{n+1}$*, o qual é dado por*

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} = dG^{-1}\circ\mathcal{A}\circ dG,$$

onde $\mathcal{A}$ *é o operador de Weingarten da hipersuperfície* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$ *do espaço de Lorentz* $\mathbb{L}^{n+1}$ *e* $\mu = n-1$*. Além disso,*

$$\psi = \sigma|_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} - \lambda_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}} = (n-1) - \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}}\circ G + \frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}}\circ G + \overline{\beta}$$

não pode se anular em algum subconjunto denso de $\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}$*. Pois, a única possibilidade de* ψ *se anular, seria aquela onde os termos* $n-1$, $-\frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}}\circ G+\frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}}\circ G$ *e* $\overline{\beta}$ *seriam nulos. Mas isso acarretaria por exemplo em que* $n=1$ (*o que não pode ocorrer, pois* $n\geq 3$). *Portanto, todas as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas neste exemplo.*

Exemplo 5.2. *Pelas mesmas considerações acima, o espaço pseudo-hiperbólico* $(\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}})$ *do tipo negativo é isométrico a* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$*. Então, temos uma isometria* $P : (\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}) \to (\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$*, isto é,* P *é um difeomorfismo suave satisfazendo*

$$g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}(X,Y) = g_{\mathbb{H}^n}(dP(X), dP(Y)),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1})$, onde $g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ e $g_{\mathbb{H}^n}$ denotam as métricas Riemannianas de $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ e $\mathbb{H}^n$, respectivamente. Com isso, podemos considerar $(\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}})$ como uma hipersuperfície tipo-espaço do espaço de Lorentz $(\mathbb{L}^{n+1}, \overline{g})$.

Assim, para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$, temos a decomposição ortogonal

$$T_{P(t,x)}\mathbb{L}^{n+1} = T_{(t,x)}(\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}) \oplus \left\langle \overrightarrow{P(t,x)} \right\rangle, \tag{5.14}$$

onde $\overrightarrow{P(t,x)}$ é o vetor posição de $P(t,x) \in \mathbb{H}^n$ e $T_{P(x,t)}\mathbb{H}^n = dP_{(t,x)}(T_{(t,x)}(\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}))$.

Desta maneira, utilizando a isometria P, temos que $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ tem curvatura escalar constante $S < 0$. Denotando por $C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ a função ângulo em $\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$, temos pela Eq. (5.7) que

$$C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} = C \circ P = -\frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}} \circ P + \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}} \circ P - \overline{\beta}. \tag{5.15}$$

Denotemos por $V_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ o campo que gera uma estrutura de quase sóliton de Ricci para $\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}$. Pela decomposição ortogonal dada por (5.14) e em vista da técnica do Teorema 3.1, podemos obtê-lo tomando a projeção tangente do campo vetorial conforme $\overline{V}$ de $\mathbb{L}^{n+1}$ definida pela Eq. (4.3). Para qualquer $(t, x) \in \mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$, temos

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}(t,x) &= dP^{-1}\Big(V_{\mathbb{H}^n}(P(t,x))\Big) \\ &= dP^{-1}\Big[\frac{1}{2}\overline{\alpha}^T(P(t,x)) + \frac{1}{2}\overline{\gamma}^T(P(t,x)) + B\Big(\overrightarrow{P(t,x)}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}dP^{-1}\Big(\overline{\alpha}^T(P(t,x))\Big) + \frac{1}{2}dP^{-1}\Big(\overline{\gamma}^T(P(t,x))\Big) \\ &+ dP^{-1}\Big[B\Big(\overrightarrow{P(t,x)}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde $V_{\mathbb{H}^n}$ é o campo de $\mathbb{H}^n$ dado por (5.8). Denotemos por $Ric_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ e $Ric_{\mathbb{H}^n}$ os tensores de Ricci de $(\mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}})$ e de $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$, respectivamente. Desde que P é uma isometria, levando em conta que toda isometria preserva tensores de Ricci, derivadas de Lie e funções sólitons via pull-back, temos as relações:

$$\begin{aligned} Ric_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} &= P^*Ric_{\mathbb{H}^n} = -(n-1)P^*g_{\mathbb{H}^n} \\ &= -(n-1)g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}}g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} &= P^*\mathcal{L}_{V_{\mathbb{H}^n}}g_{\mathbb{H}^n} \\ &= \Big((h_{\overline{\alpha}} + h_{\overline{\gamma}}) \circ P\Big)P^*g_{\mathbb{H}^n} \\ &= \Big((h_{\overline{\alpha}} + h_{\overline{\gamma}}) \circ P\Big)g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} \\ &= \Big(h_{\overline{\alpha}} \circ P + h_{\overline{\gamma}} \circ P\Big)g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} &= \lambda_{\mathbb{H}^n}\circ P = -\Big(n-1-\frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}}+h_{\overline{\alpha}})\Big)\circ P \\ &= -\Big(n-1-\frac{1}{2}(h_{\overline{\gamma}}\circ P+h_{\overline{\alpha}}\circ P)\Big), \qquad (5.17)\end{aligned}$$

onde $\lambda_{\mathbb{H}^n}$ *é a função sóliton de* $\mathbb{H}^n$ *dada na Eq. (5.9). Portanto,* $(\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}, g)$ *tem uma estrutura de quase sóliton de Ricci com campo* $V_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ *dado por* (5.16) *e uma função sóliton dada por* (5.17).

De posse das informações acima, verificaremos todas as hipóteses do Teorema 5.1 neste exemplo. Considerando a função ângulo $C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ *definida acima pela Eq. (5.15), segue da Eq. (5.3) que o Hessiano de* $C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ *é dado por*

$$\begin{aligned}HessC_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} &= P^*HessC \\ &= (C\circ P+\overline{\beta})P^*g_{\mathbb{H}^n} \\ &= (C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}+\overline{\beta})g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}.\end{aligned}$$

Assim, $C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ *é um campo escalar concircular especial. Então,* $C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ *não tem nenhum ponto crítico. Além disso,*

$$Ric_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} = -(n-1)I = (n-1)\mathcal{A}_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}},$$

onde $\mathcal{A}_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ *denota o operador de Weingarten da hipersuperfície* $(\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}, g_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}})$ *do espaço de Lorentz* $\mathbb{L}^{n+1}$*, o qual é dado por*

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} = dP^{-1}\circ\mathcal{A}\circ dP,$$

onde $\mathcal{A}$ *é o operador de Weingarten da hipersuperfície* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$ *do espaço de Lorentz* $\mathbb{L}^{n+1}$ *e* $\mu = n-1$*. Além disso,*

$$\psi = \sigma|_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} - \lambda_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}} = (n-1) - \frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}}\circ P + \frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}}\circ P + \overline{\beta}$$

não pode se anular em algum subconjunto denso de $\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}$*. Pois, a única possibilidade de* ψ *se anular, seria aquela onde os termos* $n-1$, $-\frac{1}{2}h_{\overline{\gamma}}\circ P + \frac{1}{2}h_{\overline{\alpha}}\circ P$ *e* $\overline{\beta}$ *seriam nulos. Mas isso acarretaria por exemplo em que* $n = 1$ (*o que não pode ocorrer, pois* $n \geq 3$)*. Portanto, todas as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas neste exemplo.*

Com isso, estamos prontos para obter uma classificação de quase sólitons de Ricci imersos em nosso contexto.

Corolário 5.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de curvatura escalar constante S diferente de zero satisfazendo as mesmas hipóteses do Teorema 5.1. Então tem-se as seguintes possibilidades:*

i) Se $S > 0$, então (M^n, g) é isométrica a $\mathbb{S}^n$ e $\overline{M}^{n+1}$ deve ser um espaço Euclidiano;

ii) Se $S < 0$ e C tem um ponto crítico, então (M^n, g) é isométrica a um espaço hiperbólico e $\overline{M}^{n+1}$ deve ser um espaço de Lorentz;

iii) Se $S < 0$ e C não tem nenhum ponto crítico, então (M^n, g) é isométrica aos produtos warped dados nos Exemplos 5.1 e 5.2 e $\overline{M}^{n+1}$ deve ser um espaço de Lorentz.

Demonstração. Pelas hipóteses do Teorema 5.1 temos que $HessC = (-kC + b)g$, onde $k = \dfrac{S}{n(n-1)}$ e $b = -N\sigma - \epsilon_N \sigma H$ são constantes. Então, obtemos as seguintes possibilidades:

i) Se $S > 0$, então aplicando o teorema de Tashiro [37], tem-se $M^n = \mathbb{S}^n$ e empregando o Exemplo 4.2 $M^n = \mathbb{S}^n$ é munida de uma estrutura de quase sóliton de Ricci com campo potencial V dado pela Eq. (5.5), função sóliton dada por (5.6) e função ângulo C dada por (5.4) e $\overline{M}^{n+1}$ deve ser $\mathbb{R}^{n+1}$ com o campo conforme $\overline{V}$ dado por (4.3).

ii) Se $S < 0$ e C tem um único ponto crítico, então aplicando o teorema de Tashiro [37], tem-se $M^n = \mathbb{H}^n$ e empregando o Exemplo 4.2 $M^n = \mathbb{H}^n$ é munida de uma estrutura de quase sóliton de Ricci com campo potencial V dado pela Eq. (5.8), função sóliton dada por (5.9) e a função ângulo C dada por (5.7) e $\overline{M}^{n+1}$ deve ser $\mathbb{L}^{n+1}$ com o campo conforme $\overline{V}$ dado por (4.3).

iii) Se $S < 0$ e C não tem pontos críticos, então aplicando o teorema de Tashiro [37], tem-se $M^n = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ e empregando o Exemplo 5.1 $M^n = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n-1}$ é munida de uma estrutura de quase sóliton de Ricci com campo potencial $V_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ dado pela Eq. (5.12), função sóliton dada por (5.13) e a função ângulo $C_{\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^{n-1}}$ dada por (5.11) como no Exemplo 5.1 ou tem-se $M^n = \mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ e empregando o Exemplo 5.2 $M^n = \mathbb{R} \times_{cosht} \mathbb{H}^{n-1}$ é munida de uma estrutura de quase sóliton de

Ricci com campo potencial $V_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ dado pela Eq. (5.16), função sóliton dada por (5.17) e a função ângulo $C_{\mathbb{R}\times_{cosht}\mathbb{H}^{n-1}}$ dada por (5.15) como no Exemplo 5.2 e $\overline{M}^{n+1}$ deve ser $\mathbb{L}^{n+1}$ com o campo conforme $\overline{V}$ dado por (4.3).

$\square$

Observação 5.1. *É importante notar neste ponto que, em contraste com o teorema de Tashiro [37], o caso euclidiano é impossível de ocorrer em nosso contexto porque no Exemplo 4.1 nós teríamos* $\sigma|_{\mathbb{R}^n} = \lambda$*, o que contradiz a hipótese sobre* ψ *do Teorema 5.1. Logo, o Exemplo 4.1 ilustra o Teorema 3.1, porém não ilustra o Teorema 5.1. Em outras palavras, o caso totalmente geodésico não pode ocorrer no Teorema 5.1. Portanto, o Teorema 5.1 capta somente os casos totalmente umbílicos não-geodésicos. Em vista disso, o Exemplo 4.2 ilustra os nossos dois resultados. Podemos então dizer que nossos dois resultados tem intersecção.*

Recordemos que o Teorema 3.1 oferece uma técnica mais geral, que permitiu elaborar os Exemplos 4.2, 5.1 e 5.2, que são captados pelo Teorema 5.1. Com isso, podemos elaborar mais exemplos novos em que os espaços ambientes são $\overline{M}(\overline{c}) = \mathbb{S}^{n+1}$, $\overline{M}(\overline{c}) = \mathbb{H}^{n+1}$, $\overline{M}(\overline{c}) = \mathbb{S}_1^{n+1}$ *e* $\overline{M}(\overline{c}) = \mathbb{H}_1^{n+1}$.

Capítulo 6

Conclusão

Vamos recapitular o que foi feito nesta tese. Em princípio provamos dois resultados principais que possuem certas aplicações.

Para obter o primeiro resultado (Teorema 3.1) foi indispensável estabelecer uma conexão entre campos conformes e campos concirculares. Ele se relaciona com os resultados feitos no trabalho de Aquino et al. [2]. No Teorema 3.1 a condição de hipersuperfície totalmente umbílica é hipótese e a condição da hipersuperfície ter estrutura de quase sóliton de Ricci é tese. Enquanto no trabalho de Aquino et al. [2] a condição da hipersuperfície ter estrutura de quase sóliton de Ricci é hipótese e a condição de hipersuperfície totalmente umbílica é tese, e os espaços ambientes são o espaço hiperbólico, o espaço de Sitter e o espaço de anti-Sitter. Além disso, o Teorema 3.1 traz uma técnica mais geral para elaborar novos exemplos.

O segundo resultado (Teorema 5.1) permite captar os Exemplos 4.2, 5.1 e 5.2 em que os espaços ambientes são o espaço Euclidiano e o espaço de Lorentz. A técnica do Teorema 3.1 permitiu elaborar estes exemplos. Juntando o segundo resultado com estes exemplos, obtemos uma aplicação do Teorema de Tashiro no contexto de quase sólitons de Ricci imersos (Corolário 5.1), sempre deixando claro que o caso Euclidiano (Exemplo 4.1) não é captado pelo Corolário 5.1, que em contrapartida é contemplado pelo Teorema de Tashiro [37]. A função ângulo foi de grande suporte para os nossos resultados, sendo um campo escalar concircular especial, o que permitiu aplicar o teorema de Tashiro [37]. Além disso, em todos os nossos exemplos captados pelos resultados, a função ângulo é expressa em termos da função altura, que é muito utilizada no ramo da geometria Diferencial para obter importantes resultados de caracterizações no contexto de quase sólitons de Ricci.

Nesta tese foram explorados exemplos Riemannianos de quase sólitons de Ricci, devido a uma aplicação do Teorema de Tashiro [37] em nosso contexto. Especulamos que é possível investigar mais exemplos, inclusive exemplos semi-Riemannianos ainda neste nosso contexto, fazendo aplicação de outros resultados estilo Teorema de Tashiro [37] que permita abranger esses casos. Como por exemplo os resultados de Kühnel-Rademacher [25, p.240, Teorema 3.1 e Teorema 3.2], onde eles exploram mais exemplos Riemannianos e também exploram exemplos semi-Riemannianos.

Apêndice

Neste Apêndice escreveremos alguns conceitos básicos presentes na teoria de Geometria Riemanniana. O leitor pode estudar mais detalhes sobre estes conceitos nas referências Lee [26], Carmo [9], Petersen [34] e Neto [31].

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades riemannianas certos operadores diferenciais de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Passaremos a uma exposição de alguns destes operadores. Em tudo que segue, M^n denotará uma variedade riemanniana de dimensão n com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇.

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O *gradiente* de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M por

$$g(\nabla f, X) = \nabla_X f = X(f) = df(X) \tag{6.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Então, pela definição de gradiente, teremos em U

$$\nabla f = \sum_i g(\nabla f, e_i)e_i = \sum_i e_i(f)e_i = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i. \tag{6.2}$$

Mais geralmente, se $\partial_1, \ldots, \partial_n$ são campos coordenados em U, teremos

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_j(f)\partial_i, \tag{6.3}$$

onde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}). Além disso, é imediato das propriedades de derivação o seguinte fato: Se $f, \ell : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então vale a regra da soma $\nabla(f + \ell) = \nabla f + \nabla \ell$ e a regra do produto $\nabla(f\ell) = \ell\nabla f + f\nabla\ell$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o *Hessiano* de f como o $(1, 1)$-tensor dado por

$$(Hess f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \tag{6.4}$$

ou como o $(0,2)$-tensor dado por

$$Hessf(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

Neste caso, $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é um tensor simétrico.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O *Laplaciano* de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = tr(Hessf). \tag{6.5}$$

Mais precisamente, seja $p \in M$ e considere uma vizinhança coordenada $U \subset M$ de p onde esteja definido um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$\Delta f(p) = tr(Hessf)_p = \sum_{i=1}^{n} g((Hessf)_p(e_i), e_i).$$

Para finalizar, faremos um breve comentário sobre pull-back e derivada de Lie de tensores. Para isso, enunciaremos o seguinte fato sobre equações diferenciais ordinárias, que é uma extensão do teorema fundamental de existência, unicidade e dependência das condições iniciais.

Fato: Seja X um campo de vetores suaves em M. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança $U \subset M$ de p, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t,q)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $q \in U$, é a única curva suave satisfazendo $\frac{d}{dt}\varphi(t,q) = X(\varphi(t,q))$ e $\varphi(0,q) = q$.

O fato acima pode ser encontrado na referência Lee [26].

A curva $t \mapsto \varphi(t,q)$ dada acima é chamada a *curva integral* de X em U. A aplicação $\varphi_t : U \to M$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$ é chamada o *fluxo* de X em U.

Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo, o *pull-back* de um $(0,2)$-tensor T é um tensor do mesmo tipo que a cada ponto $p \in M$ associa

$$(f^*T)_p(X_p, Y_p) := T_{f(p)}(df_p(X_p), df_p(Y_p)).$$

Assim, a *derivada de Lie* de T, com respeito ao campo X, é:

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* T_{\varphi_t(p)},$$

onde o difeomorfismo $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ é o fluxo de X, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Sua relação com o colchete de Lie é obtida como aplicação da propriedade

$$(\mathcal{L}_X T)(Y,Z) = \mathcal{L}_X T(Y,Z) - T([X,Y],Z) - T(Y,[X,Z]).$$

Em particular, tomando $T = g$, teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) \;=\; g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)_p(Y,Z) &= \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* g_{\varphi_t(p)}\Big)(Y,Z) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{[(\varphi_t^* g_{\varphi_t(p)})(Y,Z) - g_p(Y,Z)]}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[g(d\varphi_t|_p(Y), d\varphi_t|_p(Z))_{\varphi_t(p)} - g(Y,Z)_p].
\end{aligned}$$

Podemos estender as definições acima de pull-back e derivada de Lie de $(0,2)$-tensores para $(0,r)$-tensores. Além disso, os resultados para os $(1,r)$-tensores são análogos.

Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo, o pull-back de um $(0,r)$-tensor T é um tensor do mesmo tipo que a cada ponto $p \in M$ associa

$$(f^*T)_p((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p) := T_{f(p)}(df_p((X_1)_p), \ldots, df_p((X_r)_p)).$$

A derivada de Lie de um $(0,r)$-tensor T em M, com respeito ao campo X, é definida através de

$$(\mathcal{L}_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) = X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T([X,Y_1], Y_2, \ldots, Y_r) - \cdots - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, [X, Y_r]).$$

Em particular, a derivada de Lie de uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ em relação ao campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dada pela diferencial da função, como segue:

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X) = \nabla_X f.$$

A derivada de Lie de um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ em relação ao campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dada pelo colchete de Lie, como segue:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Para maiores detalhes, veja Lee [26].

Bibliografia

[1] Açikgöz Kaya D., Onat L., *Almost Ricci solitons and concircular vector fields*, Anal. Stiintif. ale Univ. Al l Cuza din Iasi - Matematica (2018) 199-204.

[2] Aquino C.P., Lima H.F., Gomes J.N.V., *Characterizations of Immersed Gradient Almost Ricci Solitons*, Pacific J. Math. 288(2) (2017) 289-305.

[3] Barros A., Batista R., Ribeiro Jr. E., *Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient*. Monatsh. Math. 174, 29-39 (2014).

[4] Barros A., Gomes J.N.V., Ribeiro Jr. E., *Immersion of almost Ricci solitons into a Riemannian manifold*. Mat. Contemp. 40, 91-102 (2011).

[5] Barros A., Ribeiro Jr E., *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012) 1033-1040.

[6] Bourguignon J.-P., *Ricci curvature and Einstein metrics*, Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1979), Lecture Notes in Math., vol. 838, Springer, Berlin, 1981, pp. 42-63.

[7] Brickell F., Clark R. S., *Differrential Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1973.

[8] Calviño-Louzao E., Fernández-López M., García-Río E., Vázquez-Lorenzo R., *Homogeneous Ricci almost solitons*, Israel J. Math. 220 (2) (2017) 531-546.

[9] Carmo M.P., *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[10] Catino G., *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor*. Math. Z. 271, 751-756 (2012).

[11] Catino G., Mazzieri L., *Gradient Einstein solitons*, Nonlinear Anal. 132 (2016) 66-94.

[12] Catino G., Cremaschi L., Djadli Z., Mantegazza C., Mazzieri L., *The Ricci-Bourguignon flow*, Pacific J. Math. 287 (2) (2017) 337-370.

[13] Chow B., Ni L., *Hamilton's Ricci flow*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v.77).

[14] Chow B., Knopf D., *The Ricci flow: an introduction*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. (Mathematical survey and monographs, v.110).

[15] de Rham G., *Sur la réducibilité d'un espace de Riemann*, Comment. Math. Helv. 26 (1952) 328-344.

[16] Feitosa F.E.S., Freitas Filho A.A., Gomes J.N.V., Pina R.S., *On the construction of gradient almost Ricci soliton warped product.* arXiv:1507.03038v1 [math.DG].

[17] Freitas Filho A.A., *Sólitons de Ricci com Estrutura de Produto Deformado.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

[18] Fialkow A., *Conformal geodesics.* Transaction of Am. Math. Society, vol 45, 443-473, (1939).

[19] Gomes J.N.V., *Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um Campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial.* Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2012).

[20] Hamilton R.S., *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 17 (2) (1982) 255-306.

[21] Ishihara S., *On infinitesimal concircular transformations*, Kôdai Math. Sem. Rep. 12 (1960), 45-56.

[22] Ishihara S., Tashiro Y., *On Riemannian manifolds admitting a concircular transformation*, Math. J. Okayama Univ. 9 (1959) 19-47.

[23] Kim D.-S., Kim Y. H., Kim S.-B., Park S.-H., *Conformal Vector Fields and Totally Umbilic Hypersurfaces*, Bull. Korean Math. Soc. 39 (4)(2002), 671-680.

[24] Kobayashi S., *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

[25] Kühnel W., Rademacher H.-B., *Conformal vector fields on pseudo-Riemannian spaces*, Differ. Geom. Appl. 7 (1997) 237-250.

[26] Lee J. M., *Introduction to smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[27] Lee J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2011.

[28] Lee J. M., *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[29] Lima E.L., *Elementos da Topologia Geral*, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[30] Masahiko K., *On a Differential Equation Characterizing a Riemannian Structure of a Manifold*, Tokyo J. Math. 6 (1) (1983) 143-151.

[31] Neto A.C.M., *Tópicos de Geometria Diferencial*, SBM, Rio de Janeiro, 2014.

[32] Obata M., *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333-340.

[33] O'Neill B., *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[34] Petersen P., *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[35] Pigola S., Rigoli M., Rimoldi M., Setti A., *Ricci Almost Solitons*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. X (2011) 757-799.

[36] Sasaki S., Goto M., *Some theorems on holonomy groups of Riemannian manifolds*, Trans.Amer.Math.Soc. 80 (1955),148-158.

[37] Tashiro Y., *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 251-275.

[38] Tashiro Y., Miyashita K., *Conformal transformations in complete product Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 328-346.

[39] Yano K., *Concircular geometry. I, II, III, IV, V*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 195-200, 354-360, 442-448, 505-511; ibid. 18 (1942), 446-451.

[40] Yano K., *Integral formulas in Riemannian geometry*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[41] Yano K., *The theory of Lie derivatives and its applications*, Amsterdam, 1957.