UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
***CAMPUS* VALE DO RIO MADEIRA – CVRM**
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, AGRICULTURA E AMBIENTE – IEEA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E HUMANIDADES – PPGECH

IVANI VALENTIM DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM ANÁLISE DE REGRESSÃO

Uma proposta de sequências didáticas com uso do *software Geogebra*

HUMAITÁ
2022

IVANI VALENTIM DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM ANÁLISE DE REGRESSÃO

Uma proposta de sequências didáticas com uso do *software Geogebra*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades (PPGECH), do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente, da Universidade Federal do Amazonas (IEAA/UFAM), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Humanidades.

Orientador: Marcos André Braz Vaz.

HUMAITÁ

2022

Ficha Catalográfica

S586r Silva, Ivani Valentim da

Registros de representações semióticas em análise de regressão: uma proposta de sequências didáticas com uso do *software Geogebra* / Ivani Valentim da Silva. – 2022.

94 f.

Orientador: Marcos André Braz Vaz.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades) – Universidade Federal do Amazonas.

1. Ensino de Estatística. 2. Tecnologias digitais. 3. Contrato didático 4. Ensino-aprendizagem. 5. Matemática. I. Vaz, Marcos André Braz. II. Universidade Federal do Amazonas. III. Título.

IVANI VALENTIM DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM ANÁLISE DE REGRESSÃO

Uma proposta de sequências didáticas com uso do *software Geogebra*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades (PPGECH), do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente, da Universidade Federal do Amazonas (IEAA/UFAM), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Humanidades.

Data: ___________

BANCA EXAMINADORA

____

Presidente: Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz (Orientador)

____

Membro externo titular: Prof. Dr. Romildo Pereira da Cruz

____

Membro interno titular: Prof.ª Dr.ª Elrismar Auxiliadora Gomes Oliveira

À memória de meu sobrinho Gean Fábio Silva Matos, que assim como tantos outros profissionais de saúde, lutou bravamente na linha de frente de combate à Covid-19 e não resistiu à infecção provocada pelo SARS-C0v-2.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, que apesar de não terem frequentado à escola básica, sempre me motivaram a buscar o conhecimento como fonte de sobrevivência. Pelos mapas na parede da sala, pelos livros e pelos questionamentos que despertaram minha (e dos meus irmãos) curiosidade e expectativa em relação à educação formal.

Aos professores pela paciência e dedicação. Agradeço em especial ao meu orientador Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz, que aceitou o desafio de me orientar nessa jornada até então desconhecida. Obrigado pela confiança, mesmo nas maiores dificuldades.

Agradeço aos colegas de curso com os quais dividi as alegrias, as expectativas e as dificuldades durante todo o período do curso.

Agradeço à minha noiva Francieli Suzana Curtarelli pela companhia, paciência e contribuição nos feriados, férias e finais de semana de estudos.

Por fim, agradeço a Deus pelo sopro de esperança que me impulsionou a chegar até aqui.

SILVA, Ivani Valentim da. **Registros de representações semióticas em análise de regressão**: uma proposta de sequências didáticas com base no dinamismo e interatividade do *software Geogebra*. 2022. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Humanidades)- Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Humanidades, Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente, Universidade Federal do Amazonas, Humaitá, 2022.

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa foi avaliar a eficiência do *software GeoGebra* para abordar os conceitos matemáticos contidos na regressão linear simples. Partimos do pressuposto de que o software possui os recursos necessários para auxiliar o aluno na criação de representações dos objetos matemáticos envolvidos nessa análise. Para fundamentar nossas expectativas, quanto aos benefícios ao processo de ensino-aprendizagem que a ferramenta pode trazer, recorremos à Teoria dos Registros de Representações Semióticas, segundo a qual o objeto matemático só pode ser apreendido por meio de representações e que a qualidade e variedade dessas representações são fundamentais para a aprendizagem. A metodologia utilizada foi a Engenharia Didática, através do confronto das análises a priori, e as análises a posteriori, feito após a implementação de uma sequência didática, realizada por meio de um processo experimental, em uma turma da 3ª série do Ensino Médio em uma Escola de Apuí-AM. O contrato didático, segundo orientação dos autores dessa teoria foi o instrumento usado para estabelecer, as responsabilidades e os limites de cada um dos agentes envolvidos no experimento. Os resultados revelaram que o uso do software *GeoGebra*, articulado com as propostas de ensino apresentadas, pode contribuir para o aprendizado de conteúdos de análise de regressão Estatística. Sua utilização vai além da realização de cálculos dispostos em tabelas, como as planilhas eletrônicas já fazem. Seu diferencial são os recursos que permitem a interação do aluno com o objeto matemático e a conversão da linguagem algébrica para as linguagens de gráficos e imagética, e vice-versa.

Palavras-chave: Ensino de Estatística. Tecnologias digitais. Ensino-aprendizagem. Contrato didático. Matemática.

SILVA, Ivani Valentim da. **Records of semiotic representations in regression analysis**: a proposal for didactic sequences based on the dynamism and interactivity of the GeoGebra software. 2022. 94 f. Dissertation (Master in Science and Humanities Teaching)- Postgraduate Program in Science and Humanities Teaching, Institute of Education, Agriculture and Environment, Federal University of Amazonas, Humaitá, 2022.

ABSTRACT

The objective of this research was to evaluate the efficiency of the GeoGebra software to approach the mathematical concepts contained in the simple linear regression. We assume that the software has the necessary resources to assist the student in creating representations of the mathematical objects involved in this analysis. In order to base our expectations regarding the learning benefits that the tool can bring, we resort to the Theory of Registers of Semiotic Representations, according to which the mathematical object can only be apprehended through representations and that the quality and variety of these representations are fundamental for the Learn. The methodology used was Didactic Engineering, through the confrontation of the a priori analyses, and the a posteriori analyses, made after the implementation of a didactic sequence, carried out through an experimental process, in a class of the 3rd grade of High School in a School of Apuí-AM. The didactic contract, according to Brousseau's (2008) orientation, was the instrument used to establish the responsibilities and limits of each of the agents involved in the experiment. The results revealed that the use of GeoGebra software, articulated with the teaching proposals presented, can contribute to the learning of Statistical regression analysis contents in an efficient and inclusive way. Its use goes beyond performing calculations arranged in tables, as electronic spreadsheets already do. Its differential is the resources that allow the student to interact with the mathematical object and the conversion from algebraic language to graphics and imagery languages, and vice versa

Keywords: Teaching Statistics. Digital technologies. Teaching-learning. Didactic contract. Math.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comportamento da reta 35
Figura 2 – Interface do *GeoGebra* versão 5.0 40
Figura 3 – Funcionalidades para o estudo de Geometria do *software GeoGebra* 45
Figura 4 – Plataforma de estudo de Geometria do *GeoGebra* 46
Figura 5 – Funcionalidade do *GeoGebra* na janela de Álgebra 47
Figura 6 – Reta crescente y = x + 1 com ângulo de 45º pando pelos pontos A(2,3) e E(9,10) 49
Figura 7 – Função polinomial de segundo grau ilustrada pelo *GeoGebra* 50
Figura 8 – Localização geográfica do município de Apuí-AM 59
Figura 9 – Exercício com os pontos E e F 70
Figura 10 – Exercício com os pontos F e H 71
Figura 11 – Atividade 3 no *GeoGebra* 72
Figura 12 – Atividade 4 no *GeoGebra* 73
Figura 13 – Regressão logarítmica no *GeoGebra* 74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Funcionalidades do *software GeoGebra*.. 41
Quadro 2 – Etapas de desenvolvimento da pesquisa.. 58
Quadro 3 – Estudos sobre a produção de bovinos... 64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo 1: custos e vendas.. 34

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADAF	–	Agência de Defesa Agropecuária e Florestal do Estado do Amazonas
AED	–	Análise Exploratória de Dados
ANVISA	–	Agência Nacional de Vigilância Sanitária
BNCC	–	Base Nacional Comum Curricular
EaD	–	Educação a Distância
ED		Engenharia Didática
GD	–	Geometria Dinâmica
IDAM	–	Instituto de Desenvolvimento Agropecuário e Florestal Sustentável do Estado do Amazonas
IDEB	–	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IDESAM	–	Instituto de Conservação e Desenvolvimento Sustentável da Amazônia
IREM	–	*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*
MMQ	–	Método dos Mínimos Quadrados
OCDE	–	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	–	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROPESP	–	Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
SEDUC-AM	–	Secretaria de Estado de Educação do Amazonas
TIC	–	Tecnologias da Informação e Comunicação
TDICs		Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
TSD	–	Teoria das Situações Didáticas
TRRS	–	Teoria dos Registros de Representações Semióticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO ... 13
1.1 Justificativa ... 14
1.2 Hipótese ... 17
1.3 Objetivos ... 17
1.3.1 Objetivo geral ... 17
1.3.2 Objetivos específicos ... 18

2 REVISÃO BIBILIOGRÁFICA ... 19
2.1 O papel do professor no ensino de Matemática ... 19
2.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica ... 21
2.3 A Teoria das Situações Didáticas ... 25
2.4 Análise de regressão ... 33
2.5 Uso das tecnologias na Educação ... 36
2.5.1 O software GeoGebra ... 40

3 METODOLOGIA ... 52
3.1 Engenharia Didática ... 53
3.1.1 Análises prévias ... 55
3.1.2 Análises a priori ... 56
3.1.3 Experimentação ... 57
3.1.4 Análises a posteriori e validação ... 58
3.2 Percurso da investigação ... 58
3.2.1 Sujeitos da pesquisa ... 59
3.2.2 Critérios de inclusão ... 60
3.2.3 Critérios de exclusão ... 61
3.3 Desenvolvimento do estudo ... 61
3.4 Protocolos de segurança ... 62
3.5 Sequência didática ... 62
3.6 Análises preliminares ... 63
3.7 Análises *a priori* da sequência didática ... 65
3.7.1 Análise a priori da Atividade 01 ... 66
3.7.2 Análise da Atividade 02 ... 67

3.7.3 Análise da Atividade 03 67
3.7.4 Análise a priori da Atividade 04 68
3.8 Experimentação e análises *a posteriori* 69

4 CONCLUSÕES 77
4.1 Limitações da pesquisa 79
4.2 Sugestões para estudos futuros 80

REFERÊNCIAS 81

APÊNDICES 87
APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1 88
APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2 90
APÊNDICE C – ATIVIDADE DE INSTITUCIONALIZAÇÃO 92

1 INTRODUÇÃO

A educação no Brasil, em especial o ensino da disciplina de Matemática, vem preocupando educadores devido aos baixos índices de aprendizagem detectados nos processos de avaliação externa, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

De acordo com Lima *et al*. (2020), os dados produzidos pelo PISA, entre os anos de 2000 e 2018, mostraram que o Brasil se manteve muito distante da média dos 37 países-membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), sendo que em 2018 os alunos de Matemática da Educação Básica no Brasil obtiveram apenas 78% da média de remdimento dos demais países avaliados pelo PISA, ficando atrás de países como Chile, Colômbia, México, Peru e Uruguai.

O estudo apontou ainda que embora o Brasil tenha apresentado maior índice de aprovação nos últimos anos, os resultados nas provas não evoluíram na mesma proporção. Os índices de 2018 foram inferiores aos de 2009, o que, em tese, representa um retrocesso, segundo os dados publicados pela OCDE.

Os dados divulgados pelo Sistema de Avaliação do Desempenho Educacional do Amazonas – SADEAM, revelam que o aprendizado de matemática no Amazonas contribui de forma negativa para os baixos índices apontados pela OCDE. Uma análise publicada pelo portal Qedu aponta que no Amazonas, em 2019, o nível de proficiência em matemática foi de apenas 2% na 3ª série do Ensino Médio. Este número se situa abaixo da média nacional que, de acordo com o mesmo portal, é de 7%. O nível era de 3% em 2015 para o Amazonas e de 4% no território naciocional. Enquanto a média nacional teve uma leve melhora, os números do amazonas regrediram. O levantamento feito em 2019 apontou, que no Estado, percentual de alunos com conhecimento básico em matemática é de 25% enquato o país possui um percentual de 42%. Assim, 72% dos alunos da 3ª série do Ensino Médio no Amazonas apresentaram conhecimentos insuficientes em Matemática, frente a um percentual de 52% em todo o território brasileiro.

Oliveira (2021) aponta que as causas para este baixo rendimento são diveras. Algumas delas estão relacionadas e destaca a dificuldade com a linguagem matemática, a dificuldade em elaborar cálculos e falta de habilidade em relacionar dados de contagem com situações práticas do dia a dia. Há tembem as causas externas, principalmente os que se referem à maneira de ensiar os conteúdos matemáticos.

O letrametno estatístico é prioridade estabelecida pela BNCC – Base Nacional Comum Curricular (2018) que recomenda como habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Mèdio, a intepretação das informações fornecidas pelos veículos de comunicação, bem como a realização de pesquidas amostrais. Neste contexto, esta pesquisa tem a pretensão de apresentar uma proposta metodológica para o ensino de Estatística, dentro da disciplina de Matemática, na Educação Básica, mais precisamente, a análise de regressão, com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Para subsidiar o desenvolvimento desta proposta, foi elaborada e experimentada uma sequência didática alinhada à teoria da Didática, de acordo com Brousseau (2008), tendo Engenharia Didática como aporte metodológico para sua validação.

Para isso, utilizou-se o *software GeoGebra*[1] como ferramenta de apoio para a criação das representações semióticas do objeto matemático em estudo. Um dos propósitos da utilização desse *software* nesta pesquisa foi suprir uma lacuna existente entre os estudos que analisaram o uso do *GeoGebra* no ramo da Estatística.

Morais, Sturion e Reis (2018) realizarou um estudo a respeito do uso das tecnologias midiáticas na Educação Básica, chegando à conclusão de que o uso dos recursos digitais está muito abaixo do esperado. Sturion e outros (2018) apontaram como obstáculo à utilização de tecnologia digitais na educação, além da necessidade de formação de professores, graves problemas na infraestrutura das escolas públicas que são carentes de equipamentos para que o professor possa ministrar uma boa aula utilizando recursos computacionais. No entanto, Souza e Calejon (2019) verificaram que o uso do *GeoGebra* em uma sequência didática pode facilitar o ensino-aprendizagem de Estátística na Educação Básica.

1.1 Justificativa

Micotti (2020) sinalizou o momento difícil pela qual o sistema de educação brasileira está passando, fato que justifica as críticas recebidas pelos índices de avaliação pelo baixo desempenho que os alunos da Educação Básica alcançaram nos últimos anos. Segundo ela, a educação escolar não promove o acesso aos saberes básicos esperados.

Araújo e Júnior (2017) salienta que apesar dos constantes esforços para a adoção

[1] O *GeoGebra* é um dos *softwares* mais populares para o estudo da Matemática. Inicialmente foi desenvolvido para o estudo de Geometria e Álgebra. Entretanto, atualmente possui recursos úteis para o estudo das mais diversas áreas da Matemática.

de novas metodologias, o ensino de Matemática em muitas escolas brasileiras ainda é feito de forma tradicional. Entretanto, a adoção de tais métodos nem sempre é uma escolha do professor. A falta de investimento em recursos tecnológicos e formação de profissional são alguns dos obstáculos para a inclusão de novas metodologias no ambiente escolar.

Esta situação impede a prática de uma abordagem empírica e pessoal do aluno acerca dos conteúdos em estudo. Isso ocasiona um aprendizado desalinhado com os interesses do aluno por não permitir que ele faça, manipule e aplique os conhecimentos adquiridos.

As ideias pedagógicas mudaram ao longo da história da educação no país, mas muitos profissionais ainda resistem às mudanças. O mesmo também observado na sociedade como um todo, que vê o ensino tradicional de forma positiva. Os parâmetros para tal posicionamento, segundo Micotti (2020), envolvem eficiência da escola do passado. A autora salienta, no entanto, que esses resultados se devem ao caráter elitista da educação, que ao se tornar mais democrática não conseguiu manter seus objetivos e eficiência no processo de ensino-aprendizagem.

É conveniente que o professor saiba instigar seus alunos a desenvolverem um pensamento matemático que o leve a relacionar de maneira lógica com os eventos pertinentes ao seu dia a dia. Além de adquirirem amplo conhecimento sobre essa ciência, os alunos precisam também aprender a concretizar os valores em atitudes que sirvam para superar os desafios da vida cotidiana.

> As possibilidades de aplicar o aprendido, tanto na solução de problemas da vida prática como em novos aprendizados ou pesquisas, dependem da modalidade de ensino desenvolvido. A aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em matemática, chama a atenção. (MICOTTI, 2020, p. 200).

Tais afirmações evidenciam a necessidade de protagonismo do aluno no processo didático. Desse modo os debates acerca da melhoria da qualidade na educação apontam para novas possibilidades através de metodologias ativas.

D'Ambrósio (2020) enfatizou a importância do ensino de matemática e pontuou que, historicamente, as sociedades evoluíram paralelamente ao desenvolvimento da Matemática, em especial, na região que costeia o Mar Mediterrâneo e a civilização ocidental, originária dessa cultura, que, posteriormente, vieram a se impor às demais culturas.

A didática da Matemática, segundo Pais (2019), é a parte da educação matemática que se preocupa com a elaboração de teorias e conceitos tanto em relação à prática pedagógica quanto aos resultados da pesquisa acadêmica. Segundo Chevallard (1991), a transposição didática consiste na conversão do conhecimento científico em saber escolar.

A didática utilizada pela Matemática é, portanto, a disciplina científica, cuja finalidade é a gênese, circulação e apropriação do conhecimento matemático em condições de ensino e aprendizagem. Portanto, é necessário que os professores de matemática possuam clareza quanto a importância do ensino desta disciplina a fim de encontrarem alternativas metodológicas para que os alunos sejam os construtores de sua própria aprendizagem de um conhecimento matemático adequado (OLIVEIRA *ET AL*., 2015).

A Matemática pretende envolver valores e desenvolver atitudes no aluno, e isso requer o uso de estratégias que permitam aprimorar as habilidades para compreender, associar, analisar e interpretar os conhecimentos adquiridos para enfrentar o ambiente cotidiano (OLIVEIRA *ET AL*., 2015).

Perscebe-se, portanto, que as novas metodologias apontam direcionamentos para uma aprendizagem centrada na ação do aluno, de maneira que o professor forneça as ferramentas necessárias para que ele possa construiur o pŕóprio conhecimento. Apesar disso, o problema da baixa eficiência no aprendizado final dos alunos na disciplina de Matemática persiste. Esta é uma questão atual e pulsante que precisa ser desenvolvida e integrada com os recursos existentes.

Esse trabalho pretendeu incluir as Tecnologias Digitais, em particular, no uso do *software* GeoGebra, no contexto das novas metodologias, sobretudo aquelas que valorizam a autonomia do aluno no processo de aprendizagem.

A escolha da Estatística para a implementação da experimentação da sequência didática proposta neste estudo foi devido à importância que ela exerce no dia a dia das pessoas, sendo, talvez, o ramo da Matemática que mais influencia o processo de formação cidadã do indivíduo.

O letramento estatístico foi estabelecido como prioridade pela Base Nacional Comum Curricular (2018), sendo uma parte da Matemática, e de suas tecnologias, que possibilita ao aluno a habilidade para interpretar as informações veiculadas pela mídia, bem como a realização de pesquisas amostrais e a comunicação de resultados.

A capacidade de levantar e tratar informações habilita a argumentação, a formulação de ideias, defesa de pontos de vista e tomadas de decisões de modo a respeitar os interesses da coletividade. Essas competências são essenciais para a construção de um mundo melhor no que se refere aos aspetos éticos, salutares, sociais, ambientais, sanitários, etc.

Com relação à escolha da natureza do conteúdo a ser explorado na experimentação com a Engenharia Didática, é preciso esclarecer que quanto às funcionalidades do *software GeoGebra* e o emprego da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, existem muitos estudos com resultados promissores no campo das funções, da geometria e da trigonometria aplicadas ao Ensino Médio.

Entretanto, em relação à Estatística e à probabilidade, os estudos mais frequentes estão relacionados à distribuição normal de probabilidade, utilizada na modelagem de fenômenos naturais. Embora extremamente importante, a complexidade na resolução de integrais de funções normais torna o estudo inviável para ser aplicado a alunos do Ensino Médio.

A opção pela regressão linear se deu em razão da possibilidade de interação com outros ramos da Matemática, como o estudo de funções afins e da geometria analítica, em particular, o estudo analítico da reta. As diversas abordagens em função do número de variáveis envolvidas nessas análises justificam a utilização de ferramentas avançadas, tais como as propostas pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas, bem como as ferramentas digitais disponíveis, tais como o *software GeoGebra*.

1.2 Pergunta de pesquisa

A questão ser verificada nesta pesquisa é se o *software GeoGebra* pode ser usado como suporte para o estudo de análise de regressão devido a diversidade de recursos que possui, capazes de criar representações indispensáveis para a apreensão do objeto matemático, contribuindo, assim, para a aprendizagem da disciplina.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Investigar as concepções dos alunos sobre do uso do *software GeoGebra* como ferramenta de registros de representações semióticas para a aprendizagem de regressão linear no ensino médio.

1.3.2 Objetivos específicos

Dentre os objetivos específicos estão:

1. Identificar e explorar as potencialidades de uso do *software GeoGebra* na aprendizagem de regressão linear;
2. Explorar as possibilidades de modelagem de situações didáticas que contribuam para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos em análise de regressão;
3. Analizar, interpretar e descrever as concepções dos alunos a respeito da eficiência do *software GeoGebra* para registrar as representações semióticas em estatística.

2 REVISÃO BIBILIOGRÁFICA

A Matemática disponibiliza aos seres humanos um conjunto de instrumentos que aprimoram e enriquecem suas estruturas mentais e permitem que eles explorem e ajam na realidade. Segundo D'Ambrosio (2005), a reflexão, observação e teorização se associam a técnicas e habilidades para compreender e explicar fenômenos naturais e sociais que surgem da necessidade de sobrevivência e têm dado respostas a questões importantes.

Além disso, esses instrumentos são universais, uma vez que são os mesmos em qualquer parte do mundo.

Por outro lado, a Matemática sempre foi relacionada a um assunto chato, difícil e pouco atraente para os alunos. Talvez isso seja consequência do fato de que os conteúdos apresentados e trabalhados em sala de aula são muito distantes dos interesses das crianças e de sua realidade, o que dificulta ainda mais o ensino dos conceitos. Por isso, quando um professor ensina Matemática é necessário que ele tente descobrir uma forma de fazer com que os alunos apreciem o assunto, fazendo-os compreender melhor, tornando mais fácil e mais atraente (SANTANA *ET AL*., 2014).

2.1 O papel do professor no ensino de Matemática

Três componentes em interação são característicos da atividade de ensinar Matemática em sua dimensão puramente matemática (MÜLLER, 2015):

1. Um espaço real e local como suporte material, com um conjunto de objetos concretos e tangíveis;
2. Um conjunto de artefatos, como ferramentas ou *software* de desenho, ou cálculo;
3. Um referencial teórico baseado em definições, teoremas, propriedades e axiomas.

Esses componentes não são justapostos, devem ser organizados de acordo com um objetivo que depende do campo matemático em sua dimensão epistemológica. Quando o acento em uma situação didática é colocado no processo de aprendizagem do aluno, esse nível epistemológico também pode ser considerado como um meio gerador de conhecimento (MÜLLER, 2015).

O professor em primeira instância deve considerar como fazer com que os alunos participem ativamente do trabalho da turma, ou seja, deve gerar um estado de motivação para aprender. Destarte, deve-se pensar como desenvolver nos alunos a qualidade de abertura para o apredizado para que eles sejam capazes de se educar ao longo de suas vidas. Por fim, deve-se buscar que os alunos participem cognitivamente, em outras palavras, que pensem em profundidade sobre o que querem estudar. Alguns princípios pedagógicos utilizados neste processo podem incluir: a promoção da individualidade de cada pessoa, da autonomia e da liberdade, e a promoção de uma abertura do estudante ao mundo por meio de sua socialização (OLIVEIRA *ET AL*., 2015).

O aluno não deve se comportar como um espectador, deve ser ativo e esforçar-se, fazer e experimentar, refletir e cometer erros, aprender com os outros e dos outros. O posicionamento do professor, em contrapartida, deve seguir outro modo. Nesse sentido, é oportuno registrar o ensinamento de Karnal (2012, p. 17):

> Regressemos para a aula. Vamos imaginar uma aula típica, de uns 40 a 50 minutos. Você entra e aquela dúvida volta: devo ser simpático ou seco? Sorrir ou mostrar cara de autoridade séria? Meu irmão psicólogo usa uma metáfora que aprecio: a relação profissional guarda semelhanças com o salva-vidas. Se ele se aproxima muito do afogado e o abraça fraternalmente, ambos afundam. Se ele fica muito distante, a vítima cumpre sua sina de se afogar sem ajuda. É inútil fingir uma dureza que você não tem ou que nem quer ter. É perigoso usar de muita intimidade. A aula é um momento profissional e você não é amigo dos alunos. Amizade implica isonomia, igualdade, algo inexistente na sala de aula. Pelo mesmo motivo que você não é amigo, você não é o inimigo, pois amizade e inimizade implicam relações pessoais, frequentemente íntimas. Repita para si sempre: sou o professor (porque, em muitas ocasiões, alunos, direção e pais tentarão convencê-lo de outras coisas).

O ser humano é modificável, perfectível e as mudanças estruturais necessárias podem ser alcançadas através de uma intervenção mediada. Nada mudará na Educação, mesmo com a tecnologia, se os procedimentos pedagógicos não forem modificados de antemão.

O melhor professor não é aquele que dá as melhores respostas às perguntas de seus alunos, mas aquele que os ajuda a encontrá-las. Quando os alunos estão envolvidos no desafio de questionar seus conhecimentos, uma aprendizagem com mais excelência é alcançada (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2017).

Outrossim, a atividade matemática, quando canalizada pra resolver situações do dia a dia do aluno, proporciona prazer nos envolvidos e uma satisfação pessoal. Bons problemas não são enigmas ou trapaças, são interessantes em si e não somente por sua aplicação. São como os desafios experimentados pelos matemáticos (OLIVEIRA *ET AL*., 2015).

Entretanto, a resolução de problemas apresenta algumas dificuldades que ainda não parecem ter sido satisfatoriamente resolvidas nas mentes de alguns professores, e muito menos na maneira prática de realizá-la. Trata-se de harmonizar adequadamente os dois componentes que a integram de uma maneira heurística, ou seja, com atenção aos processos de pensamento e aos conteúdos específicos do pensamento matemático (OLIVEIRA *ET AL*., 2015).

As novas metodologias de ensino de matemática parecem apontar para uma mesma direção: aquela que atribui ao professor o papel de mediador da relação entre o aluno, o objeto de estudo e o saber. Dessa forma, além de preparar o ambiente para uma aprendizagem adequada, o professor deve estabelecer uma relação de confiança a fim de incentivar a atuação aluno na busca de respostas para os problemas propostos.

2.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Nos debates sobre Educação Matemática são constantes as críticas a respeito dos processos abstratos envolvidos ensino. Apesar de correta, a análise desconsidera o fato de que a matemática é essencialmente abastrata. Em oposição às ciencias da natureza que provam suas teorias através do processo de experimentação, as bases da matemática são construídas na abstração, e generalizadas através do mesmo processo. Dessa forma a assimilação do objetvo matemático se dá através de um processo de representação. Portanto, para Duval (1993, 1995, 2009, 2012, 2017) o sucesso na aprendizagem matemática depende em muito da qualidade e da diversidade dessas representações.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi formulada pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval (1993, 1995, 2009, 2011), a partir dos estudos sobre semiótica de Charles Sanders Peirce, Avram Noam Chomsky e Émile Benveniste (MORETTI; THIEL, 2012).

Sua pesquisa foi desenvolvida ao longo de 25 anos sobre a aprendizagem matemática por meio dos processos de desenvolvimento cognitivo e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, filiado à *Université du Littoral Côte d'Opale*, no *campus* de Estrasburgo, na França.

O impulso inicial para o desenvolvimento de seu estudo decorreu da constatação de que o progresso do conhecimento é sempre seguido de um sistema de códigos específicos criado de modo paralelo ao desenvolvimento da língua natural. “A representação dos objetos e suas relações através desse sistema de código mostrou-se fundamental para a formação do pensamento científico, sendo, portanto, inseparáveis” (DUVAL, 2009, p. 16).

Segundo Duval (2009), Peirce propôs, em 1931, que os signos se dividem em três tipos principais: ícones, símbolos e índices. As definições de Peirce tiveram papel importante para o desenvolvimento da semiótica, sem, no entanto, se aprofundarem em outras questões relevantes. As reflexões de Peirce, por exemplo, não explicavam as razões da fecundidade que a utilização de tais signos proporcionam à atividade cognitiva.

O processo de conversão das representações semióticas foi discutido por Chomsky (1971) e por Benveniste (1981), que demonstraram as limitações da classificação de Pierce. A importância da ligação entre os diferentes sistemas semióticos nos processos de aprendizagem, proposto por Benveniste, constituiu a base da TRRS proposta por Raymond Duval.

Duval (2012, p. 268) definiu as representações semióticas como “um sistema de representações feitas a partir de um conjunto de signos com regras bem definidas”. Elas reproduzem as concepções mentais que um indivíduo tem sobre um objeto, ou sobre uma situação associada a esse objeto.

Para Duval (2017) as representações semióticas possuem certas limitações no que se refere à significação e ao processamento, por esse motivo são necessárias várias para um mesmo objeto, como, por exemplo: linguagem natural, gráficos, figuras, notações simbólicas para objetos, expressões algébricas, etc.

Ao conjunto de representações de um mesmo objeto matemático, Duval chamou de Registro de Representações Semióticas. Estabeleceu ainda que para que este conjunto de representações tenha um *status* de registro, ele deve possuir três características fundamentais:

1) Permitir a formação com regras e características próprias do objeto;
2) Ser convertido em outras representações; e,
3) Ser passível de tratamento.

Assim, segundo o autor, a aprendizagem da matemática ocorre no trânsito entre essas diversas representações (DUVAL, 2009).

Quando se realiza a transformação do enunciado de um problema apresentado na linguagem natural para a linguagem algébrica, há uma conversão externa. Essa conversão externa está ligada ao tratamento da informação, cuja realização não seria possível na representação original. O tratamento, por sua vez, é a conversão interna desse registro, e se refere às diversas etapas da solução de uma equação, por exemplo (DUVAL, 2012). Nesse aspecto, o determinante para o processo de aprendizagem não é a mudança de registro, mas o tipo de tratamento que este novo registro possibilita.

Para explicar a TRRS, Duval (2012) recorreu ao conceito de *semiósis* e de *noésis*. "Se é chamada '*semiósis*' a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e '*noésis*' a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a *noésis* é inseparável da *semiósis*" (DUVAL, 2012, p. 270). Ressalta-se ainda que a atividade cognitiva do pensamento humano depende de uma diversidade de sistemas de representações semióticas.

A resolução de problemas depende da escolha do registro e da adequação mais apropriada para cada situação. A automatização de certos procedimentos não pode ser base para a aprendizagem da Matemática, mas sim a coordenação de diferentes tipos de registros, que devem ser mobilizados pela compreensão e seguidos do tratamento dessas representações (DUVAL, 2012).

Duval (2017) mencinou que um dos principais obstáculos ao aprendizado de Matemática é a dificuldade que o aluno tem em distinguir a representação do objeto representado, posto que um mesmo objeto pode ser apresentado por meio de representações muito diferentes.

De acordo com os estudos de Duval (2009), mais da metade dos alunos não conseguem reconhecer um mesmo objeto por meio de duas ou mais representações que lhes são dadas. A confusão pode persistir mesmo após a utilização dos sistemas semióticos de representação por repetidas vezes.

A confusão entre a representação e o objeto resulta, inevitavelmente, em perda da compreensão. Para Duval (2012), a confusão é muito comum, posto que a apreensão dos objetos matemáticos é feita de forma conceitual, e tal assimilação do conteúdo se dá apenas por meio de representações semióticas.

> A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, fora de toda representação semiótica, torna a confusão quase inevitável. E, de modo inverso, como os sujeitos podem adquirir o domínio de tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se eles não têm uma

> apreensão conceitual dos objetos representados? Este paradoxo é tão mais forte quando se identifica atividade matemática e atividade conceitual, e que se considera as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas. (DUVAL, 2012, p. 168-169).

A esse obstáculo, Duval (2012) chamou de paradoxo cognitivo do pensamento matemático. Esse fato justifica a necessidade de uma busca constante pelo aperfeiçoamento das representações, já que toda representação possui algum grau de deficiência.

A maior dificuldade encontrada pelos alunos para fazer o trânsito entre duas, ou mais, representações, está relacionada ao grau de congruência entre elas. São três os critérios que duas, ou mais, representações semióticas precisam possuir para que sejam congruentes:

> O primeiro está relacionado à correspondência semântica entre as representações;
> O segundo se refere à ordem de apreensão que deve ser a mesma em ambas as representações; e,
> O terceiro indica a possibilidade de conversão das unidades significantes da representação de origem e a representação de chegada. (DUVAL, 2009, p. 19).

A passagem de uma representação semiótica para outra representação do mesmo objeto não é imediata caso elas não atendam ao critério de congruência. Quanto maior o grau de congruência, maior a possibilidade de sucesso na conversão, e, consequentemente, na apreensão do objeto matemático. Todavia, se as representações forem não congruentes, a dificuldade aumentará e a possibilidade de fracasso dependerá do grau de não convergência.

O aprendizado por meio de representações não é exclusividade da Matemática. Esse modelo é uma especificidade do pensamento cognitivo humano. Nas Ciências Sociais o recurso a sistemas semióticos como figuras, gráficos, tabelas, etc., é cada vez mais característico.

Em relação ao ensino, uma breve comparação entre os livros dos anos de 1930 até 1990 constatou a presença de um aumento da diversidade de recursos semióticos utilizados tanto nos livros de Geografia, História, Linguagens, como nos manuais de Ciências da natureza. A Matemática é apenas uma disciplina onde essa especificidade se apresenta mais explicitamente (DUVAL, 2009).

Considerando que a TRRS chegou ao Brasil na primeira metade dos anos 1990, mas foi na segunda metade da década que os primeiros resultados das pesquisas realizadas localmente passaram a ser publicados. Segundo Silva (2014), o trabalho de

Duval continua viabilizando o desenvolvimento de grandes contribuições para a pesquisa na Didática da Matemática.

Nesta dissertação, observou-se que diversos trabalhos recentes recorreram à Teoria das Representações Semióticas para justificar a utilização de *softwares* de geometria dinâmica no ensino de Matemática. Dentre eles, Santos (2011), Giordano (2016), Oliveira *et al*. (2019) e Gravina (2015) são alguns do estudos que associam o uso do *GeoGebra* à TRRS. Esses trabalhos demonstraram que as diversas formas de representações apresentadas pelas ferramentas podem contribuir para o aprendizado de Matemática.

2.3 A Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta Brousseau (9861), é um modelo teórico segundo o qual "a didática da Matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos" (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 163).

A TSD defende uma educação baseada na criação de modelos matemáticos a partir de um problema. Na situação de ação, segundo Almouloud (2007) o aluno manipula objetos do milieu, simula tentativas, toma decisões, julga os resultados obtidos através da interação como o meio, podendo retroceder na tentativa de novas soluções buscando uma nova adaptação que solucione o status de desequilíbrio na qual a situação o inseriu. O conhecimento pode ser acumulado tanto pela da mobilização de conhecimentos anteriores como da interação com o meio.

São muitas críticas em relação ao ensino de Matemática. As mais comuns são aquelas que afirmam que a matemática ensinada nas escolas não tem o resultado esperado por estar dissociada da realidade diária do educando. Os estudos de Brousseau (1996, 1997, 2007), no entanto, apontaram para outra direção. Para ele, a matemática do dia a dia não deve ser o objetivo do professor, mas o ponto de partida. O autor abordou o caráter científico que a Matemática deve ter, e afirmou que o conteúdo deve ser ensinado independentemente do uso que os alunos farão dos conhecimentos adquiridos.

De fato, parece injusto ao professor, atribuir-lhe a tarefa de convencer o aluno a desenvolver habilidades bastante complexas para resolver situações para as quais existe uma gama de dispositivos capazes de solucioná-las em questão de segundos. Mas quando a matemática é vista como um mecanismo capaz de moldar uma forma de pensamento que possa estabelecer sequências lógicas para as situações nas quais nos envolvemos no dia-a-dia, percebe-se que a disciplina é fundamental para o desenvolvimento cognitivo do ser humano. Portanto, mesmo havendo necessidade de discutir os componentes do currículo, o desafio de como ensinar matemática deve se sobrepor aos questionamentos em relação aos objetos de estudo.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) estabelece que no ensino médio a prática do professor de matemática deve perseguir uma visão integrada da disciplina de modo que a realidade do aluno seja contemplada com a aplicação dos métodos estudados:

> Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 818).

Essas considerações levam em conta a possibilidade de aproveitar todos os conhecimentos socioculturalmente adquiridos a fim de estimular o processo de aprendizagem de forma significativa e a partir de então promover estratégias que estimulem a reflexão acerca dos processos de criatividade a fim de possibilitar tomadas de decisões corretas no sentido de promover o bem estar social da comunidade onde o aluno está inserido.

A Teoria das Situações Didáticas propõe que o conhecimento deve ser construído passo a passo pelo aluno com a participação, quando necessária, do professor, que deve criar situações ideais para o aprendizado em sala de aula, proporcionando diferentes formas de aprendizado.

> Essa construção autônoma não pode dar aos conhecimentos desenvolvidos o *status* de saber. A intervenção didática do professor é a que permite identificar conhecimentos canônicos no que o aluno, ou os alunos, conceberam em situações autônomas (BROUSSEAU, 2008, p. 51).

Nesse sentido, a Teoria das Situações Didáticas estabelece dois momentos denominados por ele de situação didática. A primeira se refere ao processo de interação entre professor, aluno e o meio numa situação criteriosamente elaborada para a construção do conhecimento. A segunda se manifesta quando o aluno consegue aplicar no seu quotidiano, sem a orientação do professor, os conhecimentos adquiridos. Essa primeira etapa é chamada de situação a-didática implícita; a segunda é denominada situação a-didática explicita.

Segundo Pais (2020), o conhecimento só ganha status de saber quando o aluno é capaz de aplicar no seu contexto social, sem indicação intencional, os conhecimentos adquiridos.

Ao introduzir o conceito de situações didáticas, Brousseau apresentou a definição de didática da Matemática como sendo *a* "ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos úteis aos homens e a suas instituições" (BROUSSEAU, 2008, p. 53). Assim, uma situação didática é criada quando o professor modela essa transmissão de conhecimentos.

> As variantes de uma situação relativa a um mesmo saber matemático podem apresentar grandes diferenças de complexidade e, em consequência, levar a diferentes estratégias ótimas e também a diferentes maneiras de conhecer um mesmo saber. (BROUSSEAU, 2008, p. 45).

As situações didáticas são compostas basicamente por cinco etapas: situação de devolução, situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização. A seguir estão descritas as características de cada uma dessas etapas:

1. **Situação didática de devolução**: nessa etapa o professor transfere para o aluno parte da responsabilidade pela aprendizagem, através da atividade proposta.
2. **Situação didática de ação**: esse é o momento em que o aluno, pela utilização de ferramentas já conhecidas e pela interação com o meio, dispensa seus esforços na tentativa de solucionar o problema proposto. De acordo com Litte *et al*. (2019), a situação de ação tem equivalente na Modelagem no processo de matematização, quando o aluno traduz o problema para a linguagem matemática e articula seus conhecimentos na busca de soluções adequadas. Nessa etapa já se desenvolve o processo de tratamento, na tentativa de obter uma versão simplificada da estrutura do problema. Assim como na situação a-didática o aluno atua de forma autônoma, sem a intervenção do professor;
3. **Situação didática de formulação**: esta é a situação na qual o aluno, utilizando-se dos meios disponíveis, formula uma solução para o problema.

Nessa etapa não se exige do educando a utilização de uma linguagem técnica com os rigorosos padrões da Matemática, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, falta de pertinência e eficácia, desde que ele consiga transmitir a mensagem esperada.

4. **Situação didática de validação**: a situação de validação é a etapa em que os alunos tentam organizar as respostas de forma adequada, fazendo uso correto da linguagem matemática, tentando provar a veracidade da resposta.

Essas quatro etapas devem ser realizadas pelos alunos sem a participação do professor, que apenas observa as soluções apresentadas exercendo um papel de mediador. Nessas fases o professor não expõe ao aluno qual o objetivo que deseja alcançar com a realização da tarefa.

Além disso, *"*essas quatro situações têm um componente psicológico favorável, uma vez que, engajando o aluno no seu processo de aprendizagem, elas o predispõem a ser o seu coautor, dentro de um projeto pessoal*"* (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 166). Ocorre ainda uma quinta situação, a de institucionalização:

5. **Situação didática de institucionalização**: nessa fase, o professor retoma para si a responsabilidade pelo processo de ensino-aprendizagem. Nesse momento, ele esclarece qual o objetivo do problema, descarta ou valida as respostas apresentadas pelos alunos, conferindo a elas uma redação adequada de acordo com o rigor e a generalização que a Matemática exige. É na institucionalização que o professor reconhece que houve a aprendizagem por parte do educando.

A aprendizagem ocorre, portanto, através da interação entre auno professor e o meio. A TSD diverge, nesse ponto, da modelagem praticada no Brasil, pois de acordo com Littig *et al*. (2019), na modelagem os conceitos matemáticos dependem da intencionalidade do aluno e não do professor. Na situação de institucionalização, a intenção do professor, que até então estava implícita, deve ser revelada.

Na TSD os erros dos alunos, e suas dificuldades, devem ser vistas pelo professor como um fator positivo. Essa posição decorre da definição de obstáculo imposta por Brousseau (1997):

> Erros não são apenas efeito da ignorância, da incerteza, do acaso [...] mas o efeito de um conhecimento anterior que foi interessante e bem-sucedido, mas que agora é revelado como falso ou simplesmente inadaptado. Erros deste tipo não são erráticos e inesperados, eles constituem obstáculos. (BROUSSEAU, 1997, p. 82).

Essa noção de erro e sua importância no sistema didático pode ser mais bem compreendida quando se conhece o contrato didático.

A noção de contrato didático, estabelecida na didática da Matemática francesa, engloba elementos das pesquisas realizadas por Guy Brousseau, Regine Douady, Michele Artigue e Yves Chevellard. Nesta pesquisa foram utilizadas predominantemente as definições propostas por Brousseau devido sua relação com a Teoria das Situações Didáticas.

O contrato didático é um instrumento que estabelece regras entre o professor, o aluno e o saber. O principal objetivo do contrato didático é definir o nível de participação do aluno e do professor em cada uma das etapas do processo de aquisição do conhecimento. O contrato é, sobretudo, uma declaração de confiança mútua entre as partes, uma vez que muitas cláusulas devem permanecer implícitas, sem que o aluno perceba a intenção do professor (ALMOULOUD, 2007).

Pelas regras do contrato didático, as situações precisam partir de um conhecimento pré-existente que deve ser mobilizado na solução de problemas que possam geram novos conhecimentos. Ressalta-se ainda que tais conhecimentos têm de ser aplicados na solução de novos problemas. “As ações não podem ser apresentadas de forma aleatória, mas organizadas de forma a buscarem um saber testado e validado por instituições de referências” (BROUSSEAU, 2008, p. 74).

Segundo Almouloud (2007), esse ciclo de aprendizagem se completa quando o aluno que recebeu a informação é capaz de agir por conta própria na tomada de decisões. O aprendizado consiste, então, na alteração do sistema de decisões que levam em conta as características do saber constituído.

Pais (2020) salienta, no entanto, que o contrato não existe no plano real, pois inicialmente a intenção do professor ao propor uma situação deve estar implícita. O aluno não sabe aonde o professor quer chegar e precisa confiar. O estabelecimento de contratos reais seria uma ilusão. Não valeria a pena ao aluno assumir o risco por um possível fracasso. Por outro lado, um contrato sobre o tipo de conhecimento a ser adquirido constituiria um paradoxo, pois este conhecimento acarretaria na ruptura das próprias convicções, já que os conhecimentos adquiridos substituem ou extinguem os conhecimentos anteriores.

Esta concepção, segundo Brousseau (2008), decorre do entendimento de que o erro não deve ser considerado como fracasso, mas a manifestação de um conhecimento que existia previamente, que foi importante dentro de uma determinada situação, mas que para o momento atual, ou para esta nova realidade, não serve mais, e que por isso precisa ser corrigido. É nesse ponto que o contrato didático é incerto.

> Se o professor tivesse certeza de que todos os alunos resolveriam sem erros as situações e exercícios que apresenta, essa atividade perderia seu conteúdo didático e ele não proporia mais. Nem o professor nem o aluno aceitariam tamanha perda de tempo. (BROUSSEAU, 2008, p. 76-77).

O percentual de erros ou acertos não é uma variável simples. O professor deve ser capaz de gerir as incertezas do aluno de maneira eficaz, de forma a produzir conhecimentos. As condições nas quais a atividade se desenvolve são mais importantes do que o sucesso ou fracasso na busca de soluções para o problema.

Brousseau (2008) introduziu a noção de erro através de um artigo, publicado na década de 1980, que abordava um caso de fracasso escolar, o do menino Gaêl, que foi observado durante anos. Paralelamente aos estudos de Brousseau, pesquisadores do *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (IREM) de Grenoble, na França, desenvolveram um estudo sobre o fracasso eletivo ao apresentarem um fenômeno que Yves Chevallard, oito anos mais tarde, chamou de contrato didático.

Os pesquisadores franceses observaram que os alunos dos primeiros anos do ensino fundamental não se preocupavam em adequar os dados de um determinado problema à pergunta formulada. Em suas pesquisas, foram formulados problemas sem solução para observarem as respostas dos alunos. Por exemplo: “Em uma escola há 4 filas de 7 alunos cada uma. Qual é a idade da professora? – 28 anos!”, responderam mais de 60% dos alunos da classe (BROUSSEAU, 2008). Apesar de os alunos terem entendido que a pergunta não fazia sentido, mesmo assim responderam, alegando, apenas quando perguntados do por que das respostas, que responderam porque a professora havia perguntado.

O contrato didático foi proposto para regular a relação entre o professor, o aluno e o saber. O professor e os alunos devem assumir papéis distintos e complementares na busca pelo conhecimento. Cada um deve assumir suas responsabilidades no processo didático, facilitando o gerenciamento dos procedimentos que possibilitarão a apropriação do saber. O contrato didático é, então, o principal impulso, a mola propulsora para os processos de ensino e de aprendizagem (BROUSSEAU, 2008).

O contrato didático foi caracterizado de duas maneiras: os contratos de transmissão do conhecimento sem intenção didática, e os contratos pouco didáticos, que se encarregam de um saber novo. São contratos sem intenção didática os contratos de emissão, de comunicação, de habilidade e de produção do saber. E contratos pouco didáticos os contratos de informação, de utilização dos conhecimentos, de iniciação ou de controle e os contratos de instrução ou de direção de estudos.

Para melhor compreensão desses conceitos, Almouloud (2007) denomina “situação adidática” a situação se caracteriza pela possibilidade de apreensão do conhecimento através da interação com o meio, mesmo que a situação não tenha sido organizada para fins didáticos. A situação adidática ultrapassa os limites do contexto escolar de maneira que o aluno possa aprender e aplicar os conhecimentos, sem nenhuma indicação intencional do professor.

A situação didática, por sua vez, compreende a elaboração, pelo professor, de situações adidáticas com fins didáticos. São problemas escolhidos pelo professor para envolver o aluno em um jogo de interação com o meio a fim de sanar um desequilíbrio manifestado inicialmente pela dinâmica da situação apresentada.

Dito isso, pode-se concluir que quando Brousseau (2008) propôs a noção de contratos sem intenção didática e de contratos poucos didáticos ele se referiu às cláusulas implícitas no contrato didático, posto que a intenção do professor deve estar clara para ele, mas nem tudo deve ser comunicado de forma explícita ao aluno.

De acordo com Sarrazy (1995), quanto mais o professor esclarece sua expectativa em relação à resposta do aluno, maior a possibilidade de fracasso na aprendizagem. Dessa maneira, a aprendizagem acontece em função da ruptura do contrato didático e não na satisfação das exigências do mesmo. Por isso, é importante que se evite a explicitação da totalidade das regras e se atente para o delineamento dos possíveis pontos de rupturas.

A ruptura necessária do contrato didático decorre da concepção de que o aluno deve construir seu próprio conhecimento de maneira autônoma. Brousseau (2008, p. 51) afirmou que “as situações devem ser propostas pelo professor de maneira que possibilite a construção do conhecimento matemático sem a intervenção do docente no processo cognitivo do estudante”.

Ao tratar dos componentes e estratégias do contrato didático, Brousseau (2008, p 89) aborda a concepção de “devolução como um instrumento de produção do conhecimento que dever ser obtido livremente pelo aluno através da manipulação do meio adidático”. Em outras palavras, é o ato pelo qual o docente transfere ao aluno a responsabilidade pela solução do problema. Para que o processo de devolução seja satisfatório, é necessário que o aluno aceite o desafio de resolver a situação proposta, exigindo, portanto, motivação.

De acordo com a Teoria das Situações Didáticas, o aluno adquire o conhecimento através das adaptações às diversas formas de obstáculos que o cerca. Portanto, ao preparar a devolução, o professor deve deixar clara a intenção de ensinar, mas dissimular seu objetivo de modo suficiente para que o aluno mobilize os meios disponíveis de forma autônoma para chegar a uma solução satisfatória. Para Brousseau (2008, p. 90), “a aprendizagem depende da qualidade do meio de que dispõe, por isso, a participação do professor no processo de devolução é fundamental para a aprendizagem”.

O papel do professor no processo de devolução, entretanto, vai além da preparação do ambiente de aprendizagem. “Ele precisa ser capaz de convencer o aluno a assumir a responsabilidade pela busca da solução para o problema cuja resposta deve ser desconhecida” (BROUSSEAU, 2008, p. 91). Ainda que o professor espere que o aluno elabore a sua própria solução para o problema, ele tem a obrigação de esperar uma resposta certa, o que é incompatível com as cláusulas do contrato didático, que não prevêm nenhum tipo de sanção ou objeção quanto à resposta do aluno. Este seria, então, mais um paradoxo do contrato didático.

A institucionalização é outro componente essencial para a relação contratual entre professor e aluno na Teoria das Situações Didáticas. Ela é a parte na qual o professor retoma para si a responsabilidade pelo processo de ensino-aprendizagem. Nessa etapa, o professor pode validar os conhecimentos adquiridos, refutar, reformular ou sistematizá-lo, aproveitando as respostas dos alunos para apresentar provas e generalizar as propriedades observadas.

Os estudos científicos que envolvem a TSD vêm sendo realizados com o auxílio da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, originária também da escola francesa, conforme afirmou Brousseau:

> Podemos perguntar-nos em que medida é esta referência ao funcionamento da investigação necessária e pertinente para o estudo da aprendizagem, e, sobretudo, do ensino. Até que ponto e em que condições há uma semelhança? Para responder a estas questões, parecem ser indispensáveis uma boa teoria epistemológica, acompanhada por uma boa Engenharia Didáctica. (BROUSSEAU, 1996, p. 41).

A aproximação entre TSD e A ED ocorre porque a Engenharia Didática insere o pesquisador no estudo. Dessa forma, realiza-se uma análise *a priori*, propõe-se uma intervenção utilizando os métodos da Teoria das Situações Didáticas e uma análise posterior à intervenção. A Engenharia Didática foi definida por Artigue (1988):

> Este termo foi "cunhado" para o trabalho didático como sendo aquele que é comparável ao trabalho do engenheiro que para realizar um projeto preciso se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1988, p. 283).

Dessa forma, a Engenharia Didática utiliza a Teoria das Situações Didáticas para propor as intervenções, e as pesquisas que envolvem a TSD fazem uso da Engenharia Didática para validar seus resultados.

2.4 Análise de regressão

O termo regressão, usado para definir o conjunto de técnicas que modelam as relações entre duas variáveis a fim de predizer outras variáveis independentes, foi proposto em 1885 por *Sir* Francis Galton, durante um estudo ao demonstrar que a altura dos filhos tendia a regredir para a média da população, não refletindo, portanto, a altura dos pais (RODRIGUES, 2012).

Uma variável *x* é chamada independente quando influencia, afeta ou determina o valor de outra variável dependente *y*. A regressão linear é o estudo de fenômenos que podem ser descobertos ou explicados em função da variável independente (SANDRE, 2019).

A análise de regressão consiste em representar, a partir de uma dada amostra, a relação entre duas variáveis com a melhor equação possível e, através dessa equação, prever novos resultados para valores que não estão contidos na amostra.

Para determinar a equação é necessário obter as estimativas dos coeficientes β_0 e β_1, verificar a adequação da equação por meio de testes de significância e definir o intervalo de confiança para os valores estimados. Para a estimativa dos coeficientes β_0 e β_1, o método mais indicado é o dos mínimos quadrados, que reduz a soma dos quadrados dos erros.

A equação da reta de regressão linear é dada pelas seguintes expressões:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i - n\overline{xy}}{\sum_1 x_i^2 - \overline{nx}^2}$$

Onde β_0 representa o ponto de intersecção da reta com o eixo das variáveis dependentes, e β_1 o coeficiente angular (variável que determina a inclinação da reta de regressão). Por exemplo: uma certa indústria farmacêutica vende um remédio para combater resfriado. Após 2 anos de operação, a mesma coletou as seguintes informações trimestrais:

Tabela 1 – Exemplo 1: custos e vendas

Custos (RS 1.000,00)	**Vendas (RS 10.000,00)**		
X	**Y**	**XY**	**X^2**
11	25	275	625
5	13	65	169
3	8	24	64
9	20	180	400
12	25	300	625
6	12	72	144
5	10	50	100
9	15	135	225
Σx = 60	Σy = 128	Σxy = 1101	Σx² = 2352

Fonte: elaboração própria.

Dados: $\sum x_i$ = 60; $\sum y_i$ = 128 ; $\Sigma_1 \, x_i^2$ = 522; $\Sigma_1 \, y_i^2$ = 2352; $\Sigma \, x_i \, y_i$ = 1101; x = 7,5; y = 16.

$$\beta_{1.16} = \frac{1101 - 8.7{,}5}{522 - 450} = \frac{141}{72} = 1{,}96$$

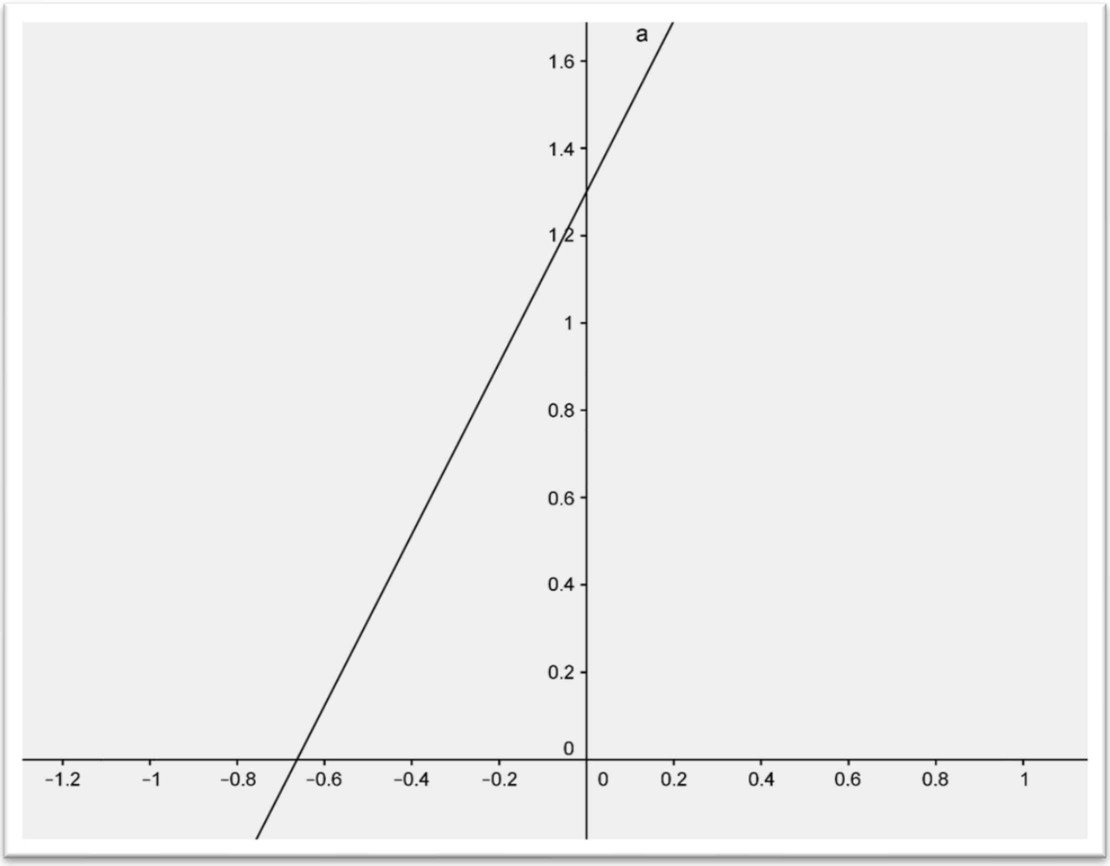
$$\beta_0 = 16 - 1{,}76\,.\,7{,}5 = 16 - 14{,}7 = 1{,}3$$

Portanto, a reta de regressão que representa o exemplo dado é:

y = 1,96x + 1,3.

A Figura 1 mostra o comportamento dessa reta.

Figura 1 – Comportamento da reta



Fonte: elaboração do autor utilizando o *software GeoGebra*.

2.5 Uso das tecnologias na Educação

Para compreender a importância da inclusão digital no ensino das disciplinas em geral é necessário, primeiro, que se discuta a inclusão educacional em si, com a disponibilização ampla do acesso à Educação, sua relação com os contextos educacionais e as políticas públicas que o institucionalizaram.

A Educação é necessariamente inclusiva, e o ofício de educar impõe a articulação e a integração daqueles que se encontram à margem. De acordo com Freire (1974), a essência de qualquer prática educativa se identifica com a libertação de uma situação de opressão. Nessa órbita, a exclusão é indiscutivelmente uma realidade opressora.

Nesse estudo consideramos como marginalizados os cerca 72% apontados pelo SADEAM como detentores de conhecimentos insuficiente em matemática e que por isso devem ser objeto de interesse da educação inclusiva. A inclusão deve ser um processo de conformação das diferenças com o todo, e as políticas públicas inclusivas se pautam justamente no rompimento da segregação e na construção da compreensão de que as diferenças devem ser harmonizadas em um ambiente comum (MEYER *ET AL*., 2014).

Segundo a Lei n. 12.965, de 23 de abril de 2014, o acesso à internet e à informática é um direito de todo cidadão. Além disso, compete ao poder público o desenvolvimento de:

> Iniciativas públicas de fomento à cultura digital e de promoção da internet como ferramenta social [que] devem: I - promover a inclusão digital; II - buscar reduzir as desigualdades, sobretudo entre as diferentes regiões do País, no acesso às tecnologias da informação e comunicação e no seu uso; e, III - fomentar a produção e circulação de conteúdo nacional. (BRASIL, 2014, art. 27).

A inclusão digital visa integrar pessoas, ou grupos de pessoas, ao uso das ferramentas tecnológicas, promovendo uma democratização ao acesso a esses instrumentos como forma de desenvolvimento social .Com efeito, a inclusão digital possui um forte vetor de correção das desigualdades sociais (MACCHIAROLA, 2018).

Esse aspecto de promoção da igualdade é fundamental para compreender a importância da inclusão digital, porque a privação do acesso às novas tecnologias às pessoas promove, por exemplo, uma exclusão temporal, tendo em vista que as aprisiona no passado e as impede de viver o dinamismo do século XXI. Isso sem contar que o principal meio de circulação de informações é centrado no acesso e na manipulação das novas tecnologias.

Segundo Oliveira (2007) partir dos anos 2000, o uso de novas tecnologias surgiu no cenário educativo como uma importante estratégia para minimizar os problemas do processo de ensino-aprendizagem. Outros estudos publicados acerca desse tema constataram essa importância, dentre eles, Cavalcante *et al*. (2017), que pesquisou a inclusão digital entre adolescentes. Suas conclusões destacaram alguns desafios de modo a equilibrar o uso das novas tecnologias, tais como a necessidade de conciliação da inclusão digital com a saúde dos adolescentes, e o combate a crimes cibernéticos, como o *cyberbulling*.

Observou-se também, como exemplo prático, a inclusão promovida em meio às mulheres brasileiras da Paraíba, onde o ensino da educação a distância (EaD) serviu como mecanismo democratizador para o acesso às novas tecnologias, levando o conhecimento sobre o manejo desses instrumentos às alunas dos cursos de EaD da Universidade Federal da Paraíba. Isso as capacitou para o mercado de trabalho e contribuiu para o árduo processo histórico de emancipação feminina (BARBOSA *ET AL*., 2018).

Neste universo, é possível afirmar que a necessidade por se implementar e potencializar os mecanismos inclusivos tem sido uma constante em vários contextos no que diz respeito ao acesso e uso de tecnologias. Isso não significa atribuir a esses instrumentos uma presunção absoluta de qualidades, mas é imperioso destacar que:

> As comunidades em rede, viabilizadas pelas tecnologias eletrônico-digitais, podem se constituir como caminhos de encontros entre diferentes e distantes grupos sociais, como também podem aproximar iguais e próximos geograficamente, assegurando convivência e trocas. No entanto, dialeticamente, também podem se constituir como meios de alienação e exclusão. Mediante a opinião dos tutores, coordenadores e lideranças, ficou evidente que há essa consciência no coletivo e o esforço, intencional, de não se negar e tampouco se tornar absolutas as tecnologias eletrônico-digitais. (MANFROI; NOAL, 2020, p. 21).

Complementarmente, a Lei n. 14.172, de 10 de junho de 2021, veio para regular especificamente o acesso à *internet*, com fins educacionais, a alunos e professores da educação básica pública (BRASIL, 2021). Assim, seja em escolas públicas ou particulares, o estudante precisa ter acesso a uma educação mínima que promova a alfabetização tecnológica para usufruir desses meios de aprendizagem (BORBA, 2019).

Ora, é *mister* fomentar o uso da *internet* e seus assemelhados enquanto aquilo que são de fato: meios que devem ser acessíveis e democratizados. Não são, portanto, fins em si, mas instrumentos de integração social (BERNAL-MENESES *ET AL*., 2019).

Nessa perspectiva, há de se pensar a democratização do ensino, da informática e da matemática como facetas de uma mesma realidade e de um mesmo processo inclusivo. No universo de novas tecnologias, merece destaque o uso de *softwares* educativos que possibilitam a percepção dinâmica de determinadas propriedades matemáticas, como as funções, a geometria, a trigonometria, a probabilidade e a estatística. Apesar do potencial representado por essas ferramentas tecnológicas, percebe-se que o uso de tais ferramentas ainda é pouco representativo.

Com a evolução das tecnogias nos últimos anos surgiram também novas definições para o conjunto de mídias usadas na educação. De acordo com Correia e Brandemberg (2021) o termo Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) faz referência aos meios e dispositivos tecnológicos mais antigos que vão do computador até o mimeógrafo, incluindo o rádio a televisão e o jornal. As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDICs se referem às bases tecnológicas que possibilitam integração ente ambientes e indivíduos conectados em uma rede com o objetivo de facilitar a comunicação, ampliando as ações já garantidas pelos meios tecnológicos. Quando as TDICs possuem funcionalidades que possibilitam a mobilidade dos integrantes dessa rede, elas são chamadas de tecnologias digitais móveis.

As tecnologias móveis do universo digital são desafiadoras para as escolas e universidades que se estagnaram no uso das metodologias tradicionais de ensino. Nelas, o docente é o epicentro da ação educativa e faz-se necessária uma participação e integração maior dos alunos, com mais afeto e pessoalidade, ainda que isso ande junto com a virtualização. Há de se estabelecer novas formas de aulas, orientadas à distância, sem monopolizar o saber para os limites da sala de aula (MORAN *ET AL*., 2017).

Seja em relação aos jogos educativos digitais, seja no tocante aos *softwares* que possibilitam a construção dos conceitos de Matemática, há de se voltar a atenção para a perspectiva socioconstrutivista, segundo a qual o aluno concebe um conteúdo como uma série de conhecimentos prévios estruturados cognitivamente. Para os adeptos dessa teoria, quantifica-se o estágio de desenvolvimento de um sujeito pela sua capacidade de resolver com independência determinado problema. A possibilidade de construir aprendizado, no entanto, depende da ajuda de alguém com maior competência (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

O modelo tradicional, fulcrado em emitir informações e esperar a reprodução delas não se mostra suficiente. A informação hoje está bastante acessível e onipresente, se apenas transmiti-la fosse a função do professor, ele já poderia se considerar dispensável. Antes, é tarefa do docente estabelecer uma ponte de motivação e despertar o encantamento para que o aluno saia de sua passividade e observação e assuma um papel de agente transformador, de sujeito daquilo que aprende (MORAN *ET AL*., 2017).

A gestão de tecnologias nas instituições escolares deve perpassar três estágios: primeiramente, as tecnologias são usadas para aprimorar o que já se vinha fazendo, aqui compreendidos, desempenho, gestão etc. Em segundo lugar, a escola deve introduzir parcialmente as tecnologias em seu projeto, de modo gradual. Em terceiro, espera-se o amadurecimento da implantação e o avanço da integração das tecnologias móveis ao próprio projeto pedagógico.

Neste novo ambiente tecnológico que permeia todas as relações, por isso é imprecindível que as relações relacionadas ao aprendizado em sala de aula absorvam essas mudanças no rítimo que elas ocorrem. Nesse sentido, vale salientar que:

> Estamos vivendo em uma sociedade onde o uso das TIC se faz presente dentro de distintas atividades cotidianas. Entretanto, ao lançarmos nosso olhar para o contexto educacional, em particular para as aulas de Matemática, a presença das TIC nem sempre acontece. Não se trata de estabelecer uma relação dicotômica entre usar e não usar as TIC, mas sim de considerar inexorável esse uso dentro da sociedade contemporânea. (JAVARONI; ZAMPIERI, 2015, p. 1001).

Logo, não se trata mais apenas de decidir pelo uso, ou não, dessas tecnologias disponíveis nos dias de hoje, mas sim de fomentar uma reflexão acerca do modo mais eficaz e não invasivo, nem prejudicial, ao aprendizado do aluno com a utilização desses meios.

Quando do surgimento de aplicações tecnológicas para uso em sala de aula, e no início de suas implementações práticas, pensava-se com frequência que a informática fosse inimiga da educação. No entanto, essa abordagem se mostrou equivocada e preconceituosa, porquanto as novas tecnologias possuem como ponto de partida a própria matemática para o seu desenvolvimento, razão pela qual podem ser muito bem utilizadas no ensino do raciocínio matemático (BORBA, 2019).

Usar as tecnologias para aproximar os alunos de uma disciplina tão polêmica é fazer com que mais pessoas tenham acesso a um conhecimento que foi culturalmente taxado como vocação de pessoas geniais. Isso é um equívoco, já que todos são capazes de aprender Matemática, e ela é mais cotidiana e comum do que pensam. A Matemática permeia todas as demais ciências, inclusive as Ciências Sociais. Diariamente recebemos os mais diversos tipos de informações dispostas em tabelas e gráficos que nos permitem interpretar de maneira correta e compreender os fenômenos que nos cercam, ainda que não seja essa a intenção do emissor.

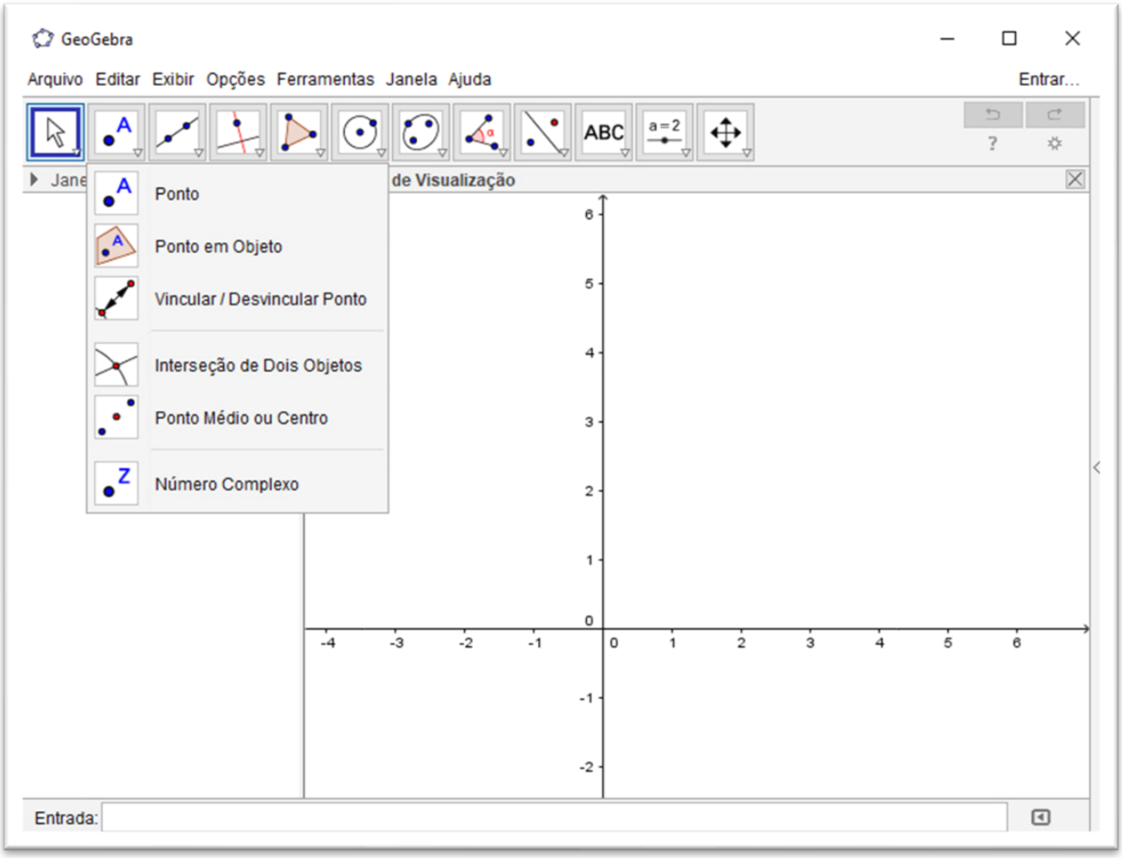
Os meios tecnológicos naturalizam esse aprendizado e demonstram essa verdade. As tecnologias são, por conseguinte, ferramentas constantes e úteis e não devem ser vistas como substitutas do professor, tampouco uma forma de fazer com que a atividade docente seja ignorada.

Assim, as indagações, incertezas e dilemas do professor contemporâneo quanto ao modo de usar as tecnologias da informação para tornar seu ensino mais efetivo e capaz de fazer alguma diferença na vida do aluno permeiam o dia a dia de trabalho. Logo, para que estas novas práticas de ensino tenham chances de sucesso, é necessário que o professor tenha disposição para se manter atualizado e ativo.

2.5.1 O software GeoGebra

O *GeoGebra* é um *software* livre, criado em 2001 pelo professor da Universidade de Salzburg, Markus Hohenwarter, com o objetivo de dinamizar o estudo da Matemática. Disponível em versões para diversas plataformas, atualmente está traduzido para cerca de 160 idiomas e possuiu alcance universal.

Figura 2 – Interface do *GeoGebra* versão 5.0



Fonte: elaboração do autor utilizando o *software* GeoGebra.

A rápida expansão do *software*, que atualmente é conhecido como um dos principais *softwares* educativos do mundo, se deu em decorrência de suas funcionalidades, que permitem a abordagem de diversos conteúdos da Matemática da Educação Básica, tais como: geometria, trigonometria, álgebra, funções, estatística e probabilidade.

Uma das principais caraterísticas do *GeoGebra* é a possibilidade de construir figuras geométricas a partir de mais de 80 (oitenta) objetos diferentes, como um ponto, uma reta, um plano, uma circunferência, etc.. Na Figura 2 temos a interface da versão 5.0 *GeoGebra*.

Quadro 1 – Funcionalidades do *software GeoGebra*

BARRA DE FERRAMENTAS	OPÇÕES DE FERRAMENTAS
1. Movimento (Manipulação)	1. Mover 2. Rotação em Torno de um Ponto
2. Pontos	3. Ponto » Ponto em Objeto

	4. Vincular / Desvincular Ponto 5. Interseção de Dois Objetos 6. Ponto Médio ou Centro 7. Número Complexo 8. Otimização 9. Raízes
3. Linhas retas (Retas, Segmentos, Semirretas e Vetores)	10. Reta 11. Segmento 12. Segmento com Comprimento Fixo 13. Semirreta 14. Caminho Poligonal 15. Vetor 16. Vetor a Partir de um Ponto
4. Posições relativas (Retas Especiais e Lugar Geométrico)	17. Reta Perpendicular 18. Reta Paralela » Mediatriz 19. Bissetriz 20. Reta Tangente 21. Reta Polar ou Diametral 22. Reta de Regressão Linear 23. Lugar Geométrico
5. Polígonos	24. Polígono 25. Polígono Regular 26. Polígono Rígido 27. Polígono Semideformável
6. Formas circulares (Círculos e Arcos)	28. Círculo dados Centro e Um de seus Pontos 29. Círculo dados Centro e Raio 30. Compasso 31. Círculo definido por Três Pontos 32. Semicírculo Definido por Dois Pontos 33. Arco Circular 34. Arco Circuncircular 35. Setor Circular 36. Setor Circuncircular
7. Cônicas	37. Elipse 38. Hipérbole 39. Parábola 40. Cônica definida por Cinco Pontos

Quadro 1 – continuação...

BARRA DE FERRAMENTAS	OPÇÕES DE FERRAMENTAS
8. Ângulos e Medidas	41. Ângulo 42. Ângulo com Amplitude Fixa 43. Distância, Comprimento ou Perímetro 44. Área 45. Inclinação

	46. Lista
9. Transformações	47. Reflexão em Relação a uma Reta 48. Reflexão em Relação a um Ponto 49. Inversão 50. Rotação em Torno de um Ponto 51. Translação por um Vetor 52. Homotetia
10. Objetos Especiais	53. Inserir Texto 54. Inserir Imagem 55. Caneta 56. Função à Mão Livre 57. Relação 58. Inspetor de Funções
11. Interface Gráfica (Controles)	59. Controle Deslizante 60. Caixa para Exibir / Esconder Objetos 61. Inserir Botão 62. Inserir Campo de Entrada
12. Personalizadas (Exibição)	63. Mover Janela de Visualização 64. Ampliar 65. Reduzir 66. Exibir / Esconder Objeto 67. Exibir / Esconder Rótulo 68. Copiar Estilo Visual 69. Apagar
13. Estatística	70. Análise Univariada 71. Análise Bivariada 72. Análise Muitivariada 73. Calculadora de Probabilidade
14. Sistemas	74. Lista 75. Lista de Pontos 76. Matriz 77. Tabela 78. Caminho Poligonal
15. Operações	79. Soma 80. Média 81. Número 82. Máximo 83. Mínimo

Fonte: elaboração do autor.

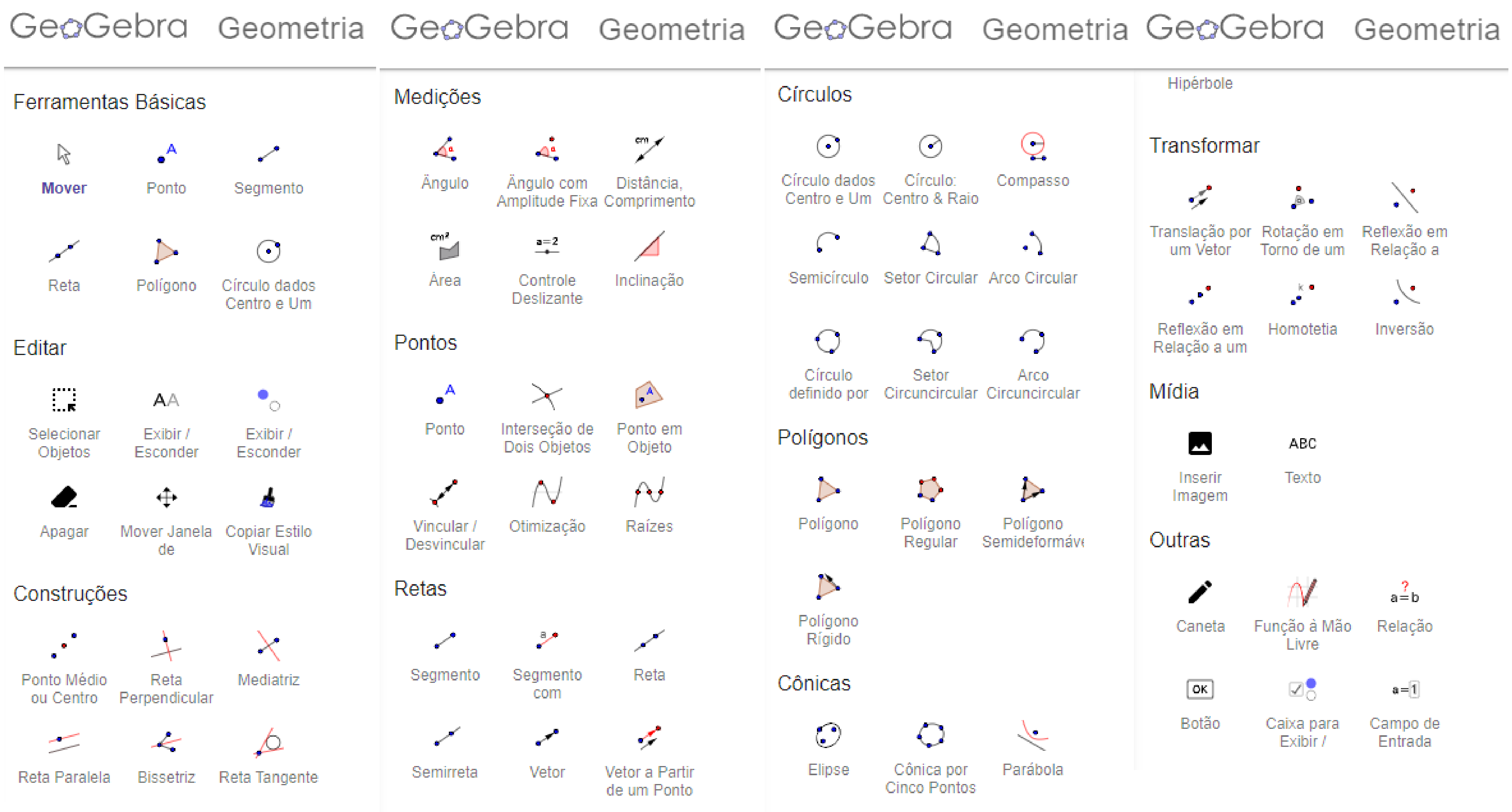
O *software* permite ainda a interação através códigos matemáticos e linguagem de programação, mas o que dá dinamicidade ao estudo da geometria, trigonometria, probabilidade e estatística é a possibilidade de manipulação dos objetos que podem ser movidos sem que as propriedades estabelecidas inicialmente se percam.

Um fator que contribui para a copreensão de vários conceitos matemáticos é a possibilidade de abrir várias janelas simultaneamente. Por exemplo, ao desenhar um gráfico no plano cartesiano, automaticamente as informações são acrescentadas na janela de álgebra, e vice versa. Ao alterar determinadas propriedades em uma das janelas, a propriedade se altera nas demais, contribuindo para assimilação do objeto de estudo.

Ademais, outra característica importante é a integração com páginas da *web* e diversos aplicativos como *Power Point*, *Word* e *Excel*. Essa interação com páginas da web é fundamental para a troca de conhecimento entre os membros da comunidade. É possível, por exemplo, acessar um trabalho pela versão do *GeoGebra* web e salvá-lo no computador afim de manipular ou alterar a construção.

As possibilidades de construções geométricas através do *GeoGebra* são significativamente altas. Essa diversidade pode ser verificada na figura três que apresenta os recursos do GeoGebra para a área de geometria.

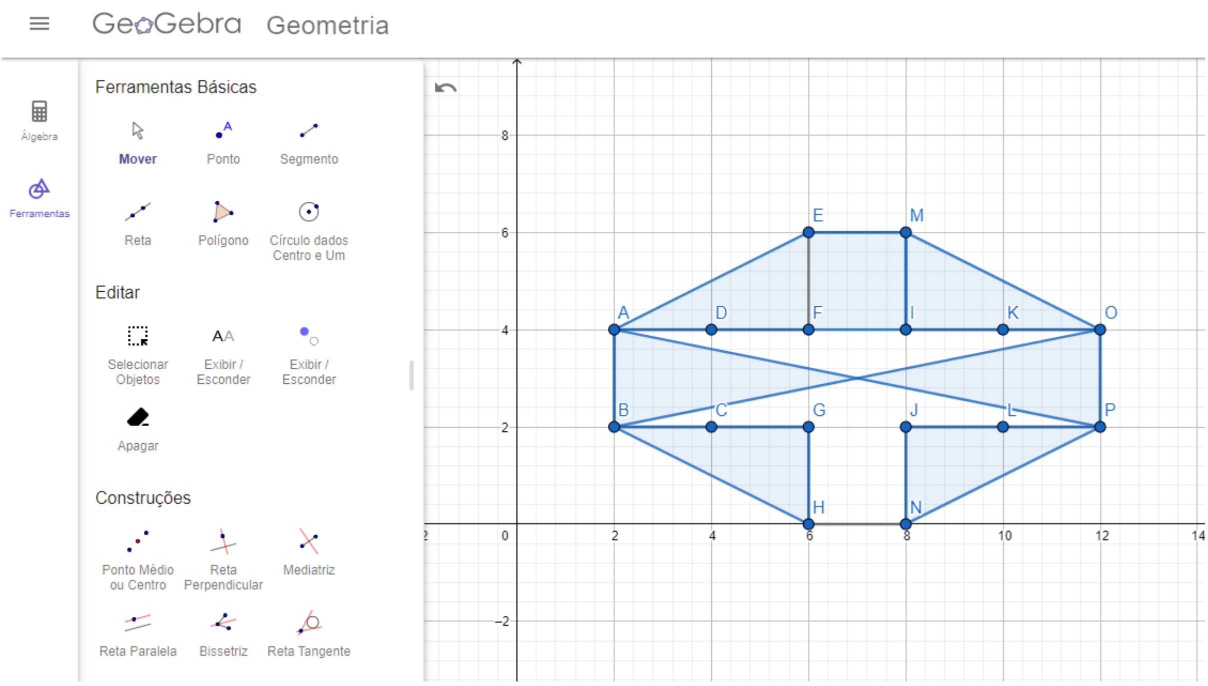
Figura 3 – Funcionalidades para o estudo de Geometria do *software GeoGebra*



Fonte: elaboração do autor utilizando o *software GeoGebra*.

Tais funcionalidades trazem para a Educação Básica, a possibilidade de interação com o objeto de estudo. Além disso, a ferramenta dá ao professor mais igualdade no processo de competição com outras tecnologias que o aluno possui, e que invariavelmente concorrem com a atenção necessária para que o processo de ensino seja eficiente. O *software* “é muito útil para proporcionar ao aluno experiências de contato mais realistas com o objeto matemático)” (HOLANDA FILHO, 2020, p. 62). A Figura 2 ilustra a plataforma de estudo de Geometria do *GeoGebra*.

Figura 4 – Plataforma de estudo de Geometria do *GeoGebra*



Fonte: elaboração pelo autor utilizando o *software GeoGebra*.

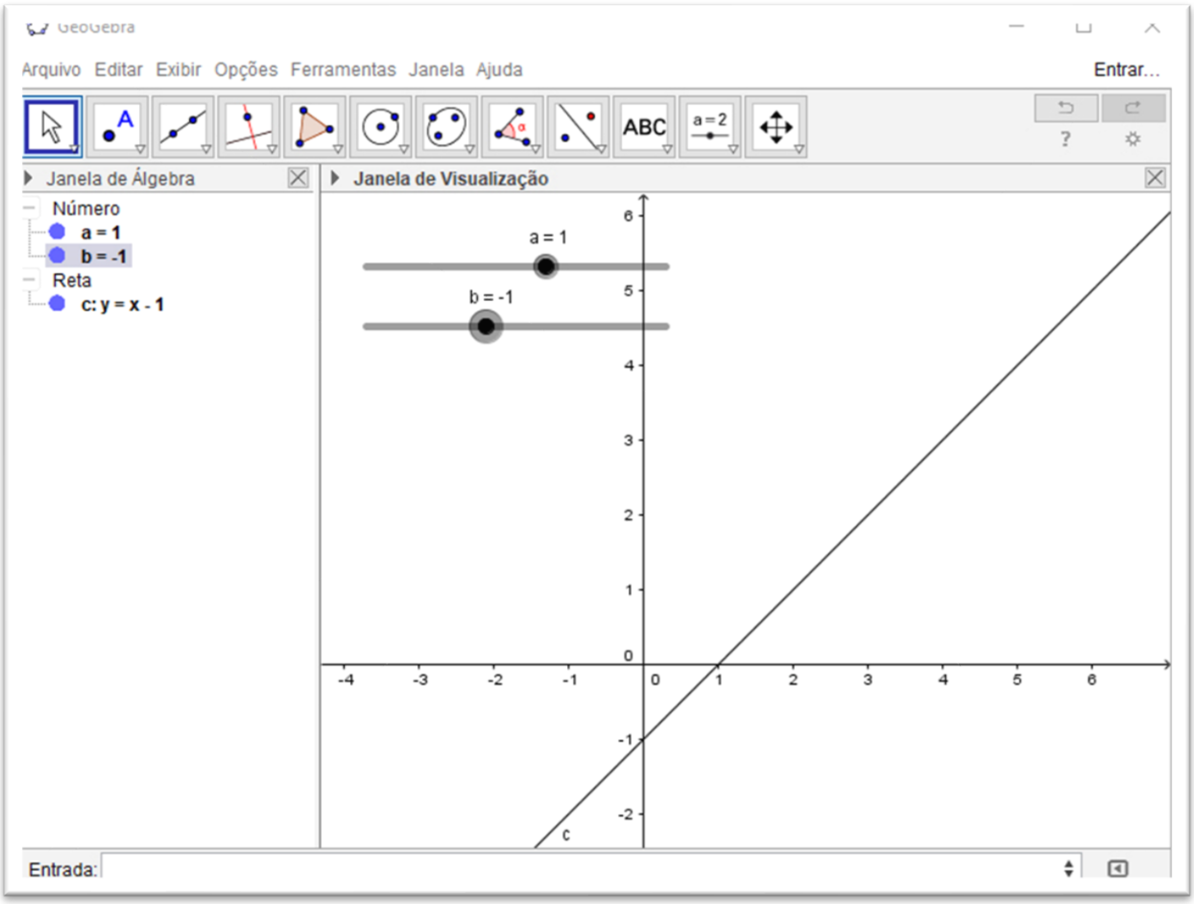
Devido a essas características, o *GeoGebra* pode ser classificado, sobretudo, como um *software* de geometria dinâmica, conforme definição de Isotani (2005):

> O nome “Geometria Dinâmica” (GD) hoje é largamente utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Este nome pode ser melhor entendido como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, que é “estática”, pois após o aluno realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho. (ISOTANI, 2005, p. 3).

Além do estudo da geometria, o *software GeoGebra* possibilita a construção e a manipulação de gráficos de funções polinomiais de grau, além das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Esta pesquisa destacou a análise da função polinômial de grau 1 (um), uma vez que objetivou enfatizar o estudo da reta de regressão. Neste aspecto, uma característica importante do *GeoGebra* a ser destacada é a possibilidade de trabalhar com controles deslizantes.

Com esse recurso pode-se criar, por exemplo, uma função y = ax + b com *a* e *b* ∈ ℝ, de modo que os valores de *a* e *b* possam ser alterados através da movimentação dos controles deslizantes a fim de deslocar o gráfico da função conforme desejado. A Figura 5 abaixo exemplifica essa funcionalidade do *GeoGebra*.

Figura 5 – Funcionalidade do *GeoGebra* na janela de Álgebra



Fonte: elaboração pelo autor utilizando o *software GeoGebra*.

Por tudo o que representa para o ensino de Matemática, conforme mencionado anteriormente, o *GeoGebra* tem se mostrado muito relevante também para a pesquisa em Educação, que já conta com um grande número de artigos, dissertações, teses e livros publicados tais como Meier e Gravina (2012), Lovis e Franco (2013), Iturbe *at al* (2014), Sousa (2016), Pereira e Guerra (2016), Miranda (2021), Silva (2021), Ramos, Lisboa e

Nunes (2021) e Costa, e Allevato (2021). No Brasil, há uma grande comunidade científica[2] que trabalha em conjunto para a produção de tutoriais, discussões em fóruns, conteúdos e estudos científicos.

Outro indicador que atesta a relevância do *software GeoGebra* está relacionado ao crescimento no número de publicações científicas na última década. Uma busca na base de dados Scopus[3], acessada através do Portal de Periódicos da CAPES em 16/07/2022, verificou que o número de artigos científicos que citam o *GeoGebra* cresceu consideravelmente nos últimos anos.

O primeiro registro de publicação na plataforma data de 2006, ano em que houve uma publicação sobre o *software*. Em 2007 foram registradas três publicações revisadas por pares. De 2006 a 2010 a plataforma contabilizou 19 publicações. Nos cinco anos seguintes (2011 a 2015), o número de artigos publicados foi de 165, o que representou um acréscimo de 768%. Nos quinquênio seguinte (2016 a 2020), houve um acréscimo de 182% quando a Scopus contabilizou 466 publicações. Em 2021, a plataforma totalizou o maior número de artigos publicados, com um total de 160 estudos.

Em uma busca rápida realizada no Google Acadêmico[4], onde as publicações não passam pelo mesmo crivo da base de dado Scopus, e é comum a recuperação de várias versões de um mesmo artigo, recuperou-se aproximadamente 20.500 publicações globais entre 2011 e 2020, enquanto que no período de 2001 a 2010, esse número foi de aproximadamente 2.350 publicações, ou seja, um aumento aproximado de 769%.

Quando a análise dessa comparação foi dividida entre os primeiros cinco anos da década de 2010, e os últimos cinco anos da década passada (2011-2015 e 2016-2020), períodos nos quais o uso das tecnologias digitais já estava consolidado, observou-se, ainda assim, um crescimento de 34% no número de publicações. Quando se verificam as publicaçõs dos útimos quatro anos, os registros também evoluíram positivamente com 6.003 ocorrências em 2018, 6.660 em 2019, 7.050 em 2020 e 8.400 em 2021.

Quando a análise foi feita levando-se em consideração as áreas de conhecimento, o uso do *GeoGebra* apareceu com maior frequência no ensino de Geometria, com 16.400 ocorrências no Google Acadêmico, enquanto que o ensino de Estatística foi evidenciado em 3.310 publicações. Vale ressaltar que esses números não se referem ao montante

[2] Na página *geogebra*.org o usuário vai encontrar o aplicativo para *download*, tutoriais e um grande número de construções feitas a partir do uso do *GeoGebra*.

[3] A Scopus é uma base de dados bibliográficas que pode ser acessada através do Portal de Periódicos da CAPES, e possui cerca de 35.000 publicações revisadas por pares. As publicações são avaliadas de acordo com um *ranking* composto de 5 classificações.

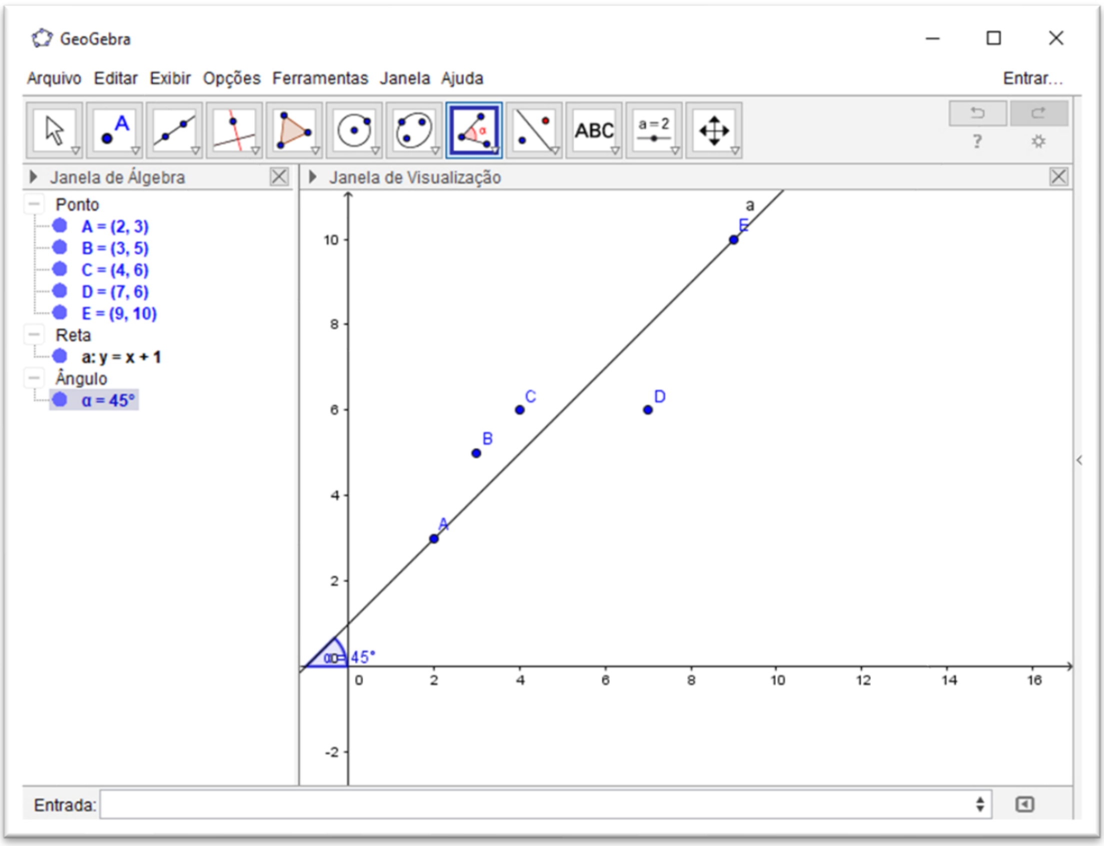
[4] O Google Acadêmico é um índice de classificação de trabalhos científicos. É um sistema parecido com o buscador do Google que acrescenta outras informações como número de citações da obra.

exato da produção científica sobre o *GeoGebra*, pois um mesmo trabalho pode ter sido publicado em diferentes meios, e todos foram recuperados pela busca.

Entretanto, no que se refere ao estudo de Estatística, ainda existe uma lacuna a ser investigada. Por isso esta pesquisa se propôs a estudar as contribuições que os recursos disponíveis no *software* GeoGoebra podem fornecer ao estudo de regressão linear. Assim, para a representação das retas de regressão, o *software* possui ferramentas que podem ser úteis tanto para a realização dos cálculos, como para a compreensão de alguns fenômenos.

O ganho em conhecimento pode ser muito interessante quando o conteúdo é abordado do ponto de vista do estudo analítico da reta, que pode ser realizado com as ferramentas disponíveis na janela de álgebra.

Figura 6 – Reta crescente y = x + 1 com ângulo de 45º pando pelos pontos A(2,3) e E(9,10)



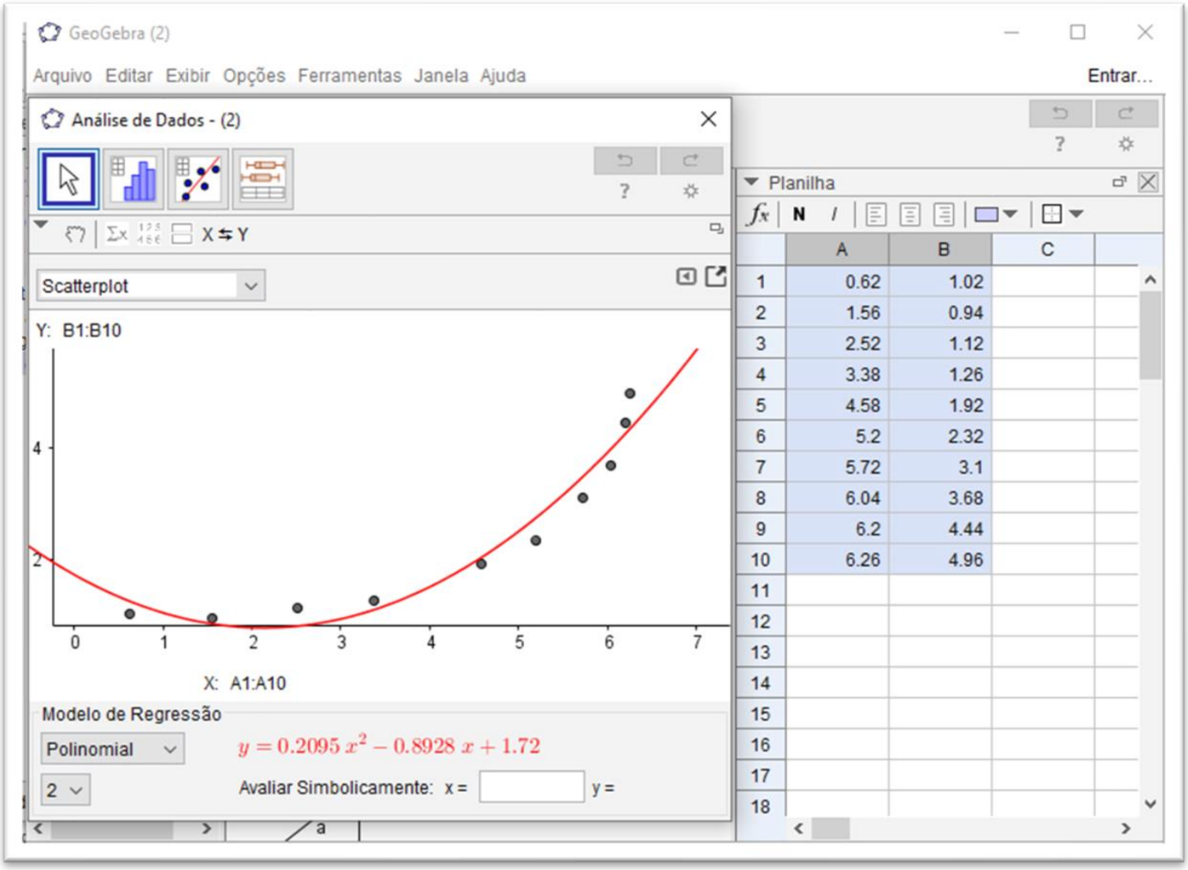
Fonte: elaboração pelo autor utilizando o *software GeoGebra*.

Esta é uma abordagem que instiga a construção passo a passo do conceito de análise de regressão, permitindo ao aluno conjecturar as possíveis soluções para o problema, ainda que de maneira rudimentar. Com esse recurso é possível traçar retas que passem por cada par de pontos e comparar, na janela de álgebra, o intercepto e coeficiente angular da representação algébrica da reta gerada automaticamente conforme Figura 6.

A ferramenta elaborada especificamente para a análise de regressão é Análise Bivariada, disponível na planilha de calculos do *software*. Este recurso mostra-se um tanto limitado quanto às possibilidades de interação, se assemelhando a uma calculadora que apresenta resultados, mas não especifica o método. Por isso a aprendizagem de estatística através da criação de modelos é um tanto desafiadora.

Por outro lado, a ferramenta permite comparar várias representações simultaneamente. Assim é possível verificar qual função (linear, polinomial, exponencial, etc.) melhor representa o conjunto de pontos estudados.

Figura 7 – Função polinomial de segundo grau ilustrada pelo *GeoGebra*



Fonte: elaboração pelo autor utilizando o *software GeoGebra*.

No exemplo da Figura 7, observa-se que a regressão linear seria insuficiente para explicar o fenômeno que, no intervalo entre 1 e 6, é melhor descrito por uma função polinomial de segundo grau. Esta funcionalidade é importante para comparar resultados e pode ser consultada sempre que outros métodos se mostrarem insuficientes.

Percebe-se, então, que o *GeoGebra* possui grande potencial para que o aluno possa observa, manipular, imaginar e conjecturara cerca dos objetos matemáticos abordados no conjunto de recursos que ele disponibiliza. Dessa forma, não resta dúvida quanto aos benefícios que esta ferramentas podem trazer se integrado de forma corre às metodologias aqui apresentadas.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa se caracteriza como empírica, exploratória, experimental e qualitativa, sob a condução segundo o método da Engenharia Didática para a coleta, medição e análise dos resultados.

Trata-se de uma pesquisa empírica, pois realizou a aplicação das Teorias dos Registros de Representação Semiótica e das Situações Didáticas em um grupo de alunos do Ensino Médio de uma escola pública do município de Apuí, do estado brasileiro do Amazonas. Foi de cunho exploratório para a discussão da literatura sobre a aplicação dessas teorias no ensino de Matemática; de cunho experimental para a aplicação do método de Engenharia Didática na amostra em questão; e, qualitativa para a análise dos resultados.

A aplicação da pesquisa em um grupo específico da sociedade e o processo de validação essencialmente interno a delineia, segundo Artigue (1995), como estudo de caso, que é composto pelas etapas de concepção, realização, observação e análise. Além disso, utilizou-se o método da Engenharia Didática para coletar, medir e analisar a realização didática, em sala de aula, como prática investigativa do ensino de Matemática na turma foco de análise.

A maioria das pequisas que se caracterizam pela experimentação em sala de aula se sustenta através de comparações estatísticas com grupo de controle externo. A Engenharia didática, pelo contrário, tem como referência apenas o ambiente interno da investigação: “Não é o caso da engenharia didática que se localiza, por pelo contrário, no registo dos estudos de caso e cuja validação é essencialmente interna, baseada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*” (ARTIGUE, 1996, p. 37).

Assim como Artigue (2005), Denardi e Bisognin (2021) e Silva (2019) também classificaram as pesquisas em Engenharia Didática como estudo de caso. Entretanto, as bases teóricas que sustentam a Engenharia Didática não coincidem com as que fundamentam o estudo de caso como uma metodoloiga de pesquisa. Sem se referir à Engenharia Didática, Yin (2015) alertou para uma provável confusão entre o estudo de caso como metodologia de pesquisa e o estudo de caso usado no ensino:

> Também existe a possibilidade de que as pessoas confundam a pesquisa de estudo de caso com os estudos de caso usados no ensino. No ensino, os materiais do estudo de caso podem ser deliberadamente alterados para demonstrar um determinado ponto mais efetivamente. Na pesquisa, qualquer

passo desses seria estritamente proibido. (YAN, 2015, p. 21).

A mesma confusão pode ocorrer em relação à Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, pelo fato de haver um método de ensino com o mesmo nome. Nesta dissertação, porém, todas as referências à Engenharia Didática estão relacionadas à metodologia de pesquisa que se fundamenta basicamente na didática da matemática francesa. Suas características estão descritas a seguir.

3.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática surgiu a partir da necessidade de uma metodologia que fosse capaz de oferecer subsídios para a investigação acerca dos métodos de ensino no sistema didático. Dessa forma, as pesquisas realizadas com a Engenharia Didática não estudam os processos de ensino e de aprendizagem de forma isolada, mas sim o sistema didático como um todo, se baseando em uma sequência de situações didáticas implementadas na experimentação.

Por isso, está sempre relacionada a uma metodologia de ensino, como a Teoria das Situações Didáticas, que é a mais encontrada na área da Matemática. Entretanto, há diversas possibilidades e combinações quando é incluída no ensino de outras disciplinas, como a Física e Química. (DA SILVA, 2018)

A Engenharia Didática emergiu no âmbito da didática da Matemática francesa, que se consolidou, a partir da década de 1980, com a publicação de vários trabalhos produzidos por pesquisadores do Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM – *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), da *Université de Bordeaux*. (TEIXEIRA E PASSOS, 20124)

Chefiado por Guy Brousseau, o IREM contou com a contribuição de diversos pesquisadores, como Regine Douady, Michèle Artigue e Yves Chevallard. Apesar de terem desenvolvido trabalhos distintos, utilizaram, em comum, a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. (ALMOULOUD, 2007)

Por isso, é possível encontrar fundamentação para a aplicação da Engenharia Didática associada a outras metodologias de ensino, como a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria da Transposição Didática, a Dialética da Ferramenta-Objeto, a Teoria Antropológica do Didático, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, entre outras.

Apesar de ter sido utilizada por numerosos pesquisadores ao longo do tempo, Michèle Artigue foi quem mais se empenhou em popularizar a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, e cujos trabalhos sustentam a maior parte dos artigos que tratam sobre o tema.

Chevallard e Brousseau foram os precursores da Engenharia Didática, citados, posteriormente, como referencial teórico de Artigue. De acordo com Artigue (1996), as pesquisas relacionadas à didática da Matemática se contrapunham a um processo de inovação, de caráter ideológico, no ensino que vinha recebendo duras críticas por parte de pesquisadores como Yves Chevallard.

A obsessão pelo novo impulsionava a aplicação de métodos que sequer haviam sido testados, mediante autorização do próprio inovador. Essas inovações, segundo Chevallard, acarretavam possíveis prejuízos para o processo educativo (ARTIGUE, 1996).

Quanto à qualidade da educação matemática, observava-se que havia uma deficiência no ensino, pois o sistema didático carecia de teorias que dessem conta de oferecer uma educação de qualidade, bem como de teorias para sustentar as investigações a respeito dos métodos de ensino.

Nesse contexto, a Engenharia Didática se configurou como uma ferramenta importante para o estudo de experimentos controlados e executados de forma ética e segura. De abordagem qualitativa, a Engenharia Didática é realizada de forma interna, por meio da observação do processo didático, e tem como método de validação as análises realizadas *a priori* e *a posteriori*.

Não se trata de avaliar os resultados produzidos pela intervenção, nem a comparação com meios externos à experimentação, mas de avaliar a dinâmica do processo didático, considerando o meio no qual o ambiente está inserido. Aliás, a Engenharia Didática se opõe aos processos externos de investigação (que ocorrem fora da sala de aula), e que utilizam instrumentos, como questionários, exercícios, testes, etc., por considerá-los insuficientes para a compreensão da complexidade dos processos didáticos.

Assim, uma pesquisa que se utiliza da Engenharia Didática não deve se contentar apenas com evidências, pelo contrário, deve priorizar um processo criterioso de análise, mesmo que para isso tenha que reduzir o número de experimentos. Desse modo, o pesquisador deve identificar os fenômenos didáticos, produzi-los e reproduzi-los para avaliar as sequências didáticas (ALMOULOUD, 2018).

Este modo de conduzir um estudo deu origem ao termo, remetendo ao trabalho do

Engenheiro, que apesar de todo o suporte teórico que possui deve estar preparado para enfrentar situações para as quais não existem modelos previamente estabelecidos. Então, além de investigar, o “engenheiro” tem a difícil tarefa de traçar caminhos que levem à construção do conhecimento.

Neste sentido, a Engenharia Didática insere o pesquisador na complexidade do tema, evidenciando fenômenos cujas caraterísticas as metodologias mais externas, ancoradas em questionários, entrevistas e grupos de controle, são incapazes de identificar. Com o objetivo de garantir o caráter científico da Engenharia Didática, a vigilância deve ser ampliada. Por essa razão, os procedimentos metodológicos se fundamentam nos registros de estudos de casos, que possuem validade apenas dentro do contexto de realização da pesquisa (PAIS, 2019).

Artigue (1996) chamou a atenção para o problema da reprodução e da obsolescência das metodologias naturalistas que a Engenharia Didática deve evitar. Para a autora, é importante que a reprodução de uma determinada situação leve em consideração as condições locais e temporais nas quais a atividade foi desenvolvida.

O percurso da pesquisa em Engenharia Didática é composto de análises prévias, concepções e análises *a priori*, experimentação e análises *a posteriore*. A seguir estão detalhadas cada uma dessas etapas, conforme classificado por Artigue (1996).

3.1.1 Análises prévias

A fase de análises prévias consiste na delimitação e fundamentação do objeto de estudo da pesquisa por meio da análise dos conhecimentos didáticos de domínio público. Nesse momento, ocorre a identificação do suporte teórico para o desenvolvimento das competências argumentativas. Tais competências devem possibilitar um conjunto de análises preliminares, que são:

> Análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino; análise do ensino habitual e seus efeitos; análises das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução; análise do campo de restrições no qual virá a situar-se a situação didática efetiva; e, naturalmente tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1996. p. 198).

As análises preliminares são, portanto, uma contextualização dos aspectos teóricos didáticos e curriculares, bem como dos aspectos macrodidáticos que influenciam o processo educativo. Os conceitos referentes à fase das análises preliminares podem ser mais bem esclarecidos durante a fase de pesquisa, quando é apresentado o detalhamento do estudo com a descrição do objeto a ser investigado e das características do ambiente em que está inserido.

Recomenda-se a inclusão de uma descrição do problema de pesquisa em seus aspectos epistemológicos, cognitivos e pedagógicos, entre outros. Apesar do caráter prévio das análises, Artigue (1996) salientou que não são raras as vezes em que os temas precisam ser retomados e aprofundados diante de um obstáculo durante o percurso do processo investigativo. Por isso, os estudos prévios representam apenas o nível inicial de elaboração do estudo.

De acordo com Artigue (1996), alguns trabalhos não apresentam todos os componentes citados acima de forma explícita. Dessarte, empenhou-se no desafio de estudar as características de alguns trabalhos em destaque para compreender o método em detalhes.

3.1.2 Análises a priori

Nessa fase da investigação, o pesquisador deve definir o conjunto de variáveis sobre as quais vai atuar. Nesse procedimento, as hipóteses devem ser explicitadas para nortearem as análises preditivas em relação à sequência didática a ser elaborada.

As variáveis micro-didáticas são aquelas consideradas no processo de organização local da sequência didática, conforme descritas por Brousseau (2008). Neste trabalho, essas variáveis foram aplicadas segundo os conceitos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas apresentada por Duval (2007).

Quanto às variáveis macro-didáticas, dizem respeito à organização global da engenharia, sendo que a maioria delas é ligada ao conteúdo. Artigue (1996) salientou que as variáveis micro-didáticas e macro-didáticas não podem ser definidas de forma independente, devendo haver, portanto, uma conexão entre elas.

Nas análises *a priori* devem ser pontuadas as etapas do processo de investigação abordando cada exercício de maneira descritiva e preditiva. As escolhas precisam ser justificadas a partir da análise do grau de complexidade, do empenho necessário para o cumprimento da tarefa, das possibilidades de escolhas que favoreçam o grau de autonomia do aluno na tomada de decisão e do grau de independência, de maneira que o aluno possa resolver as atividades com a interferência mínima do professor.

A situação proposta deve ser elaborada com base na previsão do comportamento do aluno ao se relacionar com o meio, bem como na mobilização de conhecimentos prévios para a execução da atividade. Ao retomar o tema, Artigue (2019) esclareceu que essa previsão é apenas uma estratégia para auxiliar o pesquisador na elaboração das situações didáticas, orientando no que pode ser oferecido em termos de aprendizagem. Como o foco é na atuação autônoma do aluno, é provável que ele se comporte de maneira diferente do esperado. Para Brousseau (2008), o aprendizado acontece exatamente na ruptura entre o comportamento do aluno, o que se espera dele e a forma com que ele age. Por esse motivo, devido ao caráter essencialmente interno da investigação em Engenharia Didática, a validação se dará no confronto entre o que se previa do aluno durante o processo de experimentação e o produto do trabalho realizado.

3.1.3 Experimentação

A experimentação é a fase de aplicação da sequência didática na sala de aula. Essa fase deve levar em consideração a natureza das hipóteses a serem provadas para que a possibilidade de relação com o meio possa ser priorizada a fim de que se verifique a potencialidade que essa relação possui para alterar o percurso previsto na estratégia inicial na solução do problema proposto.

Segundo Pais (2019), a sequência didática deve ser aplicada em certo número de aulas planejadas e analisadas com o objetivo de testar as hipóteses levantadas no estudo de modo a permitir a aproximação do resultado prático com os pressupostos teóricos apresentados.

Artigue (2019) destacou que é natural que o projeto seja alterado pelo pesquisador durante o experimento desde que sejam observados fatos que justifiquem essa alteração. Eventuais mudanças devem ser registradas e justificadas.

Somado a isso é necessário enfatizar a necessidade de documentação do processo da melhor maneira possível. Além dos registros do processo de resolução em papel, é importante utilizar também meios de gravação em áudio e vídeo para sustentar a análise *a posteriori*. Para esta dissertação, foram utilizados meios digitais para a captura de tela dos aparelhos para analisar a natureza dos procedimentos escolhidos *a posteriori*.

Em relação às atividades resolvidas sem o uso de tecnologias digitais, é importante adotar estratégias que impeçam a possibilidade de correções ou rasuras das tentativas fracassadas a fim de se avaliar a natureza dos erros cometidos na execução das tarefas.

3.1.4 Análises a posteriori e validação

Este processo é feito com base nas observações das atividades realizadas na experimentação e no resultado do trabalho produzido pelos alunos. De acordo com Artigue (1996, p. 208), “a coleta de dados pode incluir o uso de metodologias externas, como a aplicação de questionários, individuais ou em grupo, e a aplicação de testes durante o percurso investigativo ou no final da experimentação”.

Conforme mencionado anteriormente, é a comparação entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori* que possibilita a validação das hipóteses envolvidas no processo investigativo.

A Engenharia Didática procura fugir das análises estatísticas que buscam comparar as variáveis mensuráveis dos grupos experimentais com as variáveis dos grupos de controle. Este procedimento se dá por considerar que as hipóteses que levam em consideração tais procedimentos são, em geral, de natureza global, que requerem uma abordagem dos processos em longo prazo, cuja extensão da Engenharia Didática não permite alcançar no processo de validação.

3.2 Percurso da investigação

Metodologicamente esta pesquisa se desenvolveu segundo as etapas apresentadas no Quadro 2, abaixo.

Quadro 2 – Etapas de desenvolvimento da pesquisa

ETAPAS DESENVOLVIDAS	
1	Revisão bibliográfica sobre ensino de Matemática
2	Revisão bibliográfica sobre o uso de novas tecnologias na Educação
3	Revisão bibliográfica a respeito do uso do *software GeoGebra* no ensino de Matemática
4	Revisão bibliográfica sobre a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas e a Engenharia Didática
5	Revisão bibliográfica sobre estatística básica - análise de regressão
6	Exame de qualificação da dissertação
7	Análises preliminares e análises *a priori*
8	Experimentação, análises *a posteriori e validação*
9	Exame de defesa da dissertação

Fonte: elaboração do autor.

Foram definidos os participantes englobados na aplicação da Engenharia Didática e os critérios de inclusão e exclusão na amostra do estudo de caso, conforme apresentado a seguir.

3.2.1 Participantes da pesquisa

Os sujeitos que englobam a amostra do estudo de caso desta dissertação estão localizados no município de Apuí, região sul do Estado do Amazonas. Com uma população estimada em 20 mil habitantes, Apuí foi fundado em 1988 como consequência do Projeto de Assentamento Agrícola Rio Juma. Localizado a 408 km da capital Manaus, Apuí faz divisa com os municípios de Manicoré, Novo Aripuanã, Borba e Maués, e os Estados de Mato Grosso e Pará. Sua principal fonte de renda advém das atividades da agropecuária. A Figura 8 ilustra a localização geográfica de Apuí no sul do Estado do Amazonas.

Figura 8 – Localização geográfica do município de Apuí-AM

Fonte: Wikipédia (2022).

A educação no campo é de responsabilidade da rede municipal de ensino, que mantém quatro escolas-pólo instaladas nas coumunidades rurais que atendem alunos do

Ensino Fundamental. Já o ensino regular em nível médio presencial é oferecido apenas na sede do município de Apuí, para onde os alunos são transportados pelos ônibus da frota municipal de transporte escolar.

Na sede do município de Apuí funcionam cinco escolas de ensino regular, sendo duas de Educação Infantil, três de Ensino Fundamental e uma escola que atende os alunos de Ensino Médio.

Por ter apenas uma escola de Ensino Médio regular no município, a população atendida é bastante heterogênia, permitindo um intercâmbio cultural entre as populações urbana e rural, que advêm de diversas classes sociais, diferentes religiões e profissões. Essa diversidade representou um desafio para esta pesquisa, pois foi preciso lidar com pessoas com diferentes níveis de habilidades no que se refere ao uso das tecnologias que deram suporte ao estudo.

3.2.2 Critérios de inclusão

A pesquisa foi realizada na sede do município de Apuí, onde o pesquisador reside e trabalha. Devido às características do conteúdo matemático a ser explorado e dos pré-requisitos necessários para a abordagem do objeto de estudo, optou-se por uma turma da 3ª série do Ensino Médio na modalidade regular.

Neste caso, considerando que Apuí possui apenas uma escola nesse nível de estudo, foi ela a selecionada. Além disso, com a pretensão de investigar turmas mistas, que englobam alunos que moram na zona urbana e na zona rural e que possuem diferentes níveis de conhecimento matemático, outro critério de inclusão utilizado foi a seleção das turmas do período vespertino, uma vez que as turmas do período matutino e noturno não contam com serviço de transporte escolar, com o qual os alunos da zona rural chegam na escola.

Ainda em relação às turmas onde a experimentação seria realizada, optou-se pela mais numerosa, a fim de se observar uma amostra mais abrangente. Dessa forma, a turma selecionada para a presente pesquisa foi uma da 3ª do Ensino Médio do período vespertino, da Escola Estadual Profª. Maria Curtarelli Lira. Definida a escola, o período, a série e a turma objeto de análise desse estudo, os sujeitos selecionados deveriam, obrigatoriamente, estar matriculados na turma da 3ª do Ensino Médio do período vespertino da Escola Estadual Profª. Maria Curtarelli Lira e ter nascido entre os anos de

2002 e 2006.

3.2.3 Critérios de exclusão

Como critérios de exclusão, considerou-se fora da amostra de estudo:

1) Os alunos pertencentes aos demais anos do Ensino Médio da Escola Estadual Profª. Maria Curtarelli Lira.
2) Os alunos que não participaram dos primeiros encontros da sequência didática, que por assim se tratar, cada etapa é fundamental para a realização das seguintes.

Por se tratar de um estudo em ano de retomada do ensino presencial no contexto da pandemia do COVID-19, após meses de ensino à distância em virtude das medidas sanitárias de isolamento social para a contenção da propagação do vírus, esta pesquisa excluiu também da amostra de análise os alunos com algum tipo de comorbidade que os classificasse pertencentes ao grupo de risco do COVID-19, os quais foram subsequentemente excluídos das demais etapas.

3.3 Desenvolvimento do estudo

Esta pesquisa foi subdividida em quatro etapas para o seu desenvolvimento, seguindo a metodologia empregada com a Engenharia Didática, são elas:

1) Análises preliminares;
2) Análises *a priori*;
3) Experimentação; e,
4) Análises *a posteriori*.

Considerando que as análises *a priori* incluem o planejamento das ações e a elaboração detalhada das sequências didáticas a serem testadas, foi dedicado um tempo maior para realização dessa etapa.

Na Engenharia Didática, a fase de análises *a priori* é uma etapa em que se programam as atividades a serem realizadas na experimentação. Assim, para que este estudo abrangesse temas relacionados ao cotidiano dos alunos, esta etapa englobou um levantamento de informações, para a elaboração das atividades a serem realizadas no processo de experimentação, sobre a produção agropecuária do município de Apuí.

Foram utilizados documentos disponíveis em domínio público nos *sites* do Instituto de Conservação e Desenvolvimento Sustentável da Amazônia (IDESAM), do Instituto de Desenvolvimento Agropecuário e Florestal Sustentável do Estado do Amazonas (IDAM) e da Agência de Defesa Agropecuária e Florestal do Estado do Amazonas (ADAF).

É importante ressaltar que a natureza dos dados levantados, supracitados, não interfere no resultado da pesquisa como um todo, tendo em vista que a abordagem qualitativa da Engenharia Didática coloca o uso dessas informações apenas como ferramentas didáticas a serem manipuladas pelos alunos na fase de experimentação.

Foram realizados seis encontros, com 50 minutos de duração cada, na fase de experimentação, em uma turma do Ensino Médio, com as seguintes finalidades:

3.4 Protocolos de segurança

A fim de preservar a integridade física dos participantes, a pesquisa seguiu todos os protocolos estabelecidos nas normas técnicas do Conselho Nacional de Ética em Pesquisa, da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PROPESP) da UFAM, da Agência Nacional de Vigilância Sanitária (ANVISA), do governo do Estado do Amazonas e do município de Apuí-AM, adotando as medidas sanitárias exigidas para o momento.

Por se tratar de uma escola pública estadual, ambiente no qual esta pesquisa foi realizada, foram adotados também os protocolos estabelecidos pela Secretaria de Estado de Educação do Amazonas (SEDUC-AM) a fim de se minimizar os riscos de contágio pelo COVID-19 durante a realização da pesquisa.

3.5 Sequência didática

A sequência didática elaborada para experimentação neste estudo foi composta por 05 (cinco) atividades desenvolvidas ao longo de 04 (quatro) encontros, sendo 01 (um) de 50 (cinquenta) minutos e 03 (três) encontros de 100 (cem) minutos cada. Para melhor orientar as etapas da pesquisa, as atividades da sequência didática foram disponibilizadas em conforme listada abaixo:

1. Primeiro encontro: reconhecimento do laboratório de informática e apresentação do *software GeoGebra*;
2. Segundo encontro: realização das atividades 01 e 02, disponíveis nos apêndices A e B, respectivamente;
3. Terceiro encontro: realização das atividades 03 e 04, disponíveis nos apêndices C e D, respectivamente;
4. Quarto encontro: realização da institucionalização e da atividade Atividade 05, disponível no Apêndice B.

3.6 Análises preliminares

Em relação à dimensão epistemológica, que está associada às características do saber, pode-se afirmar que a regressão linear é uma equação utilizada para estimar os valores de uma variável *y* para cada valor de *x* selecionado. Resolver um problema de equação linear consiste basicamente em encontrar essa relação, ou seja, desenvolver uma fórmula que permita prever um resultado para *y*, conhecendo os valores de *x*. Assim, à medida que *x* aumenta, *y* também aumenta (função crescente), ou *y* diminui (função descendente).

Além de prever os resultados, a regressão linear é utilizada para explicar determinados fenômenos. Por isso, a variável independente *x* também pode ser chamada de variável explicativa, e a variável dependente *y* é chamada por alguns autores de variável explicada.

Quanto às características do conteúdo envolvido, a regressão linear é representada pela equação de uma reta, que é determinada pela soma das distâncias de um conjunto de pontos até essa reta. O estudo da regressão linear envolve ainda a habilidade de coleta e organização dos dados em tabelas, bem como o cálculo da média e a compreensão da álgebra elementar.

A dedução do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para ajustamento da reta exige habilidade em cálculo diferencial. Entretanto, no Ensino Médio, a demonstração do método deve ser suprimida devido à falta de pré-requisitos nessa fase de estudos.

Neste nível médio de ensino, a regressão linear simples é priorizada nos cursos técnicos e instrumentaliza a Análise Exploratória de Dados (AED). A regressão linear pode contribuir para o estudo de fenômenos nas mais diversas áreas de produção. Para ilustrar essa importância, o Quadro 3, a seguir, traz alguns trabalhos relacionados à criação de bovinos que utilizaram essa técnica para a análise dos dados coletados.

Quadro 3 – Estudos sobre a produção de bovinos

Estudos sobre a produção de bovinos que utilizaram a análise de regressão para tratamento de dados		
Tendência genética e fenotípica para características de crescimento em bovinos da raça Indubrasil no estado do Sergipe	Caires *et al*. (2009)	Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal ISSN: 1519-9940
Tendência genética em pesos de bovinos da raça nelore mocha no Brasil	Ferraz Filho *et al*. (1997)	Anais da XXXIV reunião da SBZ, Juiz de Fora-MG, Julho
Uso de técnicas de regressão na avaliação, em bovinos de corte, da eficiência de conversão do alimento em produto: proposição de método e significância nutricional	Detmann *et al*. (2012)	American Journal of Clinical Nutrition, v.11, p. 249-252
Modelo de regressão linear segmentado com platô como estimativa para o cálculo do tamanho de parcelas para experimentos com carcaça de bovinos	Faria *et al*. (2012)	Revista da Estatística UFOP, v. 2. ISSN 2237-8111
Correlação e regressão entre mensurações corporais e características de carcaça em bovinos da raça Nelore	Pistillo; Camargo; Souza (2022)	Diversitas Journal, v. 7, n. 1, p. 26-38. ISSN 2525-5215

Fonte: elaboração do autor.

Quanto à dimensão didática a abordagm é feita geralmente de maneira clássica, através de definição, exemplos, dedução da fórmula e aplicação. Em alguns casos, porém, a fórmula não é deduzida. Bruce *e Bruce* (2019, p. 207), apresentou a fórmula com a seguinte introdução: “A regressão de quadrados mínimos leva a uma fórmula simples para calcular os coeficientes”, seguido das expressões:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i - n\overline{xy}}{\sum_1 x_i^2 - \overline{nx}^2}$$

Pode-se observar que em certos casos o ensino se processa de forma estática, sem que o aluno tenha o entendimento dos conceitos envolvidos no objeto matemático.

Limitando à coleta e ao processamento dos dados.

No que se refere à dimensão cognitiva, este estudo foi realizado na terceira série do Ensino Médio, etapa na qual os alunos já possuem noções de funções afim e estudam de maneira mais aprofundada, em geometria analítica, a equação reduzida da reta e a distância entre ponto e reta. Nesse mesmo período, os estudos de estatística básica são aprofundados com os conceitos de população, amostra e variável, medidas de tendência central e medida de dispersão.

Esses componentes favorecem a introdução ao estudo da regressão linear. Entretando, nessa etapa, os alunos ainda não possuem a noção de cálculo diferencial usado para deduzir o método dos mínimos quadrados. Portanto, a dedução é realizada apenas de maneira intuitiva, sem o rigor técnico exigido em cursos de nível superior.

Ainda quanto às características do público alvo da pesquisa, enfatiza-se a heterogeneidade da turma estudada que incluía alunos moradores das áreas urbana e rural da cidade de Apuí/AM, sendo estes últimos filhos de praticantes da agropecuária como atividade econômica.

O fator geográfico pode ter influenciado na formação desses alunos durante o período da pandemia, uma vez que durante as aulas remotas a cobertura de acesso à *internet* pode ter variado nos diferentes espaços de habitação. Dessa forma, o desempenho desses dois grupos deve ser monitorado. Ao mesmo tempo, destaca-se que a experiência com o trabalho no campo pode contribuir para o desenvolvimento das atividades matemáticas que buscam solucionar questões dessa área de atividades.

3.7 Análises *a priori* da sequência didática

Com a implementação da sequência didática, verificou-se que o *software GeoGebra* pode dar uma importante contribuição para a compreensão de alguns objetos matemáticos envolvidos na análise de regressão. Entre os objetos estudados, destacam-se o coeficiente angular e coeficiente linear de uma reta.

Pretende-se, portanto, observar em que medida as representações do objeto influenciam de forma positiva o aprendizado de Estatística. De forma secundária, as atividades propostas devem aprofundar os estudos de média, variância e desvio padrão, que constam no currículo do Ensino Médio.

De acordo com Duval (2012), a representação semiótica não é condição suficiente para a solução de um determinado problema. O aprendizado, segundo ele, depende do trânsito entre duas ou mais representações. Nesse sentido, a estratégia desse experimento foi possibilitar a representação por meio da linguagem algébrica, gráfica e imagética, etc., para observar a relação entre as representações e soluções para os desafios apresentados.

A seguir, estão apresentadas análises das atividades aplicadas a fim de confrontá-las, posteriormente, aos resultados obtidos na experimentação e na análise *a posteriori*.

3.7.1 Análise a priori da Atividade 01

Nesta atividade[5] foram apresentados dados a respeito da criação de unidades de bovinos por hectares de pastagem cultivada. Foram apresentadas 09 (nove) amostras de propriedades, com áreas variando entre 15 hectares e 180 hectares, e a quantidade de animais criados nessas propriedades. Foi solicitado que os participantes da pesquisa marcassem todos os valores em um único plano cartesiano a fim de verificar a nuvem de pontos que estes dados representariam no plano.

Em seguida, solicitou-se que os participantes encontrassem a equação de uma reta de maneira que o conjunto de pontos fosse mais bem retratado pelo traçado da reta. Por fim, foi requerido aos alunos que utilizassem a equação da reta encontrada para predizer a quantidade de animais que, em tese, poderiam ser criados em uma determinada área.

Um dos objetivos dessa atividade foi apresentar um exemplo de análise de regressão, para levar os alunos a refletirem sobre esse objeto matemático, até então desconhecido por eles. A atividade também buscou mostrar que os dados dispostos em tabelas podem ser representados no plano cartesiano, e vice-versa, do mesmo modo que ambas as representações podem ser retratadas pela linguagem materna, no nosso caso, a língua portuguesa. A atividade também objetivou levar os alunos a refletirem sobre uma possível solução para o problema, seja na sua forma algébrica ou na representação gráfica. Foi previsto também o desenvolvimento de habilidades para aplicar os resultados em situações do cotidiano.

Uma possível solução seria a atribuição de novos pontos para o ajustamento, caso os pontos dados não se mostrassem representativos da reta ajustada. Em ambos os casos, a reta poderia ser encontrada com a utilização dos recursos de geometria analítica

[5] Ver atividade no Apêndice A.

na relação $tg\alpha = m = \Delta y/\Delta x$, onde m é o coeficiente angular, ou pela fórmula do determinante de uma matriz de ordem 3, onde as coordenadas dos pontos formam as duas primeiras linhas, o par ordenado P(x,y) formam a terceira linha e o número 1 completa a terceira coluna.

3.7.2 Análise apriori da Atividade 02

Esta atividade[6] retomou o exemplo apresentado na atividade anterior, mas contou, dessa vez, com a utilização do *software GeoGebra*. Com mais facilidade para transitar entre as diversas representações sugeridas na atividade 01, este exercício teve a intenção de revelar, de forma mais dinâmica, a relação entre as diversas possibilidades de representação no plano cartesiano e a forma algébrica das retas descritas através de funções.

Esperava-se que os participantes utilizassem os recursos da janela de álgebra para traçar o plano cartesiano para verificar o comportamento do gráfico à medida que diferentes pontos fossem selecionados, alternando entre retas crescentes e decrescentes.

Esta atividade poderia dar subsídio para uma melhor compreensão do comportamento das funções afins, algo que não fica muito claro para a maioria dos alunos do Ensino Médio. Nesse caso, em especial, o objetivo foi levar o participante a estabelecer relações entre o sinal do coeficiente angular e a inclinação da reta, que pode ser crescente ou decrescente nos casos em que $a>0$ e $a<0$, respectivamente.

3.7.3 Análise a priori da Atividade 03

Nessa atividade[7] foi apresentado um exercício que simula, através do *software GeoGebra*, o Método dos Mínimos Quadrados para resolver uma questão de análise de regressão. Foram marcados pontos aleatoriamente no plano cartesiano e traçada uma reta *r*. Em seguida, foram traçados quadrados de modo que um dos lados desse quadrado fosse o seguimento perpendicular ao eixo das abscissas partindo do ponto dado até à reta *r*.

---

[6] Ver Atividade no Apêndice A.
[7] Ver Atividade no Apêndice B.

Os participantes foram motivados a deslocar a reta alterando os valores dos coeficientes angulares e lineares a fim de minimizar a soma da área desses quadrados e ajustar a reta da melhor maneira possível.

O objetivo era apresentar de forma intuitiva os conceitos envolvidos no método dos mínimos quadrados sem recorrer ao estudo da derivada, como se faz tradicionalmente.

3.7.4 Análise a priori da Atividade 04

Essa atividade[8] foi elaborada para apresentar a calculadora do *software GeoGebra* disponível na janela de planilhas do aplicativo. O participante deveria digitar os dados disponíveis em uma tabela para que o *software* gerasse a reta de maneira automática através da guia “Análise Bivariada”.

A estratégia usada para desenvolver o tema foi uma discussão dos aspectos sociais que relacionam o uso da terra com a geração de emprego. Foi apresentada uma tabela que relaciona a medida da área cultivada e a geração de empregos. Essa tabela sugere que nas pequenas propriedades rurais a média de geração de empregos por hectare cultivado é bem elevada, enquanto que nas grandes propriedades os postos de trabalho por hectare diminuem consideravelmente.

A relação entre a área cultivada e a geração de emprego foi utiizada para discutir a validade da regressão linear para algumas situações. Se essa relação fosse proporcional teríamos uma reta passando pela origem do plano cartesiano, de modo que (zero) hectare geraria (zero) postos de trabalho e 01 (um) posto de trabalho por uma fração de hectare.

Entretanto, a situação gerou resultados impossíveis, como, por exemplo, um número negativo de hectares. Assim, foi necessário esclarecer que a atividade foi elaborada para que a validade do modelo fosse testada pelos participantes. Detectada a incompatibilidade, os participantes foram orientados a testar outros modelos de regressão disponíveis no *software GeoGebra*, para finalmente concluírem qual era o modelo mais compatível com a situação e qual era o modelo de potência, conforme apresentado posteriormente.

Para finalizar esta atividade, os participantes foram convidados a refletirem sobre os diversos modelos de atividades agrícolas, tanto no aspecto econômico como no aspecto social, discutindo também que o que define os resultados obtidos pela atividade

[8] Ver atividade no Apêndice B.

não está ligado apenas ao tamanho das propriedades em questão, mas também ao tipo de cultura adotada em cada uma delas.

3.8 Experimentação e análises *a posteriori*

Os encontros foram realizados nos meses de março e abril de 2022 quando as aulas no município de Apuí/AM já ocorriam de maneira 100% presencial e o uso de máscaras não era mais obrigatório. Dessa forma, esta pesquisa foi efetuada com um número de 21 participantes. O número de participantes e as características do ambiente pesquisado foram fatores de preocupação, uma vez que as medidas emergenciais de enfrentamento à Covid-19 haviam alterado o ambiente da sala de aula que nos anos anteriories alternava entre o ensino híbrido e o ensino remoto.

Quanto à caraterística dos equipamentos a serem utilizados, verificou-se que o laboratório de informática da Escola Professora Maria Curtarelli Lira possuía 10 computadores disponíveis, dentre os quais a maioria apresentava algum problema de funcionamento. Os defeitos mais comuns eram problemas de conexão entre o monitor e a CPU e problemas de funcionamento do *mouse* (travamento e impossibilidade da execução do clique duplo). Concluímos que esses problemas poderiam ser contornados com um pouco de paciência e disposição para superá-los.

Quanto às configurações, as máquinas disponíveis na escola possuíam processador AMD 1.60 GHz, memória RAM de 4 GB, sistema operacional Windows 10 de 64 bits e disco rígido único de 57 GB de armazenamento. Essas configurações são consideradas suficientes para rodar ao mesmo tempo o *software GeoGebra* e o aplicativo ApowerRec, usado para gravar o vídeo da tela do computador, bem como o armazenamento dos arquivos de vídeo gravados durante a aula por um período superior a 100 (cem) minutos.

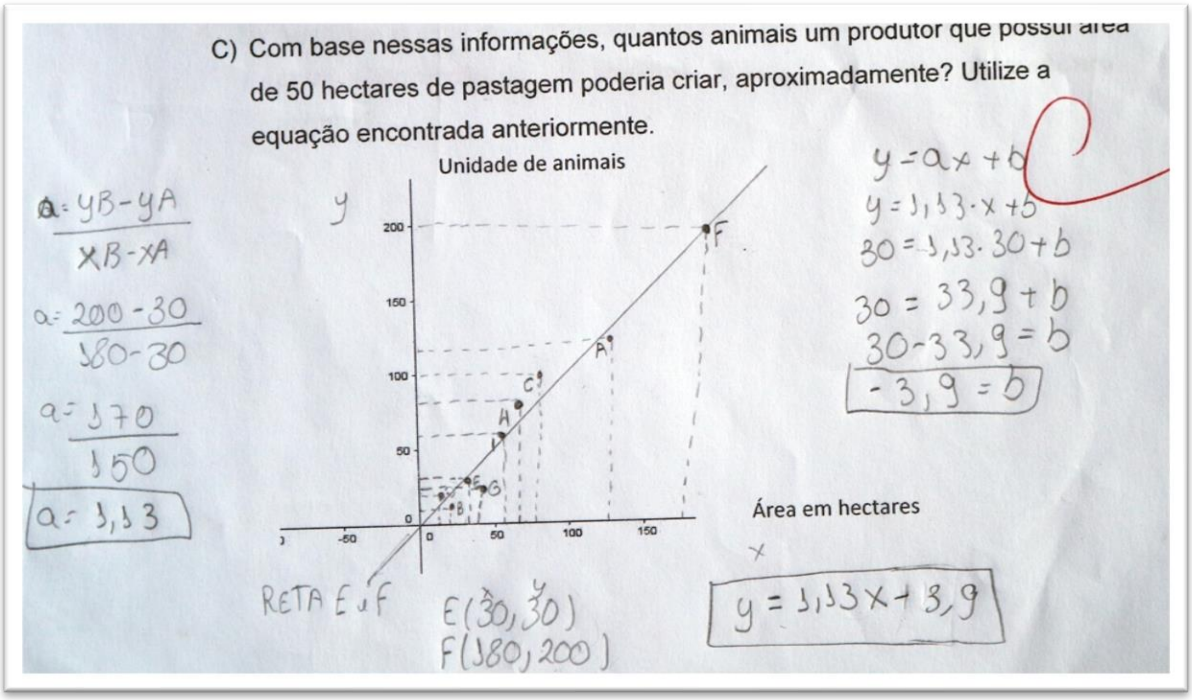
Apesar do uso de *smartphones* ter sido avaliado quanto à possibilidade de facilitar a realização das atividades, uma vez que o número de celulares pessoais disponíveis era superior ao número de computadores, a opção pela utilização do laboratório de informática se deu pela necessidade de gravação das telas dos computadores para análise posterior. Esse procedimento seria dificultado caso a escolha se desse pelo uso dos telefones celulares devido à invasão de privacidade e possivelmente a uma baixa capacidade de armazenamento nos dispositivos móveis.

A atividade 01 e a atividade 02 foram desenvolvidas em um único encontro, conforme planejado, sendo que a atividade 01 foi realizada na sala de aula, utilizando estratégias de resolução de problemas com uso de papel, caneta e lápis. A atividade 02 foi realizada no laboratório de informática com o uso do *software GeoGebra*.

Na atividade 01, os participantes mobilizaram os conhecimentos de função para resolver a situação proposta. Inicialmente, observou-se que eles tiveram alguma dificuldade para compreender que os dados formariam uma nuvem de pontos, e por isso foi necessária uma intervenção para esclarecer que a ideia era exatamente essa. Após concluírem a representação no plano cartesiano, eles passaram a buscar a solução. A estratégia que os participantes encontraram foi a escolha de dois pontos pelos quais seria traçada uma reta. De acordo com a escolha dos pontos, a reta se aproximava ou se distanciava da realidade.

O Participante P1 (conforme exercício ilustrado na Figura 9) escolheu os pontos E(30, 30) e F(180, 20) pelos quais traçou a reta y = 1,13 x – 3,9. Esses valores estão muito próximos da reta de regressão que é y = 1,11x -3,72. Quando substituído na reta encontrada pelo participante P1, o valor de 50 hectares retornou um valor de 52, ou seja, 6 animais. Valor também muito próximo do encontrado pela calculadora do *GeoGebra* que é de 51,9 animais.

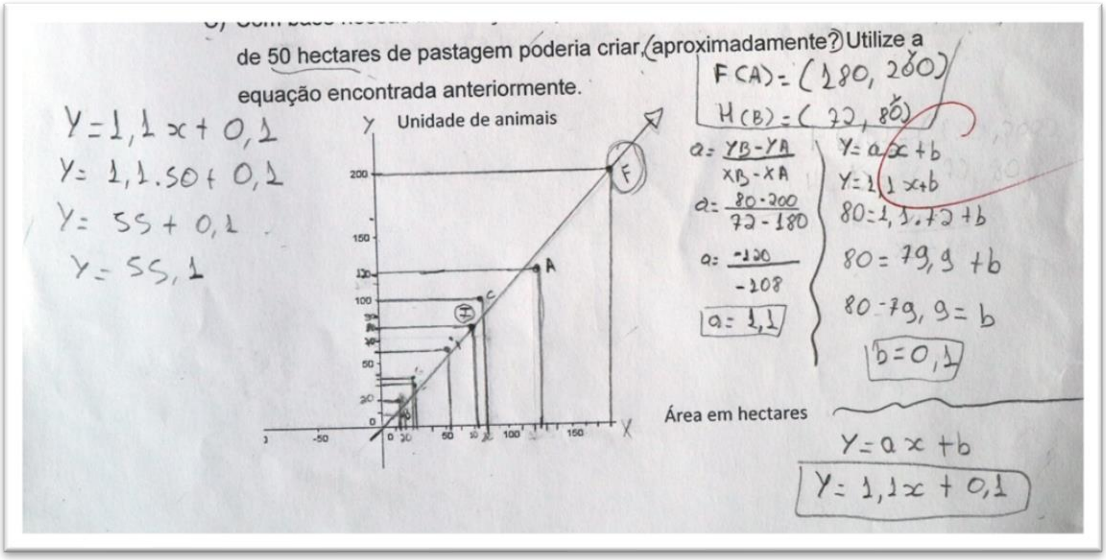
Figura 9 – Exercício com os pontos E e F



Fonte: dados da pesquisa.

O participante P2 (conforme exercício ilustrado na Figura 10) escolheu os pontos F(180, 200) e H(72, 80) sobre os quais traçou a reta y = 1.1x + 0,1 e a imagem da reta igual a 55,1 quando o domínio dessa função foi igual a 50, conforme solicitação do item c. Esse resultado, embora apresente certa variação em relação ao resultado clássico para a questão, em alguns casos ele é mais preciso que a resposta oficial, por exemplo, na origem do sistema.

Figura 10 – Exercício com os pontos F e H



Fonte: dados da pesquisa.

O resultado apresentado pelos participantes justificam a importância da autonomia do aluno no processo didático segundo proposto por Brusseau (2008). A interação entre os participantes para a construção coletiva de uma solução também corroboram com a ideia de formulação defendida pela TSD.

A atividade 02 retomou o mesmo problema da atividade 01, dessa vez com uso do aplicativo *GeoGebra*. O objetivo foi traçar retas passando por outros pontos diferentes dos escolhidos na atividade anterior para verificar o comportamento da reta e estabelecer relações entre a inclinação e o coeficiente angular e linear. Com o *GeoGebra* os gráficos podem ser traçados rapidamente de modo que o aluno participante pudesse comparar as representações gráficas e algébricas conforme observação do participante P2:

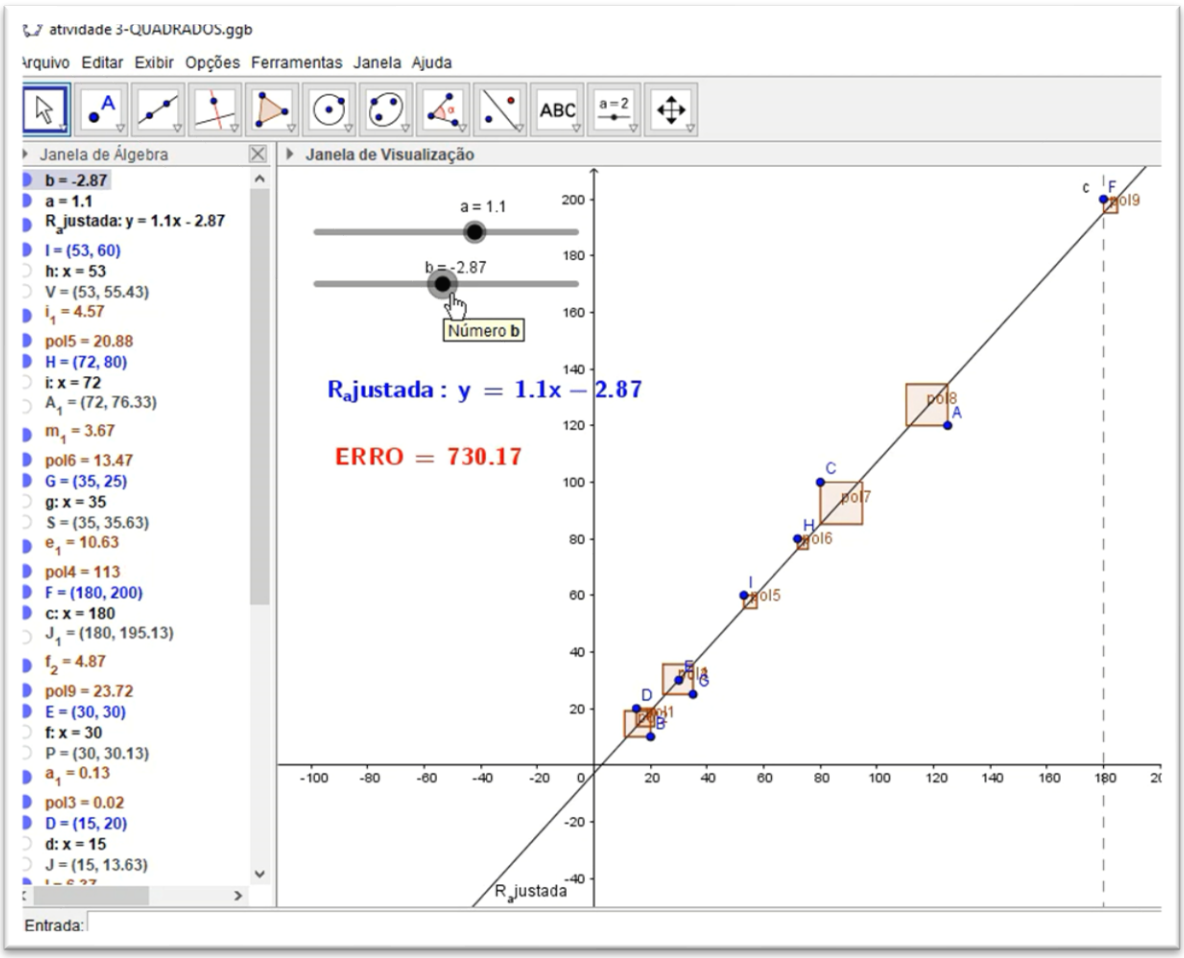
> *"Na [determinada pelo segmento] BG o ângulo [formado com a abscissa] é menor que 90º (45º); na reta [determinada pelo segmento] GE o ângulo é maior que 90º (145º). A reta [determinada pelo segmento] BG fica inclinada para a direita, nela notamos que o coeficiente é positivo. Já na reta [determinada pelo segmento] GE*

a inclinação é para a esquerda e o coeficiente é negativo".

A atividade 03 foi realizada conforme previsto nas análises *a priori*. Foi o momento em que eles mais se divertiram. Apesar da atividade ter sido planejada com objetivo de representar graficamente o método dos mínimos quadrados, eles a encararam como um jogo no qual tentavam encontrar a menor soma possível e comparar os resultados com os obtidos pelos demais colegas. Devido ao *status* de competição dado pelos participantes, algumas duplas (ou trios) retornaram a essa atividade mesmo após o término dos exercícios com o objetivo de encontrar um valor ainda mais aproximado.

Esta atividade foi, sem dúvida, a que melhor incorporou a ideia de Brousseau (2008) quando propôs o contrato sem intenção didática. Foi uma forma de aprender sem perceber a intenção do professor.

Figura 11 – Atividade 3 no *GeoGebra*

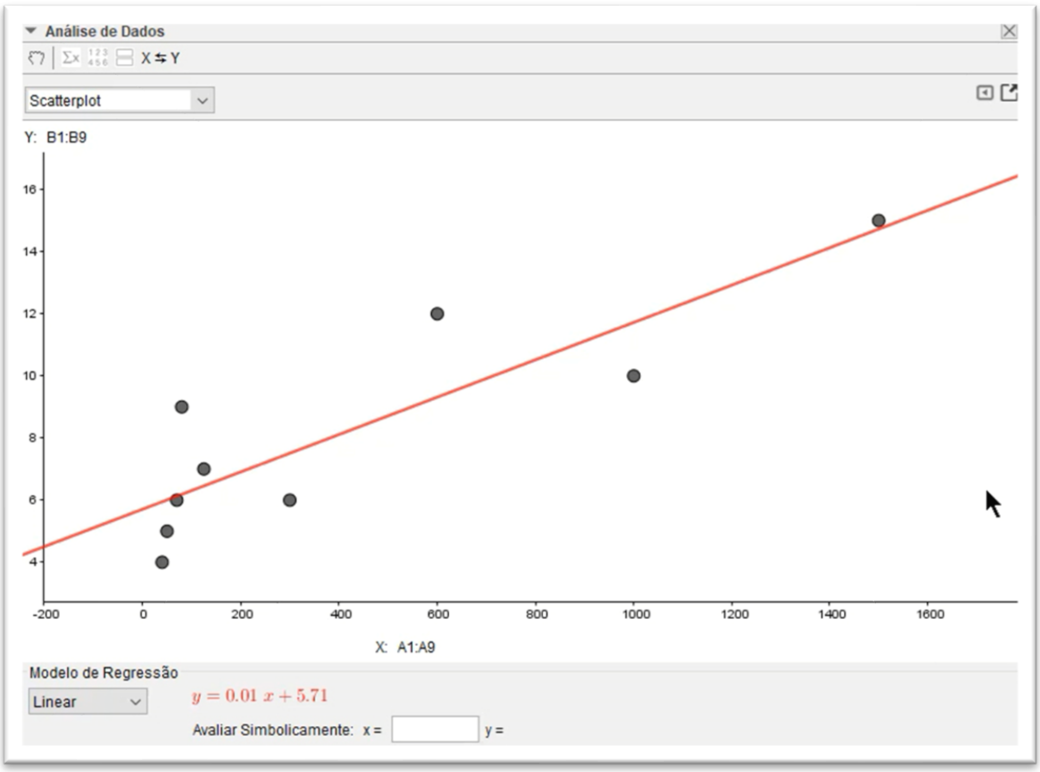


Fonte: dados da pesquisa.

A atividade 04 foi realizada com ferramenta do *GeoGebra* que aborda a análise de regressão de maneira específica. Uma calculadora que utiliza os dados dispostos na planilha do *GeoGebra* para encontrar a equação e o gráfico da reta ajustada. Com está ferramenta o participante não consegue interagir de maneira dinâmica com alguns dos objetos matemáticos envolvidos no problema, por outro lado, ele tem respostas imediatas para cálculos bastante complexos. Foi proposto o desafio de verificar a relação entre a área cultivada e a geração de empregos nas propriedades rurais do Município de Apuí. Essa relação, no entanto, não é proporcional.

A sequência didática que envolve esta atividade foi elaborada com os objetivos de leva-los a questionar a validade do modelo linear para certos casos, mas a atividade gerou bastante confusão entre os participantes da pesquisa. Ainda que a atividade alertasse para a necessidade de rever o modelo, apresentando, inclusive, uma solução diferente da proposta inicialmente, alguns alunos apresentaram sinais de estresse quando perceberam que os valores encontrados no modelo linear não faziam sentido. Talvez em função do tempo reduzido para as atividades e a pressão por um bom resultado tenha influenciado negativamente na realização das tarefas.

Figura 12 – Atividade 4 no *GeoGebra*

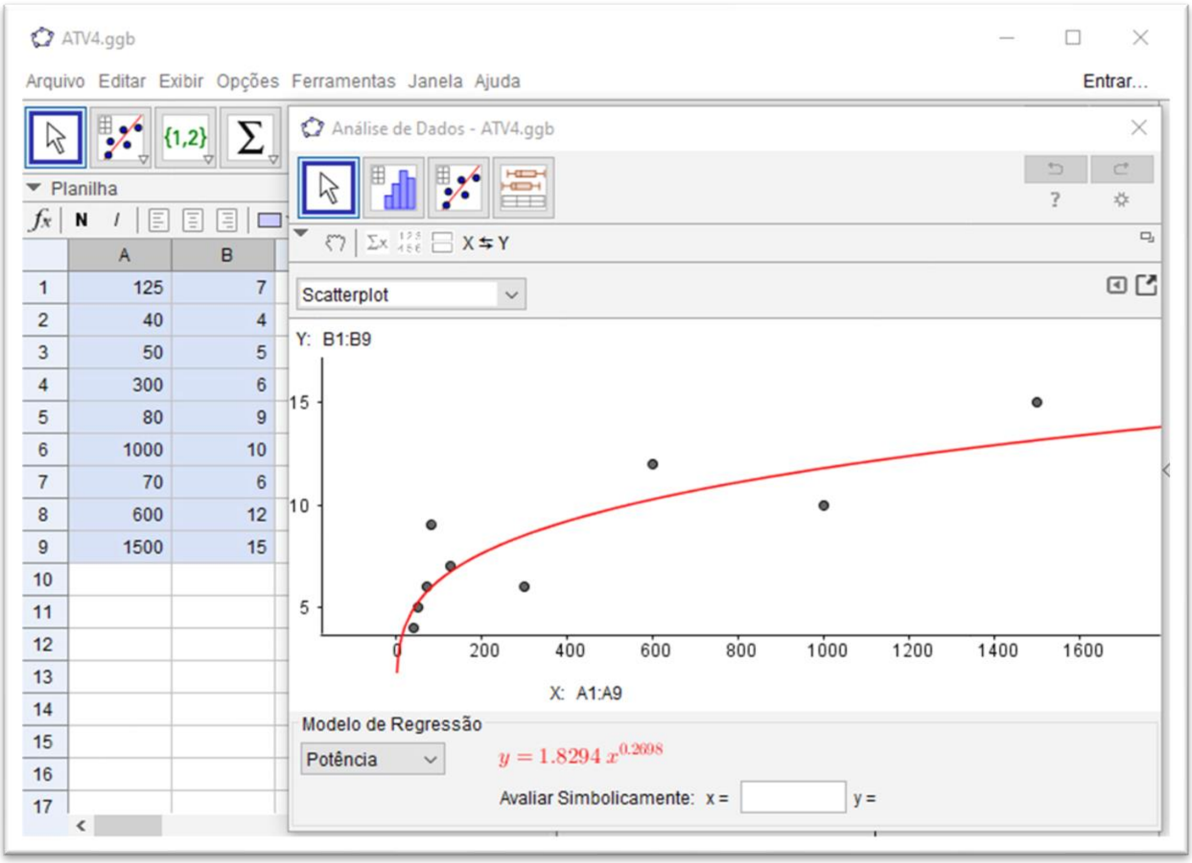


Fonte: dados da pesquisa.

Foi necessária a intervenção do professor além do planejado inicialmente, a fim de redirecionar o processo de resolução. Depois de analisar os itens seguintes dos exercícios, os alunos puderam perceber que aquelas inconsistências já haviam sido previstas e que havia a sugestão de um modelo alternativo de solução que se aproximava mais da realidade, já que a relação não é linear.

Nessa atividade, os participantes tiveram a oportunidade de testar outros modelos de regressão tais como logarítmica, polinomial, exponencial, entre outros, até verificarem que para o caso o modelo de potência era o mais indicado.

Figura 13 – Regressão logarítmica no *GeoGebra*



Fonte: dados da pesquisa.

Nessa etapa foi possível discutir a função social da terra, não apenas como geração de alimentos e outras riquezas, mas também a geração de emprego que essas propriedades podem proporcionar. Conforme verificado, as propriedades menores tem maior potencial de geração de emprego. Segundo Mattei (2014), este fenômeno está diretamente ligado ao modelo de produção na agricultura familiar pautada principalmente na diversificação de culturas e na dinâmica socioeconômica local.

Discutimos também os tipos de habitação, qualidade de vida e sobretudo os aspectos relacionados às questões ambientais, já que tais propriedades devem gerar o sustento não apenas a quem nela trabalha, mas também para as gerações futuras.

A atividade 05 estava ligada ao processo de Institucionalização. Esta é a etapa que o professor retoma para si a responsabilidade a fim de validar ou refutar as produções apresentadas pelos alunos e revelar a intenção quando propôs as atividades anteriores. É na institucionalização que o professor apresenta o conhecimento nos modelos universalmente aceitos acerca do tema.

Nesse encontro discutimos as diversas soluções apresentadas pelos participantes e esclarecemos as razões de algumas contradições encontradas pelos participantes. Um dos problemas enfrentados foi a diferença entre alguns resultados encontrados por diferentes grupos. Na atividade 04, por exemplo, alguns grupos encontraram o valor de $y = 0{,}006x + 5{,}7059$ enquanto outros grupos encontraram valores aproximados de $y= 0{,}01x + 5{,}71$ além de $y = 0x + 6$ e $y = 0{,}01x + 5{,}71$. A esse respeito, esclarecemos que todos os resultados estavam corretos e o que difere nos resultados é o número de casas decimais configurado no aplicativo em cada computador.

Além de apresentar as questões técnicas envolvidas no ensino de estatística, o experimento incentivou o debate a respeito das questões sociais envolvidas no tema. Mesmo sem compreender todas as causas dos fenômenos, os alunos tiveram condições de refletir sobre a relação entre o tamanho das propriedades rurais e o número de empregos gerados por essas propriedades. Conforme relatado pelo participante P3 que argumentou que nas maiores propriedades, por mais que fossem grandes, observava-se um número reduzido de empregados por se tratar de uma única propriedade, onde poderiam haver várias.

Salienta-se que o objetivo dessa pesquisa não era estudar essa relação (tamanho das propriedades e a geração de emprego) e sim a forma com que as pessoas aprendem, por isso coletou-se uma amostra relativamente pequena que tinha como pretensão apenas a oferta de subsídio para realização da sequência didática. Observa-se, no entanto, que outros estudos (DAMASCENO; KHAN; LIMA, 2011; NIEDERLE; FIALHO; CONTERATO, 2015) corroboram com o resultado, mas apontam o modelo de agricultura familiar como causa da maior geração de emprego nas pequenas propriedades rurais.

Durante a pesquisa, percebemos que em alguns momentos permitimos que o *software GeoGebra* se destacasse além do necessário, dando a ele mais importância que o conteúdo em estudo. Acreditamos que esse comportamento foi prejudicial. O ideal seria acrescentar o *GeoGebra* como uma ferramenta que pode e deve ser usada quando nescessário, para resolver questões de difícil compreensão.

No contexto da institucionalização, foi enfatizado que algumas das respostas absurdas encontradas pelos participantes não ocorreram por erro de cálculo ou planejamento das atividades. Na atividade 04, item c, por exemplo, quando perguntado: "com base na equação encontrada através da análise bivariada quantos hectares seriam necessários para gerar um posto de trabalho?".

A maioria dos participantes encontrou - 4,7 hectares, o que de fato é uma incoerência, já o valor negativo não poderia ser usado como medida de área. Foi argumentado que o *software* havia encontrado tal equação porque em um certo intervalo do domínio essa seria a melhor solução para a questão. Mas se esclareceu também que a regressão linear não é suficiente para explicar alguns fenômenos, conforme sugerido no item d. De fato, verificou-se que os pontos estudados definem uma curva e não uma reta conforme tentativa.

Por fim, foi apresentado o método dos mínimos quadrados. Apesar de não ser possível demonstrar o método através do cálculo diferencial, conteúdo só ensinado em nível superior, o objeto de estudo foi compreendido perfeitamente através da dinâmica utilizada nos encontros.

4 CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve o objetivo de identificar as potencialidades de uso do *software GeoGebra* em sala de aula. Para tanto buscamos explorar as potencialidades das ferramentas do *software GeoGebra* e o papel que ele pode desempenhar na aprendizagem de regressão linear; explorar as possibilidades de modelagem de situações didáticas que contribuam para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos em análise de regressão e descrever as concepções dos alunos a respeito da eficiência do *software GeoGebra* para registrar as representações semióticas em estatística.

A pesquisa foi realizada através da aplicação e observação de uma sequência didática que buscou integrar conhecimentos prévios, o uso do *software GeoGebra* para representar novas situações e conversão representações em diferentes sistemas de códigos. A representação de um mesmo objeto matemático através de planilhas, gráficos, expressões algébricas e linguagem natural foi usada para observar relevância das contribuições do *GeoGebra* para o aprendizado de regressão linear.

Os dados coletados nessa pesquisa corroboram com o entendimento de que o *GeoGebra* pode ser usado como ferramenta para o ensino de estatística no ensino médio, sobretudo nós conteúdos que dependem do estudo analítico da reta e outras representações no plano cartesiano, como é o caso da análise de regressão.

Concluímos também que para obtermos êxito nessas atividades devemos adotar estratégias para uso do *software* sustentada por uma metodologia de ensino com contribuições comprovadas em pesquisas já realizadas.

Acreditamos que a escolha da Teoria das Situações Didáticas para implementação da experiência foi acertada pois possui as principais características que o atual modelo de ensino exige, tais como a de proporcionar, ao aluno, a autonomia necessária para construção do conhecimento sem prejuízo do programa de ensino estabelecido pela instituição da qual a escola faça parte.

O olhar para o *GeoGebra*, do ponto de vista da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, nos permite afirmar que o uso do *software* constitui uma importante contribuição para o estudo da análise de regressão, visto que seus recursos permitem a representação do objeto matemático de maneira simples e rápida, bem como a conversão dessas representações para outros sistemas de representações essenciais para o aprendizado de estatística.

Percebeu se também que a sequência didática conforme realizada despertou a motivação dos participantes, em primeiro lugar, pelo protagonismo do aluno que atuou com autonomia na solução dos problemas propostos. A dinâmica da execução das tarefas, que em alguns momentos desafiava os participantes, conferindo às atividades *status* de competição, também contribuiu para o engajamento de todos na busca pela melhor solução. O *GeoGebra* também se mostrou eficiente para desmistificar os aspectos abstratos envolvidos na análise de regressão, contribuindo, dessa forma, para reduzir a possibilidade de fracasso e consequentemente aumentar a motivação.

Concluímos também que a mudança na metodologia deve ser feita de forma gradativa, sem abrir mão de práticas educacionais com bons resultados, quando se fizer necessário. Apesar da Teoria das Situações Didáticas não recomendar, durante as situações de ação, formulação e validação, percebemos que em vários momentos foi inevitável a interferência, com a participação do professor a fim de reorientar alguns participantes.

Percebemos, no entanto, algumas limitações quanto ao uso da tecnologia nas escolas públicas no Amazonas, a principal delas se refere à qualidade e à quantidade de computadores disponíveis. A Escola Estadual Maria Curtarelli Lira, onde foi realizada a pesquisa, conta com cerca de 10 computadores para atender uma demanda de 350 alunos por turno. Apesar de ter as configurações suficientes para executar aplicativos como o *GeoGebra*, a maioria das máquinas tem algum problema de funcionamento. O mouse que não possui a sensibilidade necessária pra realizar tarefas como clique duplo foi um problema apesentado em todas as máquinas. Falhas de conexão entre a máquina e monitor foram identificadas em duas máquinas, impossibilitando a utilização.

Parece ser essa também a realidade da maioria escolas estaduais do Amazonas. Há, no entanto, uma tendência de melhora devido à implantação do Novo Ensino Médio e a disciplina de "Cultura Digital", o que consiste em um fator de incentivo à utilização de tecnologias digitais na educação. Um exemplo dessa tendência de melhora é que, nessa escola onde a pesquisa foi realizada, os computadores estavam desmontados até final de 2021 e foram novamente instalados para o início do ano letivo de 2022.

Há também a possibilidade de utilização da versão do *GeoGebra* para smartphone, já que a grande maioria dos alunos do ensino médio possuem seus próprios aparelhos. Nessa pesquisa evitamos o uso de smartphones apenas por questão de praticidade, já que as atividades foram gravadas para análises posteriores. Assim, consideramos que naquele momento seria invasiva a utilização de dispositivos pessoais. Entretanto, para uso restrito do aluno, o smartphone deve ser considerado nas aulas de matemática, sobretudo com o aplicativo *GeoGebra*.

Por fim, salientamos que o *GeoGebra* pode ser usado nas aulas de estatística associado a outras ferramentas tanto nas versões para microcomputador como nas versões para smartphone ou tablets. Entretanto, nossos estudos sugerem que a consulta ao *GeoGebra* seja feita como um recurso auxiliar no processo didático. A estratégia de uso com melhores resultados parece ser a manipulação dos recursos do *GeoGebra* a fim de esclarecer dúvidas e aprofundar conceitos já conhecidos. A alternância entre ferramentas diversas proporciona um aprendizado mais sólido, enquanto que a adoção de uma única metodologia, por mais dinâmica que seja, pode tornar o processo didátito cansativo e proporcionar uma aprendizagem superficial.

4.1 Limitações da pesquisa

A pesquisa realizada no contexto da pandemia foi um fator de preocupação devido a vários fatores. O mais preocupante se relacionava a possibilidade de realizá-la de maneira remota, uma vez que as aulas remotas no Município de realização da pesquisa ocorreram majoritariamente através de áudios e vídeos enviados por aplicativos de mensagens. A interação dos alunos ocorriam basicamente através de fotos dos cadernos com as atividades resolvidas. Havia pouca participação.

Ainda no contexto emergencial de ensino remoto ou mesmo o ensino híbrido, houve um percentual muito alto de desistência, de maneira que as turmas de ensino médio no município de Apuí encerraram o ano de 2021 com uma média de frequência diária de 5 alunos por turma. Essa situação impossibilitaria a realização da pesquisa que pretendia observar, entre outras coisas a forma de interação entre os grupos.

Outro motivo de preocupação estava relacionado a incertezas devido às diferenças nos protocolos de segurança adotados pelo Município de Apuí, pela Secretaria Estadual de Educação do Amazonas, e Pela Universidade Federal do Amazonas. Dessa forma a pesquisa feita de maneira presencial só foi autorizada pelo Conselho de Ética quando não havia restrição em nenhuma dessas instituições. Assim, as experiências foram finalizadas em abril de 2022, quando a programação inicial era para novembro de 2021, dificultando, em alguma medida, a analise dos dados produzidos.

Era também nossa intenção que os dados para composição da sequência didática fossem levantados pelos próprios participante, nas suas comunidades de origem, entretanto, devido às questões relacionadas à ética na pesquisa, preferimos, nós mesmos, produzir esses dados que foram apenas uma aproximação da realidade. Conforme verificado, existem uma lacuna de pesquisas que relacionam o estudo de estatística e o uso do *GeoGebra*. Em relação à probabilidade, o vazio parece ser ainda maior. Portanto nossa sugestão é que novos estudos sobre regressão linear sejam realizados, oportunizando o levantamento de dados pelos próprios participantes da pesquisa. Em relação à probabilidade e o *GeoGebra*, um tema interessante a ser investigado com turmas do ensino médio é o da probabilidade binomial.

4.2 Sugestões para estudos futuros

Conforme verificado, existem lacunas de estudos que relacionam o estudo de estatística e o uso do *GeoGebra*. Em relação à probabilidade, o vazio parece ser ainda maior. Portanto nossa sugestão é que novos estudos sobre regressão linear sejam realizados, oportunizando o levantamento de dados pelos próprios participante da pesquisa. Em relação à probabilidade e o *GeoGebra*, um tema interessante a ser investigado com turmas do ensino médio é o da probabilidade binomial. O *GeoGebra* possui ferramentas avançadas para realização dessa modalidade de cáculos que precisam ser melhor explorados.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ANFROI, M.; NOAL, M. L. Enxada, caneta e mouse: o diálogo entre tecnologias na formação continuada de professores do campo na modalidade a distância. **Educação em Revista**, v. 36, 2020.

ARAÚJO, J. P. P.; JÚNIOR, J. G. R. Plataforma Matematech: um recurso didático no ensino de matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Informática na educação: teoria e prática,** Porto Alegre, v. 20, n. 2 mai/ago, 2017.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. *In*: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: recherches en didactique des mathématiques. **La Pensée Sauvage**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. The French didactic tradition in mathematics. *In*: BLUM, W. **European traditions in didactics of mathematics**. Cham: Springer, 2019.

BARBOSA, R. C. *et al*. Inclusão educacional, digital e social de mulheres no interior da Paraíba: uma experiência na UFPB. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 99, n. 251, p. 148-171, 2018.

BENVENISTE, É. The semiology of language. **Semiotica**, v. supp., p. 5-23, 1981.

BERNAL-MENESES, L. *et al.* Las tecnologías de la relación, la información y la comunicación (TRIC) como entorno de integración social. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, v. 23, e180149, abr. 2019.

BORBA, M. C. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: ensino médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Ministério da Saúde. Conselho Nacional de Saúde. **Recomendação n. 8, de 26 de abril de 2021**. Recomenda ações relativas à operacionalização da vacinação contra a Covid-19 e a importância da Atenção Primária à Saúde. Brasília, 2021. Disponível em: http://www.conselho.saude.gov.br/recomendacoes-cns/1712-recomendacao-n-008-de-26-de-abril-de-2021. Acesso em: 18 maio 2022.

BRASIL. Presidência da República. **Lei n. 12.965, de 23 de abril de 2014**. Estabelece princípios, garantias, direitos e deveres para o uso da Internet no Brasil. Brasília, 2014. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l12965.htm. Acesso em: 17 maio 2022.

BRASIL. Presidência da República. **Lei. n. 14.172, de 10 de junho de 2021**. Dispõe sobre a garantia de acesso à internet, com fins educacionais, a alunos e a professores da educação básica pública. Brasília, 2021. Disponível em: https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/lei-n-14.172-de-10-de-junho-de-2021-325242900. Acesso em: 17 maio 2022.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Cornwall: Kluwer Publishers, 1997.

BRUCE, A.; BRUCE, P. **Estatística prática para cientistas de dados**. Rio de Janeiro: Starlin Alta Editora, 2019.

CAIRES, L. S. et al. Tendência genética e fenotípica para características de crescimento em bovinos da raça Indubrasil no estado do Sergipe. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal** ISSN: 1519-9940, 2009.

CAVALCANTE, R. B. Inclusão digital e uso de tecnologias da informação: a saúde do adolescente em foco. **Perspectivas em Ciência da Informação**, v. 22, n. 4, p. 3-21, 2017.

CHEVALLARD, Y. **La transpostion didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1991.

CHOMSKY, N. **Linguagem e pensamento**. Petrópolis: Vozes, 1971.

CORRÊA, J.N.P.; BRANDEMBERG, J.C. Tecnologias digitais da informação e comunicação no ensino de matemática em tempos de pandemia: Desafios e possibilidades. ISSN: 2318-6674 DOI: 10.30938/**bocehm**.v8i.4176, 2021.

COSTA, F. de A.; ALLEVATO, N. S. G. O ensino das funções trigonométricas através da resolução de problemas com o uso do geogebra. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática,** [S. l.], v. 4, n. 4, p. 92–113, 2021.

D'AMBRÓSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Em Foco: Educação matemática em perspectiva**, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

DETMANN, E. et al. Uso de técnicas de regressão na avaliação, em bovinos de corte, da eficiência de conversão do alimento em produto: proposição de método e significância nutricional. **American Journal of Clinical Nutrition**, v.11, p. 249-25, 2012.

DUVAL R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem, 2011.

FARIA, G. A. et al. Modelo de regressão linear segmentado com platô como estimativa para o cálculo do tamanho de parcelas para experimentos com carcaça de bovinos. **Revista da Estatística UFOP**, v. 2. ISSN 2237-8111, 2012.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Intradisciplinaridade matemática com *GeoGebra* na matemática escolar. **Bolema**, v. 33, n. 63, p. 348-367, abr. 2019.

FERRAZ Filho, P. B. et al. Tendência genética em pesos de bovinos da raça nelore mocha no Brasil. **Anais da XXXIV reunião da SBZ**, Juiz de Fora-MG, Julho de 1997.

PEREIRA, E.; GUERRA, E. A. A utilização de applets no Geogebra para a aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 3, p. 53-72, 2016.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 1974.

GIORDANO, C. C. **O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos**: um estudo com alunos do ensino médio. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do *GeoGebra* na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDA**, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

HOLANDA FILHO, I. O. **GeoGebra**: soluções e práticas na geometria analítica. Curitiba: Ed. Appris, 2020.

ITURBE, A. M.; RUIZ, M. E.; PISTONESI, M. V.; FANITINI, S. G. Uso del Geogebra en la enseñanza de la geometría en carreras de Diseño. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 2, n. 2, p. 93–101, 2014.

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. O uso das TIC nas práticas dos professores de matemática da rede básica de ensino: o projeto mapeamento e seus desdobramentos. **Bolema**, v. 29, n. 53, p. 998-1022, dez. 2015.

KARNAL, L. **Conversas com um jovem professor**. São Paulo: Contexto, 2012.

LIMA, P. V. P. de; MOREIRA, G. E.; VIEIRA, L. B.; ORTIGÃO, M. I. R. Brasil no Pisa (2003-2018): reflexões no campo da Matemática. **TANGRAM - Revista de Educação**

Matemática. 2020.

LITTIG, J. *et al*. A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e a teoria da situação didática: identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo. **REnCiMa**, v. 10, n. 1, p. 1-13, 2019.

LOBATO, G. (Org.). **Educação e tecnologia**: novas possibilidades, novos caminhos. Edição Kindle, 2018.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o Ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na educação: teoria e prática**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2013.

MACCHIAROLA, V. *et al*. Inclusión digital educativa en escuelas secundarias argentinas: un estudio evaluativo. **Cienc. Docencia Tecnol.**, n. 57, 2018.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. *In*: MACHADO, S. D. A. **Educação matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

MATTEI, L. O papel e a importância da agricultura familiar no desenvolvimento rural brasileiro contemporâneo. **Rev. Econ.**, v. 45, supp. especial, p. 83-91, out./dez. 2014.

MEYER, D. E. *et al*. Políticas públicas: imperativos e promessas de inclusão social. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, v. 22, n. 85, p. 1001-1026, 2014.

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 1, n. 1, p. CCL - CCLXIV, 2012.

Micotti, M. C. O. O Ensino e as propostas pedagógicas. In: Bicudo, M. A. V**. Pesquisa em educação matemática (Seminários, debates).** Editora Unesp. Edição Kindle. 2020.

MILIOSSI, D. A.; STURION, L.; REIS, M. C. Um estudo exploratório da educação básica sobre o ensino de estatística e o uso de tecnologias midiáticas. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 4, n. 2, p. 61-86, 2017.

MIRANDA, R. S. **O uso do Geogebra no estudo de Trigonometria**. 2021. 75 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/CCET) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2021.

MORAIS, D. A. M.; STURION, L.; REIS, M. C. dos. Um estudo exploratório da educação básica sobre o ensino de estatística e o uso de tecnologias midiáticas. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 4, n. 2, p. 61–86, 2018.

MORAN, J. M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus, 2020.

MORETTI, M. T.; THIEL, A. A.O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Práxis Educativa UEPG**, v. 7, p. 379-396, 2012.

MÜLLER, I. Tendências atuais de educação matemática. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 1, n. 1, 2015.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

NIEDERLE, P. A. *et al*. A pesquisa sobre agricultura familiar no Brasil: aprendizagens, esquecimentos e novidades. **RESR**, v. 52, supl. 1, p. S009-S024, 2014.

OLIVEIRA, Ademir Malveira de. **A formação do professor de matemática no Amazonas**. 354 f. Tese. (Doutorado em Ciências da Educação) Universidade do Minho. Instituto de Educação. 2021.

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental**. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

OLIVEIRA, V. S. D.; VITOLO, A. P. M.; SILVA. A. C. M. Uso do *GeoGebra* à luz da teoria dos registros de representação semiótica. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 8., 2019. **Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação**, WCBIE, 2019.

OLIVEIRA, W. *et al*. Avaliação de jogos educativos: uma abordagem no ensino de Matemática. *In*: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON COMPUTERS IN EDUCATION (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação), 26., Maceió, 2015. **Anais** [...], Maceió, 2015. p. 657-666. DOI: 10.5753/cbie.sbie.2015.657.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. São Paulo: Autêntica, 2019.

PINI, M. Políticas de alfabetización digital: educación e inclusión. **Ensayos**, v. 72, p. 91-103, 2019.

Pistillo, L. Z., Camargo, A. C., & Souza, L. (2022). Correlação e regressão entre mensurações corporais e características de carcaça em bovinos da raça Nelore. **Diversitas Journal**, 7(1), 0026–0038. https://doi.org/10.48017/dj.v7i1.1944.

QEdu – **Aprendizado adequado. Amazonas**. 2019. Disponível em: https://novo.qedu.org.br/uf/13-amazonas/aprendizado. Acesso em: 10/07/2022.

RAMOS, F. M. .; LISBOA, C. A. .; NUNES, D. M. . A utilização do software geogebra no ensino da trigonometria na educação básica. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 6, p. 1217–1227, 2021.

RODRIGUES, H. A. Os usos da mídia em aulas de Educação Física escolar: possibilidades e dificuldades. **Movimento**, v. 18, n. 3, p. 183-202, jul./set. 2012.

SANDRE, O. C. **Uma proposta contextualizada para o ensino médio**: regressão linear. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba. 2019.

SANTANA, W. J. **O jogo no processo de ensino-aprendizagem da matemática**: um estudo das estratégias metodológicas em ludicidade no Projeto Travessia. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) – Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Lisboa, 2014.

SANTOS, A. T. C. **O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software GeoGebra***. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. **Revue Française de Pédagogie**, n. 112, 1995.

SILVA, B. C. Jogos digitais educacionais como instrumento didático no processo de ensino-aprendizagem das operações básicas de matemática. *In*: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON COMPUTERS IN EDUCATION, 2014. **Anais** [...], 2014. p. 682.

SILVA, L. P. Trigonometria: **Uso do GeoGebra para análise de problemas reais**. 2021. 85 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2021.

SILVA, C. A. **Modelos atômicos como objeto do saber no ensino de química**: uma proposta metodológica baseada em elementos da engenharia didática. 2018. 115f. Dissertação (Mestrado Profissional em Astronomia) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana, 2018.

SOUSA, J. B. M. Orientações metodológicas para a utilização do geogebra nas aulas de geometria descritiva. Magazine de las Ciencias: **Revista de Investigación e Innovación**, [S. l.], v. 1, n. 1, p. 61–66, 2016.

SOUZA, R. F.; CALEJON, L. M. C. Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo o *software GeoGebra* no ensino da estatística descritiva. **REnCiMa**, v. 10, n. 4, p. 227-244, 2019.

STURION, L. *et al*. As dificuldades dos professores de estatística na utilização de tecnologias midiáticas. **REnCiMa**, v. 9, n. 4, p. 78-93, 2018.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, v. 21, n. 39, p. 155-168, jan./jun. 2013.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Brasília: Estação Palavra, 2005.

WIKIPÉDIA. **Apuí**. 2022. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Apu%C3%AD. Acesso em: 18 maio. 2022.

YIN, R.K. **Estudo de caso**: planeamento e método. 5ª Edição, Porto Alegre, Bookman, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PRIMEIRO ENCONTRO

Atividade de pesquisa em educação desenvolvida pelo Prof. Ivani Valentim da Silva e o Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz.

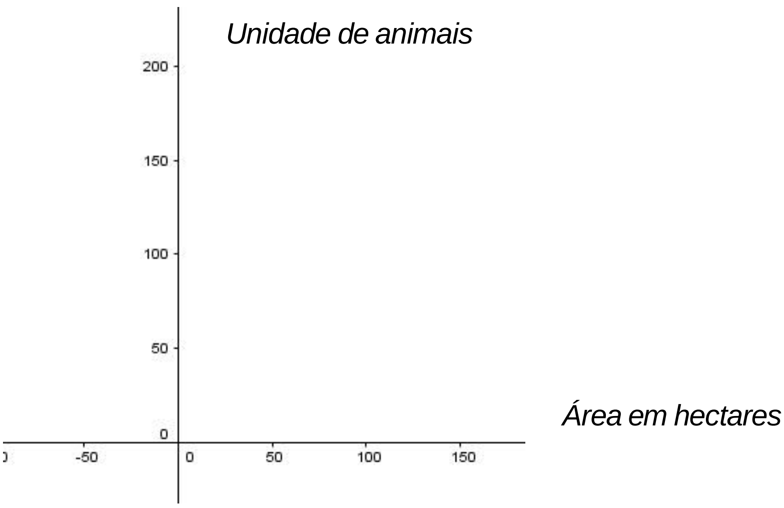
Aluno:____

Atividade 01

Em uma comunidade rural do município de Apuí foram levantados dados a respeito da criação de unidades de bovinos por área de pastagem cultivada, conforme a tabela abaixo:

Área em hectares (x)	125	20	80	15	30	180	35	72	53
Unidades animais (y)	120	10	100	20	30	200	25	80	60
Pontos no Plano (x,y)	A	B	C	D	E	F	G	H	I

A) Marque os pontos no plano cartesiano.
B) Com base no que você percebeu trace a equação de uma reta que melhor representa o conjunto de todos os pontos do gráfico. Para traçar a reta escolha dois pontos que represente melhor o conjunto de pontos no plano. (Utilize seus conhecimentos em geometria analítica e/ou funções afins).
C) Com base nessas informações, quantos animais um produtor que possui área de 50 hectares de pastagem poderia criar, aproximadamente? Utilize a equação encontrada anteriormente.



Atividade 02

Em uma comunidade rural do município de Apuí foram levantados dados a respeito da criação de unidades de bovinos por área de pastagem cultivada, conforme a tabela abaixo:

Área em hectares (x)	125	20	80	15	30	180	35	72	53
Unidades animais (y)	120	10	100	20	30	200	25	80	60
Pontos no Plano (x,y)	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Utilizando o aplicativo *GeoGebra* faça o que se pede nas questões abaixo:

A) Marque todos os pontos na janela de álgebra do *GeoGebra*.

B) Trace a reta r passando pelos pontos B (20, 10) e D(15, 20). Trace a reta t que passe pelos pontos B (20, 10) e G (35, 25). Em seguida marque os ângulos das retas que passam por esses 4 pontos fazem com os eixos do x (lado direito).

C) Em qual das retas o ângulo é menor que 90º? Em qual delas o ângulo é maior que 90º?

D) Verifique o sinal do coeficiente angular. Que relação é possível observar entre a inclinação da reta (medida do ângulo) e o sinal do coeficiente angular?

APÊNDICE B – SEGUNDO ENCONTRO

Atividade de pesquisa em educação desenvolvida pelo Prof. Ivani Valentim da Silva e o Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz.

Aluno:____

Atividade 03

Abra o arquivo ATIVIDADE 03 do *GeoGebra* e movimente os valores de a e b na reta $y = ax + b$ de maneira que a soma dos quadrados seja a menor possível. Anote o menor valor da soma e a equação da reta que minimiza a soma dos quadrados.

Atividade 04

Em uma pesquisa sobre a geração de emprego nas propriedades rurais de Apuí foram levantados dados que relacionam a área cultivada e a geração de emprego nessas propriedades conforme tabela abaixo. Com base nos dados da tabela, responda o que se pede nos itens a, b, c, d, e, f, e g utilizando os recursos do *software GeoGebra*.

Área em hectares (x)	125	40	50	300	80	1000	70	600	1500
Empregos direto (y)	7	4	5	6	9	10	6	12	15
Pontos (x, y)	A	B	C	D	E	F	G	H	I

A) Represente os valores da tabela na janela de Planilhas do *GeoGebra* e trace a reta de regressão linear. Esta atividade pode ser realizada através do recurso “Análise Bivariada”, um recurso que utiliza tecnologia similar à usada na ATIVIDADE 03 para fazer o ajustamento preciso da reta.

B) Com base na equação encontrada através da análise bivariada, quantos hectares seriam necessários para gerar um posto de trabalho?

C) Nessa proporção você considera que uma área cultivada de 20 hectares seria suficiente para empregar uma família de 4 pessoas? Justifique.

D) Você considera que o modelo de regressão linear é suficiente para explicar esse fenômeno? Tente representar a equação através da função de uma “potência”.

E) Com base nessa equação, quantas empregos diretos geraria uma fazenda com 10 mil hectares de área cultivada?

F) Através da regra de três simples, utilizando apenas os dados de uma propriedade de 40 hectares quantos empregos deveria gerar uma propriedade de 10 mil hectares?

G) O valor encontrado nos itens *e* e *f* são compatíveis? À luz dessas informações, em um programa de assentamento agrícola cujo objetivo é gerar emprego, qual seria o melhor modelo de propriedade?

APÊNDICE C – ATIVIDADE DE INSTITUCIONALIZAÇÃO

Atividade de pesquisa em educação desenvolvida pelo Prof. Ivani Valentim da Silva e o Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz.

Aluno:____

REGRESSÃO LINEAR

O termo regressão, usado para definir o conjunto de técnicas que modelam relações entre duas variáveis a fim de predizer outras variáveis independentes, foi proposto em 1885 por Sir Francis Galton, durante um estudo, ao demonstrar que a altura dos filhos tende a regredir para a média da população, não refletindo, portanto, a altura dos pais (RODRIGUES, 2012).

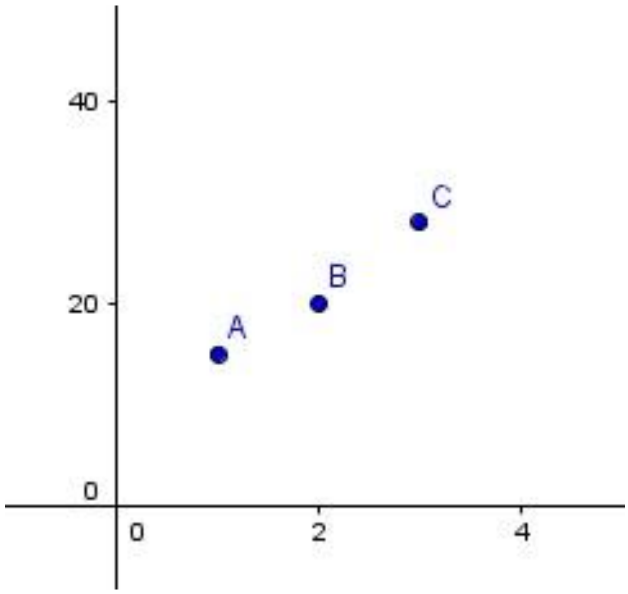
Uma variável x é chamada independente quando influencia, afeta ou determina o valor de outra variável dependente y. A regressão linear é o estudo de fenômenos que podem ser descobertos ou explicados em função da variável independente (SANDRE, 2019).

A análise de regressão consiste em representar, a partir de uma dada amostra, a relação entre as duas variáveis pela melhor equação possível e através dessa equaçã prever novos resultados para valores que não estão contidos na amostra. Para determinar a equação é necessário obter as estimativas dos coeficientes a e b verificar a adequação da equação através dos testes de significância e definir o intervalo de confiança pra os valores estimados. Para estimativa dos coeficientes a e b método mais indicado é o método dos mínimos quadrados que reduz a soma dos quadrados dos erros. A equação da reta de regressão linear é dada pelas seguintes expressões:

$$y = ax + b \quad \text{com } a = \frac{\Sigma xy - n.\bar{x}.\bar{y}}{\Sigma x^2 - n.\bar{x}^2} \quad \text{e } b = \bar{y} - a.\bar{x}$$

Onde *b* o ponto de intersecção da reta com o eixo das variáveis dependentes e *a* é o coeficiente angular (variável que determina a inclinação da reta de regressão). No exemplo abaixo analisaremos a situação de um grupo de estudos que foi submetido a uma experiência na qual foi anotada a relação entre horas de estudos diários e notas recebidas em provas conforme a tabela:

HORAS DE ESTUDO	NOTA LÍQUIDA	x	y	xy	X^2
1	15	1	15	15	1
2	20	2	20	40	4
3	28	3	28	84	9
SomatórioΣ		$\Sigma x = 6$	$\Sigma y = 63$	$\Sigma xy = 139$	$\Sigma x^2 = 14$
Médias		$\bar{x} = 2$	$\bar{y} = 21$		



$a = \frac{\Sigma xy - n.\bar{x}.\bar{y}}{\Sigma x^2 - n.\bar{x}^2}$ => $a = \frac{139-3.2.21}{14-3.4}$ => $a = \frac{139-126}{14-12}$ => $a = \frac{13}{2}$ => $a = 6{,}5$

$b = \bar{y} - a.\bar{x}$ => $b = 21 - 6{,}5.2$ => $b = 21 - 13$ => $b = 8$

Portanto, a reta de regressão é y = 6,5x + 8

Atividade 05:

Após as definições de regressão linear e do Método dos Mínimos quadrados, utilize os conceitos acima para resolver uma questão já estudada, agora sem o uso do aplicativo *GeoGebra*. Para isso retornemos ao exemplo: Em uma pesquisa sobre a geração de emprego nas propriedades rurais de Apuí foram levantados dados que relacionam a área cultivada e a geração de emprego nessas propriedades conforme tabela abaixo. Utilize os dados fornecidos para encontrar a reta de regressão utilizando a relação y= ax + b com *a* $= \frac{\Sigma xy - n.\bar{x}.\bar{y}}{\Sigma x^2 - n.\bar{x}^2}$ e $b = \bar{y} - a.\bar{x}$

Área em hectares (x)	125	40	50	300	80	1000	70	600	1500
Empregos direto (y)	7	4	5	6	9	10	6	12	15
Pontos (x, y)	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Para facilitar os cálculos segue abaixo:

n	X	Y	XY	X^2
1	125	7	875	15.625
2	40	4	160	1.600
3	50	5	250	2.500
4	300	6	1800	90.000
5	80	9	720	6400
6	1000	10	10000	1.000.000
7	70	6	420	4.900
8	600	12	7200	360.000
9	1500	15	22500	2.250.000
Σ	3765	74	43925	3.731.025
Média	418,3	8,2		

Nessa situação indicamos por xy o somatório do produto entre os valores de x e de y, portanto xy = 43925, n = 9 é o número de elementos das amostras analisadas; $\bar{x}$ = 418,3 é a média dos valores de x e $\bar{y}$ = 8,2 é média dos valores de y; temos ainda que $\bar{x}^2$ = 174.974,80 é média dos valores de x elevada ao quadrado.