



Universidade Federal do Amazonas

Hamilton de Almeida Nascimento

**Propriedades espectrais e dinâmicas de perturbações do
operador de Schrödinger discreto com campo elétrico**

Manaus - AM
2022

Propriedades espectrais e dinâmicas de perturbações do operador de
Schrödinger discreto com campo elétrico

por
Hamilton de Almeida Nascimento

Sob a orientação do
Prof. Dr. Moacir Aloisio Nascimento dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática como requi-
sito parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

N244p Nascimento, Hamilton de Almeida
Propriedades espectrais e dinâmicas de perturbações do
operador de Schrödinger discreto com campo elétrico / Hamilton de
Almeida Nascimento . 2022
53 f.: 31 cm.

Orientador: Moacir Alosio Nascimento dos Santos
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Operador de Schrödinger. 2. Localização dinâmica. 3. Teoria
Espectral. 4. Análise de Fourier. I. Santos, Moacir Alosio
Nascimento dos. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. General Rodrigo Octavio Jordão Ramos
Coroado I, Manaus - AM, CEP 69067-005

ALUNO: Hamilton de Almeida Nascimento

NÚMERO DE MATRÍCULA: 2200176

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática

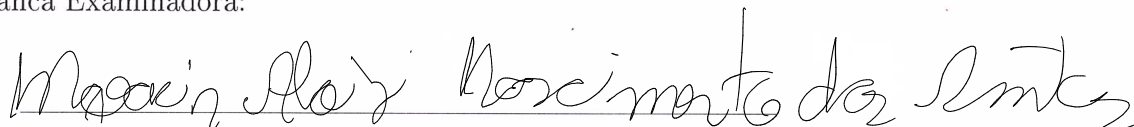
LINHA DE PESQUISA: Análise

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado

TÍTULO DO TRABALHO: Propriedades espectrais e dinâmicas de perturbações do operador de Schrödinger discreto com campo elétrico

ORIENTADOR: Prof. Dr. Moacir Aloisio Nascimento dos Santos

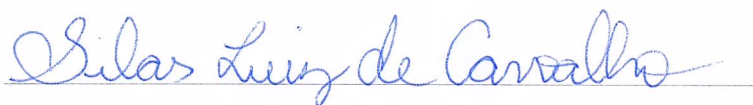
Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada no Auditório II do Instituto de Computação, ICOMP, Campus UFAM, em 12 de julho de 2022, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:



Prof. Dr. Moacir Aloisio Nascimento dos Santos (orientador)
UFAM - Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves
UFAM - Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho
UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais

Manaus-AM, 12 de julho de 2022.

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, irmã, tias e tios, e meus avós por todo amor e apoio condicional. Aos demais familiares por sempre estarem presente!

Aos professores do Departamento de Matemática e Engenharia Elétrica, especialmente: Prof. Cícero Mota Cavalcante, Prof. Elkin Quintero, Prof. João Edgar Chaves Filho, Prof. Miguel Grimm do Nascimento, Profa. Somayeh Mousavinasr e Prof. Thiago Alves.

Ao meu orientador, Prof. Moacir Aloisio, pelos direcionamentos e conselhos concedidos ao longo da elaboração desta dissertação e do mestrado.

Ao Prof. Carlos Wagner Marques do Nascimento, pela orientação dos projetos de iniciação científica e o incentivo a seguir carreira acadêmica em Matemática.

Ao meu grande amigo Renato Pires do Nascimento.

Aos meus amigos da graduação e pós-graduação, em especial aos amigos da pós: Daniel Reis, Felipe André de Souza, Filipe Fortes, Mikaela Aires, Roseane Souza e Wanessa Tavares.

Aos membros da banca pela gentileza em participar da avaliação deste trabalho.

A UFAM e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGM - UFAM).

A CAPES, pelo suporte financeiro.

E se é o!

Resumo

Neste trabalho, estudamos análise de Fourier e teoria espectral de operadores autoadjuntos (não limitados) para discutirmos a persistência de espectro puramente pontual e localização dinâmica para o operador de Schrödinger discreto com campo elétrico sob perturbações adequadas.

Abstract

We study Fourier Analysis and Spectral Theory of (unbounded) Self-adjoint Operators to discuss the persistence of pure point spectrum and dynamical localization for the discrete Schrödinger operator with electric field under suitable perturbations.

Sumário

Introdução	1
1 Séries de Fourier: teoria básica	3
1.1 Propriedades elementares	3
1.2 Polinômios trigonométricos	6
1.3 Teorema de Plancherel	11
2 Teoria espectral	15
2.1 Operadores autoadjuntos	15
2.2 Teorema de Kato-Rellich	24
2.2.1 Enunciado e prova	24
2.2.2 H_0 é autoadjunto	28
2.3 Grupos de evolução unitários e o Teorema de Stone	31
2.4 Teorema Espectral	33
2.4.1 Existência e unicidade de solução para a equação de Schrödinger	36
3 Localização dinâmica para perturbações de H_0	37
3.1 Localização dinâmica para H_0	37
3.2 Localização dinâmica para o operador perturbado	41
3.3 Prova do resultado principal	42
Referências	52

Notação selecionada

\mathbb{T}	Toro unidimensional \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
\mathbb{R}^*	Conjunto dos números reais não-nulos.
m	Medida de Lebesgue em \mathbb{T} ou \mathbb{R} .
\mathcal{P}	Espaço dos polinômios trigonométricos.
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert complexo separável.
$\rho(T)$	Conjunto resolvente de um operador linear T em \mathcal{H} .
$R_\lambda(T)$	Operador resolvente de T em $\lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C}$.
$B(X)$	Espaço dos operadores lineares limitados entre um espaço normado X .
$N(A)$	Núcleo de um operador linear A .
$Im(A)$	Imagem de um operador linear A .
χ_E	Função característica de um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$.

Introdução

Seja T um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert complexo separável \mathcal{H} e seja a equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} \partial_t \xi = -iT\xi, & t \in \mathbb{R}, \\ \xi(0) = \xi, & \xi \in \text{dom } T. \end{cases} \quad (\text{ES})$$

cuja única solução é dada por $e^{-itT}\xi$.

O estudo da dinâmica quântica de $e^{-itT}\xi$ é um assunto clássico da literatura matemática e física (ver [1, 2, 7, 9, 11, 12, 13] e suas referências). Neste contexto, apresentamos a seguir uma quantidade dinâmica usualmente considerada para sondar o comportamento assintótico da dinâmica $e^{-itT}\xi$: seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal de \mathcal{H} ; o valor esperado do q -momento, $q > 0$, do operador de posição no tempo $t > 0$, com condição inicial ξ , é definido como

$$\langle |X|^q \rangle_{t,\xi} := \sum_n |n|^q |\langle e^{-itT}\xi, e_n \rangle|^2. \quad (1)$$

Estas quantidades descrevem o comportamento da “posição base” do pacote de ondas $e^{-itT}\xi$, à medida que t tende ao infinito (ver [2, 8, 13] e suas referências). Particularmente, para $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ e $\{e_n \equiv (\delta_{nj})_{j \in \mathbb{Z}}\}$ a base canônica, tais quantidades caracterizam o espalhamento do pacote de ondas $e^{-itT}\xi$.

Nessa dissertação, nossa principal propriedade dinâmica de interesse é a chamada *localização dinâmica* (LD) (ver [11, 12, 15] e suas referências) medida através dos momentos de ordem $q > 0$. Diz-se que T tem localização dinâmica se, para todas as condições iniciais e_k , cada momento é uniformemente limitado no tempo, i.e., para cada $q > 0$ e cada $\xi = e_k$,

$$\sup_t \langle |X|^q \rangle_{t,\xi} < +\infty. \quad (2)$$

Esta é a noção forte padrão de ausência de transporte para operadores de Schrödinger. Dizemos que um operador T definido em um subconjunto denso de um espaço de Hilbert \mathcal{H} tem *espectro puramente pontual*, se existir uma base ortonormal de \mathcal{H} constituída por autovetores de T . Devido ao Teorema RAGE [9], localização dinâmica requer espectro puramente pontual. No entanto, é possível ter sistemas com “comportamento patológico”, isto é, espectro puramente pontual sem localização dinâmica [1, 12].

Seja H_0 , o operador de Schrödinger discreto com campo elétrico uniforme, definido como

$$\text{dom}(H_0) := \left\{ \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \sum_n |n|^2 |\psi_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$(H_0\psi)_n := (\Delta\psi)_n + n\psi_n.$$

Relembre que o Laplaciano discreto é o operador autoadjunto limitado $(\Delta\psi)_n := \psi_{n+1} + \psi_{n-1}$.

Neste trabalho, estudamos análise de Fourier e teoria espectral de operadores autoadjuntos (não limitados) para mostrarmos que H_0 tem espectro puramente pontual e LD. Então, dado

um potencial $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, mostramos, através de um método de diagonalização baseado no bem conhecido procedimento iterativo devido originalmente a Kolmogorov, Arnold e Moser (KAM), que se $\|V\|_\infty$ é suficientemente pequeno, então $H_V = H_0 + V$ tem espectro puramente pontual e LD, um resultado provado por C. R. de Oliveira e M. Pigossi em [11]; ver também [15]. Ressaltamos que este resultado devido a C. R. de Oliveira e M. Pigossi confirmou rigorosamente estimativas numéricas nessa direção obtidas anteriormente em [14].

A organização do trabalho é descrita a seguir. No Capítulo 1, apresentamos em detalhes o bem conhecido Teorema de Plancherel (ver Teorema 1.8 adiante) para séries de Fourier, que é uma ferramenta padrão usada ao longo de todo o texto. No Capítulo 2, provamos que H_0 é autoadjunto através do celebrado Teorema de Kato-Rellich, que é discutido em detalhes, e discutimos, também, a existência e unicidade de soluções para a equação de Schrödinger linear (ES) através do Teorema Espectral. Por fim, no Capítulo 3 discutimos a persistência de espectro puramente pontual e localização dinâmica para H_0 sob perturbações suficientemente pequenas.

Finalmente, gostaríamos de mencionar que o texto foi escrito admitindo-se que o leitor tenha apenas conhecimentos prévios equivalentes a um curso padrão de análise real em uma variável, teoria da medida e integração, como o equivalente ao exposto em [10] e [3], e análise funcional, como o conteúdo equivalente ao de [4].

Capítulo 1

Séries de Fourier: teoria básica

Neste capítulo estudaremos a representação de funções periódicas definidas em \mathbb{R} como série de funções da forma $(e^{2\pi kix})_{k \in \mathbb{Z}}$, com $i = \sqrt{-1}$. Nosso principal objetivo é apresentar em detalhes o bem conhecido Teorema de Plancherel (ver Teorema 1.8 adiante) para séries de Fourier. O estudo aqui apresentado é baseado em [6, 17].

1.1 Propriedades elementares

Definição 1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é T -periódica se existir $T > 0$ tal que

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Neste capítulo nos deteremos a funções 1-periódicas. Deste modo, neste trabalho, sempre que nos referirmos ao termo *função periódica*, estamos assumindo que a função é 1-periódica. Note que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-periódica é totalmente determinada por sua restrição ao conjunto $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \simeq [0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Dado $1 \leq p < +\infty$, definimos o espaço $L^p(\mathbb{T})$ como

$$L^p(\mathbb{T}) := \left\{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

onde a integral acima utilizada é a integral de Lebesgue em relação à medida de Lebesgue de \mathbb{R} . Dado $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos o espaço $C^j(\mathbb{T})$ como o conjunto das funções definidas em \mathbb{T} cuja extensão periódica a \mathbb{R} é de classe C^j . Como padrão, denotamos $C(\mathbb{T}) \equiv C^0(\mathbb{T})$.

Suponhamos, então, que existam constantes $\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi kix}, \quad \forall x \in \mathbb{T}. \quad (1.1)$$

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $e^{-2\pi nix}$ e integrando em relação à medida de Lebesgue, obtemos:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi nix} dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi kix} e^{-2\pi nix} \right) dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi(k-n)ix} \right) dx.$$

Se for válida a integração membro a membro, a igualdade acima torna-se:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi nix} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} a_k e^{2\pi(k-n)ix} dx = a_n,$$

o que motiva as seguintes definições.

Definição 2. Seja $f \in L^1(\mathbb{T})$. O k -ésimo coeficiente da série de Fourier, $k \in \mathbb{Z}$, é definido por

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi kix} dx. \quad (1.2)$$

Definição 3. Sejam $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $x \in \mathbb{T}$. A série de Fourier de f em x , $S[f](x)$, é definida por

$$S[f](x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi kix}. \quad (1.3)$$

Ainda não se sabe quando a série acima converge e em que sentido; por exemplo, a princípio, esta pode ser condicionalmente convergente. A partir de agora, neste capítulo, estabeleceremos uma discussão nessa direção.

Recorde que o espaço das sequências limitadas é definido como

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) := \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty\},$$

$$\|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|.$$

Proposição 1. Sejam f, g funções periódicas e $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, é um operador linear limitado satisfazendo

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, então $\widehat{\tau_y f}(k) = e^{-2\pi iky} \widehat{f}(k)$, onde $\tau_y f(x) := f(x - y)$.

(iii) Se $f \in C^j(\mathbb{T})$, então

$$\widehat{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f}(k) = (2\pi ik)^\alpha \widehat{f}(k),$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}$, com $\alpha \leq j$.

(iv) (Lema de Riemann-Lebesgue) Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, então

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Demonstração. (i) A linearidade de \mathcal{F} é imediata. Mostraremos agora que

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

De fato, sejam $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Temos:

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi ikx} dx \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)| \cdot 1 dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, segue-se que

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

(ii) Com efeito, realizando-se mudança de variáveis e utilizando o fato de que

$$f(x + 1) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_y f}(k) &= \int_{\mathbb{T}} f(x-y)e^{-2\pi i k x} dx = \int_{[0,1)} f(x-y)e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-y}^{1-y} f(u)e^{-2\pi i k(u+y)} du, \\
&= e^{-2\pi i k y} \int_{-y}^{1-y} f(u)e^{-2\pi i k u} du \\
&= e^{-2\pi i k y} \int_0^1 f(u)e^{-2\pi i k u} du \\
&= e^{-2\pi i k y} \int_{\mathbb{T}} f(u)e^{-2\pi i k u} du \\
&= e^{-2\pi i k y} \widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

(iii) Mostraremos o caso $\alpha = 1$. Temos, aplicando-se integração por partes e o fato de que $f(0) = f(1)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{df}{dx}}(k) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{df}{dx}(x)e^{-2\pi i k x} dx \\
&= f(x)e^{-2\pi i k x} \Big|_0^1 - (-2\pi i k) \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i k x} dx \\
&= f(1)e^{-2\pi i k} - f(0) - (-2\pi i k) \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i k x} dx \\
&= f(1) \cdot 1 - f(0) + 2\pi i k \widehat{f}(k) \\
&= f(0) - f(0) + 2\pi i k \widehat{f}(k) \\
&= 2\pi i k \widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

O caso geral se faz por indução.

(iv) Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Como o espaço S das funções simples definidas em \mathbb{T} é denso em $L^1(\mathbb{T})$, existe uma função simples $g \in S$ tal que:

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.4}$$

Suponhamos que g se escreva como:

$$g = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{(a_i, b_i)},$$

com $N \in \mathbb{N}$, $(a_i, b_i) \subset \mathbb{T}$, para cada $i = 1, \dots, N$, e $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{C}$. Note que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi i k x} dx &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{i=1}^N c_i \chi_{(a_i, b_i)} e^{-2\pi i k x} dx \\
&= \sum_{i=1}^N c_i \int_{\mathbb{T}} \chi_{(a_i, b_i)} e^{-2\pi i k x} dx \\
&= \sum_{i=1}^N c_i \int_{a_i}^{b_i} e^{-2\pi i k x} dx \\
&= \sum_{i=1}^N c_i \frac{e^{-2\pi i k b_i} - e^{-2\pi i k a_i}}{-2\pi i k}.
\end{aligned}$$

Daí, pela última igualdade acima, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|k| \geq k_0 \Rightarrow \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.5)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-2\pi i k x} dx + \int_{\mathbb{T}} [f(x) - g(x)] e^{-2\pi i k x} dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| + \left| \int_{\mathbb{T}} [f(x) - g(x)] e^{-2\pi i k x} dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| + \int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e por (1.4) e (1.5), se $|k| \geq k_0$, tem-se

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| \leq \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| + \int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(k) = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = 0.$$

□

1.2 Polinômios trigonométricos

Definição 4 (Polinômio trigonométrico). Seja $P: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que P é um *polinômio trigonométrico* se existem $N \in \mathbb{N}$ e escalares $a_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq N$, tais que

$$P(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2k\pi i x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

É bem conhecido que aproximações por polinômios trigonométricos em técnicas de análise que envolvem análise de Fourier podem ser bastante úteis. Como veremos, tais aproximações aparecem naturalmente na prova do Teorema de Plancherel (Teorema 1.8).

Nesta seção, nosso principal objetivo é provar que os polinômios trigonométricos são densos em espaços apropriados.

Definição 5 (Álgebra em C). Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um espaço topológico e $C(X) \equiv C(X; \mathbb{C})$ o conjunto das funções contínuas de X em \mathbb{C} . Dizemos que uma coleção $\mathcal{M} \subset C(X)$ é uma *álgebra em $C(X)$* se \mathcal{M} é um subespaço de $C(X)$ e $f \cdot g \in \mathcal{M}$, quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{M}$. Se \mathcal{M} é uma álgebra em $C(X)$ e para toda $f \in \mathcal{M}$, tem-se que o conjugado $\overline{f} \in \mathcal{M}$, dizemos que \mathcal{M} é *fechada sob a conjugação complexa*. Ademais, dizemos que \mathcal{M} é uma *álgebra que separa pontos* se para todo par de pontos $x, y \in X$, com $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{M}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Dado um espaço topológico compacto $X \subset \mathbb{R}$, pode-se introduzir a norma $\|\cdot\|_{\infty}$ em $C(X)$ definindo:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

A norma $\|\cdot\|_{\infty}$ definida acima goza da propriedade $\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$, $\forall f, g \in C(X)$. Daqui em diante, a menos que explicitamente mencionado em sentido contrário, o espaço $C(X)$ será sempre considerado munido com a norma $\|\cdot\|_{\infty}$ acima definida.

Proposição 2. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um espaço topológico compacto. Se \mathcal{M} é uma álgebra em $C(X)$ fechada sob a conjugação complexa que separa pontos, então seu fecho $\overline{\mathcal{M}}$ (relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$) é também uma álgebra em $C(X)$ fechada sob a conjugação complexa que separa pontos.*

Demonstração. Como \mathcal{M} é um subespaço de $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$, então segue-se que $\overline{\mathcal{M}}$ é também um subespaço de $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$. Mostremos que dados $f, g \in \overline{\mathcal{M}}$ quaisquer, tem-se que $f \cdot g \in \overline{\mathcal{M}}$. De fato, dados $f, g \in \overline{\mathcal{M}}$, existem seqüências $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_\infty = 0.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade triangular,

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty = \|(f_n g_n - f g_n) + (f g_n - f g)\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty.$$

Como existe $A > 0$ tal que $\|g_n\|_\infty \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$, tomando-se $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima obtém-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n g_n - f g\|_\infty = 0$. Assim, $f g \in \overline{\mathcal{M}}$.

Vamos mostrar agora que $\overline{\mathcal{M}}$ é fechada sob a conjugação complexa. Seja $f \in \overline{\mathcal{M}}$. Existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Como \mathcal{M} é fechada sob a conjugação complexa, tem-se $(\overline{f_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{f_n} - \overline{f}\|_\infty = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{f_n} - \overline{f}\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |\overline{f_n}(x) - \overline{f}(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \end{aligned}$$

Então, $\overline{\mathcal{M}}$ é uma álgebra em $C(X)$ fechada sob a conjugação complexa. Resta mostrar que $\overline{\mathcal{M}}$ separa pontos. Mas isto decorre imediatamente do fato de que $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$ e \mathcal{M} separa pontos. \square

Proposição 3. *O conjunto \mathcal{P} dos polinômios trigonométricos constitui uma álgebra em $C(\mathbb{T})$ fechada sob a conjugação complexa que separa pontos.*

Demonstração. Como \mathcal{P} é um subespaço de $C(\mathbb{T})$, para verificar que \mathcal{P} é uma álgebra basta apenas mostrar que dados $P, Q \in \mathcal{P}$, tem-se $P \cdot Q \in \mathcal{P}$. De fato, como P, Q são polinômios trigonométricos, existem escalares $a_j, b_k \in \mathbb{C}$ tais que $P(x) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{2j\pi i x}, \forall x \in \mathbb{T}$ e $Q(x) = \sum_{k=-M}^M b_k e^{2k\pi i x}, \forall x \in \mathbb{T}$. Então,

$$\begin{aligned} (P \cdot Q)(x) &= \left(\sum_{j=-N}^N a_j e^{2j\pi i x} \right) \left(\sum_{k=-M}^M b_k e^{2k\pi i x} \right) \\ &= \sum_{j=-N}^N a_j e^{2j\pi i x} \left(\sum_{k=-M}^M b_k e^{2k\pi i x} \right) \\ &= \sum_{j=-N}^N \left(\sum_{k=-M}^M a_j e^{2j\pi i x} b_k e^{2k\pi i x} \right) \\ &= \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-M}^M a_j b_k e^{2(j+k)\pi i x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Portanto, $P \cdot Q \in \mathcal{P}$. Assim, \mathcal{P} é uma álgebra em $C(\mathbb{T})$. Mostremos que \mathcal{P} é fechada sob a conjugação complexa. Seja $P = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2k\pi i(\cdot)}$ um polinômio trigonométrico. Tem-se:

$$\overline{P}(x) = \overline{P(x)} = \overline{\sum_{k=-N}^N a_k e^{2k\pi i x}} = \sum_{k=-N}^N \overline{a_k e^{2k\pi i x}} = \sum_{k=-N}^N \overline{a_k} e^{-2k\pi i x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Então, $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$. Logo, \mathcal{P} é fechada sob a conjugação complexa. Resta mostrar que \mathcal{P} separa pontos. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que existam $x_0, y_0 \in [0, 1)$ distintos tais que para todo $h \in \mathcal{P}$, $h(x_0) = h(y_0)$. Sabe-se que $\alpha: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\alpha(t) = (\text{sen}(2\pi t), \text{cos}(2\pi t))$$

é injetiva.

As funções $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$, $g(x) = \text{cos}(2\pi x)$, pertencem a \mathcal{P} . Note também que $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ para todo $t \in [0, 1)$. Então, $\alpha(x_0) = \alpha(y_0)$ e, da injetividade de α em $[0, 1)$, segue-se que $x_0 = y_0$ (contradição). \square

O seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em [10, p. 141], será usado na prova de que o espaço \mathcal{P} dos polinômios trigonométricos é denso em $C(\mathbb{T})$.

Teorema 1 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um espaço topológico de Hausdorff compacto e \mathcal{A} uma álgebra de $C(X)$, que separa pontos e fechada sob a conjugação complexa. Se $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, então $\mathcal{A} = C(X)$ ou $\mathcal{A} = \{f \in C(X); f(x_0) = 0\}$ para algum $x_0 \in X$.*

Proposição 4. *O espaço \mathcal{P} dos polinômios trigonométricos de \mathbb{T} é denso em $C(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Pela Proposição 3, o espaço \mathcal{P} dos polinômios trigonométricos de \mathbb{T} é uma álgebra em $C(\mathbb{T})$ que separa pontos fechada pela conjugação complexa. Pela Proposição 2, $\overline{\mathcal{P}}$ também o é. Como $\overline{\mathcal{P}}$ é um conjunto fechado, pelo Teorema de Stone-Weierstrass segue-se que $\overline{\mathcal{P}} = C(\mathbb{T})$ ou $\overline{\mathcal{P}} = \{f \in C(\mathbb{T}); f(x_0) = 0\}$ para algum $x_0 \in \mathbb{T}$. Como a função constante $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{T}$, pertence a $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}}$, não se pode ter $\overline{\mathcal{P}} = \{f \in C(\mathbb{T}); f(x_0) = 0\}$ para algum $x_0 \in \mathbb{T}$. Logo, $\overline{\mathcal{P}} = C(\mathbb{T})$. \square

Proposição 5. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço das funções contínuas $C(\mathbb{T})$ é denso (relativamente à norma $\|\cdot\|_p$) em $L^p(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Com efeito, dada $f \in C(\mathbb{T})$, segue-se que $C(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$, pois f é limitada. Mostremos agora que $L^p(\mathbb{T}) \subset \overline{C(\mathbb{T})}$, relativamente à norma $\|\cdot\|_p$. Seja $g \in L^p(\mathbb{T})$. Como o espaço das funções simples $\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$, onde cada $E_i \subset \mathbb{T}$ é um intervalo limitado, é denso em $L^p(\mathbb{T})$, dado $\epsilon > 0$, tomemos $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$ simples tal que $\|g - f\|_p < \epsilon/2$. Podemos tomar, para cada $i = 1, \dots, N$, uma função teste $h_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável que se anula em $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ tal que $\|c_i \chi_{E_i} - h_i\|_p < \epsilon/2N$. Seja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h = \sum_{i=1}^N h_i$. É claro que $\tilde{h} := h|_{\mathbb{T}} \in C(\mathbb{T})$ e, aplicando-se a desigualdade triangular, obtemos que $\|g - \tilde{h}\|_p < \epsilon$. Logo, $C(\mathbb{T})$ é denso em $L^p(\mathbb{T})$. \square

A demonstração do resultado seguinte pode ser vista em [10, p. 98].

Teorema 2 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue). *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Lebesgue e $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_K |f(x)| dx < +\infty$ para todo $K \subset E$ limitado e mensurável. Então:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x; r))} \int_{B(x; r)} f(y) dy = f(x),$$

para quase todo $x \in E$, onde m denota a medida de Lebesgue.

Corolário 1. *Sejam $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{T})$ tais que $\int_0^x h_1(y) dy = \int_0^x h_2(y) dy$ para todo $x \in \mathbb{T}$. Então, $h_1(x) = h_2(x)$ q.t.p. em \mathbb{T} .*

Demonstração. Com efeito, seja $x \in (0, 1)$. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tem-se $\int_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} [h_1(y) - h_2(y)] dy = 0$. Daí,

$$\frac{1}{m([x - \epsilon, x + \epsilon])} \int_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} [h_1(y) - h_2(y)] dy = 0$$

. Portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m([x - \epsilon, x + \epsilon])} \int_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} [h_1(y) - h_2(y)] dy = 0.$$

Logo, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, $h_1(x) = h_2(x)$ q.t.p. □

Recorde que se $1 \leq p < +\infty$, então

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \left\{ a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^p < +\infty \right\},$$

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} := \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^p \right]^{1/p}.$$

Teorema 3. *Valem as seguintes afirmações:*

- i) *O espaço dos polinômios trigonométricos é denso em $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$.*
- ii) *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ é tal que $\widehat{f}(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, então $f(x) = 0$, para quase todo ponto em \mathbb{T} .*
- iii) *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, então*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \tag{1.6}$$

para quase todo ponto $x \in \mathbb{T}$.

Demonstração. (i) Seja $1 \leq p < +\infty$. O espaço dos polinômios trigonométricos \mathcal{P} está contido em $L^p(\mathbb{T})$ (pois todo polinômio trigonométrico é mensurável e limitado). Mostremos que $L^p(\mathbb{T}) \subset \overline{\mathcal{P}}$. Seja $f \in L^p(\mathbb{T})$. Dado $\epsilon > 0$, pela Proposição 5 existe $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua tal que $\|f - g\|_p < \epsilon/2$. Por outro lado, da densidade de \mathcal{P} em $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $\|P - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, $\|g - P\|_p = \|P - g\|_p \leq \|P - g\|_\infty < \epsilon/2$. Assim, pela desigualdade triangular, $\|f - P\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - P\|_p < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Logo, \mathcal{P} é denso em $L^p(\mathbb{T})$.

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ e

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2k\pi i x} dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

então dado um polinômio trigonométrico $P = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2k\pi i(\cdot)}$ arbitrário, tem-se:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) P(x) dx = \int_{\mathbb{T}} f(x) \sum_{k=-N}^N a_k e^{2k\pi i x} dx = \sum_{k=-N}^N a_k \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{2k\pi i x} dx = 0.$$

Afirmção 1. $\int_{\mathbb{T}} f(x) g(x) dx = 0$, qualquer que seja $g \in C(\mathbb{T})$.

Prova da afirmação:

Seja $g \in C(\mathbb{T})$. Pela densidade dos polinômios trigonométricos em $C(\mathbb{T})$, dado $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio trigonométrico P_n tal que $\|P_n - g\|_\infty < 1/n$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)[g(x) - P_n(x) + P_n(x)]dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)[g(x) - P_n(x)]dx + \int_{\mathbb{T}} f(x)P_n dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)[g(x) - P_n(x)]dx + 0 \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)[g(x) - P_n(x)]| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)||g(x) - P_n(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)| \frac{1}{n} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Logo, como $f \in L^1(\mathbb{T})$, tomando-se $n \rightarrow \infty$, tem-se $\int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)dx = 0$.

A afirmação está provada.

Afirmação 2. Dado $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $b > a$, tem-se $\int_{\mathbb{T}} f(x)\chi_{(a,b)}(x)dx = 0$.

Prova da afirmação:

Com efeito, existe uma sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções teste, com cada $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável que se anula em $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ e $|h_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $h_n(x) \rightarrow \chi_{(a,b)}(x)$ q.t.p. Claro que $f(x)h_n(x) \rightarrow f(x)\chi_{(a,b)}(x)$ q.t.p. e $|f(x)h_n(x)| \leq |f(x)|$. Como f é integrável, pelo Teorema da Convergência Dominada segue-se que

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\chi_{(a,b)}(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f(x)h_n(x)dx.$$

Por outro lado, pela Afirmação 1, $\int_{\mathbb{T}} f(x)h_n(x)dx = 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f(x)h_n(x)dx = 0$. Logo, pela igualdade acima, $\int_{\mathbb{T}} f(x)\chi_{(a,b)}(x)dx = 0$.

A afirmação está provada.

Seja $y \in \mathbb{T}$ e, para cada $r > 0$, seja $g_r \equiv \frac{1}{m(y-r, y+r)}\chi_{(y-r, y+r)}$. Pela Afirmação 2,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{T}} f(x)g_r(x)dx = \frac{1}{m(y-r, y+r)} \int_{\mathbb{T}} f(x)\chi_{(y-r, y+r)}(x)dx \\ &= \frac{1}{m(y-r, y+r)} \int_{(y-r, y+r)} f(x)dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(y-r, y+r)} \int_{(y-r, y+r)} f(x)dx = 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(y-r, y+r)} \int_{(y-r, y+r)} f(x) dx = f(y), \text{ para quase todo } y \in \mathbb{T}.$$

Logo, $f(x) = 0$, para quase todo ponto $x \in \mathbb{T}$.

(iii) Com efeito, definamos $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$, $x \in \mathbb{T}$. Como $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, g está bem definida. Mostraremos agora que $\widehat{g} \equiv \widehat{f}$. Com efeito, note inicialmente que pelo Teste M de Weierstrass, a série converge uniformemente para g . Deste modo, dado $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i (n-k)x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i (n-k)x} dx, \end{aligned}$$

onde a última igualdade acima decorre da convergência uniforme da série. Prosseguindo, tem-se:

$$\widehat{g}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i (n-k)x} dx = \widehat{f}(k).$$

Portanto, $\widehat{f} \equiv \widehat{g}$. Note que $g \in L^1(\mathbb{T})$, pois g é limitada. Daí,

$$\widehat{(f-g)} \equiv 0.$$

Como $f-g \in L^1(\mathbb{T})$, segue-se pelo item (ii) que $f-g \equiv 0$, para quase todo ponto $x \in \mathbb{T}$. Logo, $f \equiv g$ em quase todo ponto $x \in \mathbb{T}$, o que encerra a prova da proposição. \square

1.3 Teorema de Plancherel

Nesta secção nós apresentaremos o principal resultado do capítulo, o Teorema de Plancherel; para tanto, naturalmente alguma preparação é necessária.

Consideremos agora o espaço vetorial $L^2(\mathbb{T})$. Sabemos que podemos definir um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

fazendo de $L^2(\mathbb{T})$ um espaço de Hilbert.

Definamos agora, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a função $\phi_n: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\phi_n(x) = e^{2n\pi i x}, \quad x \in \mathbb{T}. \quad (1.7)$$

Proposição 6. *O conjunto $E = \{\phi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ constitui um sistema ortonormal completo para $L^2(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Um cálculo direto mostra que E é um conjunto ortonormal. Resta mostrar que $E^\perp = \{0\}$. Com efeito, seja $\psi \in E^\perp$. Temos $\langle \psi, \phi_k \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$0 = \langle \psi, \phi_k \rangle = \int_{\mathbb{T}} \psi(x) e^{-2\pi i k x} dx = \widehat{\psi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Deste modo, como $\psi \in L^1(\mathbb{T})$, pois $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, pelo Teorema 3, item (i), segue-se que $\psi(x) = 0$ em quase todo ponto $x \in \mathbb{T}$. Logo, $E^\perp = \{0\}$. \square

Teorema 4 (Teorema de Plancherel). *Seja $f \in L^2(\mathbb{T})$. Então, $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

O operador linear $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definido por $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ é uma isometria sobrejetiva.

Demonstração. Sejam $f \in L^2(\mathbb{T})$ e, para cada $k \in \mathbb{Z}$, ϕ_k como em (1.7). Pela Proposição 4, o espaço dos polinômios trigonométricos é denso em $L^2(\mathbb{T})$. Assim, existe uma sequência de polinômios trigonométricos $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Afirmção 3. *Se P é um polinômio trigonométrico, então $\|P\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\mathcal{F}(P)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.*

Prova da afirmação:

Seja $P = \sum_{k=-N}^N a_k \phi_k$ um polinômio trigonométrico arbitrário. Observe que $\widehat{P}(k) = a_k$, se $|k| \leq N$ e $\widehat{P}(k) = 0$, se $|k| > N$. Assim, como o conjunto $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é ortonormal, segue-se que

$$\|P\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k=-N}^N |a_k|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{P}(k)|^2 \right)^{1/2} = \left\| \widehat{P} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|\mathcal{F}(P)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}. \quad (1.8)$$

Isto encerra a prova da afirmação.

Afirmção 4. *Existe $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}(P_n) - \varphi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0$.*

Prova da afirmação:

Com efeito, a sequência $(\mathcal{F}(P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\ell^2(\mathbb{Z})$, pois pela linearidade de \mathcal{F} e pelo fato de que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{T})$, tem-se:

$$\|\mathcal{F}(P_n) - \mathcal{F}(P_l)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|\mathcal{F}(P_n - P_l)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|P_n - P_l\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

onde na última igualdade empregamos a Afirmção 3. Então, como $(\mathcal{F}(P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy no espaço de Banach $\ell^2(\mathbb{Z})$, existe $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}(P_n) - \varphi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0.$$

Isto encerra a prova da afirmação.

Afirmação 5. $\varphi = \mathcal{F}(f)$.

Prova da afirmação:

Seja $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Tem-se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(P_n)(k) - \mathcal{F}(f)(k)| &= |(\mathcal{F}(P_n) - \mathcal{F}(f))(k)| = |\mathcal{F}(P_n - f)(k)| \\ &= \left| \int_0^1 [P_n(x) - f(x)] e^{-2k\pi i x} dx \right| \\ &\leq \|P_n - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|e^{2k\pi i(\cdot)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq \|P_n - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \cdot 1, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade acima segue da Desigualdade de Cauchy-Schwartz. Então, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{F}(P_n)(k) - \mathcal{F}(f)(k)| = 0. \quad (1.9)$$

Agora, por outro lado, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}(P_n) - \varphi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \epsilon > \|\mathcal{F}(P_n) - \varphi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}(P_n)(l) - \varphi(l)|^2 \right]^{1/2} \geq |\mathcal{F}(P_n)(k) - \varphi(k)|.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{F}(P_n)(k) - \varphi(k)| = 0$. Então, pela unicidade do limite, usando-se (1.9), obtemos que

$$\varphi(k) = \mathcal{F}(f)(k).$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, $\mathcal{F}(f) \equiv \varphi$.

Isto encerra a prova da afirmação.

Assim, $\mathcal{F}(f) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}(P_n) - \mathcal{F}(f)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0$, segue-se que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}(P_n)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Logo, $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ é uma isometria.

Mostraremos agora que \mathcal{F} é sobrejetivo. Seja $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina a função $S_n: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$S_n := \sum_{k=-n}^n a_k \phi_k.$$

A sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{T})$, pois dados $n, l \in \mathbb{N}$, com $l < n$, temos, pela ortonormalidade de $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\|S_l - S_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left\| \sum_{l < |k| \leq n} a_k \phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\sum_{l < |k| \leq n} |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Assim, como $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, segue-se que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{T})$. Daí, como o espaço $L^2(\mathbb{T})$ é de Banach, existe $g \in L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - g\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0. \quad (1.10)$$

Agora vamos mostrar que $\widehat{g} \equiv (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, finalizando a prova do teorema. Seja $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{S}_n(k) = \widehat{g}(k)$. Com efeito, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos:

$$|\widehat{S}_n(k) - \widehat{g}(k)| = \left| \int_{\mathbb{T}} [S_n(x) - g(x)] e^{-2\pi i k x} dx \right| \leq \|S_n - g\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

Por (1.10), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{S}_n(k) = \widehat{g}(k). \quad (1.11)$$

Novamente, note que:

$$\widehat{S}_n(k) = \int_{\mathbb{T}} S_n(x) e^{-2\pi i k x} dx = a_k, \text{ se } |k| \leq n.$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{S}_n(k) = a_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Por (1.11) e (1.12), segue-se que:

$$\widehat{g}(k) = a_k.$$

Então, como $k \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, $\widehat{g} \equiv (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. □

Capítulo 2

Teoria espectral

Neste capítulo, vamos mostrar que H_0 é autoadjunto e discutir a existência e unicidade de soluções para a equação de Schrödinger linear (ES) através do Teorema Espectral, isto é, daremos sentido para a família de operadores $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$, onde T é um operador autoadjunto (não necessariamente limitado!) em um espaço de Hilbert complexo separável. A principal referência seguida para a discussão que se estabelece neste capítulo foi [9].

2.1 Operadores autoadjuntos

Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert complexo separável e $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido, i.e., $\overline{\text{dom } A} = \mathcal{H}$. Definamos:

$$\text{dom } A^* := \{\varphi \in \mathcal{H}; \exists \eta \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle \eta, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle, \forall \psi \in \text{dom } A\}.$$

Dado $\varphi \in \text{dom } A^*$, sabemos, então, que existe $\eta \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle \eta, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle, \quad \forall \psi \in \text{dom } A. \quad (2.1)$$

Convém indagar se η assim obtido é único. A resposta é afirmativa. Com efeito, suponhamos que existam $\eta, \eta' \in \mathcal{H}$ que satisfaçam (2.1). Temos:

$$\langle \eta, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \eta', \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \text{dom } A \Rightarrow \langle \eta - \eta', \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \text{dom } A.$$

Assim, $\langle \eta - \eta', \psi \rangle = 0$, $\forall \psi \in \text{dom } A$. O seguinte lema nos permite concluir que $\eta = \eta'$.

Lema 1. *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert, $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ um conjunto denso em \mathcal{H} e $\theta \in \mathcal{H}$. Se $\langle \theta, \beta \rangle = 0$, $\forall \beta \in \mathcal{B}$, então $\theta = 0$.*

Demonstração. De fato, pela densidade de \mathcal{B} em \mathcal{H} , existe uma sequência $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$. Daí, $\langle \theta, \theta_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \theta, \theta_n \rangle = \langle \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \rangle = \langle \theta, \theta \rangle$. Logo, $\theta = 0$. \square

Deste modo, pelo Lema 1, segue-se que $\eta = \eta'$. Podemos então definir o operador adjunto.

Definição 6 (Operador adjunto). Seja $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador densamente definido. O *operador adjunto* de A é o operador $A^*: \text{dom } A^* \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $A^*\varphi = \eta$, onde $\eta \in \mathcal{H}$ satisfaz (2.1).

A discussão feita anteriormente nos permite concluir que A^* está bem definido.

Definição 7. Seja $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. Dizemos que A é *fechado* se o gráfico $\text{Graf}(A)$ de A for fechado em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Proposição 7. *dom A^* é um subespaço de \mathcal{H} e A^* é um operador linear fechado.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $\text{dom } A^*$ é um subespaço vetorial e que A^* é linear. Com efeito, pela definição de $\text{dom } A^*$, $0 \in \text{dom } A^*$. Sejam $\varphi, \psi \in \text{dom } A^*, \lambda \in \mathbb{C}$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle \lambda\varphi + \psi, A\theta \rangle &= \lambda\langle \varphi, A\theta \rangle + \langle \psi, A\theta \rangle, & \forall \theta \in \text{dom } A, \\ &= \lambda\langle A^*\varphi, \theta \rangle + \langle A^*\psi, \theta \rangle, & \forall \theta \in \text{dom } A, \\ &= \langle \lambda A^*\varphi + A^*\psi, \theta \rangle, & \forall \theta \in \text{dom } A. \end{aligned}$$

Assim, $\lambda\varphi + \psi \in \text{dom } A^*$ e $A^*(\lambda\varphi + \psi) = \lambda A^*\varphi + A^*\psi$. Resta, por fim, mostrar que A^* é fechado. Seja $(x_n, A^*x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Graf } A^*$ tal que $(x_n, A^*x_n) \rightarrow (a, b) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Então, $x_n \rightarrow a$ e $A^*x_n \rightarrow b$. Agora,

$$\langle x_n, A\varphi \rangle = \langle A^*x_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle a, A\varphi \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, A\varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, A\varphi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^*x_n, \varphi \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} A^*x_n, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A. \end{aligned}$$

Da definição de operador adjunto, segue-se que $a \in \text{dom } A^*$ e $b = A^*a$ e, daí, $(a, b) \in \text{Graf } A^*$. Logo, A^* é um operador fechado. \square

Dadas duas aplicações $A: \text{dom } A \rightarrow E, B: \text{dom } B \rightarrow E$, dizemos que B estende A , e denotamos por $A \subset B$, se $\text{dom } A \subset \text{dom } B$ e $B(v) = A(v), \quad \forall v \in \text{dom } A$.

Definição 8 (Operador simétrico). Seja $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert. Dizemos que A é *simétrico* se

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle, \quad \forall v, w \in \text{dom } A.$$

A definição acima é equivalente a afirmar que $A \subset A^*$.

Definição 9 (Operador autoadjunto). Um operador linear $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ densamente definido é autoadjunto se $A = A^*$.

Note que todo operador autoadjunto é simétrico. Porém, a recíproca para este fato é falsa. Apresentaremos a seguir um exemplo nessa direção. Naturalmente, alguma preparação é necessária.

Definição 10 (Função absolutamente contínua). Seja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que F é *absolutamente contínua* em $[a, b]$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de intervalos disjuntos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ de $[a, b]$ tem-se

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

A proposição a seguir nos ajuda a obter exemplos de funções absolutamente contínuas.

Proposição 8. *Se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ possui derivada limitada, então F é absolutamente contínua.*

Demonstração. Com efeito, como F' é limitada, existe $M > 0$ tal que $|F'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon/M$. Se $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ são intervalos disjuntos de $[a, b]$ tais que $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, então, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^n |F'(c_i)(b_i - a_i)|, \quad c_i \in (a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n \\ &\leq \sum_{i=1}^n M|b_i - a_i| = M \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = M \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, F é absolutamente contínua. □

Proposição 9. *Se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é absolutamente contínua, então F é uniformemente contínua.*

Demonstração. Com efeito, por definição, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo intervalo $(x, y) \subset [a, b]$, se $|x - y| = (y - x) < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. □

A demonstração do próximo teorema pode ser vista em [10, p. 106].

Teorema 5 (Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue). *Seja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$; $-\infty < a < b < +\infty$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) F é absolutamente contínua em $[a, b]$.
- (b) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ para alguma função $f \in L^1[a, b]$.
- (c) F é diferenciável q.t.p em $[a, b]$, $F' \in L^1[a, b]$ e $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$.

Corolário 2. *Seja $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $G(x) = \int_0^x g(y)dy$, para alguma $g \in L^1[0, 1]$. Então, $G'(x) = g(x)$ q.t.p. em $[0, 1]$.*

Demonstração. Com efeito, como G é absolutamente contínua, pelo Teorema 5, tem-se que $G(x) = \int_0^x G'(y)dy$ para todo $x \in [0, 1]$. Logo, pelo Corolário 1, $G'(x) = g(x)$ q.t.p. □

Corolário 3 (Integração por partes para integrais de Lebesgue). *Sejam $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ funções absolutamente contínuas. Então,*

$$\int_a^b G'(t)F(t)dt + \int_a^b G(t)F'(t)dt = G(b)F(b) - G(a)F(a).$$

Demonstração. Note que $GF: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é absolutamente contínua em $[a, b]$. Com efeito, como F, G são absolutamente contínuas, pela Proposição 9, são uniformemente contínuas e, deste modo, limitadas em $[a, b]$. Assim, existe $M > 0$ tal que $|F(x)|, |G(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$. Ademais, como F é absolutamente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para toda coleção finita de intervalos disjuntos $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ de $[a, b]$ vale

$$\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon/2M.$$

Analogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^k |G(b_i) - G(a_i)| < \epsilon/2M.$$

Tome $\delta = \text{mín} \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Então:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k |F(b_i)G(b_i) - F(a_i)G(a_i)| &= \sum_{i=1}^k |F(b_i)G(b_i) - F(a_i)G(b_i) + F(a_i)G(b_i) - F(a_i)G(a_i)| \\
&= \sum_{i=1}^k |G(b_i)[F(b_i) - F(a_i)] + F(a_i)[G(b_i) - G(a_i)]| \\
&\leq \sum_{i=1}^k |G(b_i)[F(b_i) - F(a_i)]| + \sum_{i=1}^k |F(a_i)[G(b_i) - G(a_i)]| \\
&\leq \sum_{i=1}^k M|[F(b_i) - F(a_i)]| + \sum_{i=1}^k M|[G(b_i) - G(a_i)]| \\
&< M\epsilon/2M + M\epsilon/2M = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $F \cdot G$ é absolutamente contínua. Pelo Teorema 5, $F \cdot G$ é derivável em quase todo ponto, $(F \cdot G)'$ é integrável e $(F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a) = \int_a^b (F \cdot G)'(t) dt$. Daí,

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F \cdot G)'(t) dt = \int_a^b (F'G + GF')(t) dt. \quad (2.2)$$

Observe que $F'G$ e GF' são integráveis, pois para quase todo ponto

$$\begin{aligned}
|(F'G)(\cdot)| &= |F'(\cdot)||G(\cdot)| \leq M \cdot |F'(\cdot)|, \\
|(GF')(\cdot)| &= |G'(\cdot)||F(\cdot)| \leq M \cdot |G'(\cdot)|,
\end{aligned}$$

e como F', G' são integráveis, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b |F'(t)G(t)| dt &\leq M \int_a^b |F'(t)| dt < +\infty, \\
\int_a^b |G'(t)F(t)| dt &\leq M \int_a^b |G'(t)| dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, por (2.2):

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F'G + GF')(t) dt = \int_a^b F'(t)G(t) dt + \int_a^b G'(t)F(t) dt.$$

□

Vejam agora o seguinte critério básico, que diz respeito à autoadjuncidade de operadores simétricos.

Proposição 10 (Critério básico). *Seja $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, com $A \subset A^*$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $A = A^*$,
- (b) $N(A^* \pm iI) = \{0\}$ e A é fechado,
- (c) $\text{Im}(A \pm iI) = \mathcal{H}$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Como $A = A^*$ e A^* é fechado (Proposição 7), segue-se que A é fechado. Resta mostrar que $\varphi \in N(A^* \pm iI) \Rightarrow \varphi = 0$. Com efeito, note que como $\varphi \in \text{dom } A$, pela definição de operador adjunto segue-se que

$$0 = \langle 0, \varphi \rangle = \langle (A^* \pm iI)\varphi, \varphi \rangle = \langle (A \pm iI)\varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle \pm \langle i\varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle \pm i\langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Note que $\langle A\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$, uma vez que $\langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A\varphi \rangle = \overline{\langle A\varphi, \varphi \rangle}$. Assim, as partes real e imaginária de $\langle A\varphi, \varphi \rangle \pm i\langle \varphi, \varphi \rangle$ são, respectivamente, $\langle A\varphi, \varphi \rangle$ e $\pm\langle \varphi, \varphi \rangle$. Pela igualdade acima, ambas devem se anular. Então, $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$. Logo, $\varphi = 0$.

(b) \Rightarrow (c) A demonstração segue das seguintes afirmações:

Afirmção 6. $N(A^* \mp iI) = \text{Im}(A \pm iI)^\perp$.

Prova da afirmação:

Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi \in \text{Im}(A \pm iI)^\perp &\Leftrightarrow \langle \varphi, (A \pm iI)\psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \text{dom } A \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \pm i\varphi, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \text{dom } A \\ &\Leftrightarrow \varphi \in \text{dom } A^*, A^*\varphi = \pm i\varphi \\ &\Leftrightarrow (A^* \mp iI)\varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi \in N(A^* \mp iI). \end{aligned}$$

A afirmação está provada.

Afirmção 7. $\text{Im}(A \pm iI)$ é fechada.

Prova da afirmação:

Note que dado $\varphi \in \text{dom } A$, tem-se

$$\begin{aligned} \|(A \pm iI)\varphi\|^2 &= \langle (A \pm iI)\varphi, (A \pm iI)\varphi \rangle \\ &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle \pm \langle A\varphi, i\varphi \rangle \pm \langle i\varphi, A\varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \pm i(\langle \varphi, A\varphi \rangle - \langle A\varphi, \varphi \rangle). \end{aligned}$$

Como A é simétrico, $\langle \varphi, A\varphi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle$. Assim, pela última igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \|(A \pm iI)\varphi\|^2 &= \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \pm i(\langle \varphi, A\varphi \rangle - \langle A\varphi, \varphi \rangle) \\ &= \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Seja $((A \pm iI)\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Im}(A \pm iI)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (A \pm iI)\varphi_n = \psi \in \mathcal{H}$. A fim de mostrar que $\text{Im}(A \pm iI)$ é fechada, é suficiente mostrar que existe $\varphi \in \text{dom } A$ tal que $(A \pm iI)\varphi = \psi$.

Dados, $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se, pela igualdade (2.3)

$$\|A\varphi_n - A\varphi_m\|^2 = \|A(\varphi_n - \varphi_m)\|^2 \leq \|(A \pm iI)(\varphi_n - \varphi_m)\|^2$$

e

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \leq \|(A \pm iI)(\varphi_n - \varphi_m)\|^2.$$

Então, como a sequência $((A \pm iI)\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, segue-se que as sequências $(A\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são, também, de Cauchy em \mathcal{H} . Como \mathcal{H} é um espaço de Banach, existem $\xi, \eta \in \mathcal{H}$

tais que $\varphi_n \rightarrow \xi$ e $A\varphi_n \rightarrow \eta$. Então, $(\varphi_n, A\varphi_n) \rightarrow (\xi, \eta)$. Daí, como o gráfico de A é fechado, segue-se que $\xi \in \text{dom } A$ e $\eta = A\xi$. Assim,

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} (A \pm iI)\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} i\varphi_n = \eta \pm i\xi = A\xi \pm i\xi = (A \pm iI)\xi,$$

com $\xi \in \text{dom } A$. Logo, $\text{Im}(A \pm iI)$ é fechada.

A afirmação está provada.

Assim, pelas duas afirmações anteriores, como \mathcal{H} é espaço de Hilbert e $\text{Im}(A \pm iI)$ é fechada, temos:

$$\mathcal{H} = \{0\}^\perp = N(A \mp iI)^\perp = (\text{Im}(A \pm iI)^\perp)^\perp = \text{Im}(A \pm iI).$$

(c) \Rightarrow (a) Seja $\eta \in \text{dom } A^* \subset \mathcal{H}$. Como $A^*\eta \mp i\eta \in \mathcal{H}$, existe $\varphi \in \text{dom } A$ tal que

$$A^*\eta \mp i\eta = A\varphi \pm i\varphi.$$

Daí, como $A \subset A^*$,

$$\begin{aligned} A^*\eta \mp i\eta = A\varphi \pm i\varphi &\Rightarrow A^*\eta \mp i\eta = A^*\varphi \pm i\varphi \\ &\Rightarrow (A^* \mp iI)(\eta - \varphi) = 0 \\ &\Rightarrow (\eta - \varphi) \in N(A^* \mp iI) = \text{Im}(A \pm iI)^\perp = \{0\} \\ &\Rightarrow \eta = \varphi. \end{aligned}$$

Assim, $\text{dom } A^* = \text{dom } A$. Logo, como $A \subset A^*$, $A = A^*$. □

O próximo exemplo mostra que nem todo operador simétrico é autoadjunto.

Exemplo 1. Sejam os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \text{dom } A_0 &:= \{\varphi \in L^2[0, 1]; \varphi' \in L^2[0, 1] \text{ e } \varphi \text{ é abs. contínua}\}, \\ \text{dom } A_1 &:= \{\varphi \in \text{dom } A_0; \varphi(0) = \varphi(1)\}, \\ \text{dom } A_2 &:= \{\varphi \in \text{dom } A_0; \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \end{aligned}$$

e seja $A_j: \text{dom } A_j \rightarrow L^2[0, 1]$, definido por $A_j(\varphi) = \frac{1}{i}\varphi'$, $j = 0, 1, 2$. Então:

- (a) A_0, A_1, A_2 são operadores fechados.
- (b) A_1, A_2 são simétricos e A_0 não é simétrico.
- (c) $A_0^* = A_2$ e $A_2^* = A_0$.
- (d) $A_1^* = A_1$.

Demonstração. (a) Mostremos que A_0 é fechado. Sejam as sequências $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } A_0$ e $(A_0\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2[0, 1]$ tais que $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $A_0\varphi_n \rightarrow \psi$, para alguns $\varphi, \psi \in L^2[0, 1]$. A fim de mostrar que A_0 é fechado, é suficiente mostrarmos que existe $\eta \in L^2[0, 1]$ absolutamente contínua tal que $\eta(x) = \varphi(x)$ q.t.p., $\eta' \in L^2[0, 1]$ e $\eta'(x) = i\psi(x)$ q.t.p. Como cada φ_n é absolutamente contínua, pelo Teorema 5, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(0) = \int_0^x \varphi_n'(y) dy, \forall x \in [0, 1].$$

Note que como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_2 = 0$ e $m([0, 1]) < \infty$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_1 = 0$. Daí, existe subsequência $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| = 0$ q.t.p. em $[0, 1]$. Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(0)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^x \varphi'_{n_k}(y) dy = \int_0^x i\psi(y) dy, \forall x \in [0, 1].$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(x) = \varphi(x)$ q.t.p., e existe, pela igualdade acima, $\lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(0)]$, existe, então, $c := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(0)$. Deste modo, tem-se

$$\varphi(x) = \int_0^x i\psi(y) dy + c, x - \text{ q.t.p. em } [0, 1].$$

Defina $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\eta(x) = \int_0^x i\psi(y) dy + c. \quad (2.4)$$

Pelo Teorema 5, η é absolutamente contínua. Como $\varphi \in L^2[0, 1]$ e $\eta(x) = \varphi(x)$ q.t.p., segue-se que $\eta \in L^2[0, 1]$. Aplicando-se novamente o Corolário 2, segue-se que $\eta'(x) = i\psi(x)$ q.t.p. Logo, A_0 é fechado.

Mostremos agora que A_1 é fechado. Sejam $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } A_1$ e $(A_1\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2[0, 1]$ seqüências convergentes em $L^2[0, 1]$ a φ e ψ , respectivamente. A fim de mostrar que o gráfico de A_1 é fechado, é suficiente mostrarmos que existe $\eta \in L^2[0, 1]$ tal que η é absolutamente contínua, $\eta'(x) = i\psi(x)$ q.t.p., $\eta(0) = \eta(1)$ e $\eta(x) = \varphi(x)$ q.t.p. Defina $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como no caso A_0 realizado anteriormente. Resta, então, mostrar que $\eta(0) = \eta(1)$. Note que como cada φ_n é absolutamente contínua e $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = 0$, segue-se que

$$0 = \varphi_n(1) - \varphi_n(0) = \int_0^1 \varphi'_n(y) dy, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando-se o limite $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima, temos $0 = \int_0^1 i\psi(y) dy$ (pois φ'_n converge em $L^2[0, 1]$ a $i\psi$). Assim,

$$\eta(0) = \int_0^0 i\psi(y) dy + c = \int_0^1 i\psi(y) dy + c = \eta(1).$$

Logo, A_1 é fechado.

Mostremos, por fim, que A_2 é fechado. Sejam $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } A_2$ e $(A_2\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2[0, 1]$ seqüências convergentes em $L^2[0, 1]$ a φ e ψ , respectivamente. Definindo $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como em (2.4), como c é limite de alguma subsequência de $(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ e cada $\varphi_n(0) = 0$, segue-se que $c = 0$. Da prova de que A_1 é fechado, sabemos que η é absolutamente contínua, $\eta(x) = \varphi(x)$ q.t.p., $\eta'(x) = \psi(x)$ q.t.p. e $\eta(0) = \eta(1)$. Como $\eta(0) = c = 0$, segue-se que $\eta \in \text{dom } A_2$. Logo, pelo que já mostramos anteriormente, A_2 é fechado.

(b) Dados $\varphi, \psi \in \text{dom } A_1$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle A_1\varphi, \psi \rangle &= \frac{1}{i} \langle \varphi', \psi \rangle \\
&= \frac{1}{i} \int_0^1 \varphi'(x) \overline{\psi(x)} dx \\
&= \frac{1}{i} \left(\varphi(x) \overline{\psi(x)} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) \overline{\psi'(x)} dx \right) \\
&= \frac{1}{i} \left(0 - \int_0^1 \varphi(x) \overline{\psi'(x)} dx \right) \\
&= \int_0^1 \varphi(x) \overline{\left[\frac{1}{i} \psi'(x) \right]} dx \\
&= \langle \varphi, A_1\psi \rangle,
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade acima decorre do Corolário 3. Logo, A_1 é simétrico. Analogamente demonstra-se que A_2 é também simétrico.

Afirmamos que A_0 não é simétrico. Com efeito, suponha, por absurdo, que A_0 seja um operador simétrico. Tomemos $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $f(x) = x, g(x) = 1 - \text{sen } \pi x$. Como f, g possuem derivadas limitadas, pela Proposição 8 segue-se que f, g são absolutamente contínuas e $f', g' \in L^2[0, 1]$. Portanto, $f, g \in \text{dom } A_0$. Assim, como A_0 é simétrico, tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle A_0f, g \rangle = \langle f, A_0g \rangle &\Leftrightarrow \frac{1}{i} \int_0^1 f'(x) \overline{g(x)} dx = -\frac{1}{i} \int_0^1 f(x) \overline{g'(x)} dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{i} \left(\int_0^1 f'(x) \overline{g(x)} + f(x) \overline{g'(x)} dx \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(f(x) \overline{g(x)} \right) dx = 0 \\
&\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(f(x) \overline{g(x)} \right) dx = 0 \\
&\Leftrightarrow f(1) \overline{g(1)} - f(0) \overline{g(0)} = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot (1 - \text{sen } \pi) - 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 = 0 \quad (\text{absurdo!}).
\end{aligned}$$

Logo, A_0 não é simétrico.

(c) Seja $\psi \in \text{dom } A_2$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle A_2\psi, \varphi \rangle &= \int_0^1 \frac{1}{i} \psi'(x) \overline{\varphi(x)} dx \\
&= \frac{1}{i} \left[\psi(x) \overline{\varphi(x)} \Big|_0^1 - \int_0^1 \psi(x) \overline{\varphi'(x)} dx \right] \\
&= \frac{1}{i} \left(- \int_0^1 \psi(x) \overline{\varphi'(x)} dx \right) \\
&= \langle \psi, A_0\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A_0.
\end{aligned}$$

Então, $\psi \in \text{dom } A_0^*$ e, ademais, $A_2\psi = A_0^*(\psi)$. Portanto, $A_2 \subset A_0^*$. Mostraremos agora que $\text{dom } A_0^* \subset \text{dom } A_2$.

Seja $\gamma \in \text{dom } A_0^*$. Defina $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por $\omega(x) = i \int_0^x (A_0^*\gamma)(y) dy$.

Afirmação 8. $\omega(1) = i \int_0^1 A_0^*(\gamma)(y)dy = 0$.

Prova da afirmação: Com efeito,

$$\int_0^1 \overline{A_0^*(\gamma)(y)}dy = \int_0^1 1 \cdot \overline{A_0^*(\gamma)(y)}dy = \int_0^1 A_0(1)(y)\overline{\gamma(y)}dy = 0.$$

A afirmação está demonstrada.

Assim, $\omega(0) = \omega(1) = 0$. Então, pelo Teorema 5, segue-se que $\omega \in \text{dom } A_2$.

Afirmação 9. $\omega(x) = \gamma(x)$ q.t.p.

Prova da afirmação: Já vimos que $A_2 \subset A_0^*$. Daí,

$$(A_0^*\omega)(x) = (A_2\omega)(x) = (A_0^*\gamma)(x) \text{ q.t.p.,}$$

onde a última igualdade segue por aplicação do Corolário 2

Então,

$$0 = \langle \varphi, 0 \rangle = \langle \varphi, A_0^*(\omega - \gamma) \rangle = \langle A_0\varphi, \omega - \gamma \rangle, \forall \varphi \in \text{dom } A_0. \quad (2.5)$$

Deste modo, a fim de concluir que $\omega(x) = \gamma(x)$ q.t.p., é suficiente, pelo Lema 1, mostrar que $\text{Im } A_0$ é densa em $L^2[0, 1]$. Afirmamos que $\text{Im } A_0 = L^2[0, 1]$. Com efeito, seja $u \in L^2[0, 1]$ e seja $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $v(x) = i \int_0^x u(y)dy$. Novamente pelo Corolário 2, tem-se $v'(x) = iu(x)$ q.t.p., e daí, $v' \in L^2[0, 1]$. Então, como v é absolutamente contínua, temos $v \in \text{dom } A_0$ e $(A_0v)(x) = u(x)$ q.t.p. Logo, $u \in \text{Im } A_0$. Assim, como $\text{Im } A_0 = L^2[0, 1]$, segue-se pela igualdade em (2.5) que $\omega(x) = \gamma(x)$ q.t.p.

A afirmação está demonstrada.

Como $\gamma \in \text{dom } A_0^*$ é arbitrário e $\omega \in \text{dom } A_2$, segue-se que $\text{dom } A_0^* \subset \text{dom } A_2$. Logo, $A_0^* = A_2$. Resta, por fim, mostrarmos que $A_2^* = A_0$. De fato, como $A_0^* = A_2$, segue-se que $A_2^* = (A_0^*)^*$. Daí, $A_2^* = (A_0^*)^* = A_0$, pois A_0 é um operador fechado (ver [16, p. 255]).

(d) Com efeito, pela Proposição 10, como A_1 é simétrico e fechado, a fim de mostrarmos que A_1 é autoadjunto, é suficiente mostrarmos que $N(A_1^* \pm iI) = \{0\}$. Seja $\varphi \in N(A_1^* \pm iI)$. Sabemos, pela Proposição 1.7, que o conjunto de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ da forma $\phi_n(x) = e^{2\pi i n x}$ constitui um sistema ortonormal completo para $L^2[0, 1]$.

Afirmação 10. $\langle \varphi, \phi_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Prova da afirmação: Com efeito, como $\varphi \in N(A_1^* \pm iI)$, temos $A_1^*\varphi = \mp i\varphi$. Daí,

$$\langle A_1^*\varphi, \phi_n \rangle = \langle \mp i\varphi, \phi_n \rangle = \mp i \langle \varphi, \phi_n \rangle, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, temos

$$\langle A_1^*\varphi, \phi_n \rangle = \langle \varphi, A_1\phi_n \rangle = \left\langle \varphi, \frac{2n\pi i \phi_n}{i} \right\rangle = 2n\pi \langle \varphi, \phi_n \rangle, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$2n\pi \langle \varphi, \phi_n \rangle = \mp i \langle \varphi, \phi_n \rangle, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $\langle \varphi, \phi_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

A afirmação está provada.

Deste modo, como $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ constitui um sistema ortonormal completo para $L^2[0, 1]$, pela Identidade de Parseval e pela afirmação anterior, segue-se que

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 0 \cdot \phi_n = 0.$$

Logo, $N(A_1^* \pm iI) = \{0\}$.

□

2.2 Teorema de Kato-Rellich

Como mencionado anteriormente, neste capítulo vamos verificar que H_0 é autoadjunto. Para tanto, usaremos o celebrado Teorema de Kato-Rellich, que fornece condições suficientes para que ao perturbarmos adequadamente um operador autoadjunto, ainda obtenhamos um operador autoadjunto. A seguir discutiremos em detalhes tal resultado.

2.2.1 Enunciado e prova

Enunciado:

A fim de enunciar o Teorema de Kato-Rellich definimos.

Definição 11. Sejam $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $B: \text{dom } B \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores lineares. Dizemos que B é A -limitado se

- (a) $\text{dom } B \supset \text{dom } A$.
- (b) Existem constantes $\alpha, \beta \geq 0$ tais que:

$$\|B\varphi\| \leq \alpha \|\varphi\| + \beta \|A\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A.$$

Neste caso, definimos

$$\beta_0 := \inf\{\beta_0 \geq 0 : (\alpha, \beta) \text{ satisfaz a condição em (b) para algum } \alpha \geq 0\}.$$

Teorema 6 (Teorema de Kato-Rellich). *Sejam $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $B: \text{dom } B \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores lineares. Se $A = A^*$, $B \subset B^*$ e B for A -limitado, com $\beta_0 < 1$, então $A + B$ é autoadjunto.*

Passemos agora à demonstração do Teorema de Kato-Rellich.

Alguns resultados preliminares:

Lema 2. *Seja $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Então, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\|(A \pm i\lambda I)\varphi\|^2 = \|A\varphi\|^2 + \lambda^2 \|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A. \quad (2.6)$$

Demonstração. É suficiente provar que $\|(A + i\lambda I)\varphi\|^2 = \|A\varphi\|^2 + \lambda^2 \|\varphi\|^2$. Seja $\varphi \in \text{dom } A$. Temos:

$$\|(A + i\lambda I)\varphi\|^2 = \langle (A + i\lambda I)\varphi, (A + i\lambda I)\varphi \rangle = \langle A\varphi, A\varphi \rangle + i\lambda \langle \varphi, A\varphi \rangle - i\lambda \langle A\varphi, \varphi \rangle + \lambda^2 \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Como A é autoadjunto, segue-se que $\langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A\varphi \rangle$. Assim, pela igualdade acima obtemos:

$$\|(A + i\lambda I)\varphi\|^2 = \langle A\varphi, A\varphi \rangle + \lambda^2 \langle \varphi, \varphi \rangle = \|A\varphi\|^2 + \lambda^2 \|\varphi\|^2.$$

□

Definição 12 (Resolvente de um operador linear). Seja $A: \text{dom } A \subset E \rightarrow E$ um operador linear em um espaço normado E . O *resolvente* $\rho(A)$ é o conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que o operador $(A - \lambda I)^{-1}: E \rightarrow \text{dom } A$ existe e é limitado.

Definição 13 (Operador resolvente). Seja $A: \text{dom } A \subset E \rightarrow E$ um operador linear e seja $\lambda \in \rho(A)$. Definimos o *operador resolvente* $R_\lambda(A)$ por $R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$.

Proposição 11 (Segunda identidade do resolvente). *Sejam A, S operadores lineares tais que $\text{dom } S \subset \text{dom } A$ e seja $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(S)$. Então,*

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(S) = R_\lambda(A)(S - A)R_\lambda(S).$$

Demonstração. Mostremos que $R_\lambda(A) = R_\lambda(A)(S - A)R_\lambda(S) + R_\lambda(S)$. De fato, é suficiente mostrar que $R_\lambda(A)(S - A)R_\lambda(S) + R_\lambda(S)$ é inversa à direita do operador $A - \lambda I$. Deste modo,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)[(A - \lambda I)^{-1}(S - A)(S - \lambda I)^{-1} + (S - \lambda I)^{-1}] \\ &= (S - A)(S - \lambda I)^{-1} + (A - \lambda I)(S - \lambda I)^{-1} \\ &= (S - \lambda I)(S - \lambda I)^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

Logo, $R_\lambda(A) - R_\lambda(S) = R_\lambda(A)(S - A)R_\lambda(S)$. □

Lema 3. *Seja $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Então $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$.*

Demonstração. Com efeito, seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^*$. Consideremos o operador $S: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$S = \frac{1}{y}(A - xI).$$

Note que $(A - zI) = y(S - iI)$. Assim, como $y \neq 0$, para provar que $(A - zI)^{-1}$ existe e é limitado, é suficiente provar que $(S - iI): \text{dom } A \rightarrow \mathcal{H}$ possui inversa contínua.

Como S é um operador autoadjunto, pelo Critério Básico, segue-se que $\text{Im}(S - iI) = \mathcal{H}$ e, então, que $S - iI$ é sobrejetivo. Para provar a injetividade de $S - iI$, obtemos, pelo Lema 2

$$\|(S - iI)\nu\|^2 \geq \|S\nu\|^2 + \|\nu\|^2 \geq \|\nu\|^2, \quad \forall \nu \in \text{dom } A.$$

Segue-se então que $S - iI$ é injetivo. Por fim, a mesma desigualdade acima nos permite concluir que $(S - iI)^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \text{dom } A$ é limitado. Logo, $(A - zI)^{-1}$ é também limitado. □

O teorema seguinte generaliza, para série de operadores, a série geométrica.

Teorema 7 (Série de Neumann). *Sejam X um espaço de Banach e $A: X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Se $\|A\| < 1$, então $(1 \cdot I - A)^{-1}: X \rightarrow X$ existe, é limitado e*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Demonstração. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{j=0}^n A^j$. Mostraremos que existe um operador linear $S: X \rightarrow X$ limitado tal que $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n A^j$. Com efeito, note que a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois:

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=n+1}^m A^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|A^j\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|A\|^j, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \text{ com } m \geq n.$$

Como a série $\sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j$ é convergente em \mathbb{R} (pois $\|A\| < 1$), segue-se pela desigualdade acima que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $B(X)$ (espaço de Banach dos operadores lineares limitados entre X). Assim, existe $S \in B(X)$ tal que $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Mostraremos agora que $S = (I - A)^{-1}$. De fato, S é inversa à esquerda de $(I - A)$, pois

$$\|S_n(I - A) - I\| = \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima, obtém-se que

$$S(I - A) = I.$$

Portanto, S é inversa à esquerda de $(I - A)$. Analogamente, mostra-se que S é inversa à direita de $(I - A)$. Logo, $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I - A)^{-1}$. \square

Proposição 12. *Sejam $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $B: \text{dom } B \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores lineares, com $\text{dom } A \subset \text{dom } B$ e $\rho(A) \neq \emptyset$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $BR_z(A) \in B(\mathcal{H})$, $\forall z \in \rho(A)$,
- (b) $BR_z(A) \in B(\mathcal{H})$, para algum $z \in \rho(A)$,
- (c) B é A -limitado.

Demonstração. (b) \Rightarrow (c). Seja $z \in \rho(A)$ tal que $BR_z(A)$ é limitado. Então:

$$\begin{aligned} \|B\xi\| &= \|BR_z(A)(A - zI)\xi\| \leq \|BR_z(A)\| \|(A - zI)\xi\| \leq \|BR_z(A)\| (\|A\xi\| + |z| \|\xi\|) \\ &\leq \|BR_z(A)\| \cdot \|A\xi\| + (\|BR_z(A)\| |z|) \cdot \|\xi\|, \quad \forall \xi \in \text{dom } A. \end{aligned}$$

Pondo $a = \|BR_z(A)\|$ e $b = \|BR_z(A)\| |z|$, pela desigualdade acima, obtemos

$$\|B\xi\| \leq a \|A\xi\| + b \|\xi\|, \quad \forall \xi \in \text{dom } A.$$

Logo, B é A -limitado.

(c) \Rightarrow (a). Seja $z \in \rho(A)$. Note que se $\varphi \in \mathcal{H}$, então $\varphi \in \text{dom } R_z(A)$ e $R_z(A)\varphi \in \text{dom } A$. Assim, como B é A -limitado, existem constantes $a, b \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|BR_z(A)\varphi\| &\leq a \|R_z(A)\varphi\| + b \|AR_z(A)\varphi\| \\ &\leq a \|R_z(A)\varphi\| + b \|AR_z(A)\varphi - zR_z(A)\varphi + zR_z(A)\varphi\| \\ &\leq a \|R_z(A)\varphi\| + b \|(A - zI)R_z(A)\varphi + zR_z(A)\varphi\| \\ &\leq a \|R_z(A)\varphi\| + b \|\varphi + zR_z(A)\varphi\| \\ &\leq a \|R_z(A)\| \|\varphi\| + b(\|\varphi\| + |z| \|R_z(A)\| \|\varphi\|) \\ &\leq [a \|R_z(A)\| + b(1 + |z| \|R_z(A)\|)] \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Logo, $BR_z(A) \in B(\mathcal{H})$. \square

Prova do Teorema Kato-Rellich:

Note que como A, B são operadores simétricos, $A + B$ é também simétrico.

Como A é autoadjunto, pelo Lema 3, segue-se $(A \pm i\lambda I)^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \text{dom } A$ existe e é limitado, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Note que:

$$\begin{aligned} (A + B \pm i\lambda I) &= (B + A \pm i\lambda I) = [B(A \pm i\lambda I)^{-1}(A \pm i\lambda I) + I(A \pm i\lambda I)] \\ &= [B(A \pm i\lambda I)^{-1} + I](A \pm i\lambda I), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Então,

$$(A + B \pm i\lambda I) = (BR_{\pm i\lambda}(A) + I)(A \pm i\lambda I), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*. \quad (2.7)$$

Como $R_{\pm i\lambda}(A): \mathcal{H} \rightarrow \text{dom } A$ existe e é limitado, pela Proposição 12, obtém-se que o operador $BR_{\pm i\lambda}(A): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é limitado.

Mostraremos agora que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $BR_{i\lambda_0}(A) + I: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é sobrejetivo. Pela Série de Neumann, é suficiente determinarmos $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $\|BR_{i\lambda_0}(A)\| < 1$. Isto é garantido através das duas próximas afirmações.

Afirmção 11. $\|AR_{\pm i\lambda}(A)\| \leq 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Prova da afirmação:

Pelo Lema 2, tem-se:

$$\|(A \pm i\lambda I)\varphi\|^2 \geq \|A\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A.$$

Seja $\psi \in \mathcal{H}$ arbitrário. Tome $\varphi = R_{\pm i\lambda}(A)\psi \in \text{dom } A$. Pela desigualdade acima:

$$\|AR_{\pm i\lambda}(A)\psi\|^2 \leq \|(A \pm i\lambda)R_{\pm i\lambda}\psi\|^2 = \|\psi\|^2.$$

Logo, como $\psi \in \mathcal{H}$ é arbitrário, $\|AR_{\pm i\lambda}(A)\| \leq 1$.

A afirmação está provada.

Afirmção 12. *Existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $\|BR_{\pm i\lambda_0}(A)\| < 1$.*

Prova da afirmação:

Seja $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pelo Lema 2, $\|(A \pm i\lambda)\varphi\|^2 \geq \lambda^2 \|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A$ e daí

$$\|\varphi\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|(A \pm i\lambda)\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A.$$

Então, para cada $\psi \in \mathcal{H}$, pode-se tomar $\varphi = (A \pm i\lambda)^{-1}\psi = R_{\pm i\lambda}(A)\psi$ e, como $\varphi \in \text{dom } A$, pela desigualdade acima obtemos:

$$\|R_{\pm i\lambda}(A)\psi\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Portanto, $\|R_{\pm i\lambda}(A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$. Deste modo, como B é A -limitado e $\|AR_{\pm i\lambda}(A)\| \leq 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|BR_{\pm i\lambda}(A)\varphi\| &\leq \alpha \|R_{\pm i\lambda}(A)\varphi\| + \beta_0 \|AR_{\pm i\lambda}(A)\varphi\| \\ &\leq \alpha \|R_{\pm i\lambda}(A)\| \|\varphi\| + \beta_0 \|AR_{\pm i\lambda}(A)\| \|\varphi\| \\ &\leq \alpha \frac{1}{|\lambda|} \|\varphi\| + \beta_0 \cdot 1 \cdot \|\varphi\| \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{|\lambda|} + \beta_0 \right) \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Então, $\|BR_{\pm i\lambda}(A)\| \leq \frac{\alpha}{|\lambda|} + \beta_0$. Como $\beta_0 < 1$, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\alpha}{|\lambda_0|} + \beta_0 < 1$. Logo, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|BR_{\pm i\lambda_0}(A)\| < 1.$$

A afirmação está provada.

Assim, como $\|BR_{\pm i\lambda_0}(A)\| < 1$ (Afirmação 12), pela Série de Neumann, o operador linear $BR_{\pm i\lambda_0}(A) + I: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é invertível e, portanto, sobrejetivo.

Afirmação 13. $Im(A \pm i\lambda_0 I) = \mathcal{H}$, $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}^*$.

Prova da afirmação:

Como A é autoadjunto e $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$, segue-se que $\frac{A}{\lambda_0}: \text{dom } A \rightarrow \mathcal{H}$ também é autoadjunto. Pela Proposição 10, $\frac{A}{\lambda_0} \pm iI: \text{dom } A \rightarrow \mathcal{H}$ é sobrejetivo. Assim, como $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \left(\frac{A}{\lambda_0} \pm iI \right)$ é sobrejetivo. Logo, $Im(A \pm i\lambda_0 I) = \mathcal{H}$.

A afirmação está provada.

Assim, pela igualdade em (2.7), obtemos que $Im(A + B \pm i\lambda_0 I) = \mathcal{H}$. Como $\lambda_0 \neq 0$, note que:

$$Im(A + B \pm i\lambda_0 I) = \mathcal{H} \Rightarrow Im\left(\lambda_0 \left(\frac{A+B}{\lambda_0} \pm iI\right)\right) = \mathcal{H} \Rightarrow Im\left(\frac{A+B}{\lambda_0} \pm iI\right) = \mathcal{H}.$$

Como $(A+B) \subset (A+B)^*$ e $1/\lambda_0 \in \mathbb{R}$, obtém-se que $\frac{A+B}{\lambda_0} \subset \left(\frac{A+B}{\lambda_0}\right)^*$. Segue-se então da inclusão acima e da Proposição 10 que $\left(\frac{A+B}{\lambda_0}\right)$ é autoadjunto. Logo, tem-se que $A+B$ é autoadjunto. \square

Corolário 4. *Sejam $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, B: \text{dom } B \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores simétricos tais que $\text{dom } A \subset \text{dom } B$. Se B é limitado e A é autoadjunto, então $A+B: \text{dom } A \rightarrow \mathcal{H}$ é autoadjunto.*

Demonstração. Com efeito, note que:

$$\|B\varphi\| \leq \|B\| \|\varphi\| = \|B\| \|\varphi\| + 0 \cdot \|A\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \text{dom } A.$$

Da desigualdade acima, segue-se que B é A -limitado, com $\beta = 0$. Logo, pelo Teorema de Kato-Rellich, $A+B$ é autoadjunto. \square

2.2.2 H_0 é autoadjunto

A seguir vamos verificar que H_0 é autoadjunto através do Teorema de Kato-Rellich. Recorde que:

$$\text{dom } H_0 := \{(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}); \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 |\varphi_k|^2 < +\infty\},$$

$$(H_0 \varphi)_k = \varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} + k\varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 8. H_0 é autoadjunto.

Demonstração. Mostraremos primeiramente que H_0 é um operador densamente definido. Com efeito, para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $e^k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $(e^k)_j = \delta_{kj}$. Seja $G := \text{span} \{e^k; k \in \mathbb{Z}\}$; $G \subset \text{dom } H_0$ e também $\ell^2(\mathbb{Z}) = \overline{G}$. Então, $\ell^2(\mathbb{Z}) = \overline{\text{dom } H_0}$. Portanto, H_0 é densamente definido.

H_0 é simétrico: sejam $\varphi = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{dom } H_0$. Então:

$$\begin{aligned}
\langle H_0\varphi, \psi \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} + n\varphi_n)\overline{\psi}_n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1}\overline{\psi}_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-1}\overline{\psi}_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\varphi_n\overline{\psi}_n \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k\overline{\psi}_{k-1} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k\overline{\psi}_{k+1} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\varphi_k\overline{\psi}_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(\overline{\psi}_{k-1} + \overline{\psi}_{k+1} + k\overline{\psi}_k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(\overline{\psi_{k-1} + \psi_{k+1} + k\psi_k}) \\
&= \langle \varphi, H_0\psi \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, para encerrar a prova do teorema, pela Proposição 10, é suficiente verificarmos que $\text{Im}(H_0 \pm iI) = \ell^2(\mathbb{Z})$. Isto segue da seguinte afirmação.

Afirmção 14. Seja $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ a transformada de Fourier definida no Teorema 4. Então: $\mathcal{F}^{-1}H_0\mathcal{F}: \text{dom } A_1 \subset L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ é autoadjunto, onde A_1 é como no Exemplo 1.

Prova da afirmação:

Defina $\mathcal{M}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ por:

$$\begin{aligned}
g &\mapsto \mathcal{M}g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \\
x &\mapsto 2 \cos(2\pi x)g(x).
\end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que \mathcal{M} está bem definido e é um operador linear limitado. Ademais, \mathcal{M} é autoadjunto, pois

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}g, f \rangle &= \int_0^1 2 \cos(2\pi x)g(x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_0^1 g(x)2 \cos(2\pi x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_0^1 g(x)\overline{2 \cos(2\pi x)f(x)}dx \\
&= \langle g, \mathcal{M}f \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

Agora, seja $g \in \text{dom } A_1$. Recorde que:

$$(\mathcal{F}g)(k) = \int_0^1 g(x)e^{-2k\pi ix}dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Note que $\mathcal{F}g \in \text{dom } H_0$. Com efeito, pela Proposição 1, tem-se

$$k(\mathcal{F}g)(k) = k\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi i}(2k\pi i)\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi i}\widehat{\left(\frac{dg}{dx}\right)}(k) = \frac{1}{2\pi i}\widehat{g}'(k) = \frac{1}{2\pi i}(\mathcal{F}g')(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Como $g \in \text{dom } A_1$, $g' \in L^2(\mathbb{T})$. Então, pelo Teorema de Plancherel, $\mathcal{F}g' \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Daí, pela igualdade acima, $\mathcal{F}g \in \text{dom } H_0$. Assim,

$$\begin{aligned} (H_0\mathcal{F}g)(k) &= \int_0^1 g(x)e^{-2(k+1)i\pi x} dx + \int_0^1 g(x)e^{-2(k-1)i\pi x} dx + k(\mathcal{F}g)(k) \\ &= \int_0^1 g(x)e^{-2ki\pi x} (e^{-2i\pi x} + e^{2i\pi x}) dx + k(\mathcal{F}g)(k) \\ &= \int_0^1 g(x)e^{-2ki\pi x} \cdot 2 \cdot \cos(2\pi x) dx + k(\mathcal{F}g)(k) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{M}g)(k) + k(\mathcal{F}g)(k) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{M}g)(k) + \frac{1}{2\pi} 2ik\pi(\mathcal{F}g)(k) \frac{1}{i} \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{M}g)(k) + \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F} \frac{dg}{dx} \right) (k) \left(\frac{1}{i} \right) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{M}g)(k) + \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F} \frac{1}{i} \frac{dg}{dx} \right) (k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade acima segue também da Proposição 1.

Então,

$$\begin{aligned} H_0\mathcal{F}(g) &= \mathcal{F}\mathcal{M}g + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left(\frac{1}{i} \frac{dg}{dx} \right) \\ &= \mathcal{F}\mathcal{M}g + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(A_1g) \\ &= \mathcal{F}\mathcal{M}g + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}A_1g, \quad \forall g \in \text{dom } A_1. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}^{-1}H_0\mathcal{F} = \mathcal{M} + \frac{1}{2\pi}A_1$. Tem-se, também, que o operador $\frac{A_1}{2\pi}$ é autoadjunto, pelo Exemplo 1, e \mathcal{M} é autoadjunto e limitado. Logo, pelo Corolário 4, $\mathcal{F}^{-1}H_0\mathcal{F}$ é autoadjunto.

Isto encerra a prova da afirmação.

Seja $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Como $\mathcal{F}^{-1}H_0\mathcal{F}: \text{dom } A_1 \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ é autoadjunto, pela Proposição 10, existe $\eta \in \text{dom } A_1$ tal que

$$\mathcal{F}^{-1}H_0\mathcal{F}\eta \pm i\eta = \mathcal{F}^{-1}\varphi.$$

Daí,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}H_0\mathcal{F}\eta \pm i\eta) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) \Rightarrow H_0\mathcal{F}\eta \pm \mathcal{F}(i\eta) = \varphi \Rightarrow H_0\mathcal{F}\eta \pm i\mathcal{F}\eta = \varphi.$$

Então, existe $\mathcal{F}\eta \in \text{dom } H_0$ tal que $H_0(\mathcal{F}\eta) \pm i(\mathcal{F}\eta) = \varphi$ e, deste modo, $\text{Im}(H_0 \pm iI) = \ell^2(\mathbb{Z})$. Logo, como H_0 é simétrico, pela Proposição 10, segue-se que H_0 é autoadjunto. \square

2.3 Grupos de evolução unitários e o Teorema de Stone

Nesta secção, recordamos alguns resultados sobre grupos de evolução unitários. Na próxima secção, usaremos alguns desses resultados para provar, através do Teorema Espectral, existência e unicidade de soluções para a equação de Schrödinger linear (ES).

Definição 14 (Operador unitário). Dizemos que um operador $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é *unitário* se U é invertível e $U^* = U^{-1}$.

Definição 15 (Grupo de evolução unitário). Uma aplicação $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é dita ser um *grupo de evolução unitário* se, para cada $t \in \mathbb{R}$, $G(t)$ é unitário e $G(t+s) = G(t)G(s)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Definição 16 (Gerador infinitesimal). Se $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é um grupo de evolução unitário, o operador T definido por

$$\begin{aligned} \text{dom } T &:= \left\{ \xi \in \mathcal{H}; \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - I)\xi \right\}, \\ T\xi &:= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - I)\xi \end{aligned}$$

é denominado *gerador infinitesimal* de G .

Proposição 13. Se $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é um grupo de evolução unitário cujo gerador infinitesimal é T , então

$$G(t)T\xi = TG(t)\xi, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \text{dom } T$$

e $G(t)(\text{dom } T) = \text{dom } T$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Note que: dados $\xi \in \text{dom } T$, $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (G(h) - I) (G(t)\xi) &= \frac{1}{h} (G(h)G(t)\xi - G(t)\xi) \\ &= \frac{1}{h} (G(h+t)\xi - G(t)\xi) \\ &= \frac{1}{h} (G(t+h)\xi - G(t)\xi) \\ &= \frac{1}{h} (G(t)G(h)\xi - G(t)\xi) \\ &= \frac{1}{h} G(t)(G(h)\xi - \xi) \\ &= \frac{1}{h} G(t)(G(h) - I)\xi \\ &= G(t) \left(\frac{G(h) - I}{h} \right) \xi, \quad \forall h \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Assim, pela continuidade de $G(t)$, como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(G(h) - I)\xi}{h} = \frac{1}{i} T\xi$, fazendo $h \rightarrow 0$ na igualdade acima, obtemos que $G(t)\xi \in \text{dom } T$ e, ademais:

$$\frac{1}{i} T(G(t)\xi) = G(t) \left(\frac{1}{i} T\xi \right) = \frac{1}{i} G(t)T\xi.$$

Então,

$$G(t)T\xi = TG(t)\xi, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \text{dom } T.$$

Resta mostrar que $G(t)(\text{dom } T) = \text{dom } T$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Pela igualdade acima, segue-se que $G(t)(\text{dom } T) \subset \text{dom } T$. Para mostrar que $\text{dom } T \subset G(t)(\text{dom } T)$, note que: dado $t \in \mathbb{R}$, já sabemos que $G(-t)(\text{dom } T) \subset \text{dom } T$. Daí,

$$\text{dom } T = G(t)G(-t)(\text{dom } T) \subset G(t)(\text{dom } T).$$

Logo, $\text{dom } T \subset G(t)(\text{dom } T)$. □

Proposição 14. *Seja $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ um grupo de evolução unitário. Então seu gerador infinitesimal T é simétrico e para $\xi \in \text{dom } T$ a curva $\xi(t) := G(t)\xi \in \mathcal{H}$ é a única solução de*

$$i \frac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t), \quad \xi(0) = \xi.$$

Demonstração. A prova de que a curva dada por $\xi(t) = G(t)\xi$ é solução do problema de valor inicial está essencialmente feita na demonstração da Proposição 13; portanto, será omitida. Agora mostraremos que T é simétrico. Sejam $\xi, \eta \in \text{dom } T$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \langle T\xi, \eta \rangle &= \left\langle i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(G(h) - I)\xi}{h}, \eta \right\rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1}{h} \langle (G(h) - I)\xi, \eta \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1}{h} \langle \xi, (G(h) - I)^* \eta \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1}{h} \langle \xi, (G(h)^* - I)\eta \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1}{h} \langle \xi, (G(-h) - I)\eta \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \xi, \frac{i(G(-h) - I)\eta}{-h} \right\rangle \\ &= \left\langle \xi, i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(G(-h) - I)\eta}{-h} \right\rangle \\ &= \langle \xi, T\eta \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, T é simétrico. Resta, por fim, mostrar a unicidade da solução. Sejam $\eta(t), \xi(t)$ soluções do problema de valor inicial. Tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\eta(t) - \xi(t)\|^2 &= 2\text{Re} \left\langle \eta(t) - \xi(t), \frac{d}{dt}[\eta(t) - \xi(t)] \right\rangle \\ &= 2\text{Re} \langle \eta(t) - \xi(t), -iT[\eta(t) - \xi(t)] \rangle \\ &= 2\text{Re} \, i \langle \eta(t) - \xi(t), T[\eta(t) - \xi(t)] \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de que T é simétrico e, daí, $\langle T\psi, \psi \rangle \in \mathbb{R}$, qualquer que seja $\psi \in \text{dom } T$. Assim, $\|\eta(t) - \xi(t)\|$ é constante. Como $\eta(0) = \xi(0)$, segue-se que $\eta \equiv \xi$. Logo, a solução é única. □

Definição 17 (Grupo de evolução unitário mensurável). *Seja $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ um grupo de evolução unitário em \mathcal{H} . Dizemos que G é mensurável se a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto \langle G(t)\xi, \eta \rangle$ é mensurável (à Lebesgue) para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

A respeito dos grupos de evolução unitário, o celebrado Teorema de Stone, que apresentamos a seguir e cuja demonstração pode ser vista em [9, p. 129], caracteriza o gerador infinitesimal de um grupo de evolução unitário mensurável no seguinte sentido.

Teorema 9 (Teorema de Stone). *Se $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é grupo de evolução unitário mensurável em \mathcal{H} , então seu gerador infinitesimal T é autoadjunto (isto é, $G(t) \equiv e^{-itT}$).*

Vale ressaltar que combinando o Teorema de Stone ao Cálculo Funcional Espectral (ver Teorema 11 adiante), pode-se estabelecer uma relação biunívoca entre grupos de evolução unitários mensuráveis e operadores autoadjuntos.

2.4 Teorema Espectral

Definição 18. Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ espaços normados e $T, T_n: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ operadores em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Dizemos que a sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente para T (e denotamos por $T_n \xrightarrow{s} T$ ou $T = s - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n \xi - T \xi\|_{\mathcal{N}_2} = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1.$$

Seja $\text{Proj}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores $P_0 \in B(\mathcal{H})$ autoadjuntos e tais que $P_0^2 = P_0$. Denotemos por \mathcal{A} a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} e por $\sum_j \Lambda_j$ a união de conjuntos $\Lambda_j \in \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois.

Definição 19. Uma *resolução da identidade* em \mathcal{H} é uma aplicação $P: \mathcal{A} \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$ tal que

- (a) $P(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$.
- (b) Se $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$, então

$$P(\Lambda) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(\Lambda_j).$$

Dada uma resolução da identidade P , para cada $\xi \in \mathcal{H}$, associa-se uma medida de Borel positiva finita $\mu_\xi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ definida por:

$$\mu_\xi(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle.$$

Note que $\mu_\xi(\Lambda) = \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle = \langle \xi, P(\Lambda)P(\Lambda)\xi \rangle = \langle P(\Lambda)\xi, P(\Lambda)\xi \rangle = \|P(\Lambda)\xi\|^2$, qualquer que seja $\Lambda \in \mathcal{A}$. Segue-se daí que $\mu_\xi(\mathbb{R}) = \|\xi\|^2$.

Para cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ associa-se a medida de Borel complexa $\mu_{\xi, \eta}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\mu_{\xi, \eta}(\Lambda) = \langle \xi, P(\Lambda)\eta \rangle$$

e por polarização

$$\mu_{\xi, \eta}(\Lambda) = \frac{1}{4} [\mu_{\xi+\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi-\eta}(\Lambda) + i(\mu_{\xi-i\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi+i\eta}(\Lambda))].$$

Então, $\mu_\xi = \mu_{\xi, \xi}$ e $|\mu_{\xi, \eta}(\Lambda)| \leq \|\xi\| \|\eta\|$.

Definição 20. As medidas $\mu_\xi, \mu_{\xi, \eta}$ definidas acima são chamadas de *medidas espectrais da resolução da identidade P* associadas a ξ e ao par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, respectivamente.

Pode-se integrar funções e definir a integral em relação à resolução da identidade P do seguinte modo: dada uma função mensurável simples $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{\Lambda_j}$, onde Λ_j são mensuráveis disjuntos dois a dois, define-se:

$$\int f dP := \sum_{j=1}^n a_j P(\Lambda_j).$$

As notações $P(f)$, $\int_{\mathbb{R}} f(t) dP(t)$ também podem ser usadas para denotar $\int f dP$. Observe que $\int \chi_{\Lambda} dP = P(\Lambda)$, se Λ é um conjunto mensurável. Também convém notar que a aplicação $f \rightarrow P(f)$ definida no conjunto das funções simples é linear e satisfaz

$$\langle \xi, P(f)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\xi}(t),$$

e como

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_{\xi}(t) = \|f\|_{L^2_{\mu_{\xi}}}^2 \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \mu_{\xi}(\mathbb{R}) = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \right) \|\xi\|^2,$$

segue-se que a aplicação linear $P: \{\text{funções simples}\} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é contínua (o espaço das funções simples com a norma do sup).

Seja $B^{\infty}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções de Borel mensuráveis limitadas com a norma $\|f\|_{\infty} := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Como as funções simples constituem um conjunto denso em $B^{\infty}(\mathbb{R})$, existe uma única extensão de P a um operador linear limitado (e usando a mesma notação) $P: B^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathcal{H})$, tal que para toda $f \in B^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$\langle \xi, P(f)\eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\xi, \eta}(t)$$

e

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_{\xi}(t) \leq \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \right) \|\xi\|^2.$$

Lema 4. *Seja P uma resolução da identidade e considere a aplicação $P: B^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathcal{H})$. Se $(f_n) \subset B^{\infty}(\mathbb{R})$, $f_n \rightarrow f$ pontualmente e $(\|f_n\|_{\infty})$ é uma sequência limitada, então $f \in B^{\infty}(\mathbb{R})$ e*

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} P(f_n) = P(f).$$

Demonstração. Tem-se que $f \in B^{\infty}$, uma vez que o limite pontual de funções mensuráveis é uma função mensurável e, como existe $A > 0$ tal que $\|f_n\|_{\infty} \leq A$, segue-se pela convergência pontual que f é limitada.

Dado $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \|P(f_n)\xi - P(f)\xi\|^2 &= \|P(f_n)\xi - P(f)\xi\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)|^2 d\mu_{\xi}(t) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, pelo Teorema da Convergência Dominada, o que encerra a prova do lema. \square

O próximo passo é estender a aplicação P ao conjunto das funções de Borel ilimitadas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Defina

$$\text{dom } f := \left\{ \xi \in \mathcal{H}; f \in L^2_{\mu_{\xi}}(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ \xi \in \mathcal{H}; \int |f|^2 d\mu_{\xi} < +\infty \right\},$$

que é um espaço vetorial, pois $\mu_{a\xi}(\Lambda) = |a|^2\mu_\xi(\Lambda)$ e usando a desigualdade triangular tem-se que $\mu_{\xi+\eta}(\Lambda) \leq 2(\mu_\xi(\Lambda) + \mu_\eta(\Lambda))$ (para obtê-la, usa-se a relação $0 \leq \langle (\xi - \eta), P(\Lambda)(\xi - \eta) \rangle$). Pondo

$$\Lambda_n = \Lambda_n(f) := \{t \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq n\}, \quad f_n := f\chi_{\Lambda_n},$$

e para $\xi \in \text{dom } f$ esta sequência de funções converge para f em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$, pelo Teorema da Convergência Dominada. Portanto, (f_n) é uma sequência de Cauchy em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$. Como cada $f_n \in B^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\|P(f_n)\xi\|^2 = \int |f_n|^2 d\mu_\xi = \|f_n\|_{L^2_{\mu_\xi}}^2,$$

segue-se que $(P(f_n)\xi)_n$ é uma sequência de Cauchy em \mathcal{H} , e deste modo, converge a um vetor $P(f)\xi$, o que define a extensão desejada, com $\text{dom } P(f) = \text{dom } f$. Note que tal extensão $f \rightarrow P(f)$ é linear e contínua; note também que: com a notação $P(f) := \int f dP$, fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima obtém-se:

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int |f|^2 d\mu_\xi = \|f\|_{L^2_{\mu_\xi}}^2.$$

Lema 5. *Para cada função de Borel $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tem-se $\text{dom } f$ denso em \mathcal{H} . Então, a adjunta $P(f)^*$ está bem definida.*

Demonstração. Seja Λ_n como definido acima. Se $\xi \in \mathcal{H}$, considerando $\xi_n = P(\Lambda_n)\xi$, tem-se $\mu_{\xi_n} = \chi_{\Lambda_n}\mu_\xi$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_{\xi_n}(t) = \int_{\Lambda_n} |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) \leq n^2 \|\xi\|^2 < +\infty,$$

e então $\xi_n \in \text{dom } f$. Como $\chi_{\Lambda_n} \rightarrow 1$ em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$, quanto $n \rightarrow \infty$, e

$$\|\xi - \xi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |1 - \chi_{\Lambda_n}(t)|^2 d\mu_\xi(t),$$

obtém-se que $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{H} , quanto $n \rightarrow \infty$, pelo Teorema da Convergência Dominada. Portanto, $\text{dom } f$ é denso em \mathcal{H} . \square

Finalmente, apresentamos a seguir o Teorema Espectral, cuja demonstração pode ser vista em [9, p. 213], e o Cálculo Funcional Espectral para operadores autoadjuntos, cuja demonstração também pode ser vista em [9, p. 217].

Teorema 10 (Teorema Espectral). *A cada operador autoadjunto T corresponde uma única resolução da identidade P^T em \mathcal{H} tal que $T = \int tP^T(t)$.*

Teorema 11 (Cálculo Funcional Espectral). *Considere T um operador autoadjunto. Então, a aplicação $\Phi: B^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi(f) \equiv f(T) := P^T(f)$, é a única que satisfaz:*

- (a) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) = \Phi(g)\Phi(f)$, $\Phi(\lambda g) = \lambda\Phi(g)$, $\Phi(1) = I$ e $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$,
- (b) Φ é contínua, ou seja, $\|\Phi(f)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C \|f\|_\infty$,
- (c) Se $f(x) = x$, então $\Phi(f) = T$,
- (d) Se $T\psi = \lambda\psi$, então $\Phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$,
- (e) $\sigma[\Phi(f)] = \overline{\{f(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}}$.

2.4.1 Existência e unicidade de solução para a equação de Schrödinger

Seja T um operador autoadjunto e recorde que a equação de Schrödinger linear é dada por

$$\begin{cases} \partial_t \xi = -iT\xi, & t \in \mathbb{R}, \\ \xi(0) = \xi, & \xi \in \text{dom } T. \end{cases} \quad (\text{ES})$$

Provaremos agora existência e unicidade de soluções para (ES). De fato, seja $e^{-iTt} := f_t(T)$, onde $f_t(x) = e^{-ixt}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pelo Cálculo Funcional Espectral, $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo de evolução unitário.

Afirmção 15. T é o gerador infinitesimal de $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$.

Prova da afirmação: denote por A o gerador infinitesimal de $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$. Vamos mostrar que $A = T$. Por convergência dominada, para cada $\xi \in \text{dom } T$,

$$\left\| T\xi - \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1}{h} (e^{-iTh} - I)\xi \right\|^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| x - \frac{i}{h} (e^{-ixh} - 1) \right|^2 d\mu_{\xi}^T(x) = 0,$$

onde μ_{ξ}^T é a medida espectral de P^T associada a ξ . Assim, $\xi \in \text{dom } A$ e $A\xi = T\xi$, ou seja, $T \subset A$. Um argumento análogo ao apresentado anteriormente mostra que

$$\text{dom } A \subset \text{dom } T = \{ \xi \in \mathcal{H}; |\cdot| \in L^2_{\mu_{\xi}^T}(\mathbb{R}) \}.$$

Logo, $A = T$, como queríamos provar.

A afirmação está provada.

Como T é o gerador infinitesimal de $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$, pela Proposição 14, a curva $(e^{-iTt}\xi)_{t \in \mathbb{R}}$ é a única solução de (ES). Notamos que se $\xi \notin \text{dom } T$, então dizemos que a curva $(e^{-iTt}\xi)_{t \in \mathbb{R}}$ é uma solução fraca de (ES).

Capítulo 3

Localização dinâmica para perturbações de H_0

Neste capítulo, vamos discutir a persistência de espectro puramente pontual e localização dinâmica para H_0 sob perturbações suficientemente pequenas. As principais referências são [11, 15].

3.1 Localização dinâmica para H_0

Recordemos que se T é um operador autoadjunto em \mathcal{H} , então diz-se que T tem espectro puramente pontual se existir uma base ortonormal (e_j) de \mathcal{H} formada por autovetores de T . Neste caso, o espectro de T é o fecho do conjunto $\Sigma = \{\lambda_j\}$ em \mathbb{R} .

A seguir vamos mostrar que o espectro de H_0 é puramente pontual discreto e obter algumas estimativas para suas autofunções que serão úteis adiante.

Teorema 12. H_0 tem espectro puramente pontual discreto dado pelos inteiros.

Demonstração. Sejam $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que

$$H_0\psi = \lambda\psi. \quad (3.1)$$

Como, pelo Teorema de Plancherel, o operador $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ é um isomorfismo, existe $g \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $\mathcal{F}g = \psi$. Então,

$$\begin{aligned} H_0\psi = \lambda\psi &\Leftrightarrow H_0(\mathcal{F}g) = \lambda(\mathcal{F}g) \Leftrightarrow (\mathcal{F}g)_{k+1} + (\mathcal{F}g)_{k-1} + k(\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 e^{-2(k+1)\pi ix} g(x) dx + \int_0^1 e^{-2(k-1)\pi ix} g(x) dx + \frac{2k\pi i}{2\pi i} (\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 e^{-2k\pi ix} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} (e^{2\pi ix} + e^{-2\pi ix}) g(x) dx + \frac{2k\pi i}{2\pi i} (\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 e^{-2k\pi ix} [2 \cos(2\pi x) g(x)] dx + \frac{2k\pi i}{2\pi i} (\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{F} \{2 \cos[2\pi(\cdot)]g\})_k + \frac{2k\pi i}{2\pi i} (\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Consideremos a equação:

$$(\mathcal{F} \{2 \cos[2\pi(\cdot)]g\})_k + \frac{2k\pi i}{2\pi i} (\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Afirmção 16. *Seja $g \in C^1(\mathbb{T})$. g é solução de (3.2) se, e somente se, g é da forma*

$$g(x) = Ke^{-2i\text{isen}(2\pi x)}e^{2\pi imx}, \quad x \in \mathbb{T},$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$ e para alguma constante $K \in \mathbb{C}$; neste caso, deve-se ter $\lambda = m$.

Prova da afirmação:

Com efeito, pela Proposição 1, $2k\pi i(\mathcal{F}g)_k = (\mathcal{F}g')_k$, se $g \in C^1(\mathbb{T})$. Deste modo,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\{2\cos[2\pi(\cdot)]g\})_k + \frac{2k\pi i}{2\pi i}(\mathcal{F}g)_k &= (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \left(\mathcal{F}\{2\cos[2\pi(\cdot)]g\} + \mathcal{F}\left\{\frac{g'}{2\pi i}\right\} \right)_k &= (\mathcal{F}\lambda g)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \left(\mathcal{F}\left\{2\cos[2\pi(\cdot)]g + \frac{g'}{2\pi i} - \lambda g\right\} \right)_k &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3, isto ocorre, se, e somente se,

$$2\cos(2\pi x)g(x) + \frac{g'(x)}{2\pi i} - \lambda g(x) = 0, \quad \text{em quase todo } x \in \mathbb{T}.$$

Pela continuidade de g e g' , isto é equivalente à

$$g'(x) + [4\pi i \cos(2\pi x) - 2\pi i \lambda]g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Finalmente, esta equação equivale à

$$g'(x)e^{\int 4\pi i \cos(2\pi x) - 2\pi i \lambda dx} + [4\pi i \cos(2\pi x) - 2\pi i \lambda]g(x)e^{\int 4\pi i \cos(2\pi x) - 2\pi i \lambda dx} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Logo, deve-se ter $g(x) = Ke^{-2i\text{isen}(2\pi x)}e^{2\pi i \lambda x}$, para algum $K \in \mathbb{C}$ e para todo $x \in \mathbb{T}$. Como $g(0) = g(1)$, deve-se ter também $\lambda \in \mathbb{Z}$ e a afirmação está provada.

Mostraremos agora que o conjunto de soluções $\{g_m\}$, $m \in \mathbb{Z}$, $g_m(x) = e^{-2i\text{isen}(2\pi x)}e^{2m\pi ix}$, $x \in \mathbb{T}$, é um sistema ortonormal completo em $L^2(\mathbb{T})$. Como o conjunto $\{g_m\}$ é ortonormal, basta verificar que $\{g_m\}^\perp = \{0\}$. Seja $g \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $\langle g, g_m \rangle = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Tem-se

$$(\mathcal{F}ge^{2i\text{isen}(2\pi(\cdot))})_m = \int_0^1 g(x)e^{2i\text{isen}(2\pi x)}e^{-2m\pi ix} dx = \langle g, g_m \rangle = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Pela Proposição 3, tem-se $g(x)e^{2i\text{isen}(2\pi x)} = 0$, em quase todo ponto $x \in \mathbb{T}$. Logo, $g \equiv 0$ em $L^2(\mathbb{T})$. Isto mostra que $\{g_m\}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\mathbb{T})$. Ponhamos, para cada $m \in \mathbb{Z}$, $\psi_m \equiv \mathcal{F}g_m$. Pelo Teorema de Plancherel, segue-se que $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal completo em $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Resta, por fim, verificar que os autovalores de H_0 são somente os inteiros. Seja λ um autovalor de H_0 . Suponha, por absurdo, que $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Seja ψ um autovetor associado a λ . Como H_0 é autoadjunto, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Daí, $\langle \psi, \psi_m \rangle = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Pela Identidade de Parseval, segue-se que

$$\psi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle \psi, \psi_m \rangle \psi_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} 0 \cdot \psi_m = 0 \quad (\text{absurdo!}).$$

□

Observação 2.2 No que se segue, denotaremos as autofunções de H_0 como descritas no Teorema 12. Note que $(\psi_m)(n) = (\psi_0)(m - n)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Na prova da próxima proposição utilizaremos algumas propriedades da função de Bessel, que podem ser encontradas em [5].

Proposição 15. *Tem-se, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$,*

$$|(\psi_m)(n)| \leq \frac{1}{|m - n|!}.$$

Demonstração. É suficiente provar que $|(\psi_0)(n)| \leq 1/|n|!$. Tem-se

$$\begin{aligned} (\psi_0)(n) &= \int_0^1 e^{-2\pi i n x} e^{-2i \operatorname{sen}(2\pi x)} dx \\ &= \int_0^1 [\cos(2\pi x) - i \operatorname{sen}(2\pi n x)] [\cos(2\operatorname{sen}(2\pi x)) - i \operatorname{sen}(2\operatorname{sen}(2\pi x))] dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Relembre que para valores inteiros n , a função de Bessel J_n pode ser dada através da integral

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \operatorname{sen} \tau) d\tau.$$

Utilizando-se o fato de que para inteiros n , $J_{-n}(2) = (-1)^n J_n(2)$, obtemos

$$J_{-n}(2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\operatorname{sen}(\tau) + n\tau) d\tau.$$

Deste modo, efetuando-se as multiplicações, separando-se as partes real e imaginária da integral em (3.3) e efetuando-se a mudança de variáveis $y := 2\pi x$, obtemos em (3.3)

$$(\psi^0)_n = J_{-n}(2) - \int_0^1 i \operatorname{sen}(2(\operatorname{sen} 2\pi x + \pi n x)) dx. \quad (3.4)$$

Depois da mudança de variáveis $y := y(x) = 2\pi x - \pi$, $y(0) = -\pi$, $y(1) = \pi$ e usando que $\operatorname{sen}(\pi \pm x) = \mp \operatorname{sen}(x)$, obtém-se para o segundo termo em (3.4)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2\pi} \left(\operatorname{sen} \left(2(\operatorname{sen}(y + \pi) + \frac{n}{2}(y + \pi)) \right) \right) dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2\pi} \left(\operatorname{sen} \left(2(-\operatorname{sen} y + \frac{n}{2}(y + \pi)) \right) \right) dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois o integrando acima é uma função ímpar.

Convém observar que para valores não-negativos de n , tem-se

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

e daí,

$$J_n(2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \cdot 1 \leq \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = \frac{1}{n!} e^{-1} < \frac{1}{n!}.$$

Mais geralmente para qualquer inteiro n , utilizando-se novamente que $J_{-n}(2) = (-1)^n J_n(2)$, segue-se que $|J_{-n}(2)| \leq \frac{1}{n!}$. Então, por (3.4),

$$|\psi_0(n)| = |J_{-n}(2)| \leq \frac{1}{n!}$$

e a prova está completa. □

Agora verificaremos que H_0 tem LD (2). Começamos com uma breve revisão de como isso pode ser provado. Seja $\{\phi^k\}$ um conjunto ortonormal completo de autofunções de um operador autoadjunto T atuando em $\ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $T\phi^k = \lambda_k\phi^k$. Se $\psi = e^m$, $(e^m)_j = \delta_{mj}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, então

$$\psi(t, n) := (e^{-itT}\psi)_n = \sum_k e^{-it\lambda_k} (\phi^k)_n \overline{(\phi^k)_m},$$

e

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq Z(n, m), \quad \sup_t \langle |X|^q \rangle_{t, \psi} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p Z^2(n, m),$$

com

$$Z(n, m) = \sum_k |(\phi^k)_n (\phi^k)_m|.$$

Então, para provar LD (2) para qualquer condição inicial $\psi = e^m$, basta mostrar que a função $Z(n, m)$ decai suficientemente rápido quando $|n| \rightarrow \infty$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Uma maneira de obter tal propriedade é via um controle de autofunções que se denominou SULE [12, 18]. Neste caso, diz-se que T possui SULE se existir $\alpha > 0$ e, para cada autofunção ϕ_k , um $n_k \in \mathbb{Z}$ tal que, para qualquer $\delta > 0$,

$$|(\phi_k)(n)| \leq C(\delta) e^{\delta|n_k| - \alpha|n - n_k|}, \quad (3.5)$$

com algum $C(\delta)$ finito uniformemente em k, n . Segue-se, deste modo, que se T tem SULE, então a função $Z(n, m)$ decai exponencialmente em n para todo m e T tem LD. Esta será nossa maneira de provar LD para os modelos considerados nesse trabalho.

Teorema 13. H_0 tem localização dinâmica.

Demonstração. Vamos provar que H_0 tem SULE. Pela Proposição 15, tem-se

$$|(\psi_m)(n)| \leq \frac{1}{|n - m|!}.$$

Tomando-se $n_m = m$, precisamos mostrar que

$$\frac{1}{|n - m|!} < C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n - m|}.$$

Como $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{\alpha|n|}}{|n|!} < +\infty$ qualquer que seja $\alpha > 0$; para todo $\alpha > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|n|!} < C e^{-\alpha|n|},$$

para todo n . Portanto, fazendo $C(\delta) = C, \forall \delta > 0$, temos

$$|(\psi_m)(n)| \leq \frac{1}{|n - m|!} < C(\delta) e^{-\alpha|n - m|} < C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n - m|}, \quad \forall \delta > 0.$$

Isto conclui a prova. □

3.2 Localização dinâmica para o operador perturbado

Teorema 14. *Seja T um operador autoadjunto em \mathcal{H} com $\dim\mathcal{H} = +\infty$. São equivalentes:*

- (a) *Existe uma base ortonormal (e_j) de \mathcal{H} formada por autovetores de T , i.e., $Te_j = \lambda_j e_j$, com autovalores reais λ_j formando um conjunto discreto. Além disso, cada um desses autovalores tem multiplicidade finita e $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = +\infty$.*
- (b) *$R_z(T)$ é um operador compacto para algum $z \in \rho(T)$ (e assim para todos $z \in \rho(T)$).*

Teorema 15. *Se $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, então $H_V = H_0 + V$ possui espectro puramente pontual discreto. Além disso, cada um de seus autovalores λ_j tem multiplicidade finita e $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = +\infty$.*

Demonstração. Note que pelo Corolário 4, segue-se que H_V é autoadjunto. Deste modo, pelo Lema 3, $i \in \rho(H_V) \cap \rho(H_0)$. Pelos Teoremas 12 e 14, $R_i(H_0)$ é compacto.

Agora, pela segunda identidade do resolvente (Proposição 11),

$$R_i(H_V) = R_i(H_0) - R_i(H_0)VR_i(H_V) = R_i(H_0)(I - VR_i(H_V)).$$

Como V e $R_i(H_V)$ são limitados, $I - VR_i(H_V)$ é limitado. Então, pela compacidade de $R_i(H_0)$, segue-se que $R_i(H_0)(I - VR_i(H_V))$ é, também, compacto. Deste modo, pela igualdade acima, $R_i(H_V)$ é compacto. Logo, o resultado segue do Teorema 14. \square

O fato de H_V ter espectro puramente pontual discreto não nos permite concluir LD. De fato, precisamos de mais informações sobre suas autofunções. Nosso objetivo agora é mostrar que para $\|V\|_\infty$ suficientemente pequeno, LD está presente. Para tanto, como já mencionado, empregaremos um método de diagonalização baseado no bem conhecido procedimento iterativo devido originalmente a Kolmogorov, Arnold e Moser (KAM).

Começamos com a introdução de notações pertinentes e um espaço. Para $r > 0$, denotemos por $\mathcal{A}(r)$ o conjunto dos operadores lineares a em $\ell^2(\mathbb{Z})$ com representação matricial $a = \{a_{nm}\}$ na base $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de autovetores de H_0 , i.e., $a_{nm} := \langle \psi_n, a\psi_m \rangle$, $n, m \in \mathbb{Z}$, e definamos uma norma

$$\|a\|_r := \sup_n \sum_m |a_{nm}| e^{r|n-m|} < \infty.$$

Pode-se verificar que $(\mathcal{A}(r), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Banach (ver [15] para detalhes); neste caso, se $a, c \in \mathcal{A}(r)$, então $ac, ca \in \mathcal{A}(r)$ e

$$\|ac\|_r, \|ca\|_r \leq \|a\|_r \|c\|_r.$$

Um operador linear a , não necessariamente em $\mathcal{A}(r)$ é diagonal se $a_{nm} = 0$ para $n \neq m$ (note que o termo diagonal aqui está relacionado à base ortonormal específica (ψ_m) de $\ell^2(\mathbb{Z})$). Por construção, H_0 é diagonal com elementos de representação matricial $(H_0)_{nm} = n\delta_{nm}$, enquanto que para o operador perturbado $(H_V)_{nm} = n\delta_{nm} + V_{nm}$. Para o texto inteiro, denote por \dot{b} o operador linear com elementos matriciais

$$\dot{b}_{nm} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n-l|!|m-l|!}.$$

Definamos

$$\|\dot{b}\|_0 := \inf_{r>0} \|\dot{b}\|_r.$$

O principal resultado discutido neste trabalho é o seguinte.

Teorema 16. *Seja $V \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Se*

$$\|V\|_\infty < \frac{1}{20\|\dot{b}\|_0},$$

então existem $r > 0$ e um operador invertível $P \in \mathcal{A}(r)$ tais que

$$P^{-1}H_V P$$

é um operador diagonal com espectro simples e discreto cujos autovetores são ψ_m , $m \in \mathbb{Z}$.

Verificaremos agora que, para V como no Teorema 16, os autovetores de H_V satisfazem (3.5), isto é, H_V tem SULE, particularmente LD.

Pelo Teorema 15, H_V tem espectro discreto. Determinou-se que seus autovetores são $\{P\psi_m\}$, com $P \in \mathcal{A}(r)$, para algum $r > 0$, operador que diagonaliza H_V , e $\{\psi_m\}$ os autovetores de H_0 . Tais autovetores constituem um sistema ortonormal completo em $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Como $\frac{1}{|m' - n|!}$ decai mais rapidamente que qualquer exponencial quando $|m' - n| \rightarrow \infty$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|(\psi_{m'})_n| \leq C_1 \frac{e^{-r|m'-n|}}{1 + |m' - n|^2},$$

para todo $m', n \in \mathbb{Z}$. Para $\{P\psi_m\}$, como $P \in \mathcal{A}(r)$, tem-se

$$\begin{aligned} |(P\psi_m)_n| &= |\langle e_n, P\psi_m \rangle| = \left| \sum_k \langle e_n, \psi_k \rangle \langle \psi_k, P\psi_m \rangle \right| \\ &\leq \sum_k |P_{km}| |(\psi_k)_n| \\ &\leq \sum_k C e^{-r|k-m|} \frac{1}{|n-k|!} \\ &\leq \sum_k C e^{-r|k-m|} \frac{C_1 e^{-r|n-k|}}{(1 + (n-k)^2)} \\ &\leq C_2 \sum_k \frac{e^{-r|n-m|}}{(1 + (n-k)^2)} \\ &\leq e^{-r|n-m|} \sum_k \frac{C_2}{(1 + (n-k)^2)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como a última soma é convergente e independe de m, n , tem-se

$$|(P\psi_m)_n| \leq \tilde{C} e^{-r|n-m|},$$

um caso particular de SULE.

3.3 Prova do resultado principal

Esta seção é destinada à prova do Teorema 16. O operador identidade é denotado por I ; então $I_{nm} = \delta_{nm}$, e note que $\|I\|_r = 1$, para todo $r > 0$. A diagonal do operador a será denotada

por $\text{diag } a$, isto é, $(\text{diag } a)_{nm} = a_{nn}\delta_{nm}$. Se $a \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ (este é o caso de nossos potenciais V), temos a norma usual $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$.

Repetidamente usaremos o fato de que se $a \in \mathcal{A}(r)$ com $\|a - I\|_r < 1$, então a é invertível em $\mathcal{A}(r)$ e

$$\|a^{-1} - I\|_r \leq \frac{\|a - I\|_r}{1 - \|a - I\|_r}. \quad (3.7)$$

Alguns resultados preliminares:

A prova do lema abaixo apresentada em [11] envolve uma estimativa numérica. Por isso, será omitida.

Lema 6. *Se $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, então*

$$|a_{nm}| \leq \|a\|_\infty \dot{b}_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Ademais, \dot{b} pertence a $\mathcal{A}(r)$ para todo $r \geq 0$.

Lema 7. *Temos a inclusão natural $\ell^\infty(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}(r)$, para todo $r \geq 0$, visto que para $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $\|a\|_r \leq \|a\|_\infty \|\dot{b}\|_r$. Adicionalmente, dado $\theta > 0$, para $\|a\|_\infty$ suficientemente pequeno,*

$$\|a\|_r \leq \theta. \quad (3.8)$$

Demonstração. Pelo Lema 6,

$$\|a\|_r = \sup_n \sum_m |a_{nm}| e^{r|n-m|} \leq \sup_n \sum_m \|a\|_\infty \dot{b}_{nm} e^{r|n-m|} = \|a\|_\infty \|\dot{b}\|_r,$$

e o resultado segue tomando-se $\|a\|_\infty \leq \theta / \|\dot{b}\|_r$. □

Agora um lema importante para o processo indutivo; $[a, c] = ac - ca$ é o comutador dos operadores a e c .

Lema 8. *Fixe $r > 0$. Sejam G um operador diagonal e $B \in \mathcal{A}(r)$ com*

$$(G + \text{diag } B)_{nm} = g_n + B_{nn} \in \mathbb{R}$$

e

$$|(g_n + B_{nn}) - (g_m + B_{mm})| > K, \quad \forall m \neq n \text{ e para algum } K > 0. \quad (3.9)$$

Dado $B \in \mathcal{A}(r)$, existe $W \in \mathcal{A}(r)$ resolvendo

$$[G + \text{diag } B, W] + B - \text{diag } B = 0 \quad (3.10)$$

com $W_{nn} = 1$, para todo n . Ademais,

$$\|W - I\|_r \leq \frac{1}{K} \|B\|_r. \quad (3.11)$$

Demonstração. Queremos encontrar W tal que

$$B - \text{diag } B = W(G + \text{diag } B) - (G + \text{diag } B)W,$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} (B - \text{diag } B)_{nm} &= (W(G + \text{diag } B))_{nm} - ((G + \text{diag } B)W)_{nm} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_{nj}(G + \text{diag } B)_{jm} - (G + \text{diag } B)_{nj}W_{jm}. \end{aligned}$$

Como $G + \text{diag } B$ é diagonal, isto equivale a procurar solução para

$$(B - \text{diag } B)_{nm} = W_{nm}(g_m + B_{mm}) - (g_n + B_{nn})W_{nm}.$$

Obtemos, então, uma solução \tilde{W}_{nm} para a equação acima dada por

$$\tilde{W}_{nm} = \begin{cases} \frac{B_{nm}}{(g_m + B_{mm}) - (g_n + B_{nn})}, & n \neq m, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Resta, agora, verificarmos que $\tilde{W} \in \mathcal{A}(r)$: devido a (3.9), para $m \neq n$,

$$|\tilde{W}_{nm}| = \frac{|B_{nm}|}{|(g_m + B_{mm}) - (g_n + B_{nn})|} \leq \frac{1}{K}|B_{nm}|;$$

portanto,

$$\begin{aligned} \|\tilde{W}\|_r &= \sup_n \sum_m e^{r|n-m|} |\tilde{W}_{nm}| = \sup_n \sum_{m \neq n} e^{r|n-m|} \frac{|B_{nm}|}{|(g_m + B_{mm}) - (g_n + B_{nn})|} \\ &\leq \frac{1}{K} \sup_n \sum_{m \neq n} e^{r|n-m|} |B_{nm}| \\ &\leq \frac{1}{K} \|B\|_r. \end{aligned}$$

Isto encerra a prova do lema, uma vez que se \tilde{W} é uma solução de (3.10), então $W := \tilde{W} + I$ é também uma solução e (3.11) vale para $(W - I)$. \square

Prova do Teorema 16:

Denotamos $D = D^0 = H_0$, $V^0 = V$ e $P^0 = I$; então, $H_V = D + V$. Considere

$$(P^0)^{-1}(D + V)P^0 = D^0 + V^0 = (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0); \quad (3.12)$$

gostaríamos de encontrar um operador linear invertível W^0 tal que

$$(W^0)^{-1}(D + V)W^0 = \text{operador diagonal.}$$

Note que: se $V^0 = 0$, então o operador identidade $W^0 = I$ é uma solução desejada. Para provarmos o Teorema 16, empregaremos o método de diagonalização baseado no bem conhecido procedimento iterativo devido originalmente a Kolmogorov, Arnold e Moser (KAM).

Dividiremos a processo em passos e depois verificaremos a convergência.

Escolha de $r > 0$.

Como $\|\dot{b}\|_0 < \frac{1}{20\|V\|_\infty}$, e $\|\dot{b}\|_0 = \inf_{r>0}\|\dot{b}\|_r$, existe $r > 0$ tal que

$$\|\dot{b}\|_0 \leq \|\dot{b}\|_r < \frac{1}{20\|V\|_\infty}.$$

Primeiro passo $k = 0$:

Ponha $D = D^0 = H_0$, $V^0 = V$ e $P^0 = I$; portanto

$$(P^0)^{-1}(D + V)P^0 = D^0 + V^0 = (D^0 + \text{diag } V^0) + (V^0 - \text{diag } V^0). \quad (3.13)$$

$D^0 + \text{diag } V^0$ é um operador diagonal com $(D^0 + \text{diag } V^0)_{nn} = \lambda_n^0 = n + V_{nn}^0$. Ademais, note que

$$\|V_0\|_r \leq \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_r < \|V\|_\infty \cdot \frac{1}{20\|V\|_\infty} = \frac{1}{20} < \frac{1}{4}.$$

Deste modo, usando-se o fato de $|V_{nn}^0| \leq |V^0|_r$, qualquer que seja m não negativo, se $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned} |\lambda_n^0 - \lambda_m^0| &= |n + V_{nn}^0 - (m + V_{mm}^0)| = |(n - m) - (V_{mm}^0 - V_{nn}^0)| \geq |n - m| - |V_{mm}^0 - V_{nn}^0| \\ &\geq 1 - |V_{nn}^0 - V_{mm}^0| \geq 1 - (|V_{nn}^0| + |V_{mm}^0|) \geq 1 - 2\|V^0\|_r > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Existe, então, $\frac{1}{2} < K_0 < 1$ tal que

$$|\lambda_n^0 - \lambda_m^0| \geq K_0.$$

Pelo Lema 8, existe uma solução $W^0 \in \mathcal{A}(r)$ de

$$[D^0 + \text{diag } V^0, W^0] + V^0 - \text{diag } V^0 = 0 \quad (3.14)$$

com

$$\text{diag } (W^0 - I) = 0,$$

e para $C_0 = 1/K_0 \geq 1$,

$$\|W^0 - I\|_r \leq C_0 \|V^0\|_r. \quad (3.15)$$

Note que $1 \leq C_0 \leq 2$. Então, como $\|V^0\|_r < \frac{1}{4}$, tem-se

$$C_0 \|V^0\|_r < 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Daí,

$$\|W^0 - I\|_r < \frac{1}{2} < 1.$$

Segue-se daí, usando (3.7), que W^0 é invertível. Então,

$$\begin{aligned} (W^0)^{-1}(P^0)^{-1}(D + V)P^0W^0 &\stackrel{(3.13)}{=} (W^0)^{-1}(D^0 + \text{diag } V^0)W^0 + (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)W^0 \\ &\stackrel{(3.14)}{=} (W^0)^{-1}(W^0(D^0 + \text{diag } V^0)) - (W^0)^{-1}((V^0 - \text{diag } V^0)) \\ &\quad + (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)W^0 =: D^1 + V^1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^1)^{-1}(D + V)P^1 = D^1 + V^1,$$

com

$$\begin{cases} P^1 &= P^0W^0 \\ D^1 &= D^0 + \text{diag } V^0 \\ V^1 &= (W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)(W^0 - I). \end{cases}$$

Novamente por (3.7) e, utilizando-se o fato de que $C_0 \|V^0\|_r < \frac{1}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|(W^0)^{-1} - I\|_r &\leq \frac{\|W^0 - I\|_r}{1 - \|W^0 - I\|_r} \leq \frac{\|W_0 - I\|_r}{1 - C_0 \|V^0\|_r} \\ &\leq 2 \|W^0 - I\|_r < 1. \end{aligned}$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} \|V^1\|_r &= \|(W^0)^{-1}(V^0 - \text{diag } V^0)(W^0 - I)\|_r \\ &\leq \|(W^0)^{-1}\|_r \|V^0\|_r \|W^0 - I\|_r. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^0)^{-1}\|_r = \|(W^0)^{-1} - I + I\|_r \leq \|(W^0)^{-1} - I\|_r + \|1\|_r < 2,$$

define-se θ_1 através de

$$\|V^1\|_r \leq 2 \|V^0\|_r \|W^0 - I\|_r \leq 2C_0 \|V^0\|_r^2 =: \theta_1^2.$$

Ademais,

$$\|V^1\|_r \leq 2C_0 \|V^0\|_r^2 < 2 \cdot 2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Segundo passo $k = 1$:

Seja $D^1 + \text{diag } V^1$ o operador diagonal com

$$(D^1 + \text{diag } V^1)_{nn} = \lambda_n^1 = \lambda_n^0 + (\text{diag } V^1)_{nn} = n + V_{nn}^0 + V_{nn}^1,$$

e, como $\|V^1\|_r < \frac{1}{4}$,

$$|\lambda_n^1 - \lambda_m^1| > \frac{1}{2} > 0, \quad \forall n \neq m.$$

Existe, então, $\frac{1}{2} \leq K_1 \leq K_0 \leq 1$ tal que

$$|\lambda_n^1 - \lambda_m^1| > K_1,$$

se $m \neq n$. Pelo Lema 8, existe uma solução $W^1 \in \mathcal{A}(r)$ para

$$[D^1 + \text{diag } V^1, W^1] + V^1 - \text{diag } V^1 = 0, \quad (3.16)$$

com

$$\text{diag}(W^1 - I) = 0,$$

e, para $C_1 = 1/K_1 \geq 1$,

$$\|W^1 - I\|_r \leq C_1 \|V^1\|_r < \frac{1}{2} < 1. \quad (3.17)$$

Segue-se daí, utilizando-se (3.7), que W^1 é invertível. Então,

$$\begin{aligned} (W^1)^{-1}(P^1)^{-1}(D + V)P^1W^1 &\stackrel{(3.13)}{=} (W^1)^{-1}(D^1 + \text{diag } V^1)W^1 + (W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)W^1 \\ &\stackrel{(3.16)}{=} (W^1)^{-1}(W^1(D^1 + \text{diag } V^1)) - (W^1)^{-1}((V^1 - \text{diag } V^1)) \\ &\quad + (W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)W^1 =: D^2 + V^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^2)^{-1}(D + V)P^2 = D^2 + V^2,$$

com

$$\begin{cases} P^2 &= P^1W^1 \\ D^2 &= D^1 + \text{diag } V^1 \\ V^2 &= (W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)(W^1 - I). \end{cases}$$

Novamente utilizando-se (3.7) e o fato de que $C_1 \|V^1\|_r < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \|(W^1)^{-1} - I\|_r &\leq \frac{\|W^1 - I\|_r}{1 - \|W^1 - I\|_r} \leq \frac{\|W^1 - I\|_r}{1 - C_1 \|V^1\|_r} \\ &\leq 2 \|W^1 - I\|_r < 1, \end{aligned}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \|V^2\|_r &= \|(W^1)^{-1}(V^1 - \text{diag } V^1)(W^1 - I)\|_r \\ &\leq \|(W^1)^{-1}\|_r \|V^1\|_r \|W^1 - I\|_r. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^1)^{-1}\| = \|(W^1)^{-1} - I + I\|_r \leq \|(W^1)^{-1} - I\|_r + \|I\|_r < 2,$$

define-se θ_2 por

$$\begin{aligned} \|V^2\|_r &\leq 2 \|V^1\|_r \|W^1 - I\|_r < 2C_1 \|V^1\|_r^2 \\ &\leq 8C_1C_0^2 \|V^0\|_r^4 =: \theta_2^2. \end{aligned}$$

Ademais, como $C_1, C_0 \leq 2$ e $\|V^0\|_r < \frac{1}{4}$, pela desigualdade acima temos

$$\|V^2\|_r \leq 8C_1C_0^2 \|V^0\|_r^4 < 2^3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{4}.$$

Passo $k + 1$:

Suponha que possamos encontrar, para algum $k \in \mathbb{N}$,

1. Um operador $V^k \in \mathcal{A}(r)$ tal que $\|V^k\|_r < \frac{1}{4}$, satisfazendo

$$\|V^k\|_r \leq \theta_k^{2^k},$$

com

$$\theta_k = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (2C_j)^{2^{-j-1}} \right\} \|V^0\|_r. \quad (3.18)$$

2. Um operador diagonal D^k com $(D^k + \text{diag } V^k)_{nn} = \lambda_n^k = \lambda_n^{k-1} + V_{nn}^k$ satisfazendo, para algum $1 \geq K_k \geq \frac{1}{2}$,

$$|\lambda_n^k - \lambda_m^k| > K_k, \quad \forall n \neq m \quad (3.19)$$

tal que

$$(P^k)^{-1}(D + V)P^k = D^k + V^k, \quad (3.20)$$

com $P^k = W^0 W^1 \dots W^{k-1}$.

Mostraremos que 1. e 2. valem para $k + 1$.

Pelo Lema 8, existe uma solução $W^k \in \mathcal{A}(r)$ para

$$[D^k + \text{diag } V^k, W^k] + V^k - \text{diag } V^k = 0 \quad (3.21)$$

com

$$\text{diag } (W^k - I) = 0.$$

Ademais, para $C_k = 1/K_k \geq 1$,

$$\|W^k - I\| \leq C_k \|V^k\|_r < 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (3.22)$$

Segue-se por (3.7) que W^k é invertível. Então,

$$\begin{aligned} (W^k)^{-1}(P^k)^{-1}(D + V)P^k W^k &\stackrel{(3.13)}{=} (W^k)^{-1}(D^k + \text{diag } V^k)W^k + (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)W^k \\ &\stackrel{(3.21)}{=} (W^k)^{-1}(W^k(D^k + \text{diag } V^k)) - (W^k)^{-1}((V^k - \text{diag } V^k)) \\ &\quad + (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)W^k =: D^{k+1} + V^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(P^{k+1})^{-1}(D + V)P^{k+1} = D^{k+1} + V^{k+1},$$

com

$$\begin{cases} P^{k+1} &= P^k W^k; \\ D^{k+1} &= D^k + \text{diag } V^k; \\ V^{k+1} &= (W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)(W^k - I). \end{cases}$$

Como $C_k \|V^k\|_r < \frac{1}{2}$, novamente empregando-se (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \|(W^k)^{-1} - I\|_r &\leq \frac{\|W^k - I_r\|}{1 - \|W^k - I_r\|} \leq \frac{\|W^k - I\|_r}{1 - C_k \|V^k\|_r} \\ &\leq 2 \|W^k - I\|_r < 1. \end{aligned}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \|V^{k+1}\|_r &= \|(W^k)^{-1}(V^k - \text{diag } V^k)(W^k - 1)\|_r \\ &\leq \|(W^k)^{-1}\|_r \|V^k\|_r \|W^k - I\|_r. \end{aligned}$$

Como

$$\|(W^k)^{-1}\|_r = \|(W^k)^{-1} - I + I\|_r \leq \|(W^k)^{-1} - I\|_r + \|1\|_r < 2,$$

define-se θ_{k+1} por

$$\|V^{k+1}\|_r \leq 2 \|V^k\|_r \|W^k - I\|_r \leq 2C_k \theta_k^{2^k} =: \theta_{k+1}^{2^{k+1}}.$$

Temos também que $\|V^{k+1}\|_r < \frac{1}{4}$, pois

$$\|V^{k+1}\|_r \leq 2 \|V^k\|_r \|W^k - I\|_r < 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Mostremos agora que existe $\frac{1}{2} \leq K_{k+1} \leq K_k \leq 1$ tal que dados m, n inteiros não-negativos distintos, vale $|\lambda_n^{k+1} - \lambda_m^{k+1}| \geq K_{k+1}$. Sejam m, n inteiros não-negativos distintos. Temos

$$|\lambda_n^{k+1} - \lambda_m^{k+1}| = |(m - n) - (V_{nn}^{k+1} + V_{mm}^{k+1})| \geq 1 - 2 \|V^{k+1}\|_r \geq \frac{1}{2}.$$

Pode-se então escolher K_{k+1} tal que $\frac{1}{2} \leq K_{k+1} \leq K_k \leq 1$ e $|\lambda_n^{k+1} - \lambda_m^{k+1}| \geq K_{k+1}$, se $m \neq n$.

Convergência

Mostraremos agora que o processo iterativo converge quando $k \rightarrow \infty$, isto é,

- (a) $\theta_k \rightarrow \theta_\infty$, $\theta_\infty < \frac{1}{5}$.
- (b) P^k é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{A}(r)$, a fim de que exista $P \in \mathcal{A}(r)$ tal que $P^k \rightarrow P$.
 $P \neq 0$.
- (c) $V^k \rightarrow 0$ em $\mathcal{A}(r)$.

Verificação de (a):

Verificaremos agora que existe $0 < \theta_\infty < \frac{1}{5}$ tal que $\theta_k \rightarrow \theta_\infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Ponhamos $\theta_0 := \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_r$. Por (3.18) segue-se que

$$\theta_k = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (2C_j)^{2^{-j-1}} \right\} \|V^0\|_r \leq \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (2C_j)^{2^{-j-1}} \right\} \theta_0.$$

Note que a sequência $(C_k)_{k \geq 0}$ é tal que $1 \leq C_k \leq 2$. Assim, segue-se que $(\theta_k)_{k \geq 0}$ é monótona e limitada, pois

$$\theta_k \leq \prod_{j=0}^{k-1} (2C_j)^{2^{-j-1}} \theta_0 \leq 4^{\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1}} \theta_0 = 4\theta_0.$$

Deste modo, existe θ_∞ tal que $\theta_k \rightarrow \theta_\infty$. Da desigualdade acima, $\theta_\infty \leq 4\theta_0$. Como definimos, $\theta_0 = \|V\|_\infty \|\dot{b}\|_r$. Da desigualdade $\|\dot{b}\|_r < \frac{1}{20\|V\|_\infty}$ segue-se que:

$$\theta_\infty \leq 4\theta_0 = 4\|V\|_\infty \|\dot{b}\|_r < 4\|V\|_\infty \cdot \frac{1}{20\|V\|_\infty} = \frac{1}{5}.$$

Verificação de (b):

Mostraremos que P^k converge em $\mathcal{A}(r)$ para algum $P \neq 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Note que

$$C_k \|V^k\|_r \leq C_k \theta_k^{2^{k+1}} \leq \theta_\infty^{2^k} < 1. \quad (3.23)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|P^k - P^{k-1}\|_r &= \|P^{k-1}W^{k-1} - P^{k-1}\|_r \leq \|P^{k-1}\|_r \|W^{k-1} - I\|_r \\ &\leq (\|W^0 - I\|_r + \|1\|_r)(\|W^1 - I\|_r + \|1\|_r) \\ &\quad \dots (\|W^{k-2} - I\|_r + \|1\|_r)(\|W^{k-1} - I\|_r) \\ &= \prod_{j=0}^{k-2} (\|W^j - I\|_r + \|1\|_r) \|W^{k-1} - I\|_r \\ &\leq \|W^{k-1} - I\|_r \prod_{j=0}^{k-2} (\theta_\infty^{2^j} + 1). \end{aligned}$$

Por (3.22) e (3.23), tem-se

$$\|P^k - P^{k-1}\|_r \leq 2\theta_\infty^{2^{k-1}}. \quad (3.24)$$

Suponha que $m < k$; então, como $\theta_\infty < 1$,

$$\begin{aligned} \|P^k - P^m\|_r &\leq \|P^k - P^{k-1}\|_r + \|P^{k-1} - P^{k-2}\|_r + \dots + \|P^{m+1} - P^m\|_r \\ &\leq 2 \sum_{j=m}^{k-1} \theta_\infty^{2^j} \leq 2\theta_\infty^{2^m} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j = \frac{2\theta_\infty^{2^m}}{1 - \theta_\infty} \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Como $\theta_\infty < h$, segue-se também que

$$\begin{aligned} \|P^k - I\|_r &\leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \|W^j - I\|_r \leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \theta_\infty^{2^j} \\ &\leq 2\theta_\infty \sum_{j=0}^{\infty} \theta_\infty^j = \frac{2\theta_\infty}{1 - \theta_\infty} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, quando $k \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\|P - I\|_r \leq \frac{2\theta_\infty}{1 - \theta_\infty} < 1$$

Agora, por (3.7),

$$\|(P)^{-1} - I\|_r \leq \frac{\|P - I\|_r}{1 - \|P - I\|_r} \leq \frac{2\theta_\infty}{1 - 3\theta_\infty} < 1$$

e vê-se que P é invertível em $\mathcal{A}(r)$, em particular, $P \neq 0$. Portanto,

$$\|P\|_r \leq 2 \text{ e } \|(P^{-1})\|_r \leq 2.$$

Verificação de (c):

Por indução e usando (3.23), obtém-se

$$\|V^k\|_r \leq \theta_k^{2^k} \leq \theta_0 \theta_\infty^{2^k - 1}, \quad (3.25)$$

e então $V^k \rightarrow 0$ em $\mathcal{A}(r)$. Ademais,

$$(P)^{-1} H_V P = H_0 + \sum_{k \geq 0} \text{diag } V^k$$

é um operador diagonal cujos autovalores são

$$\lambda_n^\infty := n + \sum_{k \geq 0} (\text{diag } V^k)_{nn}. \quad (3.26)$$

O teorema está, portanto, demonstrado.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Quantum quasiballistic dynamics and thick point spectrum. *Lett. Math. Phys.* **109** (2019), 1891–1906.
- [2] J.M. Barbaroux, F. Germinet, and S. Tcheremchantsev, Fractal dimensions and the phenomenon of intermittency in quantum dynamics. *Duke Math. J.* **110** (2001), 161–194.
- [3] R. Bartle. *The Elements of Integration*. John Wiley and Sons, (1966).
- [4] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, (2015).
- [5] W. Bell. *Special Functions For Scientists And Engineers*. Van Nostrand, (1968).
- [6] E. Carneiro. *Teoria básica das séries de Fourier*. IMPA-Rio de Janeiro, (2015).
- [7] S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Generic quasilocalized and quasiballistic discrete Schrödinger operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 129–141.
- [8] D. Damanik, Schrödinger operators with dynamically defined potentials. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **37** (2017), 1681–1764.
- [9] C. R. de Oliveira, *Intermediate Spectral Theory And Quantum Dynamics*. Birkhäuser, (2009).
- [10] G. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques And Their Applications*. John Wiley and Sons, (1999).
- [11] C. R. de Oliveira and M. Pigossi, Proof of dynamical localization for perturbations of discrete 1D Schrödinger operators with uniform electric fields. *Math. Z.* **291** (2019), 1525–1541.
- [12] R. Del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon B, Operators with singular continuous spectrum, IV: Hausdorff dimensions, rank one perturbations and localization. *J. Anal. Math.* **69** (1996), 153–200.
- [13] Y. Last, Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra. *J. Funct. Anal.* **42** (1996), 406–445.
- [14] H. N. Nazareno, C. A. A. da Silva, P. E. de Brito, Dynamical localization in aperiodic 1D systems under the action of electric fields. *Superlattices Microstruct.* **18** (1995), 297–307.
- [15] M. Pigossi, *Localização dinâmica para perturbações de operadores de Schrödinger discretos com campo elétrico*. PhD Thesis - UFSCar, (2018).
- [16] M. Reed, B. Simon. *Methods of Mathematical Physics*. Academic Press, (1980).

- [17] E. M. Stein and G. Weiss. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces. Princeton University Press, (1973).
- [18] S. Tcheremchantsev, How to prove dynamical localization. Commun. Math. Phys. **221** (2001), 27–56.