

**Universidade Federal do Amazonas**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado em Matemática**

**Variedades de representações  
de quivers**

**Dzoara Selene Núñez Ramos**

**Manaus – AM**  
**Janeiro de 2023**

**Universidade Federal do Amazonas  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática**

# **Variedades de representações de quivers**

por

**Dzoara Selene Núñez Ramos**

sob as orientações de

**Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve**  
(Orientador)

**Dr. Wolfgang Bock**  
(Co-Orientador)

**Manaus – AM  
Janeiro de 2023**

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

N972v Núñez Ramos, Dzoara Selene  
Variedades de representações de quivers / Dzoara Selene Núñez Ramos . 2023  
96 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Germán Alonso Benitez Monsalve  
Coorientador: Wolfgang Bock  
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Álgebra de caminhos. 2. Representações de quivers. 3. Variedades de representações de quivers. 4. Espaço tangente de Zariski. I. Monsalve, Germán Alonso Benitez. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dzoara Selene Núñez Ramos

VARIEDADES DE REPRESENTAÇÕES DE QUIVERS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

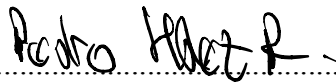
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve (Presidente)  
Universidade Federal do Amazonas – UFAM



Prof. Dr. Stefan Josef Ehbauer (Membro)  
Universidade Federal do Amazonas – UFAM



Prof. Dr. Pedro Hernandez Rizzo (Membro Externo)  
Universidad de Antioquia - Colombia

*A todas as pessoas que fizeram este  
sonho possível...*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Germán Benitez Monsalve por toda sua dedicação, paciência e seu empenho em me orientar no mestrado. Ele, além de me ensinar muita matemática e preparação para seguir na minha carreira acadêmica, também ensinou-me coisas da vida mesma, pensar com calma e não perder o foco, mesmo que as vezes minha teimosia tenha vencido, porém ele sempre me conduziu, até o último dia desse processo. Eu agradeço à ele, com meu coração mesmo. Agradeço ao meu co-orientador Dr. Wolfgang Bock por aceitar me acompanhar neste caminho com a simplicidade, humildade e incondicionalidade que sempre me mostrou em cada um de seus ensinamentos, é uma honra para mim.

Agradeço ao Prof. Dr. Stefan Ehbauer, suas explicações e motivação para sempre pensar na profundidade da matemática, foram e são únicas, além de sua alegria para ensinar e disfrutar este caminho acadêmico. Agradeço à Profa. Dra. Verónica Cifuentes Vargas. Ela é a responsável de cada sucesso neste caminho. Agradeço ao Prof. Dr. Pedro Fernando Fernandez Fernandez, ao Prof. Dr. Gabriel Bravo e sempre ao Prof. Dr. Agustín Moreno Cañadas. Agradeço a Alfilgen Sebandal, minha colega, minha amiga, meu anjo. A todas e todos meu colegas matemáticos, que me ensinaram carinhosamente o trabalho em grupo, Oscar, Eder, Edwin, Yeimy, Gustavo, Erick. Agradeço a minha família colombiana e agora brasileira por todo seu apoio. A dona Malú, "o caminho se faz caminhando". A Tayná Silva, a mulher mais forte, em todo sentido, que nunca conheci. Agradeço a Luisa Marieta Sánchez Alvear, o modelo de mulher para mim, a inspiração mesma.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas (PPGMA-UFAM) pela qualidade acadêmica e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

# Resumo

Um dos problemas principais da teoria de representações de quivers é classificar todas suas representações indecomponíveis. Existe uma abordagem para este problema via geometria algébrica, que terminou sendo útil para algumas álgebras de caminhos de tipo selvagem, o caso conhecido por sua dificuldade. Motivados nisso, estudamos o objeto principal dessa abordagem, chamado de variedade de representações de quivers, com o intuito de compreender a abrangência deste conceito, exploramos um exemplo de cada tipo de álgebra, a saber de tipo finito, manso e selvagem. Em outras palavras, estudamos a classificação genérica de suas representações indecomponíveis via a classificação de órbitas. Com o objetivo de estudar o espaço tangente destas variedades e suas órbitas, estudamos algumas conexões através de ferramentas homológicas e suas principais propriedades.

**Palavras-chave:** Álgebra de caminhos, representações de quivers, variedades de representações de quivers, espaço tangente de Zariski.

# Abstract

One of the main problems of quiver representation theory is to classify all the indecomposable representations for a given quiver  $Q$ . There is an approach to this problem via algebraic geometry that turned out to be useful for some wild-type path algebras, known for its difficulty. Motivated by this, we study the main object of this approach, called the variety of representations of quivers. In order to understand the scope of this concept, we explore an example of each type of algebra, namely finite, tame and wild types. In other words, we study its generic classification of its indecomposable representations via orbit classification. In order to study the tangent space of these varieties and their orbits, we study some homological tools and its main properties.

**Keywords:** Path algebra, quiver representations, quiver representations varieties, Zariski tangent space.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Álgebras e Módulos</b>	<b>10</b>
1.1 Álgebras	10
1.1.1 Álgebras de caminhos	15
1.2 Módulos	21
1.2.1 Sequências Exatas	24
1.2.2 Representações de Quivers	27
1.3 Álgebra Homológica na Teoria de Representações de Quivers	34
<b>2 Geometria Algébrica</b>	<b>38</b>
2.1 Variedades Algébricas	38
2.1.1 Topologia de Zariski	47
2.1.2 Dimensão	49
2.2 Anéis Locais e Localização	51
2.2.1 Propriedades Geométricas Locais	59
2.2.2 Derivações	59
2.3 Grupos Lineares Algébricos	69
2.3.1 Propriedades das Órbitas	72
<b>3 Variedade de Representações de Quivers</b>	<b>77</b>
3.1 Variedade de Representações de um Quiver	77
3.2 Exemplos do Tipo Finito, Manso e Selvagem	79
3.2.1 Tipo Finito	79
3.2.2 Tipo Manso	81
3.2.3 Tipo Selvagem	83
3.3 Propriedades das órbitas em variedades de quivers	86
<b>4 Apêndice</b>	<b>90</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>94</b>

# Introdução

Em 1972, P. Gabriel introduziu as primeiras noções de representações de um quiver (ver [Gab72, DG79]), permitindo que a teoria de representações de álgebras associativas de dimensão finita possa ser reformulada usando a linguagem dos quivers, sendo que um quiver é um grafo orientado e uma representação dele, isto é, associar a cada vértice, um espaço vetorial e a cada flecha uma transformação linear. Seus estudos foram baseados num trabalho de T. Yoshii [Yos56]. Para o trabalho de P. Gabriel o trabalho de K.J. Bäckström [Bac72] e Bernstein-Ge'lfand-Ponomarev [BGP73] foram de muito valor. Uma visão histórica deste desenvolvimento pode ser encontrada em [Rin16]. A introdução dos quivers marcou uma nova etapa na teoria de representações de álgebras associativas de dimensão finita. Foram descobertas uma série de novas e importantes conexões com outras áreas da matemática por exemplo, Álgebras de Hall, grupos quânticos, álgebras de Lie, cluster álgebras e entre muitas outras áreas. Para mais detalhes recomendamos [Kir16].

Um dos problemas fundamentais da teoria de representações de álgebras associativas é a classificação das representações de dimensão finita, a menos de isomorfismo. Este problema de classificação se divide em problemas de tipo finito, manso e, na maioria das vezes, de tipo selvagem (ver [DG79], pp. 242-259). Selvagem significa "intuitivamente", que o problema de classificação de suas representações é tão difícil, que às vezes é chamado um problema impossível de resolver. O principal obstáculo neste caso é a dependência das classes de isomorfismo de representações em muitos parâmetros contínuos arbitrários, para os quais as ferramentas clássicas da teoria das representações de álgebras não são suficientes. Uma completa classificação para as representações de quivers só é conhecida para o caso de quivers de tipo Dynkin e foi dada por P. Gabriel em 1972. Em outras palavras, P. Gabriel classificou os quivers que são do tipo de representação finita [Gab72] e mostrou via vetores de dimensão a existência da bijeção entre o conjunto de classes de isomorfismos de representações indecomponíveis dos diagramas de Dynkin e o conjunto de raízes positivas da correspondente álgebra de Lie. Por outro lado, Dlab e Ringel em [DR75] usaram as ferramentas introduzidas por P. Gabriel em [Gab73] para estender tais resultados para álgebras hereditárias de dimensão finita sobre corpos arbitrários. No mesmo sentido do problema inicial, a classificação das representações indecomponíveis de quivers afins foi estudada por Gel'fand-Ponomarev [GP70], Donovan-Freislich [DF73], Nazarova [Naz73], e [NR73], Dlab-Ringel [DR76], Auslander-Platzek [AP78] e Kac [Kac80].

Com o objetivo de dar uma solução a este problema de classificação, usando outras ferramentas da perspectiva geométrica. A. King introduziu em 1994 o conceito de espaços de moduli para representações de quivers [Kin94]. Assim diferentes soluções são identificadas, se forem isomorfas. Mais precisamente, os espaços de moduli podem ser pensados como dando um espaço universal de parâmetros para o problema. No mesmo ano, W. Crawley-Boevey

escreve oito notas para um curso dado na Oxford University [Cra93], onde o principal objetivo foi a classificação das representações para diagramas Euclidianos ou de tipo Dynkin estendidos, da perspectiva geométrica, que envolve ações de grupos algébricos, o estudo do sistema de raízes e algumas técnicas da álgebra homológica.

Nesta mesma direção, G. Lusztig em [Lus98] forneceu uma realização geométrica da parte positiva da álgebra envolvente universal, de uma álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$  simplesmente atada usando funções construtíveis. Em outras palavras, uma realização geométrica da parte positiva de um grupo quântico, usando *perverse sheaf*, permitiu a construção de uma base canônica, que desempenha um papel importante na teoria da representações. As variedades de quivers introduzidas por H. Nakajima ([Nak99]), produzem uma realização geométrica das representações de peso maior de álgebras de Kac-Moody simplesmente entrelaçadas. Motivando ainda mais a teoria, M. Reineke em ([Rei08]) também faz uma abordagem geométrica ao problema de classificação de tipo selvagem, em particular para o quiver de Kronecker de três flechas. Fora disso, é dada uma noção de estabilidade nas representações de quivers. Em 2012, V. Ginzburg ([Gin12]), faz uma generalização interessante da teoria, mostrando que as variedades de Nakajima também fornecem uma importante classe de exemplos de variedades algébricas simpléticas com propriedades extremadamente ricas em estrutura e interessantes por si só.

Em 2016, A. Kirillov apresenta em [Kir16] uma introdução à teoria das representações de quiver e variedades de quiver, baseada em um curso, ministrado por ele mesmo na Universidade de Stony Brook, o qual começa com definições básicas e termina com a obra de Nakajima sobre variedades quiver e a realização geométrica de álgebras de Lie de Kac-Moody. Esta será uma de nossas guias bibliográficas mais importantes. Este trabalho vai considerar a variedade de representações para uma álgebra associativa  $\mathbb{k}Q$ , induzida por um quiver  $Q$ . Estas variedades se formam para estudar álgebras e seus módulos, com especial ênfase na teoria de representações de quivers, ou seja, módulos para álgebras de caminhos. O objetivo é mostrar uma série de diferentes tópicos, que através da história, fizeram a teoria consistente que é uma das mais importantes na matemática. Mais ainda, para destacar as vantagens desta abordagem geométrica, apresentaremos três exemplos de cada tipo de álgebra, isto é, álgebras de tipo finito, tipo manso e tipo selvagem (ver Seção 3.2). A seguir apresentaremos a estrutura desta dissertação.

No Capítulo 1 vamos apresentar a teoria de módulos e álgebras suficientemente para o desenvolvimento do trabalho. Primeiro vamos entender o que é uma álgebra de caminhos, depois estudaremos os módulos e alguns de seus resultados, até chegar as representações de quivers, para entender a equivalência de categorias  $\mathbb{k}Q - mod$  e  $rep Q$ . Na sequência vamos apresentar alguns resultados de álgebra homológica na categoria  $\mathbb{k}Q - mod$ .

No Capítulo 2 baseado principalmente em [Eis95], vamos entender as variedades algébricas afins, sua topologia e a forma local de estudar alguns fenômenos, perto de um ponto  $p$  de uma variedade algébrica afim  $X$ , para introduzir o espaço tangente de Zariski e sua relação com os módulos de diferenciais de Kähler. No final deste capítulo vamos dar uma introdução sobre os grupos algébricos e algumas das propriedades das órbitas obtidas por uma ação de um grupo.

No Capítulo 3 vamos aproveitar o estudado nos capítulos anteriores para intruzir o conceito

central deste trabalho, a variedade de representações de quivers. Aproveitando isto, apresentaremos alguns resultados importantes e o seu potencial no problema de classificação.

Finalizaremos com um Apêndice sobre alguns conceitos clássicos e muito gerais da teoria de categorias, linguagem muito frequente no decorrer deste trabalho todo, porém não estritamente necessário para leitores não familiar na teoria de Categorias.

# Capítulo 1

## Álgebras e Módulos

Neste capítulo apresentaremos notação, terminologia e alguns fatos básicos da teoria de módulos e de  $\mathbb{k}$ -álgebras de dimensão finita, como também exemplos apropriados para este trabalho. Em particular estudaremos elementos gerais da teoria de representações de quivers finitos e sua equivalência categórica com os módulos de uma certa álgebra de caminhos de dimensão finita sobre  $\mathbb{k}$ . Esta equivalência vai permitir definir apropriadamente características homológicas dos módulos sobre a álgebra de caminhos. Além, isso vai ser uma ferramenta essencial para a descrição geométrica de nosso interesse.

### 1.1 Álgebras

Esta seção pretende apresentar alguns conceitos e propriedades sobre álgebras, os quais usaremos durante o desenvolvimento deste trabalho. Vale a pena destacar que apresentaremos alguns exemplos que usaremos para definir a álgebra central deste trabalho, chamada de álgebra de caminhos (ver Definição [1.26](#)).

**Definição 1.1.** *Um **anel** é uma tripla  $(R, +, \cdot)$  que consiste de um conjunto  $R$  e duas operações binárias, chamadas de **soma**  $+ : R \times R \rightarrow R$ ,  $(r, s) \mapsto r + s$  e **multiplicação**  $\cdot : R \times R \rightarrow R$ ,  $(r, s) \mapsto r \cdot s$  tal que  $(R, +)$  é um grupo abeliano, que cumpre as seguintes condições:*

$$(i) \quad (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t),$$

$$(ii) \quad r(s + t) = rs + rt \text{ e } (s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r,$$

para todo  $r, s, t \in R$ . Ou seja a multiplicação é associativa e se cumprem as leis da distribuição sobre a soma. Um anel é **comutativo** se  $r \cdot s = s \cdot r$ , para quaisquer  $r, s \in R$ .

Neste trabalho vamos considerar anéis tais que existe um elemento  $1 \in R$  onde  $1 \neq 0$  e  $1r = r1 = r$ , para todo  $r \in R$ . Tal elemento é único em relação a esta propriedade e é chamado de **identidade** do anel  $R$ .

#### Exemplo 1.2.

(1)  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são anéis comutativos com unidade.

(2) Seja  $X$  um conjunto não vazio. O conjunto denotado como

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é função}\},$$

munido da adição e a multiplicação de funções, definidas de maneira natural, é um anel.

(3) O conjunto  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  dos polinômios nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , com coeficientes em  $\mathbb{C}$ , é um anel com a soma e o produto usual de polinômios. Análogamente o conjunto das series formais  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ , é um anel.

**Definição 1.3.** Sejam  $R$  e  $R'$  anéis. Uma função  $f : R \longrightarrow R'$  é chamado de **homomorfismo de anéis** se  $f(r+s) = f(r) + f(s)$  e  $f(r \cdot_R s) = f(r) \cdot_{R'} f(s)$ , para todo  $r, s \in R$ . Além disso, se  $R$  e  $R'$  são anéis com elementos identidade, assumimos que o homomorfismo de anéis  $f$  preserva as identidades, ou seja, que  $f(1_R) = 1_{R'}$ .

**Exemplo 1.4.**

(1) A função  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , definida por  $f(a) = a \bmod n$ , é um homomorfismo de anéis.

(2) A conjugação complexa é um homomorfismo de anéis. Definimos  $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$ . Para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , tem-se que  $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$ , já que para  $z_1 := a + bi$  e  $z_2 := c + di$  cumpre-se que  $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$  e

$$f(z_1 \cdot z_2) = \sqrt{(ac - db)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2},$$

mas  $f(z_1) = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $f(z_2) = \sqrt{c^2 + d^2}$ , então

$$f(z_1) \cdot f(z_2) = \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}.$$

(3) Sejam  $\mathbb{R}[x]$  o anel de polinômios na variável  $x$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos. A função  $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$  definida como  $f(p) \longmapsto p(i)$  é um homomorfismo de anéis.

**Definição 1.5.** Seja  $R$  um anel comutativo. Um elemento  $r \in R$  é chamado de:

(i) **Unidade**, se possui inverso multiplicativo em  $R$ , ou seja, se existe um elemento em  $s \in R$ , tal que  $rs = 1$ . Denotamos ao grupo de unidades de  $R$  como

$$R^\times = \{u \in R \mid u \text{ é unidade em } R\}.$$

(ii) **Divisor de zero**, se existe  $s \neq 0$ , tal que  $rs = 0$ .  $R$  é dito um **domínio de integridade**, se  $R \neq 0$  e  $0$  é o único divisor de zero em  $R$ , ou seja, dados  $r, r' \in R$ , temos  $rr' = 0$  implica  $r = 0$  ou  $r' = 0$ .

**Exemplo 1.6.**

(1) O anel  $\mathbb{Z}$  cujo conjunto de unidades é  $\{\pm 1\}$ , é um domínio de integridade.

(2) O anel  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  cujo conjunto de unidades é  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  sem  $\{0\}$ , é um domínio de integridade.

(3) O anel  $\mathbb{C}$ , cujo conjunto de unidades é  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , é um domínio de integridade. Igual acontece com  $\mathbb{C}[x]$ .

**Definição 1.7.** Seja  $R$  um anel comutativo.  $R$  é um **corpo** se todo elemento não nulo é unidade, ou seja,  $R^\times = R \setminus \{0\}$ . Em diante denotaremos os corpos por  $\mathbb{k}$  e dizemos que é **algébricamente fechado**, se qualquer polinômio não constante em  $\mathbb{k}[x]$ , tem raízes em  $\mathbb{k}$ .

**Exemplo 1.8.**

- (1) O anel do Exemplo 1.6(2) é um corpo.
- (2) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é um corpo que não é algébricamente fechado, mas o conjunto dos números complexos é um corpo algébricamente fechado.
- (3) Seja  $R$  um domínio de integridade. O **corpo de frações** denotado por  $\text{Frac}(R)$  de  $R$  é o anel obtido invertendo-se todos os elementos não nulos de  $R$ . Por exemplo,  $\text{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ . Mais precisamente,  $\text{Frac}(R)$  é o conjunto dos pares ordenados  $(r, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$  módulo a relação de equivalência que identifica  $(r, s)$  com  $(r', s')$  sempre que  $rs' = sr'$ . Denotaremos a classe de equivalência do par  $(r, s)$  na forma de fração  $a/b$  de modo que

$$\text{Frac}(R) = \left\{ \frac{r}{s} \mid r, s \in R, s \neq 0 \right\},$$

e

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \iff rs' = sr'.$$

As operações em  $\text{Frac}(R)$  são definidas por

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + sr'}{ss'} \quad e \quad \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'},$$

e não depende da escolha dos representantes de classe envolvidos. Os elementos neutros da adição e da multiplicação são  $0/1$  e  $1/1$ , respectivamente. Afirmamos que  $\text{Frac}(R)$  é um corpo. De fato, se  $\frac{r}{s}$  é não nulo, temos  $r \neq 0$  logo  $(r/s)^{-1} = s/r$ . Mais ainda  $R$  pode ser visto como um subanel de  $\text{Frac}(R)$ , pois temos um homomorfismo injetor natural

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow \text{Frac}(R) \\ r &\longmapsto \frac{r}{1}. \end{aligned}$$

No seguinte capítulo vamos generalizar este conceito (ver Definição 2.45).

**Definição 1.9.** Seja  $R$  um anel comutativo. Uma  $R$ -álgebra é um anel  $A$  com elemento identidade, munido de um homomorfismo de anéis  $f: R \longrightarrow A$ , tal que  $1_R \longmapsto 1_A$ .

**Observação 1.10.** A Definição 1.9 é equivalente a dizer que uma  $\mathbb{k}$ -álgebra é um anel  $R$  com elemento identidade 1, tal que  $R$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, ou seja:

$$\lambda(rs) = (r\lambda)s = r(\lambda s) = (rs)\lambda$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{k}$  e  $r, s \in R$ . A dimensão de uma  $\mathbb{k}$ -álgebra  $R$  é a dimensão de  $R$  como  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial e é denotado por  $\dim_{\mathbb{k}} R$ .

**Exemplo 1.11.**

- (1) O anel  $\mathbb{k}[x]$  de todos os polinômios na indeterminada  $x$  com coeficientes em  $\mathbb{k}$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra de dimensão infinita. A unidade é o polinômio constante 1 e para  $f(x), g(x) \in \mathbb{k}[x]$  e  $\lambda \in \mathbb{k}$  temos que

$$\lambda(f(x) \cdot g(x)) = (\lambda \cdot f(x)) \cdot g(x) = f(x) \cdot (\lambda g(x)) = (f(x) \cdot g(x))\lambda.$$

Analogamente, o anel  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  nas indeterminadas  $x_1, \dots, x_n$  com coeficientes em  $\mathbb{k}$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra de dimensão infinita.

- (2) O conjunto das matrizes quadradas de tamanho  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{k}$ , denotado como  $M_n(\mathbb{k})$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra de dimensão finita, com a multiplicação usual de matrizes e a identidade é a matriz identidade, denotada como  $I$ . Se  $n > 1$ , esta  $\mathbb{k}$ -álgebra não é comutativa. Equivalentemente se  $V$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial de dimensão  $n$ , a álgebra de endomorfismos denotada como

$$\text{End}_{\mathbb{k}}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ é } \mathbb{k}\text{-linear}\}.$$

Esta é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra com a multiplicação dada pela composição de funções. Note que fixando uma base para  $V$ , os elementos de  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  podem escreverse em termos de matrizes com respeito as bases e assim podemos identificar  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  com  $M_n(\mathbb{k})$ .

- (3) Sejam  $R_1$  e  $R_2$  duas  $\mathbb{k}$ -álgebras. A soma direta de  $R_1$  e  $R_2$  é a  $\mathbb{k}$ -álgebra  $R = R_1 \times R_2$  com soma e multiplicação dadas pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}(r_1, r_2) + (s_1, s_2) &= (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \\ (r_1, r_2)(s_1, s_2) &= (r_1 s_1, r_2 s_2)\end{aligned}$$

onde  $r_1, s_1 \in R_1$  e  $r_2, s_2 \in R_2$ . A identidade de  $R$  é o elemento  $(1_{R_1}, 1_{R_2}) \in R_1 \times R_2$ .

**Definição 1.12.** Um  $\mathbb{k}$ -subespaço vetorial  $R'$  de uma  $\mathbb{k}$ -álgebra  $R$  é uma  $\mathbb{k}$ -**subálgebra** de  $R$ , se a identidade de  $R$  pertence a  $R'$  e se  $r'_1 r'_2 \in R'$  para todo  $r'_1, r'_2 \in R'$ . Um subconjunto  $I$  não vazio de um anel  $R$  é um **ideal à esquerda** de  $R$  (ou **ideal a direita** de  $R$ ), se  $rx \in I$  (à direita  $xr$ ) e  $y + x \in I$  para todo  $x, y \in I$  e  $r \in R$ . Um **ideal bilateral** de  $R$  (ou simplesmente um **ideal** de  $R$ ) é um ideal à esquerda e um ideal a direita de  $R$ .

**Exemplo 1.13.**

- (1) Quando  $\mathbb{k}$  um corpo algébricamente fechado, a situação é mais simples. Os ideais não triviais do anel de polinômios  $\mathbb{k}[x]$  são os ideais gerados por  $x - a$ , para algum  $a \in \mathbb{k}$ . Mais geralmente, os ideais maximais de  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , são da forma  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ .
- (2) Seja  $\mathbb{Z}[x]$  o anel de polinômios na variável  $x$  sobre  $\mathbb{Z}$  e  $p$  um número primo, então  $\langle 0 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle x \rangle$  e  $\langle p, x \rangle = \{ap + bx \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  são todos ideais de  $\mathbb{Z}[x]$ .
- (3) Seja  $R$  um anel e  $I$  um ideal bilateral. O ideal gerado pelos elementos  $x_1 x_2 \cdots x_m$ , com  $x_1, x_2, \dots, x_m \in I$  e denotado como  $I^m$ , é um ideal bilateral de  $R$ . Por convenção,  $I^0 = R$  e um ideal  $I$  é dito **nilpotente** se existir um número natural  $m$ , tal que  $I^m = 0$ .



**Definição 1.14.** Seja  $R$  um anel. Um ideal  $\mathfrak{p}$  em  $R$  é chamado de **ideal primo**, se  $\mathfrak{p} \neq \langle 1 \rangle$  e se  $p_1 \cdot p_2 \in \mathfrak{p}$  tal que  $p_1 \in \mathfrak{p}$  ou  $p_2 \in \mathfrak{p}$ . Um ideal  $\mathfrak{m}$  em  $R$  é chamado de **ideal maximal**, se  $\mathfrak{m} \neq \langle 1 \rangle$  e se não existir um ideal  $\mathfrak{a}$  tal que  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset \langle 1 \rangle$ .

**Exemplo 1.15.**

- (1) Seja  $\mathbb{k}$  um corpo. O único ideal maximal de  $\mathbb{k}$  é  $\{0\}$ .
- (2) No Exemplo 1.2 item (1),  $\langle x - a \rangle$  é um ideal maximal em  $\mathbb{k}[x]$  e  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$  é um ideal maximal em  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .
- (3) No Exemplo 1.2 item (2),  $\langle 0 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle x \rangle$  e  $\langle p, x \rangle$  são ideais primos de  $\mathbb{Z}[x]$ . Em particular  $\langle p, x \rangle$  é também maximal.

**Observação 1.16.** Note que se  $I$  é um ideal bilateral de uma  $\mathbb{k}$ -álgebra  $R$ , o  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial quociente  $R/I$  tem uma única estrutura de  $\mathbb{k}$ -álgebra tal que o transformação linear sobrejetiva canônica  $\pi : R \rightarrow R/I$ ,  $r \mapsto \bar{r} = r + I$  torna-se um homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras, conceito que será definido a seguir.

**Definição 1.17.** Sejam  $R$  e  $R'$   $\mathbb{k}$ -álgebras. Um homomorfismo de anéis  $f : R \rightarrow R'$  é chamado de **homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras** se  $f$  é uma transformação  $\mathbb{k}$ -linear. Duas  $\mathbb{k}$ -álgebras  $R$  e  $R'$  são chamadas de **isomorfas** se existe um isomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras, ou seja, um homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras bijetor. Em este caso denotamos  $R \cong R'$ .

**Exemplo 1.18.**

- (1) Sejam  $R$  uma  $\mathbb{k}$ -álgebra. Considere a função  $id_R : R \rightarrow R$  dada por  $id_R(r) = r$  para todo  $r \in R$ . Esta função, que é chamada de identidade, é um homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras.
- (2) Sejam  $R, S, T$   $\mathbb{k}$ -álgebras e dois homomorfismos de  $\mathbb{k}$ -álgebras  $\varphi : R \rightarrow S$  e  $\psi : S \rightarrow T$ . A função  $(\psi \circ \varphi) : R \rightarrow T$  é um homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras.
- (3) Consideramos um homomorfismo de anéis injetivo  $\mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  que mergulha  $\mathbb{k}$  no anel de polinômios como polinômios constantes. Qualquer quociente  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra e a função sobrejetiva quociente  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I$  é um homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras.

A seguinte observação vai ser apresentada de forma geral, mas será de muita importancia para a construção da álgebra de caminhos (ver Definição 1.26).

**Observação 1.19.** Seja  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  uma base de uma  $\mathbb{k}$ -álgebra  $A$  de dimensão  $n$ . Então, todo elemento  $a \in A$  é uma combinação linear dos  $b_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Assim, se  $a, a' \in A$  são dois elementos arbitrarios, conseguimos expresar eles como

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, \quad e \quad a' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i b_i \quad \text{para } \lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{k}, i = 1, \dots, n$$

e seu produto satisfaz

$$a \cdot a' = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda'_i b_i \right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda'_j b_i b_j$$

isso significa que, se especificamos como multiplicar quaisquer dois elementos da base, então a multiplicação na  $\mathbb{k}$ -álgebra está completamente determinada.

### 1.1.1 Álgebras de caminhos

Nesta subseção vamos definir as estruturas gráficas que estamos interessados. Depois vamos introduzir a terminologia relacionada, a qual vai ser apropriada para este trabalho. Mostraremos como podemos associar uma álgebra a cada uma das estruturas gráficas, e estudar algumas de suas propriedades.

**Definição 1.20.** Um **quiver**  $Q$  é um grafo dirigido que consiste de dois conjuntos e duas funções:

- um conjunto de vértices, denotado por  $Q_0$ ,
- um conjunto de flechas, denotado por  $Q_1$ ,
- $s : Q_1 \rightarrow Q_0$  que associa a cada flecha  $\alpha \in Q_1$  seu vértice inicial  $s(\alpha) \in Q_0$ ,
- $t : Q_1 \rightarrow Q_0$  que associa a cada flecha  $\alpha \in Q_1$  seu vértice final  $t(\alpha) \in Q_0$ .

Um elemento  $\alpha \in Q_1$  é representado desenhando uma flecha de seu vértice inicial até seu vértice final como segue:

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha) \quad \text{ou} \quad \alpha : i \longrightarrow j$$

onde  $\alpha$  é uma flecha saindo de  $i$  e chegando em  $j$ . Note que  $Q$  é uma quádrupla  $(Q_0, Q_1, s, t)$ . Se os conjuntos  $Q_0$  e  $Q_1$  são finitos, então dizemos que  $Q$  é **finito**. Sem perda de generalidade, a partir de agora, neste trabalho, consideraremos  $Q_0 = \{1, \dots, |Q_0|\}$ , onde  $|Q_0|$  é o cardinal do conjunto de vértices do quiver  $Q$ .

#### Exemplo 1.21.

(1) Consideremos o quiver

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4.$$

Note que  $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  e  $s, t$  estão definidas como:

$$s(\alpha) = 1, \quad s(\beta) = 2, \quad s(\gamma) = 3,$$

$$t(\alpha) = 2, \quad t(\beta) = 3, \quad t(\gamma) = 4.$$

Em geral, podemos definir o quiver com  $n$  vértices assim:

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n$$

com  $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ , onde  $t(\alpha_i) = i + 1$  e  $s(\alpha_i) = i$  para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ . Este quiver será denotado por  $\mathbb{A}_n$ .

(2) Consideremos o quiver



com  $Q_0 = \{1\}$  e  $Q_1 = \{\alpha\}$ . Este quiver será chamado de **quiver de Jordan** ou **loop** ou **ciclo orientado**.

(3) Consideremos o quiver chamado de **Kronecker de três flechas**

$$\mathbb{K}_3 = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\delta} \end{array} 2 \quad (1.1)$$

Note que  $Q_0 = \{1, 2\}$  e  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \delta\}$ , além disso  $s(\alpha) = s(\beta) = s(\delta) = 1$  e  $t(\alpha) = t(\beta) = t(\delta) = 2$ .

**Definição 1.22.** Sejam  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  um quiver e  $i, j \in Q_0$ . Um **caminho**  $c$  de  $i$  para  $j$  de comprimento  $l > 0$  em  $Q$ , é uma sequência  $c = (i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_l \mid j)$ , que será denotada por

$$c := \alpha_l \cdots \alpha_2 \alpha_1,$$

com  $\alpha_h \in Q_1$  tal que

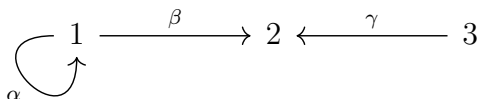
$$\begin{aligned} s(\alpha_1) &= i, \\ s(\alpha_{h+1}) &= t(\alpha_h), \text{ para } h = 1, \dots, l-1, \\ t(\alpha_l) &= j. \end{aligned}$$

O **caminho trivial** denotado como  $e_i$  no vértice  $i$ , é o caminho de comprimento  $l = 0$  que nunca sai do vértice  $i$ .

**Observação 1.23.** Note que um caminho de  $i$  para  $j$  é uma forma de ir do vértice  $i$  para o vértice  $j$  no quiver  $Q$ , onde só podemos caminhar ao longo de uma flecha na direção em que ela está apontando.

**Exemplo 1.24.**

(1) Seja o quiver



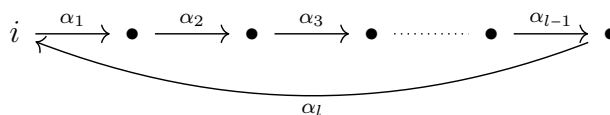
temos que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\beta\alpha\alpha$  são caminhos, mas  $\gamma\beta\alpha$  não é um caminho.

(2) Uma flecha  $i \xrightarrow{\alpha} j$  é um caminho  $\alpha$  de comprimento um. Se  $i = j$  então



é um ciclo de comprimento um ou um loop, como no Exemplo 1.21 item (2). Um caminho não trivial tal que  $s(c) = t(c)$  é chamado ciclo não trivial. Um quiver  $Q$  é chamado **acíclico**, se não tem ciclos não triviais.

(3) Um caminho da forma



do vértice  $i$  para o vértice  $i$ , dado por  $\alpha_l \alpha_{l-1} \dots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$ , é chamado de **ciclo orientado**.

**Definição 1.25.** Seja  $Q$  um quiver. Dados dois caminhos  $c = \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1$  e  $c' = \beta_t \cdots \beta_2 \beta_1$ , com  $t(c') = s(c)$ . Definimos o caminho  $c \cdot c'$  como sendo a **concatenação de dois caminhos**

$$c \cdot c' = \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1 \beta_t \cdots \beta_2 \beta_1$$

Com a Definição 1.25 conseguimos definir a multiplicação de caminhos. Note que esta multiplicação de caminhos vai ser inspirado pela composição usual de funções. Com esta definição e a Observação 1.19 vamos construir a  $\mathbb{k}$ -álgebra de nosso interesse.

**Definição 1.26.** Seja  $Q$  um quiver. A **álgebra de caminhos** de  $Q$ , denotada como  $\mathbb{k}Q$ , é a  $\mathbb{k}$ -álgebra com base o conjunto de todos os caminhos no quiver  $Q$  e com a multiplicação definida nos elementos da base  $c, c'$  da seguinte forma

$$cc' = \begin{cases} c \cdot c', & \text{se } t(c') = s(c), \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases}.$$

Extendemos esta multiplicação por bilinearidade e para caminhos de comprimento zero  $e_i$  via

$$ce_i = \begin{cases} c, & \text{se } s(c) = i, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases} \quad e_j c = \begin{cases} c, & \text{se } t(c) = j, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases}$$

e para dois elementos arbitrários  $\sum_c \lambda_c c, \sum_{c'} \lambda'_{c'} c'$  em  $\mathbb{k}Q$  temos  $(\sum_c \lambda_c c) \cdot (\sum_{c'} \lambda'_{c'} c') = \sum_{c, c'} \lambda_c \lambda'_{c'} cc'$ , onde cada somatório é finito e percorre o conjunto dos caminhos de  $Q$ .

**Observação 1.27.** Existe uma decomposição em somas diretas

$$\mathbb{k}Q = \mathbb{k}Q_0 \oplus \mathbb{k}Q_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{k}Q_l \oplus \cdots$$

de  $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais  $\mathbb{k}Q$ , sendo que cada  $\mathbb{k}Q_l$ , com  $l \geq 0$ , é um subespaço de  $\mathbb{k}Q$  gerado pelo conjunto  $Q_l$  de todos os caminhos de comprimento  $l$ . Além disso,  $(\mathbb{k}Q_n) \cdot (\mathbb{k}Q_m) \subseteq (\mathbb{k}Q_{n+m})$  para todo  $n, m \geq 0$ , já que a multiplicação em  $\mathbb{k}Q$  de caminhos de comprimento  $n$  por um caminho de comprimento  $m$ , ou é zero ou um caminho de comprimento  $n + m$ .

**Exemplo 1.28.**

(1) Seja o quiver

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2.$$

A álgebra de caminhos  $\mathbb{k}Q$  tem como base o conjunto  $\{e_1, e_2, \alpha\}$  e podemos visualizar seu produto na seguinte tabela:

	$e_1$	$e_2$	$\alpha$
$e_1$	$e_1$	$0$	$0$
$e_2$	$0$	$e_2$	$\alpha$
$\alpha$	$\alpha$	$0$	$0$

Note que  $\mathbb{k}Q$  é isomorfa a álgebra de matrizes  $2 \times 2$  triangular superior

$$\mathbb{T}_2(\mathbb{k}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{k} \right\},$$

via o isomorfismo

$$e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos generalizar este exemplo. Consideremos o quiver

$$Q := 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n.$$

Denote por  $c_{i,j}$  o único caminho em  $Q$  de  $i$  para  $j$ , ou seja:

$$c_{i,j} = \begin{cases} e_i, & \text{se } i = j, \\ \alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\dots\alpha_{i+1}\alpha_i, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e assim, podemos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{k}Q &\longrightarrow \mathbb{T}_n(\mathbb{k}) \\ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{i,j} c_{ij} &\longmapsto \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{T}_n(\mathbb{k}) \subset M_n(\mathbb{k})$  é a subálgebra de matrizes  $n \times n$  triangulares superiores. Note que:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n c_{ii}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_n,$$

$$\varphi(\alpha_l \cdot \alpha_s) = \varphi(\alpha_l) \cdot \varphi(\alpha_s).$$

Portanto, concluímos que  $\mathbb{k}Q$  é isomorfa a álgebra de matrizes  $n \times n$  triangulares superiores. A seguir, listamos a base de  $\mathbb{k}Q$

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ & & c_{33} & c_{34} & \dots & c_{3n} \\ & & & & & \\ & & & & c_{44} & \dots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & c_{nn}. \end{array}$$

(2) Para o loop

$$Q := \begin{array}{c} 1, \\ \curvearrowright \\ \alpha \end{array}$$

a álgebra de caminhos  $\mathbb{k}Q$  tem base  $\{e_1, \alpha, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^l, \dots\}$  e a multiplicação dos vetores da base está dada por

$$\alpha^l \alpha^k = \alpha^{l+k}, \quad \text{para todo } l, k \geq 0,$$

onde  $\alpha^0 = e_1$ . Assim,  $\mathbb{k}Q$  é isomorfo a álgebra de polinômios na indeterminada  $x$ ,  $\mathbb{k}[x]$ , via a transformação linear dada por

$$\alpha^n \mapsto x^n.$$

(3) Consideremos o quiver de Kronecker de dois flechas

$$Q := 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2.$$

A álgebra de caminhos  $\mathbb{k}Q$  tem base  $\{e_1, e_2, \alpha, \beta\}$ , com a multiplicação dada na seguinte tabela:

	$e_1$	$e_2$	$\alpha$	$\beta$
$e_1$	$e_1$	$0$	$0$	$0$
$e_2$	$0$	$e_2$	$\alpha$	$\beta$
$\alpha$	$\alpha$	$0$	$0$	$0$
$\beta$	$\beta$	$0$	$0$	$0$

A álgebra de Kronecker é definida como sendo o espaço vetorial

$$\mathbb{T}_K = \begin{bmatrix} \mathbb{k} & \mathbb{k}^2 \\ 0 & \mathbb{k} \end{bmatrix},$$

munido da multiplicação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & (b, c) \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & (f, g) \\ 0 & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ae & a(f, g) + h(b, c) \\ 0 & dh \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae & (af, ag) + (hb, hc) \\ 0 & dh \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae & (af + hb, ag + hc) \\ 0 & dh \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que  $\mathbb{k}Q \cong \mathbb{T}_K$  via

$$e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & (0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (0, 0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (1, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (0, 1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os seguintes resultados são sô algumas das propriedades das álgebras de caminhos.

**Proposição 1.29.** *Seja  $Q$  um quiver e  $\mathbb{k}Q$  sua álgebra de caminhos. Então*

- (i)  $\mathbb{k}Q$  é uma álgebra associativa,
- (ii)  $\mathbb{k}Q$  tem um elemento identidade se, e somente se  $Q_0$  é finito, e
- (iii)  $\mathbb{k}Q$  é de dimensão finita se, e somente se  $Q$  é finito e acíclico.

*Demonstração.*

- (i) Segue diretamente da Definição [1.26](#), já que a concatenação é associativa.

(ii)  $\Leftarrow$  Seja  $a = \sum_c \lambda_c c$  um elemento arbitrário em  $\mathbb{k}Q$ , onde o sumatório é finito e percorre o conjunto dos caminhos  $c$  de  $Q$ . Pela Definição 1.26 temos que

$$a \sum_{i \in Q_0} e_i = \left( \sum_c \lambda_c c \right) \left( \sum_{i \in Q_0} e_i \right) = \sum_{i \in Q_0} \sum_c \lambda_c c e_i = a,$$

pois

$$c e_i = \begin{cases} 0, & \text{se } s(c) \neq i, \\ c, & \text{se } s(c) = i. \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Suponha que  $Q_0$  é infinito e  $1 = \sum_{a=1}^m \lambda_a w_a$  é o elemento identidade de  $\mathbb{k}Q$ , onde  $\lambda_a$  é um escalar não nulo e  $w_a$  são caminhos em  $Q$ . O conjunto  $Q'_0$  de vértices iniciais de  $w_a$ , tem pelo menos  $m$  elementos e em particular é finito. Se  $i \in Q_0 \setminus Q'_0$ , então  $e_i = 0$ , o qual é uma contradição.

(iii) Se  $Q$  é infinito, então também a base de  $\mathbb{k}Q$  é infinita, pela Definição 1.26. Observe que no caso  $Q_0$  infinito seria  $Q_1$  também infinito porque contém os caminhos triviais. Se  $w = \alpha_1 \cdots \alpha_n$  é um ciclo em  $Q$ , então para cada  $t \in \mathbb{N}$  temos um vetor base  $w^t = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^t$  de  $\mathbb{k}Q$  e novamente dimensão infinita. Por outro lado, se  $Q$  é finito e acíclico, ele contém apenas um número finito de caminhos e assim  $\mathbb{k}Q$  é de dimensão finita. □

Apresentaremos conceitos que vão dar ainda mais estrutura à algebra de caminhos definida em 1.26.

**Definição 1.30.** *Seja  $A$  uma  $\mathbb{k}$ -álgebra. Um elemento  $e \in A$  é chamado de **idempotente** se  $e^2 = e$ . Dois elementos são chamados de **ortogonais** se  $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ . Um idempotente  $e$  é chamado de **idempotente central** se  $ea = ae$  para todo  $a \in A$  e um idempotente não nulo é chamado de **primitivo** se  $e$  não pode escreverse como a soma  $e = e_1 + e_2$ , tal que  $e_1, e_2$  são ortogonais idempotentes não nulos.*

**Exemplo 1.31.**

- (1) Os elementos 0 e 1 de qualquer  $\mathbb{k}$ -álgebra são idempotentes, chamados de **idempotentes triviais**. Todos os outros idempotentes são chamados de não triviais.
- (2) Se  $A = \mathbb{k}Q$  é a algebras de caminhos de um quiver  $Q$ , então o caminho constante  $e_i$ , com  $i \in Q_0$ , é um idempotente.
- (3) Os únicos idempotentes primitivos ortogonais centrais da  $\mathbb{k}$ -álgebra  $\mathbb{T}_2(\mathbb{k})$  das matrizes  $2 \times 2$  triangulares superiores com entradas em  $\mathbb{k}$  são

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Lema 1.32.** *Se  $A = \mathbb{k}Q$  é uma álgebra de caminhos, então cada caminho constante  $e_i$  é um primitivo idempotente.*

*Demonstração.* Suponha que  $e_i = e + e'$  com  $e, e'$  idempotentes ortogonais. Sejam

$$e = \sum_c \lambda_c c, \quad e' = \sum_c \lambda'_c c,$$

onde cada somatório é finito e percorre o conjunto dos caminhos  $c$  em  $Q$ . Como  $e = \sum_c \lambda_c c$  é um idempotente, segue-se que

$$0 = e^2 - e = \sum_{c,c'} \lambda_c \lambda_{c'} c c' - \sum_{c''} \lambda c c'' = \sum_{c,c'=c''} (\lambda_c \lambda_{c'} - \lambda_{c''}) c''. \quad (1.2)$$

Em particular  $\lambda_{e_j} \lambda_{e_j} = \lambda_{e_j}$ , assim  $\lambda_{e_j} = 0$  ou  $1$  para qualquer vértice  $j$ . Por outro lado temos que  $ee' = 0$  implica que  $\lambda_{e_j} \lambda'_{e_j} = 0$   $\lambda_{e_j} = 0$  quando  $\lambda'_{e_j} = 1$ . Como  $e + e' = e_i$ , devemos ter que  $\lambda_{e_j} = 0$  e  $\lambda'_{e_j} = 0$ , se  $i \neq j$  e são alguns de  $\lambda_{e_i}$  ou  $\lambda'_{e_i}$  é zero e o outro é  $1$ . Se tomamos  $\lambda_{e_1} = 1$  e  $\lambda'_{e_i} = 0$ , pela equação (1.2), segue que para qualquer caminho  $c$ , temos  $\lambda_{c'} = 0$  e assim  $e' = 0$ .  $\square$

Uma conclusão do estudado acima, é que o conjunto  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , é um conjunto de idempotentes primitivos ortogonais. Na Observação [1.46](#), vamos ver mais propriedades da álgebra de caminhos definida em [1.26](#), que serão de importante utilidade neste trabalho, mas primeiro precisamos estudar o conceito de módulos à esquerda e sua estrutura, mais ainda, sua relação com a álgebra de nossa discussão.

## 1.2 Módulos

No seguinte deste trabalho, vamos fixar  $\mathbb{k}$  um corpo algébricamente fechado. Esta seção tem o objetivo de apresentar a teoria de módulos, a forma de relacionar eles e o caso particular da conexão com as representações de quivers.

**Definição 1.33.** *Sejam  $R$  um anel e  $S$  uma  $R$ -álgebra. Um  $S$ -módulo à esquerda  $M$  é uma quádrupla  $(M, +, \cdot, S)$ , onde  $(M, +)$  é um grupo abeliano e*

$$\begin{aligned} S \times M &\longrightarrow M \\ (s, m) &\longmapsto sm, \end{aligned}$$

é uma operação binária que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $s(m + n) = sm + sn$ ,
- (ii)  $(s + s')m = sm + s'm$ ,
- (iii)  $(ss')m = s(s'm)$ ,
- (iv)  $1m = m$ ,
- (v)  $s(rm) = (rs)m = r(sm)$

para  $s, s' \in S$ ,  $m, n \in M$  e  $r \in R$ .

**Observação 1.34.** *No decorrer deste trabalho, vamos utilizar a Definição [1.33](#) principalmente para o caso particular em que  $S$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra. O nível de generalidade da definição anterior, se deve ao fato que no presente trabalho apresentaremos a construção do Módulo de Diferenciais de Kähler, ver Seção [2.2.2](#)*



**Exemplo 1.35.**

- (1) Seja  $R$  um anel. O anel dos polinômios  $R[x]$  com coeficientes em  $R$  é um  $R$ -módulo à esquerda, com as operações usuais.
- (2) Para  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , o conjunto  $R^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in R\}$  é um  $R$ -módulo à esquerda com a adição e multiplicação por escalar usual. Mais geralmente, para dois  $R$ -módulos à esquerda  $M$  e  $N$  o produto  $M \times N$  com adição por componentes e multiplicação escalar, é também um  $R$ -módulo à esquerda.
- (3) Se  $Q$  é um quiver e  $\mathbb{k}Q$  sua álgebra de caminhos, então para cada  $i \in Q_0$ , podemos definir um  $\mathbb{k}Q$ -módulo à esquerda, denotado como  $S(i)$ , como sendo o  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial com base  $\{e_i\}$  cuja ação é  $c \cdot e_i = e_i$ , para todo  $c$  em  $\mathbb{k}Q$ , com  $s(c) = i$ . Mais ainda, para cada flecha  $i \xrightarrow{\alpha} j$  em  $Q_1$  podemos definir um módulo  $M(\alpha)$  à esquerda cujo espaço vetorial tem base  $\{e_i, \alpha\}$  e cuja estrutura de  $\mathbb{k}Q$ -módulo à esquerda é dada pelas operações da álgebra de caminhos.

**Definição 1.36.** Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda.

- (i) Um **submódulo** de  $M$  é um subconjunto não vazio  $N \subseteq M$  tal que é um  $R$ -módulo com a mesma soma e multiplicação por escalar de  $M$ .
- (ii) Dizemos que um  $R$ -módulo é gerado pelos elementos  $m_1, m_2, \dots$ , se para cada  $m \in M$  existem finitamente muitos  $a_1, \dots, a_t \in R$  tal que  $m = a_1 m_{i_1} + \dots + a_t m_{i_t}$ . O  $R$ -módulo é chamado de **finitamente gerado** se é gerado por um número finito de elementos.
- (iii) Se  $N$  é um submódulo de  $M$ , o conjunto de classes de equivalência módulo  $N$

$$M/N := \{\bar{x} \mid x \in M\},$$

onde  $\bar{x} := x + N$ , é um  $R$ -módulo, chamado de **módulo quociente** de  $M$  por  $N$ , cuja ação está dada por  $r \cdot \bar{x} = \overline{rx}$ , para todo  $r \in R$  e  $\bar{x} \in M/N$ .

**Exemplo 1.37.**

- (1) Se  $I$  é um ideal à esquerda e  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda, então o conjunto

$$IM = \{r_1 m_1 + \dots + r_t m_t \mid m_i \in M, r_i \in I\},$$

é um submódulo de  $M$ .

- (2) Para qualquer subconjunto  $S \subset M$ , o conjunto

$$\langle S \rangle := \{a_1 m_1 + \dots + a_n m_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in R\} \subset M$$

de todas as combinações  $R$ -lineares de elementos de  $S$ , é o submódulo mais pequeno de  $M$  que contém a  $S$  que é chamado de **submódulo gerado por  $S$** . Se  $S = \{m_1, \dots, m_n\}$  é finito, escrevemos  $\langle S \rangle = \langle \{m_1, \dots, m_n\} \rangle$  ou também  $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ . O módulo  $M$  é chamado de **finitamente gerado** se  $M = \langle S \rangle$ , para um conjunto finito  $S \subset M$ .

- (3) Seja  $R$  um anel. Se consideramos  $R$  como um  $R$ -módulo à esquerda, um submódulo de  $R$  é um ideal  $I$  de  $R$ . Mais ainda, o anel quociente  $R/I$ , é um  $R$ -módulo à esquerda.

**Definição 1.38.** Sejam  $M$  e  $N$  dois  $R$ -módulos. Uma aplicação  $h : M \rightarrow N$  é chamada de **morfismo de  $R$ -módulos à esquerda** se para todo  $m, m' \in M$  e todo  $a \in R$  temos que

$$\begin{aligned} h(m + m') &= h(m) + h(m') \\ h(am) &= ah(m). \end{aligned}$$

**Observação 1.39.**

- (i) Para um morfismo de módulos  $h : M \rightarrow N$ , definimos o **kernel** como  $\ker h = \{m \in M \mid h(m) = 0\}$ , que é um submódulo de  $M$ . Denotando por  $\text{im } h$  a **imagem** de  $h$ , o **cokernel** de  $h$  é definido como o quociente  $\text{coker } h = N/\text{im } h$ , os quais são  $R$ -módulos à esquerda.
- (ii) Sejam  $M$  e  $N$   $R$ -módulos à esquerda. A coleção de todos os morfismos de  $M$  para  $N$ , é o conjunto

$$\text{Hom}_R(M, N) = \{\varphi : M \rightarrow N \mid \varphi \text{ é um morfismo de módulos}\}.$$

- (iii) Formamos a categoria dos  $R$ -módulos à esquerda de finitamente gerados (Definição 4.1 no Apêndice), onde os objetos são os módulos à esquerda e os morfismos, são morfismos entre eles. Esta categoria será denotada como  $R\text{-mod}$ , (ver Exemplo 4.2 no Apêndice).

**Exemplo 1.40.**

- (1) Sejam  $\mathbb{k}Q$  a álgebra de caminhos de um quiver  $Q$  e os  $\mathbb{k}Q$ -módulos à esquerda  $S(j)$  e  $M(\alpha)$ , definidos no Exemplo 1.35 (3), onde  $j$  é um vértice do quiver  $Q$  e  $\alpha$  uma flecha de  $Q$  que termina em  $j$ . Existe um morfismo de  $\mathbb{k}Q$ -módulos à esquerda, definido como

$$\begin{aligned} h : S(j) &\rightarrow M(\alpha) \\ \lambda e_j &\mapsto h(\lambda e_j) = \lambda \alpha. \end{aligned}$$

Vamos verificar que  $h$  é um morfismo. Reparemos que claramente é  $\mathbb{k}$ -linear. Mais ainda

$$h(e_j \lambda e_j) = e_j \lambda \alpha = e_j h(\lambda e_j).$$

Se  $c$  é um caminho tal que  $s(c) \neq j$ , então

$$h(c \lambda e_j) = h(0) = 0 = c \lambda \alpha = ch(\lambda e_j),$$

e para  $s(c) = j$  temos

$$h(c \lambda e)$$

portanto  $h$  é um morfismo de  $\mathbb{k}Q$ -módulos à esquerda.

(2) Sejam  $R$  uma  $\mathbb{k}$ -álgebra e  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. Um **endomorfismo de  $M$** , é um morfismo de  $R$ -módulos à esquerda de  $M$  para  $M$ . Denotaremos este conjunto por  $\text{End } M$ , o qual tem estrutura de  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial, dada pela soma e a multiplicação por escalar de morfismos. Este espaço vetorial é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra cuja multiplicação é dada pela composição de endomorfismos.

Todo  $R$ -módulo à esquerda pode decompor-se de forma apropriada, por isso precisamos de  $R$ -módulos à esquerda que não podem ser decompostos.

**Definição 1.41.** Seja  $\{M_\lambda\}$  uma família de  $R$ -módulos à esquerda indexada por  $\Lambda$ . Definimos o  $R$ -módulo à esquerda  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ , chamado de **soma direta**, como a coleção de todas as seqüências  $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  as quais tem um número finito de  $m_\lambda$ 's não nulos, munida da ação dada por

$$a(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (am_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad \text{com } (m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda.$$

Em particular, se  $M_1, M_2, \dots, M_s$  são  $R$ -módulos à esquerda, denotaremos a soma direta por  $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ . Dizemos que um  $R$ -módulo  $M$  é **indecomponível**, se não tem decomposição em soma direta  $M = N \oplus L$ , com  $N, L \neq 0$ . E, um  $R$ -módulo é **livre**, se é isomorfo a  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$  com  $R_\lambda = R$  como  $R$ -módulos.

Os exemplos para Definição 1.41 vão ser apresentados na Subseção 1.2.2. Vamos estudar alguns conceitos que serão importantes na construção dos módulos projetivos na Definição 1.45.

## 1.2.1 Sequências Exatas

Nesta subseção, vamos estudar relações entre módulos, que são geralmente expressadas através de seqüências exactas, além disso estudaremos módulos projetivos e algumas de suas consequências, em relação à estrutura dos quivers e sua álgebra de caminhos  $\mathbb{k}Q$ .

**Definição 1.42.** Sejam  $M, N$  e  $L$  três  $R$ -módulos à esquerda. Uma seqüência de morfismos

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N,$$

é chamada de **exata** se  $\text{im } f = \ker g$ . Uma seqüência de morfismos

$$\dots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

é chamada de **exata longa**, se é exata em cada  $M_i$ . Em particular, uma seqüência exata da forma

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é chamada de **exata curta**.

**Observação 1.43.** Qualquer seqüência  $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$  é exata curta se, e somente se, satisfaz as seguintes condições

- (i)  $f$  é injetora;
- (ii)  $g$  é sobrejetora;
- (iii)  $\ker g = \text{im } f$ .

**Exemplo 1.44.**

(1) Seja  $R$  um anel e  $I$  um ideal. Podemos construir a seguinte seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$$

onde  $\iota$  é uma inclusão e  $\pi$  é uma projeção. Mais geralmente, seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $N$  um submódulo de  $M$ , temos uma seqüência exata curta de  $R$ -módulos à esquerda

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

(2) Seja  $\mathbb{k}$  um corpo e seja

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata curta de  $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais. Então

$$\dim_{\mathbb{k}} N = \dim_{\mathbb{k}} M + \dim_{\mathbb{k}} P,$$

pois  $N/f(M) \cong P$ .

(3) Para qualquer homomorfismo de  $R$ -módulos à esquerda  $g : N \rightarrow N'$ , a seqüência

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow N \xrightarrow{g} \operatorname{im} g \longrightarrow 0$$

é exata quando a primeira função é uma inclusão do  $\ker g$  em  $N$ .

Para nosso trabalho, precisamos do conceito de módulos projetivos e uma quantidade suficiente de eles para definir uma seqüência de módulos projetivos especial, chamada de resolução projetiva (ver Definição 1.47), que vai cobrir algum módulo à esquerda  $M$ .

**Definição 1.45.** Um  $R$ -módulo  $P$  é chamado de **módulo projetivo** se para qualquer seqüência exata de  $R$ -módulos  $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ , e qualquer morfismo  $p : P \rightarrow N$ , existe um morfismo  $\hat{p} : P \rightarrow M$ , tal que  $f \circ \hat{p} = p$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists \hat{p} \swarrow & \downarrow p & \\ M & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0. \end{array}$$

A seguir apresentaremos algumas propriedades que serão de utilidade para o decorrer do trabalho.

**Observação 1.46.** As seguintes propriedades podem ser encontradas em [ASS06].

- (i) Os módulos livres são projetivos.
- (ii)  $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$  é projetivo se, e somente se, cada  $P_i$  é projetivo.
- (iii) Os  $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais  $\mathbb{k}Qe_i$ ,  $e_j\mathbb{k}Q$ , e  $e_j\mathbb{k}Qe_i$ , tem como base os caminhos que comecem no vértice  $i$ , que finalizam no vértice  $j$ , e os que começam em  $i$  e finalizam em  $j$ , respectivamente.

- (iv) Dado que  $\mathbb{k}Q = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k}Qe_i$  como  $\mathbb{k}Q$ -módulos à esquerda, podemos concluir que os  $\mathbb{k}Qe_i$  são  $\mathbb{k}Q$ -módulos projetivos, por (i).
- (v) Seja  $M$  um  $\mathbb{k}Q$ -módulo à esquerda. Temos que  $\text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(\mathbb{k}Qe_i, M) \cong e_i M$ , como espaço vetorial, por meio do isomorfismo  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(\mathbb{k}Qe_i, M) \mapsto \varphi(e_i) \in M$ .
- (vi) Se  $e_i \in \mathbb{k}Qe_j\mathbb{k}Q$ , então  $i = j$ , já que uma base do espaço  $\mathbb{k}Qe_j\mathbb{k}Q$ , está formada pelos caminhos que passam por  $e_j$ .
- (vii)  $\mathbb{k}Qe_i \not\cong \mathbb{k}Qe_j$ , com  $i \neq j$ .

Voltemos brevemente a nossa discussão puramente de módulos. Intuitivamente, a seguinte definição pretende cobrir apropriadamente um módulo  $M$  com módulos projetivos.

**Definição 1.47.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. Definimos uma **resolução projetiva de  $M$**  como uma sequência exata longa*

$$\mathcal{P} := \dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

tal que cada  $P_i$  é um  $R$ -módulo projetivo à esquerda. Dizemos que  $M$  tem **dimensão projetiva finita**, se tiver uma resolução projetiva finita. O comprimento minimal de tais resoluções é chamado de **dimensão projetiva de  $M$**  e é denotado como  $p\text{-dim } M$ .

**Observação 1.48.** *Aplicando o funtor contravariante  $\text{Hom}(-, X)$  (ver Exemplo 4.6 do Apêndice) temos que para cada morfismo de  $R$ -módulos  $f : N \longrightarrow L$  o homomorfismo  $f_* : \text{Hom}_R(L, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(N, M)$ , definido por*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & L \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & M \end{array} \quad f_*(g) = g \circ f$$

Uma vez que introduzimos as sequências exatas e o funtor  $\text{Hom}_R(-, M)$ , queremos considerar a interação entre as duas.

**Teorema 1.49.** *Para cada sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

existe uma sequência exata da seguinte forma

$$\text{Hom}_R(L, X) \xleftarrow{f_*} \text{Hom}_R(M, X) \xleftarrow{g_*} \text{Hom}_R(N, X) \longleftarrow 0.$$

*Demonstração.* Consideremos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 .$$

Pela Definição 4.5, se aplicamos o funtor  $\text{Hom}(-, X)$  à sequência anterior, temos que  $f_*$  e  $g_*$  são composições de morfismos, ou seja

$$f_* : \text{Hom}_R(M, X) \longrightarrow \text{Hom}_R(L, X)$$

$$(\varphi : M \rightarrow X) \mapsto f_*(\varphi) = \varphi \circ f$$

$$g_* : \text{Hom}_R(N, X) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, X)$$

$$(\psi : M \rightarrow X) \mapsto g_*(\psi) = \psi \circ g$$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow f_*(\varphi)=\varphi \circ f & \downarrow \varphi \\ & & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\psi} & M \\ & \searrow g_*(\psi)=\psi \circ g & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

Primeiro vamos provar que  $\ker(g_*) = 0$ . Se  $\psi \in \ker(g_*)$ , então  $\psi \circ g = 0$ , ou seja  $\psi(g(m)) = 0$  para qualquer  $m \in M$ , portanto  $\psi = 0$  já que  $g$  sobrejetiva.

Para mostrar que  $\ker(f_*) = \text{im}(g_*)$ , note que  $\text{im}(g_*) \subseteq \ker(f_*)$ . A outra inclusão segue da propriedade universal do Cokernel.  $\square$

## 1.2.2 Representações de Quivers

Nesta subseção, apresentaremos os conceitos necessários da teoria das representações de quivers que usaremos no decorrer deste trabalho, até formar a categoria das representações finitas de um quiver  $Q$ .

**Definição 1.50.** Uma **representação** do quiver  $Q$  é uma coleção  $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  de

- $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais  $M_i$ , para cada vértice  $i \in Q_0$ , e
- $\mathbb{k}$ -transformações lineares  $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$ , para cada  $\alpha : i \rightarrow j$  em  $Q_1$ .

Uma representação  $M$  de um quiver finito  $Q$  é dita de **dimensão finita** se cada um dos espaços vetoriais  $M_i$  tem dimensão finita. Neste caso, definiremos o **vetor dimensão** de  $M$  como sendo o vetor  $\underline{\dim} M = (\dim M_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{|Q_0|}$ .

### Exemplo 1.51.

(1) Consideremos o quiver

$$\mathbb{A}_4 := 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4.$$

Algumas de representações são:

$$M = \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k},$$

$$M' = \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k},$$

$$M'' = \mathbb{k} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{k}^3,$$

$$M''' = \mathbb{k} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{k}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{k}^2 \xrightarrow{[1 \ 0]} \mathbb{k},$$

e seus vetores dimensão, são

$$\underline{\dim} M = (1, 1, 1, 1), \quad \underline{\dim} M' = (1, 1, 1, 1),$$

$$\underline{\dim} M'' = (1, 0, 0, 3), \quad \text{e} \quad \underline{\dim} M''' = (1, 2, 2, 1).$$

(2) Uma representação do quiver de Jordan é

$$M := \begin{array}{c} \mathbb{k}^n \\ \curvearrowright \\ T \end{array}$$

onde  $T$  é uma transformação linear; neste exemplo  $\underline{\dim} M = (n)$ .

(3) Uma representação de  $\mathbb{K}_3$  é

$$M := \mathbb{k}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{B} \\ \xrightarrow{C} \end{array} \mathbb{k}^n, \quad (1.3)$$

onde  $A, B$  e  $C$  são transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão  $n$  para um espaço vetorial de dimensão  $n$ , ou seja  $\underline{\dim} M = (n, n)$ . Note que  $A, B$  e  $C$  também podem ser pensadas como elementos de  $M_n(\mathbb{k})$ .

**Definição 1.52.** Sejam  $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  e  $N = (N_i, \varphi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  duas representações do quiver  $Q$ . Um **morfismo de representações**  $f : M \rightarrow N$  é uma coleção  $(f_i)_{i \in Q_0}$  de  $\mathbb{k}$ -transformações lineares

$$f_i : M_i \longrightarrow N_i$$

tal que, para cada flecha  $\alpha : i \rightarrow j$  em  $Q_1$ , o seguinte diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ N_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & N_j, \end{array}$$

isto é  $\varphi'_\alpha \circ f_i = \varphi_\alpha \circ f_j$ .

**Exemplo 1.53.**

(1) Determinemos todos os morfismos de  $M$  para  $M'''$  do Exemplo [1.21](#) item (1), para isto consideremos o seguinte morfismo

$$\begin{array}{ccccccc} M & \mathbb{k} & \xrightarrow{1} & \mathbb{k} & \xrightarrow{1} & \mathbb{k} & \xrightarrow{1} & \mathbb{k} \\ f \downarrow & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \\ M''' & \mathbb{k} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{k}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{k}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{k} \end{array}$$

Claramente, em forma matricial temos

$$f_1 = [a], \quad f_2 = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \quad f_4 = [h],$$

com  $a, b, c, d, e, h \in \mathbb{k}$ . Como  $f$  é um morfismo de representações, temos que

$$\varphi'_{\alpha_1} f_1 = f_2 \varphi_{\alpha_1}, \quad \varphi'_{\alpha_2} f_2 = f_3 \varphi_{\alpha_2}, \quad \varphi'_{\alpha_3} f_3 = f_4 \varphi_{\alpha_3},$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [a] = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} [1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} [1], \quad [1 \quad 0] \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = [f] [1],$$

o que implica que  $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$  e que  $[d] = [f]$ . Portanto,  $a = b = d = f$ ,  $c = e = 0$ . Notemos, que podemos concluir que o conjunto dos morfismos  $f : M \rightarrow M'$  é isomorfo a  $\mathbb{k}$  como  $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais, dado que cada  $f$  é da forma

$$f = \left( \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \right).$$

(2) Seja o quiver de Kronecker de duas flechas:

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2.$$

Considere as seguintes representações de  $Q$ :

$$M := \mathbb{k}^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \end{array} \mathbb{k}$$

$$M' := \mathbb{k}^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array} \mathbb{k}^2.$$

Suponha que  $f = (f_1, f_2)$  é um morfismo de  $M$  para  $M'$ . Então,  $f_1$  e  $f_2$  estão dados por

$$f_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad e \quad f_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

com  $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{k}$ . Como  $f$  é um morfismo de representações, temos que

$$f_1 \varphi_{\alpha} = \varphi'_{\alpha} f_2 \quad e \quad f_1 \varphi_{\beta} = \varphi'_{\beta} f_2,$$

ou seja, que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$



o que implica que

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix},$$

e  $f$  é da forma

$$f = \left( \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right).$$

Portanto, o conjunto de todos os morfismos de  $M$  para  $M'$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial de dimensão dois com base

$$\left\{ \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}.$$

**Observação 1.54.** Para o estudo das representações de um quiver  $Q$ , existem dois morfismos de muita importância, estes são:

- (1) Para qualquer representação  $M$  de  $Q$ , existe sempre o morfismo  $(1_{M_i})_{i \in Q_0}$  definido pelas transformações lineares  $1_{M_i} : M_i \rightarrow M_i$ , para qualquer vértice  $i \in Q_0$ .
- (2) Para cada par de morfismos  $f : M \rightarrow M'$  e  $g : M' \rightarrow N$  de representações de  $Q$ , temos a sequência de transformações lineares  $(g_i \circ f_i)_{i \in Q_0}$ . Notemos que esta sequência é com efeito um morfismo de representações de  $Q$ , pois o seguinte diagrama commuta

$$\begin{array}{ccccc} M & & M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ f \downarrow & & f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ M' & & M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \\ g \downarrow & & g_i \downarrow & & \downarrow g_j \\ N & & N_i & \xrightarrow{\psi_\alpha} & N_j. \end{array}$$

ou seja,  $\psi_\alpha \circ g_i \circ f_i = g_j \circ f_j \circ \varphi_\alpha$ .

Seguindo a Definição 4.1 do Apêndice, vamos apresentar a categoria de representações de dimensão finita para um quiver  $Q$ .

**Definição 1.55.** Denotemos por  $\text{rep } Q$  a coleção de todas as representações de dimensão finita de  $Q$ , junto com todos seus morfismos munido do morfismo composição definido por  $g \circ f := (g_i \circ f_i)_{i \in Q_0}$ , para cada par de morfismos  $f : M \rightarrow M'$  e  $g : M' \rightarrow N$  de representações de  $Q$ .

**Proposição 1.56.** A categoria  $\text{rep } Q$  é uma categoria para qualquer quiver  $Q$ . Especificamente,  $\text{Obj}(\text{rep } Q)$  é o conjunto de todas as representações de dimensão finita de  $Q$  e  $\text{Hom}_Q(M, N)$  é o conjunto de todos os morfismos de representações de  $M$  para  $N$ .

*Demonstração.* Se cumpre a associatividade, isto é, para quaisquer  $f \in \text{Hom}_Q(M, M')$ ,  $g \in \text{Hom}_Q(M', N)$  e  $h \in \text{Hom}_Q(N, N')$ , temos que  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (h_i \circ (g_i \circ f_i))_{i \in Q_0} \\ &= ((h_i \circ g_i) \circ f_i)_{i \in Q_0} \\ &= (h \circ g) \circ f, \end{aligned}$$

dado que a composição de transformações lineares entre espaços vetoriais é associativa. Similarmente, temos que o morfismo definido na Observação 1.54 item (2), é o morfismo identidade  $1_M$ , para todo  $M \in \text{Obj}(\text{rep } Q)$ , porque para qualquer  $f \in \text{Hom}_Q(M, N)$ , temos que

$$\begin{aligned} f \circ 1_M &= (f_i \circ 1_{M_i})_{i \in Q_0} = (f_i)_{i \in Q_0} = f, \\ 1_N \circ f &= (1_{N_i} \circ f_i)_{i \in Q_0} = (f_i)_{i \in Q_0} = f. \end{aligned}$$

Portanto,  $\text{rep } Q$  é uma categoria. □

**Observação 1.57.**

- (i) Considere  $M, M' \in \text{rep } Q$ . O conjunto  $\text{Hom}_Q(M, M')$ , é um  $\mathbb{k}$ -subespaço vetorial do  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial  $\bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M_i, M'_i)$ , em relação à soma e multiplicação por escalar usual de funções. Se  $M = M'$ , temos que  $\text{End}_Q(M) = \text{Hom}_Q(M, M)$ , é uma subálgebra da álgebra  $\bigoplus_{i \in Q_0} \text{End}_{\mathbb{k}}(M_i)$ .
- (ii) Com uma boa escolha de bases em cada espaço vetorial de uma representação de um quiver  $Q$ , temos que cada representação de dimensão finita de  $Q$ , com vetor dimensão fixado  $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in Q_0}$ , é isomorfa a uma representação determinada só por uma coleção de matrizes  $x_\alpha \in \text{Hom}_Q(\mathbb{k}^{v_i}, \mathbb{k}^{v_j}) = M_{v_j \times v_i}(\mathbb{k})$  para cada flecha  $\alpha : i \rightarrow j$ , ou de forma equivalente, como sendo um vetor  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$  no espaço

$$\bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{s(\alpha)}, \mathbb{k}^{t(\alpha)}).$$

Usaremos, equivalentemente, que cada  $x \in \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{s(\alpha)}, \mathbb{k}^{t(\alpha)})$  define uma representação, que denotaremos

$$M^x = (\{\mathbb{k}^{v_i}\}, \{x_\alpha\}).$$

A seguinte definição é análoga à Definição 1.41. Isto vai ser completamente justificado no Lema 1.65.

**Definição 1.58.** Sejam  $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ,  $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1} \in \text{rep } Q$ . Definimos a soma direta  $M \oplus M'$  como

$$(M \oplus M')_i = M_i \oplus M'_i, \forall i \in Q_0 \quad e \quad \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} : \varphi_{s(\alpha)} \oplus \varphi'_{s(\alpha)} \longrightarrow \varphi_{t(\alpha)} \oplus \varphi'_{t(\alpha)}, \forall \alpha \in Q_1.$$

Dizemos que uma representação é **trivial**, se  $M_i = 0$ , para todo  $i \in Q_0$ . Se  $M \cong M' \oplus M''$ , com  $M'$  e  $M''$  não triviais, dizemos que  $M$  é **decomponível**. Caso contrario, dizemos que  $M$  é **indecomponível**.

O seguinte Teorema vamos ver que uma representação tem uma única decomposição como soma direta de representações indecomponíveis. Portanto, o problema de classificar as representações de um quiver finito, se reduz à classificar as representações indecomponíveis de  $Q$ .

**Teorema 1.59. (Teorema de Krull-Schmidt.)** Sejam  $Q$  um quiver e  $M \in \text{rep } Q$ . Então  $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ , onde cada  $M_i \in \text{rep } Q$  é indecomponível, para todo  $i \in Q_0$ . Tal decomposição é única, a menos de isomorfismos.

*Demonstração.* Ver [Sch14], Theorem 1.2., p. 12] e [ASS06], Theorem I.4.10, pp. 23-24].  $\square$

### Exemplo 1.60.

- (1) Consideremos o quiver  $\mathbb{A}_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$  do Exemplo 1.21 item (1). Pela Definição 1.50, uma representação para  $\mathbb{A}_2$  pode ser dada por dois espaços vetoriais  $M_1$  e  $M_2$  munido de uma transformação  $\varphi_\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ . Por propriedades da álgebra linear, podemos tomar bases para  $M_1$  e  $M_2$  tal que a matriz associada à transformação  $\varphi_\alpha$  é dada por

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $r$  é o posto de  $\varphi_\alpha$  e  $I_r$  é a matriz identidade de dimensão  $r$ . Portanto, toda representação  $M$  de  $\mathbb{A}_2$  é isomorfa, através de uma mudança de base, a uma do tipo  $M_1 \xrightarrow{A} M_2$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tal que duas representações de  $\mathbb{A}_2$ , dadas por

$$M = (\{M_1, M_2\}, \varphi_\alpha)_{1,2 \in Q_0, \alpha \in Q_1} \quad e \quad M' = (\{M'_1, M'_2\}, \psi_\alpha)_{1,2 \in Q_0, \alpha \in Q_1},$$

são isomorfas se, e somente se  $\dim M_1 = \dim M'_1$ , e  $\dim M_2 = \dim M'_2$  e os postos de  $\varphi_\alpha$  e  $\psi_\alpha$  coincidem. Para este quiver existem três representações indecomponíveis, a seguir  $f : \mathbb{k} \rightarrow 0$ ,  $g : 0 \rightarrow \mathbb{k}$  e  $h : \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k}$ . Note que toda representação  $M$  de  $\mathbb{A}_2$  é isomorfa à

$$M \cong f^{v_1-r} \oplus g^{v_2-r} \oplus h^r,$$

onde  $v_1 = \dim M_1$ ,  $v_2 = \dim M_2$  e  $r$  é o posto de  $\varphi_\alpha$ .

- (2) Seja  $Q$  um loop como no Exemplo 1.21 item (2). Pela Definição 1.50, uma representação de  $Q$  é um espaço vetorial  $M_1$  munido com um endomorfismo  $\varphi_\alpha$ . Note que um morfismo de duas representações

$$M = (\{M_1\}, \varphi_\alpha)_{1 \in Q_0, \alpha \in Q_1} \quad e \quad M' = (\{M'_1\}, \psi_\alpha)_{1 \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

de  $Q$ ,  $M \rightarrow M'$  é uma aplicação linear  $f : M_1 \rightarrow M'_1$ , que pela Definição 1.52,  $f \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha \circ f$ . Note que os endomorfismos de  $M$  são exatamente os endomorfismos de  $M_1$  que comutam com  $\varphi_\alpha$ . Mais ainda, como  $\mathbb{k}$  é algébricamente fechado, podemos escolher uma base adequada para  $M_1$  tal que a matriz associada à  $\varphi_\alpha$ , seja da forma

$$\begin{bmatrix} J(n_1, \lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(n_2, \lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(n_r, \lambda_r) \end{bmatrix}$$

onde  $J(n, \lambda)$  denota o bloco de Jordan de tamanho  $n \times n$  de autovalor  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Pela álgebra linear, a matriz normal de Jordan é única, a menos de permutação dos blocos, isso implica que duas representações  $M$  e  $M'$  de  $Q$  vão ser isomorfas, se, e somente se

$\varphi_\alpha$  e  $\psi_\alpha$  tem a mesma forma normal. Mais ainda, as representações indecomponíveis, correspondem aos blocos de Jordan, portanto, há um número infinito de representações indecomponíveis do quiver  $Q$  e são parametrizadas com um parâmetro contínuo  $\lambda$  e outro discreto  $n$ .

- (3) Seja o quiver de Kronecker  $\mathbb{K}_3$  como no Exemplo 1.21 item (3). Com a teoria dada até agora não é possível dar uma boa solução a este problema de classificação, ou seja, não podemos conseguir as representações indecomponíveis de  $\mathbb{K}_3$ , com a teoria clássica estudada até agora. No Capítulo 3, Subseção 3.2.3 vamos mostrar que quasi todas as representações indecomponíveis de  $\mathbb{K}_3$  são de uma forma específica.

**Observação 1.61.** No Exemplo 1.60 note que para o item (1), conseguimos finitas representações indecomponíveis, para o item (2), infinitas representações indecomponíveis e para o item (3) não foi possível. Isto vai motivar a seguinte definição e mais ainda, o teorema a seguir.

**Definição 1.62.** [Bar15] 1.6 Comments, p. 14] Seja  $\mathbb{k}Q$  a álgebra de caminhos de dimensão finita.

- (i)  $\mathbb{k}Q$  é chamada de **tipo finito**, se sô existe um número finito de representações indecomponíveis para  $Q$ .
- (ii)  $\mathbb{k}Q$  é chamada de **tipo manso**, se para  $Q$  existem um número infinito de representações indecomponíveis e se para cada  $n \in \mathbb{N}$ , as representações indecomponíveis de dimensão  $n$  pertencem a um número finito de famílias de 1 parâmetro indexadas pelos elementos de  $\mathbb{k}$ .
- (iii)  $\mathbb{k}Q$  é chamada de **tipo selvagem** se não é finita e também não mansa.

**Observação 1.63.** Alguns exemplos para a Definição 1.62 estão no Exemplo 1.60 items (1), (2) e (3), respectivamente. Porém, no Capítulo 3, vamos apresentar outra técnica sofisticada, que além de dar uma classificação para os items (1) e (2) do Exemplo 1.60 da uma muito boa aproximação para solucionar o item (3).

**Teorema 1.64.** Toda  $\mathbb{k}$ -álgebra finita é de tipo finito, manso ou selvagem.

*Demonstração.* Ver [Bar15], Theorem 9.17., pp. 162-164 ] □

Vamos apresentar a equivalência entre as categorias  $\text{rep } Q$  e  $\mathbb{k}Q\text{-mod}$  que discutimos anteriormente. Não faremos a demonstração já que sai do escopus deste trabalho, mas todos os detalhes podem ser consultados em [ARS97], Theorem 1.5., pp. 57-59].

**Teorema 1.65.** A categoria  $\text{rep } Q$  é equivalente à categoria  $\mathbb{k}Q\text{-mod}$ .

*Demonstração.* Ver [ARS97], Theorem 1.5., pp. 57-59]. □

Uma conclusão do Lema 1.65, é que podemos traduzir a linguagem das categorias dos  $\mathbb{k}Q$ -módulos para a categoria de representações de quivers e viceversa, desta forma, podemos pensar em sub-representações, kernels, imagens, sequências exatas, etc. A partir de agora usaremos a mesma notação para se referir a ambos, os módulos e representações, salvo indicação do contrário.

## 1.3 Álgebra Homológica na Teoria de Representações de Quivers

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos da teoria clássica da álgebra homológica e sua relação com a categoria  $\mathbb{k}Q\text{-mod}$ . Desde agora, no decorrer do trabalho, todos os módulos que consideraremos, vão ser  $\mathbb{k}Q$ -módulos à esquerda, com  $\mathbb{k}$  um corpo algébricamente fechado.

**Definição 1.66.** Um **complexo de cadeia**, denotado como  $M_\bullet$ , é uma sequência de módulos  $M_i$  e morfismos  $d_i$

$$M_\bullet := \quad \dots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

tal que  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . Análogamente, um **complexo de cocadeia**, denotado como  $M^\bullet$ , é uma sequência de módulos  $M^i$  e morfismos  $d^i$

$$M^\bullet := \quad \dots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

tal que  $d^n \circ d^{n-1} = 0$ .

**Definição 1.67.** Seja  $M_\bullet$  um complexo de cadeia. Definimos a  **$n$ -ésima homologia** como o quociente de módulos

$$H_n(M_\bullet) = \ker(d_n) / \text{im}(d_{n+1}).$$

Análogamente definimos a  **$n$ -ésima cohomologia**, como o quociente de  $R$ -módulos

$$H^n(M^\bullet) = \ker(d^n) / \text{im}(d^{n-1})$$

**Observação 1.68.**

(i) Geralmente o conceito dado na Definição [1.67](#) é conhecido como o  $n$ -ésimo grupo de homologia e o  $n$ -ésimo grupo de cohomologia, respectivamente. Para o objetivo deste trabalho, não precisamos mergulhar nessa construção, mas pode ser consultado em [\[Zim14\]](#) Section 1.8.2., p. 80 ], [\[Mat89\]](#) Chapter 10, Part II, p. 177.].

(ii) Consideremos uma resolução projetiva  $\mathcal{P}_\bullet$  de  $M$  como na Definição [1.47](#) tal que cada  $P_i$  é um  $\mathbb{k}Q$ -módulo projetivo e  $M$  um  $\mathbb{k}Q$ -módulo à esquerda. Aplicando o funtor contravariante  $\text{Hom}(-, N)$ , obtemos um complexo de cocadeia

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(M, N) \xrightarrow{f_0^*} \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_0, N) \xrightarrow{f_1^*} \dots \xrightarrow{f_n^*} \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_n, N) \longrightarrow \dots,$$

que vamos denotar como  $\text{Hom}(\mathcal{P}_\bullet, N)$ , cujo  $n$ -ésimo termo é  $\text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_n, N)$ .

**Definição 1.69.** Para dois módulos  $M$  e  $N$ , denotamos  $\text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^n(M, N)$  o  **$n$ -ésimo grupo de extensão**, definido como a  $n$ -ésima cohomologia do complexo de cocadeia  $\text{Hom}(\mathcal{P}_\bullet, N)$

$$\text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^n(M, N) = H^n(\text{Hom}(\mathcal{P}_\bullet, N)),$$

onde  $\mathcal{P}_\bullet$  é uma resolução projetiva para  $M$ .

**Teorema 1.70.** [Rot09 Corollary 6.46., pp. 366-367] Para cada sequência exata curta de  $\mathbb{k}Q$ -módulos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0,$$

existe uma sequência exata longa de  $Ext$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{k}Q}(L, X) & \xrightarrow{g^*} & Hom_{\mathbb{k}Q}(N, X) & \xrightarrow{g^*} & Hom_{\mathbb{k}Q}(M, X) \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ Ext_{\mathbb{k}Q}^1(L, X) & \xrightarrow{g_1^*} & Ext_{\mathbb{k}Q}^1(N, X) & \xrightarrow{f_1^*} & Ext_{\mathbb{k}Q}^1(M, X) & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ Ext_{\mathbb{k}Q}^2(L, X) & \xrightarrow{g_2^*} & Ext_{\mathbb{k}Q}^2(N, X) & \xrightarrow{f_2^*} & Ext_{\mathbb{k}Q}^2(M, X) & \xrightarrow{\mu_3} & \dots \end{array}$$

$\mu_1$  (curved arrow from  $Hom_{\mathbb{k}Q}(L, X)$  to  $Ext_{\mathbb{k}Q}^1(M, X)$ )  
 $\mu_2$  (curved arrow from  $Ext_{\mathbb{k}Q}^1(N, X)$  to  $Ext_{\mathbb{k}Q}^2(M, X)$ )

Apresentaremos alguns conceitos e resultados que vão permitir construir a relação homológica do capítulo final deste trabalho.

**Observação 1.71.** Definimos os  $\mathbb{k}Q$ -módulos  $P_0$  e  $P_1$  como

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{k}Q e_i \otimes_{\mathbb{k}} e_i M, \quad P_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathbb{k}Q e_{t(\alpha)} \otimes_{\mathbb{k}} e_{s(\alpha)} M$$

e os morfismos

$$g: P_0 \longrightarrow M \quad e \quad f: P_1 \longrightarrow P_0$$

como

$$\begin{aligned} g(c \otimes x) &= cx \quad \text{para cada } c \in \mathbb{k}Q e_i, x \in e_i M, \\ f(c \otimes x) &= c\alpha \otimes x - c \otimes \alpha x \quad \text{para cada } c \in \mathbb{k}Q e_{t(\alpha)}, x \in e_{s(\alpha)} M. \end{aligned}$$

**Observação 1.72.**

(i) Note que  $P_0$  e  $P_1$  dependem de  $Q$  e o vetor dimensão de  $M$ . Por outro lado  $f$  e  $g$  dependem das transformações lineares que correspondem as flechas do quiver.

(ii) Todo elemento  $\kappa \in P_0$ , pode-se expressar de forma única como

$$\kappa = \sum_{i \in Q_0} \sum_{c \in (\mathbb{k}Q)_i} c \otimes x_c,$$

onde  $(\mathbb{k}Q)_i$  é o conjunto de todos o caminhos  $c$ , tal que  $s(c) = i$ , com  $x_c \in e_i M$  quasi todos nulos, já que se  $Q$  tem ciclos orientados, os espaços  $\mathbb{k}Q e_i$ , podem ser de dimensão infinita.

(iii) Denotaremos por  $\text{grau}(\kappa)$ , ao máximo dos comprimentos dos caminhos  $c$ , com  $x_c \neq 0$ .

O seguinte lema vai ser de utilidade para o Teorema 1.74

**Lema 1.73.** *Seja  $\kappa \in P_0$ . Então*

$$\kappa + \text{Im}(f) = \{\kappa + v \mid v \in \text{Im}(f)\},$$

*contém um elemento de grau 0.*

*Demonstração.* Seja  $c \in (\mathbb{k}Q)_i$  um caminho trivial, tal que  $x_c \neq 0$ . Então podemos escrever  $c = c'\alpha$ , com  $\alpha \in Q_1$ , tal que se  $s(\alpha) = i$  e  $c'$  outro caminho, que cumpre que  $s(c') = t(\alpha)$ . Sendo  $c' \otimes x_c$  como un elemento da  $\alpha$ -ésima componente de  $P_1$ , temos

$$f(c' \otimes x_c) = c \otimes x_c - c' \otimes \alpha x_c.$$

Suponha que  $\kappa$  tem grau  $d > 0$ , então chamando de  $(\mathbb{k}Q)_i^d$  como todos o caminhos  $c = c'\alpha$  de comprimento  $d$ , com  $\alpha \in Q_1$ , tal que  $s(\alpha) = i$ ,  $t(\alpha) = s(c')$ , temos que

$$\kappa - f\left(\sum_{i \in Q_0} \sum_{c \in (\mathbb{k}Q)_i^d} c' \otimes x_c\right)$$

vai ter grau menor estrito que  $d$ , tal que vamos poder reduzir o grau até que seja nulo.  $\square$

**Teorema 1.74.** *Se  $M$  é um  $\mathbb{k}Q$ -módulo à esquerda, então temos a sequência exata*

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

*Esta sequência é chamada de **sequência exata padrão** de  $M$ .*

*Demonstração.* Note que para todo  $c \otimes x \in \mathbb{k}Q_{e_{t(\alpha)}} \otimes e_{s(\alpha)}M$  temos que

$$f(g(c \otimes x)) = f(c\alpha \otimes x - c \otimes \alpha x) = c\alpha x - c\alpha x = 0.$$

Portanto  $\text{Im}(f) \subseteq \ker(g)$ . Para provar a outra inclusão, suponha  $\kappa \in \ker(g)$  e pelo Lema 1.73, podemos escolher um elemento  $\kappa' \in \kappa + \text{Im}(f)$  de grau 0. Então

$$0 = g(\kappa) = g(\kappa') = g\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x'_{e_i}\right) = \sum_{i=1}^n x'_{e_i},$$

com  $x'_{e_i} \in e_i M$ . Como  $M = \bigoplus_{i=1}^n e_i M$ , cada  $x'_{e_i}$  deve ser nulo e portanto  $\kappa' = 0$  e  $\kappa \in \text{Im}(f)$ . Por outro lado  $g$  é sobrejetora, já que se  $x \in M$  temos que

$$g\left(\sum_{i \in Q_0} e_i \otimes e_i x\right) = (e_1 + \dots + e_n)x = 1x = x.$$

Sô falta provar que  $\ker(f) = 0$ . Seja  $\kappa \in \ker(f)$ , então

$$\kappa = \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{c \in (\mathbb{k}Q)_{t(\alpha)}} c \otimes x_{\alpha,c}$$

onde  $x_{\alpha,c} \in e_{s(\alpha)}M$  são não todos nulos. Se  $\kappa \neq 0$ , podemos tomar um caminho  $\hat{c}$  de comprimento máximo, tal que  $x_{\hat{\alpha},\hat{c}} \neq 0$ , para algum  $\hat{\alpha} \in Q_1$ . Porém

$$f(\kappa) = \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{c \in (\mathbb{k}Q)_\alpha} c\alpha \otimes x_{\alpha,c} - \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{c \in (\mathbb{k}Q)_\alpha} c \otimes \alpha x_{\alpha,c}$$

cumpre que o coeficiente de  $\hat{c}\hat{\alpha} \otimes x_{\hat{\alpha},\hat{c}} \neq 0$ , mas isso é uma contradição.  $\square$

**Observação 1.75.** A seqüência exata padrão é da forma

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

Então, deduzimos que

$$\text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^1(M, N) = \text{Coker}(f^*)$$

onde

$$\begin{aligned} f^* : \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_0, N) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_1, N) \\ \phi &\longmapsto f^*(\phi) = \phi \circ f. \end{aligned}$$

**Observação 1.76.** No seguinte teorema vamos usar o isomorfismo de  $\mathbb{k}Q$ -módulos

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}}(L, \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(M, N)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(M \otimes_{\mathbb{k}} L, N)$$

cuja prova pode ser encontrada em [Ass97 Théorème 2.1., p. 126 ], e [Kir16 Theorem 1.16., p. 12].

**Lema 1.77.** Dados  $M, N \in \text{rep } Q$  temos uma seqüência exata

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(M, N) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M_i, N_i) & & \\ & & & & \searrow & & \\ & & \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M_{s(\alpha)}, N_{t(\alpha)}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^1(M, N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Demonstração.* Considere uma seqüência exata padrão como na Observação 1.71

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathbb{k}Q e_{t(\alpha)} \otimes_{\mathbb{k}} e_{s(\alpha)} M \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{k}Q e_i \otimes_{\mathbb{k}} e_i M \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0,$$

onde

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{k}Q e_i \otimes_{\mathbb{k}} e_i M, \quad P_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathbb{k}Q e_{t(\alpha)} \otimes_{\mathbb{k}} e_{s(\alpha)} M.$$

Pelo Teorema 1.70, temos que existe uma seqüência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_0, N) & & \\ & & & & \searrow & & \\ & & \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_1, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^1(M, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^1(P_0, N) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Pela Observação 1.75, temos que

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_0, N) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M_i, N_i), \quad \text{Hom}_{\mathbb{k}Q}(P_1, N) \cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M_{s(\alpha)}, N_{t(\alpha)}),$$

$$\text{Ext}_{\mathbb{k}Q}^1(P_0, N) = 0,$$

portanto obtemos a seqüência exata do lema.  $\square$



# Capítulo 2

## Geometria Algébrica

O objetivo deste capítulo é apresetar a ferramenta geométrica central do trabalho. Estudaremos o conceito de variedades algébricas, sua topologia definida como a topologia de Zariski e algumas consequências principais. Apresentaremos as propriedades geométricas locais, com ajuda do conceito de localização e entenderemos as derivações em um contexto geral e puramente algébrico, para introduzir o diferencial de Kähler. Daremos passo ao capítulo final, estudando alguns conceitos gerais dos grupos algébricos lineares e sua ação sobre as variedades algébricas. Neste capítulo, sempre vamos considerar  $\mathbb{k}$  um corpo algébricamente fechado e o anel de polinômios  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  em  $n$  variáveis com coeficientes em  $\mathbb{k}$ .

### 2.1 Variedades Algébricas

Nesta seção, vamos estudar a relação entre objetos geométricos e algébricos, através de uma ferramenta valiosa neste trabalho, o Teorema dos Zeros de Hilbert (ver Proposição 2.17). Também vamos introduzir a topologia de Zariski e uma de suas implicações mais importantes, a irredutibilidade e a dimensão de uma variedade algébrica.

**Definição 2.1.** *O  $n$ -espaço afim sobre  $\mathbb{k}$  ou simplesmente **espaço afim**, denotado como  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , é definido como o conjunto*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{k}, \forall i\}.$$

**Observação 2.2.** *Note que  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  e  $\mathbb{k}^n$  são iguais como conjunto, mas utilizaremos a notação  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  para nos referir a  $\mathbb{k}^n$  sem qualquer estrutura algébrica.*

**Exemplo 2.3.**

- (1) Se  $n = 1$ , chamamos de **linha afim** ao espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ .
- (2) Se  $n = 2$ , chamamos de **plano afim** ao espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$ .
- (3) Qualquer espaço vetorial é um espaço afim sobre si mesmo.

**Definição 2.4.** *Seja  $S \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Definimos o **conjunto de zeros de  $S$** , como*

$$V(S) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in S\}.$$

**Observação 2.5.**

- (i) Os subconjuntos de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  desta forma, são chamados de **variedades algébricas afins associadas ao conjunto  $S$**  ou simplesmente **variedade algébrica**.
- (ii) Dizemos que  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  é um **conjunto algébrico** (ou **variedade algébrica**) se  $X = V(S)$  para algum  $S \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Se  $S = \{f_1, \dots, f_r\}$  é um conjunto finito, escrevemos  $V(S) = V(f_1, \dots, f_r)$ . Mais ainda, pelo Teorema das Bases de Hilbert (ver [Eis95, Theorem 1.4, pp. 27-28]), temos que qualquer ideal  $I$  de  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  é finitamente gerado, ou seja, existe  $m \geq 0$  e  $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$  tais que  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  e assim

$$V(S) = V(I) = V(\langle f_1, \dots, f_m \rangle) = V(f_1, \dots, f_m)$$

para alguns  $f_1, \dots, f_m \in I = \langle S \rangle$ .

**Definição 2.6.** Seja  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica. Uma **função polinomial** em  $X$  é um função

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 = \mathbb{k} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

para algum  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Exemplo 2.7.**

- (1) **Projeções afins:** Para  $n \geq m$ , definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n &\longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m \\ a_1, \dots, a_n &\longmapsto f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_m) \end{aligned}$$

- (2) **Inclusões afins:** Para  $n \leq m$ , definimos  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m$  como

$$f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0).$$

É claro que isso também pode ser aplicado para variedades de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , por exemplo, a projeção de uma hipérbola, ou seja,  $f : V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  definida por  $f(x, y) = x$ . Note que neste exemplo, o conjunto de imagens é  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 \setminus \{0\}$ .

- (3) Uma função polinomial definida em uma linha afim:  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^3$ , dada por  $f(t) = (t, t^2, t^3)$ .

O seguinte lema, contém propriedades que são naturais nas variedades algébricas, as quais serão utilizadas para introduzir a topologia própria dos espaços afins e as variedades algébricas em geral.

**Lema 2.8.** Seja  $X$  uma variedade algébrica. Então:

- (i) Se  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , então  $V(S_1) \supseteq V(S_2)$ .
- (ii) Se  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , então

$$V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2),$$

onde  $S_1 S_2 = \{fg \mid f \in S_1, g \in S_2\}$ . Em particular, união finita de variedades algébricas, é uma variedade algébrica.

(iii) Se  $J$  é um conjunto de índices e  $S_i \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  para todo  $i \in J$ , então

$$\bigcap_{i \in J} V(S_i) = V\left(\bigcup_{i \in J} S_i\right).$$

Em particular, interseção arbitrária de variedades algébricas, é uma variedade algébrica.

*Demonstração.*

(i) Se  $x \in V(S_2)$ , por Definição 2.4 temos que  $f(x) = 0$  para todo  $f \in S_2$ . Como por hipótese  $S_1 \subseteq S_2$ , temos que em particular  $f(x) = 0$  para todo  $f \in S_1$  e portanto  $x \in V(S_1)$ .

(ii) Primeiro mostraremos que  $V(S_1) \cup V(S_2) \subseteq V(S_1 S_2)$ .

Se  $x \in V(S_1) \cup V(S_2)$ , então  $f(x) = 0$  para todo  $f \in S_1$  ou  $g(x) = 0$ , para todo  $g \in S_2$ . Em qualquer caso, isso significa que  $(fg)(x) = 0$ , para todo  $f \in S_1$  e para todo  $g \in S_2$ , ou seja que  $x \in V(S_1 S_2)$ .

Por outro lado, provemos que  $V(S_1 S_2) \subseteq V(S_1) \cup V(S_2)$ .

Se  $x \notin V(S_1) \cup V(S_2)$ , então  $x \notin V(S_1)$  e  $x \notin V(S_2)$ , assim, existem  $f \in S_1$  e  $g \in S_2$ , com  $f(x) \neq 0$  e  $g(x) \neq 0$ . Logo  $(fg)(x) \neq 0$  e portanto  $x \notin V(S_1 S_2)$ .

(iii) Temos que  $x \in \bigcap_{i \in J} V(S_i)$  se, e somente se  $f(x) = 0$  para todo  $i \in J$ , que é o caso se, e somente se  $x \in \bigcup_{i \in J} S_i$ .

□

### Exemplo 2.9.

(1) O espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , é uma variedade algébrica, já que  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n = V(0)$ . Análogamente, o conjunto vazio  $\emptyset = V(1)$ , é uma variedade algébrica.

(2) Qualquer ponto  $a = (a_1, \dots, a_n)$  do espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , é uma variedade algébrica, já que  $\{a\} = V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ . Pelo Lema 2.8 item (ii), conjuntos finitos de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  são variedades algébricas. No caso especial de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ , note que o conjunto de zeros de um polinômio não nulo em  $\mathbb{k}[x_1]$ , é finito. Portanto, as variedades algébricas em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  são exatamente  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  e todos os conjuntos finitos.

(3) As variedades algébricas da forma  $V(f)$  são chamadas de **hipersuperfície**. Se o grau de  $f$  é um, ou seja  $f(x_1, \dots, x_n) = a_n x_n + \dots + a_1 x_1 \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $X$  é chamado de **hiperplano**. Uma hipersuperfície em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$  é chamada de **curva plana afim**.

**Observação 2.10.** Pelo Lema 2.8 e o Exemplo 2.9 item (i), a coleção de variedades algébricas em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , satisfazem os axiomas de uma topologia em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  definida por fechados, a qual é chamada de **Topologia de Zariski de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$** . Na seção 2.1.1 veremos a definição formal, por enquanto só algumas observações de utilidade.

(i) Os conjuntos abertos nesta topologia são da forma

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \setminus V(f_1, \dots, f_r) &= \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \setminus (V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r)) \\ &= \bigcup_{i=1}^r (\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \setminus V(f_i)) \end{aligned}$$

onde  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Em particular, os conjuntos abertos, denotados como

$$D(f) := \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \setminus V(f), f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n],$$

geram a topologia de Zariski em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ .

(ii) Na topologia geral existe a noção da topologia produto: Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, dizemos que  $X \times Y$  tem uma estrutura natural de espaço topológico, tal que um subconjunto de  $X \times Y$  é aberto se, e somente se é união de produtos  $U_i \times V_i$ , onde  $U_i \subset X$  e  $V_i \subset Y$  são subconjuntos abertos, tal que  $i$  está em um conjunto arbitrário indexado. Porém, a topologia de Zariski de uma variedade de produtos afins  $X \times Y$  não é a topologia produto, por exemplo: O conjunto  $V(x_1 - x_2) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{k}\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$  é fechado na topologia de Zariski, mas não na topologia produto  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ .

**Exemplo 2.11.** Sejam  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2} = M_n(\mathbb{k})$  e  $A \in M_n(\mathbb{k})$  o espaço afim.

(1) Consideremos o polinômio determinante  $\det \in \mathbb{k}[x_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n]$  e a variedade algébrica dada por

$$V(\det) = \{X \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2} \mid \det(X) = 0\},$$

então, o subconjunto

$$GL_n(\mathbb{k}) = \{X \in M_n(\mathbb{k}) \mid \det(X) \neq 0\} \subseteq M_n(\mathbb{k}),$$

é um aberto Zariski em o espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2}$ . Porém, também pode ser pensado como um conjunto fechado Zariski, (ver Exemplo 2.87 item (3)).

(2) Consideremos o polinômio característico de  $A$  dado por

$$\chi(x) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n),$$

onde cada  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , é um autovalor de  $A$ . Note que  $\chi(x)$  pode re-escreverse assim

$$\chi(x) = - \left( x^n \sum_{i=1}^n \lambda_i + x^{n-1} \sum_{i,j=1, i < j}^n \lambda_i \lambda_j + \dots + x^0 (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n) \right)$$

onde os coeficientes de  $\chi(x)$  são funções polinomiais nas entradas da diagonal de  $A$ , portanto  $\chi(x)$  é a expressão

$$\chi(x) = - \left( x^n \rho(\lambda_i) + x^{n-1} \rho(\lambda_i \lambda_j) + \dots + x^0 \rho(\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n) \right).$$

Usaremos a notação  $\rho_k$  para indicar cada termo  $\rho(\lambda_k)$ , para algum  $k$ . O discriminante de  $\chi(x)$  em termos de suas raízes é

$$D(\chi(x)) = \prod_{k < l} (\rho_k - \rho_l)^2,$$

e se existe  $k < l$  tal que  $\rho_k = \rho_l$ , então  $D(\chi(x)) = 0$ , portanto, existe uma variedade algébrica

$$V(D(\chi(x))) = \{B \in \mathbb{A}_k^{n^2} \mid D(\chi(B)) = 0\}.$$

Note que se  $\rho_k \neq \rho_l$  com  $k < l$ , existe o aberto Zariski das matrizes diagonalizáveis, com autovalores diferentes dois a dois, que denotaremos como

$$\text{Diag}_{\rho_k \neq \rho_l} = \mathbb{A}_k^{n^2} \setminus V(D(\chi(x))).$$

(3) Consideremos a variedade algébrica

$$V\left(\prod_{i,j=1}^n x_{ij}\right) = \left\{A \in \mathbb{A}_k^{n^2} \mid \prod_{i,j=1}^n a_{ij} = 0\right\} \subset \mathbb{A}_k^{n^2},$$

com  $\prod_{i,j=1}^n x_{ij} \in k[x_{ij} \mid 1 \leq i, j, \leq n]$ . Portanto, temos aberto Zariski

$$U_\pi = \mathbb{A}_k^{n^2} \setminus V\left(\prod_{i,j=1}^n x_{ij}\right),$$

que é o conjunto de todas a matrizes quadradas com entradas não nulas.

**Definição 2.12.** Seja  $J$  um ideal no anel  $R$ , denotaremos o **radical** de  $J$  por

$$\sqrt{J} := \{f \in R \mid f^k \in J, k \in \mathbb{N}\}.$$

Um ideal  $J$  é dito de **ideal radical** se  $\sqrt{J} = J$ . Equivalentemente, um ideal  $J$  é um ideal radical se  $J = \sqrt{I}$  para algum ideal  $I$ , ou seja  $J$  é o radical para algum ideal.

**Lema 2.13.** Para quaisquer ideais  $J, J_1, J_2$  em  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , temos que:

- (i)  $V(\sqrt{J}) = V(J)$ ;
- (ii)  $V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2) = V(J_1 \cap J_2)$ ;
- (iii)  $V(J_1) \cap V(J_2) = V(J_1 + J_2)$ .

*Demonstração.*

- (i) Pelo Lema 2.8 temos que  $J \subseteq \sqrt{J}$  por tanto  $V(\sqrt{J}) \subseteq V(J)$ . Para a outra inclusão, suponha  $x \in V(J)$  e  $f \in \sqrt{J}$ , então  $f^k \in J$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , portanto  $f^k(x) = 0$ , em particular  $f(x) = 0$ , ou seja  $x \in V(\sqrt{J})$ .
- (ii) A primeira equação é sô a reformulação do Lema 2.8 (ii). A segunda, da parte (i), já que  $\sqrt{J_1 J_2} = \sqrt{J_1 \cap J_2}$ .
- (iii) Esta parte é consequência direta do Lema 2.8, já que  $J_1 + J_2$  é o ideal gerado por  $J_1 \cup J_2$ .

□

Vamos estudar a correspondência que relaciona objetos geométricos (variedades algébricas) à objetos algébricos (ideais), mas não a fundo, os detalhes podem ser vistos em [Eis95]. Já atribuímos variedades algébricas a ideais na Definição 2.4 e Observação 2.5. Vamos agora introduzir a definição dos ideais associados as variedades algébricas.

**Definição 2.14.** Seja  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica. O anel

$$I(X) := \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in X\},$$

é chamado de **ideal (polinomial) associado a  $X$** .

**Observação 2.15.**

- (i) Note que  $I(X)$  definido em 2.14 é um ideal do anel de polinômios  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .
- (ii) Análogamente ao Lema 2.8, o ideal  $I(X)$  inverte inclusões, ou seja, se  $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , temos que  $I(X_1) \supseteq I(X_2)$ .

O seguinte lema é um exemplo da Definição 2.14 e vamos usar o fato dado no Exemplo 2.9 item (ii). Veremos mais exemplos desta definição, no corrido do trabalho.

**Lema 2.16. (Ideal de um ponto)** Seja  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  um ponto. Então, o ideal associado ao conjunto unitário  $\{a\}$  é

$$I(a) := I(\{a\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle.$$

*Demonstração.* Primeiro, se  $f \in I(a)$  então  $f(a) = 0$ . Isso significa que substituir cada  $x_i$  por  $a_i$  em  $f$ , dá zero, ou seja que  $f$  é zero módulo  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ . Por tanto  $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ .

Por outro lado, se  $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , então  $f = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)f_i$ , para alguns  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  e portanto  $f(a) = 0$ , o que implica que  $f \in I(a)$ .  $\square$

Vimos que as variedades algébricas estão em correspondência um-para-um com os ideais radicais através da Definição 2.14 e a Definição 2.4. Este é um resultado central da geometria algébrica e álgebra comutativa, que vamos enunciar na seguinte proposição. Na literatura é geralmente referida pelo nome alemão como Hilbert's Nullstellensatz (Teorema dos zeros de Hilbert), mas neste trabalho, sô vamos apresentar umas obsevações. Todas suas versões, provas completas e com detalhes podem ser encontradas em [Eis95, Theorem 1.6, pp. 33].

**Teorema 2.17. (Teorema dos Zeros de Hilbert.)** Seja  $\mathbb{k}$  um corpo algébricamente fechado, então:

- (i) Para qualquer variedade algébrica  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  temos que  $V(I(X)) = X$ ;
- (ii) Para qualquer ideal  $J$  em  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , temos que  $I(V(J)) = \sqrt{J}$ .

**Observação 2.18.**

- (i) Para a inclusão  $\supseteq$  na Teorema 2.17 item (i), temos que se  $x \in X$  então  $f(x) = 0$ , para todo  $f \in I(X)$  e portanto  $x \in V(I(X))$ .
- (ii) Para a inclusão  $\supseteq$  na Teorema 2.17 item (ii), temos que se  $f \in \sqrt{J}$  então  $f^k \in J$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Segue-se que  $f^k(x) = 0$ , para todo  $x \in V(J)$  e portanto  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in V(J)$  e assim  $f \in I(V(J))$ . A outra inclusão é mais difícil de concluir e poder ser visualizada em [Eis95].

- (iii) Agora, para a inclusão  $\subseteq$ , na Teorema 2.17 parte (i), temos que como  $X$  é uma variedade algébrica, concluímos que  $X = V(J)$ , para algum ideal  $J$ . Pela parte (ii) desta Observação, temos  $I(V(J)) \supseteq \sqrt{J} \supset J$  e tomando o conjunto de zeros mais o Lema 2.8 parte (i), obtemos  $V(I(V(J))) \subseteq V(J)$ . Ou seja,  $V(I(X)) \subseteq X$ .
- (iv) Da Teorema 2.17 item (i) e item (ii), temos que  $I(X)$  é um ideal radical e utilizando o Lema 2.8 item (i), mais a Observação 2.15 item (i), temos que em particular existe uma bijeção de reversão de inclusão, ou seja

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Variedades algébricas em } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\text{Ideais radicais em } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\} \\ X & \mapsto & I(X) \\ V(J) & \longleftarrow & J. \end{array}$$

A seguir, apresentaremos exemplos que concentram o que foi estudado em: Definição 2.14, Observação 2.15, Teorema 2.17 e Observação 2.18. Além disso, estes serão de grande utilidade no desenvolvimento deste trabalho.

### Exemplo 2.19.

- (1) Seja  $J \trianglelefteq \mathbb{k}[x_1]$  um ideal radical não nulo. Como  $\mathbb{k}[x_1]$  é um domínio de ideais principais, temos que  $J = \langle f \rangle$ , para um polinômio  $f = (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_1 - a_r)^{k_r}$ , para alguns pontos distintos  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  e  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_{>0}$ . Note que a variedade algébrica  $V(J) = V(f) = \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ , contém zeros de  $f$ . Consequentemente, pela Teorema 2.17 temos que

$$I(V(J)) = \sqrt{J} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_1 - a_r \rangle,$$

é o ideal de todos os polinômios que se anulam em  $a_1, \dots, a_r$  (ver Lema 2.16). Note que  $f$  é de qualquer ordem, mais ainda, o conjunto de zeros de um ideal, não vai considerar as potências dos polinômios. Uma potência  $f^k$  de um polinômio  $f$ , tem o mesmo conjunto de zeros que  $f$ , portanto a informação das potências é perdida, quando é aplicado o resultado da Teorema 2.17.

- (2) O objetivo de este exemplo é mostrar que se  $\mathbb{k}$  não for um corpo algébricamente fechado, o Nullstellensatz não se cumpriria. Um ideal primo  $J = \langle x_1^2 + 1 \rangle$  de  $\mathbb{R}[x_1]$ , é também ideal radical. Note o conjunto de zeros de  $J$  é vazio em  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ , ou seja  $I(V(J)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[x_1] \neq J = \sqrt{J}$ , mas isso é uma contradição para a Teorema 2.17.
- (3) O ideal  $J = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  é um ideal maximal porque

$$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \cong \mathbb{k},$$

é um corpo e portanto também é ideal radical. Como seu conjunto de zeros está determinado por  $V(J) = V(\{a\})$ , com  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , concluímos pela Teorema 2.17 que o ideal do ponto  $a$  é

$$I(\{a\}) = I(V(J)) = \sqrt{J} = J = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle.$$

(Ver Lema 2.16). De fato, pontos em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  são claramente as variedades minimais não vazias em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  e pela bijeção de reversão de inclusão do Nullstellensatz enunciada na

Observação 2.18 parte (iv), eles correspondem exatamente aos ideais maximais em  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Por tanto, a bijeção da Observação 2.18 parte (iv) restringe-se a uma bijeção

$$\{\text{Pontos em } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Ideais maximais em } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\},$$

assim, os ideais maximais considerados acima são, os únicos ideais maximais no anel de polinômios.

Outra consequência importante da Teorema 2.17, e útil para este trabalho, é que os polinômios e as funções polinomiais em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  coincidem.

**Definição 2.20.** Sejam  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m$  e  $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  duas variedades algébricas. Um **morfismo de variedades algébricas** é uma função  $f : X \rightarrow Y$  para a qual existem polinômios  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$  tais que

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ a &\longmapsto f(a) = (p_1(a), \dots, p_n(a)). \end{aligned}$$

**Observação 2.21.** Sejam  $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  dois polinômios que definem a mesma função em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , ou seja  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , então

$$f - g \in I(\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n) = I(V(0)) = \sqrt{\langle 0 \rangle} = \langle 0 \rangle,$$

portanto  $f = g$  em  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Note que,  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  pode ser pensado como o anel de funções polinomiais em  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Agora, vamos generalizar o anterior para qualquer variedade algébrica  $X \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Dois polinômios  $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  definem a mesma função em  $X$ , ou seja  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ , se, e somente se  $f - g \in I(X)$ . Então, o anel quociente  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$  pode ser pensado como o anel de funções polinomiais em  $X$ . A seguir, vamos formalizar o anterior.

**Definição 2.22.** O anel de todas as funções polinomiais em  $X$ , é o anel

$$\mathbb{k}[X] := \{f : X \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 = \mathbb{k} \mid f \text{ é morfismo de variedades algébricas}\},$$

que será chamado de **anel de coordenadas da variedade algébrica**  $X$ .

**Observação 2.23.**

- (i) O anel de coordenadas  $\mathbb{k}[X]$  de uma variedade algébrica  $X$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra.
- (ii) Como  $\mathbb{k}[X]$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra, temos o seguinte morfismo sobrejetor de  $\mathbb{k}$ -álgebras

$$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[X],$$

que leva um polinômio para a função polinomial correspondente. O kernel de este morfismo é exatamente

$$I(X) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0, \forall p \in X\},$$

e pelo teorema de isomorfismos temos que

$$\mathbb{k}[X] \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

Note que os elementos de  $\mathbb{k}[X]$  podem ser pensados como classes laterais de polinômios módulo  $I(X)$  ou como funções polinomiais em  $X$ . Além,  $\mathbb{k}[X]$  é a  $\mathbb{k}$ -álgebra de funções de  $X$  gerada pelas funções coordenadas em  $X$ .



**Exemplo 2.24.**

(1) Para  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica, temos que o ideal associado à  $X$  é  $I(X) = 0$ , portanto o anel de coordenada de  $X$  é  $\mathbb{k}[X] \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

(2) Seja

$$X = \{(a, a^2, a^3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^3 \mid a \in \mathbb{k}\} = V(y - x^2, z - x^3).$$

O anel de coordenadas é dado por  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x, y, z] / \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ . Vamos verificar que  $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$  é um ideal radical, já que  $\mathbb{k}[X]$  é o quociente de  $\mathbb{k}[x, y, z]$  por  $\sqrt{I} = I(X)$ . De fato, note que

$$\begin{aligned} \mathbb{k}[x, y, z] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ x &\longrightarrow t \\ y &\longrightarrow t^2 \\ z &\longrightarrow t^3 \end{aligned}$$

com função inverso dado por  $t \mapsto x$ . Pelo Exemplo 1.6 item (3),  $\mathbb{k}[t]$  é um domínio de integridade e não tem nilpotentes, portanto  $I$  é um ideal radical, que de fato é primo. Como  $I(X) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ , pela Teorema 2.17 temos que

$$V(I) = X \implies I(X) = I(V(I)) = \sqrt{I} = I.$$

(3) Seja

$$X = \{(a^2, a^3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2 \mid a \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1\} = V(x^3 - y^2).$$

O anel de coordenadas de  $X$  é  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x, y] / \langle x^3 - y^2 \rangle$ .

Seguindo Definição 2.22 e a Observação 2.23, podemos pensar os elementos de  $\mathbb{k}[X]$  como funções em  $X$  e como elementos do quociente  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] / I(X)$ . Portanto, podemos usar os anéis de coordenadas para definir os conceitos introduzidos até agora em um sentido relativo, ou seja, vamos considerar os conjuntos de zeros de  $\mathbb{k}[Y]$  e variedades algébricas contidas em  $Y$ , com  $Y$  uma variedade algébrica fixada, que será nosso ambiente. A seguinte definição é análoga à Definição 2.4 e à Definição 2.14.

**Definição 2.25.** *Seja  $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica fixa. Temos que:*

(i) *Para um subconjunto  $S \subseteq \mathbb{k}[X]$  de funções polinomiais em  $Y$ , definimos o conjunto de zeros como*

$$V(S) := V_Y(S) := \{x \in Y \mid f(x) = 0, \forall f \in S\} \subseteq Y.$$

*Os subconjuntos de esta forma são variedades algébricas contidas em  $X$  e são chamadas de **subvariedades algébricas afins de  $Y$**  ou **subvariedades algébricas**.*

(ii) *Para um subconjunto  $X \subset Y$ , o ideal de  $X$  em  $Y$  é definido como*

$$I(X) := I_Y(X) := \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(x) = 0, \forall x \in X\},$$

*tal que  $I_Y(X)$  é um ideal de  $\mathbb{k}[Y]$ .*

**Observação 2.26.**

- (i) Na mesma direção da Observação 2.23 temos que  $\mathbb{k}[X] \cong \mathbb{k}[Y]/I_Y(X)$ , para qualquer subvariedade algébrica  $X$  de  $Y$ .
- (ii) (**Nullstellensatz**) Como no Teorema 2.17 temos que  $V_Y(I_Y(X)) = X$ , para qualquer subvariedade  $X$  de  $Y$  e  $I_Y(V_Y(J)) = \sqrt{J}$ , para qualquer ideal radical  $J$  de  $\mathbb{k}[Y]$ , dando origem à seguinte correspondência

$$\{\text{Subvariedades algébricas de } Y\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Ideais radicais em } \mathbb{k}[Y]\}.$$

**2.1.1 Topologia de Zariski**

Agora, nossa intenção é entender a *Topologia de Zariski* e o impacto que ela tem na Geometria Algébrica e neste trabalho. Mais ainda, vamos dar sua definição formal.

**Definição 2.27.** Seja  $X$  uma variedade algébrica. Definimos a **Topologia de Zariski** em  $X$  como a topologia cujos conjuntos fechados são exatamente subvariedades algébricas de  $X$ , isto é, subconjuntos da forma  $V(S)$ , para algúm  $S \subseteq \mathbb{k}[X]$ .

**Observação 2.28.**

- (i) Pelos resultados dados no Lema 2.8, a Topologia de Zariski é uma topologia.
- (ii) O dito na Observação 2.10 e a Definição 2.27 coincide, já que subvariedades algébricas de  $X$  são variedades algébricas contidas em  $X$ .

**Exemplo 2.29.** Comparada com a topologia clássica para o caso complexo, a Topologia de Zariski não é usual, a seguir vamos ver um exemplo disto (para mais exemplos ver Observação 2.10).

A bola unitária  $B = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : |x| \leq 1\}$  na topologia clássica, é fechada em  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ , mas não é, na Topologia de Zariski. Com efeito, pelo Exemplo 2.9 (ii), os subconjuntos fechados-Zariski de  $\mathbb{A}^1$  são os conjuntos finitos e  $\mathbb{A}^1$ . Em particular, o fecho de  $B$  na Topologia de Zariski é todo  $\mathbb{A}^1$ . Intuitivamente, podemos dizer que os subconjuntos fechados na topologia Zariski são muito "pequenos", e daí que os subconjuntos abertos são muito "grandes".

**Observação 2.30.** Um espaço topológico  $X$  é **Hausdorff**, se para elementos arbitrários  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem conjuntos abertos  $U$  que contém  $x$  e  $V$  que contém  $y$ , tal que  $U \cap V = \emptyset$ . Na topologia de Zariski, não temos esta propriedade, já que quaisquer dois conjuntos abertos não vazios se intersectam. Além disso, os subconjuntos abertos de conjuntos irredutíveis são densos (Observação 2.33). Por exemplo, a variedade algébrica  $V(x_1x_2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$ , pode-se escrever como a união de dois eixos coordenados (ver Figura 1),  $X_1 = V(x_1)$  e  $X_2 = V(x_2)$ , que são também variedades algébricas.

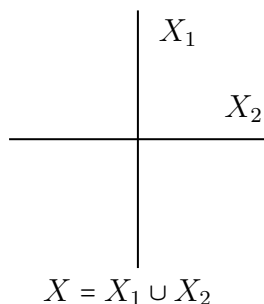


Figura 1

Para motivar a seguinte definição, note que  $X_1$  e  $X_2$  não podem ser decompostos em união de variedades algébricas mais pequenas.

**Definição 2.31.** Uma variedade algébrica não vazia  $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  é dita **irredutível**, se não pode-se escrever como a união  $X = X_1 \cup X_2$  de conjuntos algébricos  $X_1$  e  $X_2$  propriamente contidos em  $X$ . Caso contrário,  $X$  é dita **redutível**. O conjunto vazio não é considerado irredutível.

**Exemplo 2.32.**

(1) Na topologia clássica o plano complexo  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  é redutível porque pode-se escrever como a união de subconjuntos fechados, assim

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \geq 1\}.$$

Porém,  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  é irredutível Zariski pelo Exemplo 2.9 item (2).

(2) A variedade algébrica  $V(x_1x_2) = V(x_1) \cup V(x_2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$  da Observação 2.30). não é irredutível.

**Observação 2.33.** (Subconjuntos abertos de espaços irredutíveis são densos). Pelo Exemplo 2.29 item (1), os subconjuntos abertos na topologia de Zariski, são muito grandes. Brevemente, vamos formalizar o que isso significa. Sejam  $X$  um espaço topológico irredutível,  $U$  e  $U'$  dois subconjuntos abertos de  $X$ . Então:

- (i) A interseção  $U \cap U'$  nunca é vazia. De fato, tomando os complementos, é justamente o mesmo que dizer que a união de dois subconjuntos fechados próprios  $X \setminus U$  e  $X \setminus U'$ , não é igual a  $X$ , ou seja a definição de irredutibilidade.
- (ii) Dizemos que  $U$  é denso em  $X$ , se o fecho de  $U$ , denotado como  $\overline{U}$ , é todo  $X$ . Com efeito, se  $Y \subset X$  é qualquer subconjunto fechado que contém  $U$ , então  $X = Y \cup (X \setminus U)$  e como  $X$  é irredutível e  $X \setminus U \neq X$ , devemos ter que  $Y = X$ .

**Proposição 2.34.** Seja  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica. Então, as seguintes condições são equivalentes

- (i)  $X$  é irredutível.
- (ii)  $I(X)$  é um ideal primo.
- (iii)  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$  é um domínio de integridade.

*Demonstração.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponha que  $X$  é irredutível, logo  $X \neq \emptyset$  e  $I(X)$  um ideal próprio. Sejam  $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $fg \in I(X)$ , tem-se

$$X = (X \cap V(f)) \cup (X \cap V(g)).$$

Como  $X$  é irredutível, nós temos ou que  $X = X \cap V(f)$  ou que  $X = X \cap V(g)$ , portanto  $f \in I(X)$  ou  $g \in I(X)$ . Assim  $I(X)$  é um ideal primo.

- (ii)  $\Rightarrow$  (i) Suponha que  $I(X)$  é um ideal primo. Então  $I(X)$  é um ideal próprio, de modo que  $X = V(I(X)) \neq \emptyset$ . Sejam  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  conjuntos algébricos, tal que  $X = X_1 \cup X_2$ . Então  $I(X) = I(X_1) \cap I(X_2)$ . Como  $I(X)$  é um ideal primo, temos que ou  $I(X) = I(X_1)$  ou  $I(X) = I(X_2)$ . Por tanto, ou  $X = X_1$  ou  $X = X_2$ . Logo  $X$  é irredutível.
- (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) É um caso particular da propriedade que  $I$  é um ideal primo se, e somente se  $R/I$  é um domínio de integridade.
- (i)  $\Rightarrow$  (iii) Suponha que  $\mathbb{k}[X]$  não é um domínio de integridade, ou seja que existem  $f, g \in \mathbb{k}[X]$  tais que  $fg = 0$ . Então  $X_1 = V(f)$  e  $X_2 = V(g)$  são fechados, não iguais a  $X$ , já que  $f$  e  $g$  são não nulos e  $X_1 \cup X_2 = V(f) \cup V(g) = V(fg) = V(0) = X$ . Portanto  $X$  é redutível. Assim,  $\mathbb{k}[X]$  é um domínio de integridade.
- (iii)  $\Rightarrow$  (i) Suponha que  $X$  é redutível, com  $X = X_1 \cup X_2$  para subconjuntos fechados  $X_1, X_2 \subset X$ . Pela bijeção da Observação 2.26 (ii), temos que  $I(X_i) \neq \{0\}$  em  $\mathbb{k}[X]$  para  $i = 1, 2$  e assim, podemos escolher  $f_i$  não nula em  $I(X_i)$ . Então  $f_1 f_2$  se anulam em  $X_1 \cup X_2 = X$ . Portanto  $f_1 f_2 = 0 \in \mathbb{k}[X]$ , ou seja  $\mathbb{k}[X]$  não é um domínio de integridade. Assim,  $X$  é irredutível. □

**Observação 2.35.** *Seja  $Y$  uma variedade algébrica. Pela Observação 2.26 item (i), temos que  $\mathbb{k}[X] \cong \mathbb{k}[Y]/I_Y(X)$ , para qualquer subvariedade algébrica não vazia  $X$  de  $Y$ . Note que  $\mathbb{k}[X]$  é um anel de integridade se  $I_Y(X)$  é um ideal primo. Portanto, pela Proposição 2.34, temos que a bijeção dada na Observação 2.26 fica restringida a*

$\{\text{Subvariedades algébricas irredutíveis não vazias em } Y\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Ideais primos em } \mathbb{k}[Y]\},$   
para qualquer variedade algébrica  $Y$ .

## 2.1.2 Dimensão

Uma importante aplicação da noção de irredutibilidade, para este trabalho, é a definição de dimensão de uma variedade algébrica. Nós temos uma ideia geométrica, pelo menos no caso de variedades complexas, de qual deve ser a dimensão de uma variedade algébrica: o número das coordenadas que precisamos para descrever uma variedade algébrica  $X$ , localmente em qualquer ponto. A ideia de construir a dimensão neste trabalho, usando a topologia de Zariski é a seguinte: Se  $X$  é um espaço topológico irredutível, então qualquer subconjunto fechado de  $X$ , diferente de  $X$  deve ter dimensão menor. Vamos formalizar esta ideia.

**Definição 2.36.** *Seja  $X$  um espaço topológico não vazio.*

- (i) A **dimensão** de  $X$ , denotada como  $\dim X$ , é o supremo sobre  $n \in \mathbb{N}$ , tal que existe uma cadeia

$$\emptyset \neq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n \subset X$$

de comprimento  $n$ , de subconjuntos fechados irredutíveis  $Y_1, \dots, Y_n$  de  $X$ .

- (ii) Seja  $Y$  um subconjunto fechado irredutível de  $X$ . Definimos a **codimensão** de  $Y$  em  $X$ , denotada como  $\text{codim}_X Y$ , como o supremo de todos os  $n$ , tal que existe uma cadeia

$$Y \subsetneq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n \subset X$$

de subconjuntos fechados irredutíveis  $Y_1, \dots, Y_n$  de  $X$ , que contém  $Y$ .

**Observação 2.37.**

- (i) Neste trabalho denotaremos a dimensão de um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial como  $\dim_{\mathbb{k}}V$  e  $\dim X$  para a dimensão de um espaço topológico, como acima.
- (ii) Intuitivamente, podemos dizer que cada  $Y_i$  tem dimensão  $i$  em uma cadeia maximal como na Definição 2.36 item (i), de modo que  $\dim X = n$ . No mesmo sentido, cada  $Y_i$  na Definição 2.36 item (ii), deve ter dimensão  $i + \dim Y = n$ , na cadeia maximal, tal que  $n = \dim X - \dim Y$ .

**Exemplo 2.38.**

- (1) Se  $X$  é uma variedade algébrica não vazia então a dimensão de  $X$ , como espaço topológico é  $\dim X = 0$ . De fato, como os pontos são fechados em  $X$ , então todos os subconjuntos de  $X$  são fechados e assim os únicos subconjuntos fechados de  $X$  são os pontos. Portanto, só existem cadeias de comprimento 0 de subconjuntos fechados irredutíveis de  $X$ . Note que como  $X$  é redutível, não pode estar na cadeia.

Espaços topológicos finitos em geral não precisam ter dimensão 0. Se  $X = \{a, b\}$  é um espaço topológico, os subconjuntos fechados irredutíveis são  $\emptyset$  e  $\{a\}$ , assim  $X$  tem dimensão 1 já que  $\{a\} \subsetneq X$  é uma cadeia de comprimento 1. Note que  $\{b\}$  não é fechado.

- (2) Pelo Exemplo 2.9 item (2), o espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  tem dimensão 1, já que a cadeia maximal de subconjuntos fechados não vazios de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  são exatamente  $\{a\} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  para qualquer ponto  $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ . A codimensão de  $\{a\}$  em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  é 1.
- (3) Em geral, o espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  tem dimensão pelo menos  $n$ , já que existe uma cadeia

$$V(x_1, \dots, x_n) \subsetneq V(x_2, \dots, x_n) \subsetneq \dots \subsetneq V(x_n) \subsetneq V(0) = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$$

de subconjuntos fechados irredutíveis de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  de comprimento  $n$ .

Em geral, para variedades algébricas, precisamos dar um conceito da dimensão mais apropriado. Apresentaremos a dimensão de Krull de um anel e a codimensão de um ideal primo.

**Definição 2.39.** Seja  $R$  um anel.

- (i) A **dimensão de Krull** de  $R$ , denotada como  $\dim R$ , é o maior número  $n \in \mathbb{N}$ , tal que existe uma cadeia de ideais primos

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

de comprimento  $n$  em  $R$ .

- (ii) A **codimensão** de um ideal primo  $\mathfrak{p}$  em  $R$ , é o maior número  $n \in \mathbb{N}$ , tal que existe uma cadeia como em (i), com  $\mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}$ , denotada como  $\text{codim}_R \mathfrak{p}$  (ou simplesmente  $\text{codim} \mathfrak{p}$  se o anel é claro para o contexto).

**Observação 2.40.** A dimensão de uma variedade algébrica em relação a topologia de Zariski coincide com a dimensão de seu anel de coordenadas. Analogamente, para codimensão.

**Observação 2.41.** Note que, pela Observação 2.35, as subvariedades algébricas fechadas de uma variedade algébrica  $X$ , corresponde exatamente ao ideais primos em  $\mathbb{k}[X]$ , portanto a dimensão de  $X$  é o supremo de todos os  $n$ , tal que existe uma cadeia  $I \supsetneq I_1 \supsetneq \dots \supsetneq I_n$  de ideais primos em  $\mathbb{k}[X]$ .

**Exemplo 2.42.** A seguinte tabela ilustra as dimensões de Krull de alguns casos simples e as cadeias de ideais primos de comprimento máximo.  $\mathbb{k}$  denota um corpo,  $p$  um número primo e  $n \in \mathbb{N}$ .

Anel $R$	$\dim R$	Uma cadeia maximal de primos
$\mathbb{k}$	0	$\langle 0 \rangle$
$\mathbb{Z}$	1	$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle p \rangle$
$\mathbb{k}[t]$	1	$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle t - a \rangle$ para qualquer $a \in \mathbb{C}$
$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$	$\geq n$	$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle x_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

## 2.2 Anéis Locais e Localização

Na seção anterior, estudamos que as funções polinomiais de uma variedade algébrica  $X \in \mathbb{A}^n$ , formam o anel  $\mathbb{k}[X]$ , cujas propriedades refletem propriedades geométricas de  $X$ . Para o objetivo neste trabalho, precisamos estudar o comportamento de  $X$  perto de um ponto dado  $p \in X$ , em particular expressar suavidade em termos algébricos, por isso vamos introduzir o conceito de *anel local de funções*  $O_{X,p}$  (ver Definição 2.48), onde os elementos são funções definidas em  $X$  perto de  $p$ , mais precisamente, as funções são definidas em vizinhanças abertas Zariski de  $p$  em  $X$ , tal que duas de essas funções serão identificadas, se coincidirem em uma vizinhança suficientemente pequena de  $p$ , na qual ambas funções estão definidas, ou seja que identificando duas funções de esta forma, podemos definir uma *relação de equivalência* e portanto os elementos de  $O_{X,p}$  são classes de equivalência.

### Ideia da Construção de $O_{X,p}$

Aquí vamos esboçar a ideia da construção de  $O_{X,p}$ . Na página seguinte começamos com a construção rigorosa que será dada em detalhe.

Como cada vizinhança aberta de  $p$  em  $X$ , contém uma vizinhança aberta  $D_X(f) = X \setminus V_X(f)$  (ver Observação 2.10 e Definição 2.25), onde  $f \in \mathbb{k}[X]$  não se anula em  $p$ , é suficiente estudar as funções que são permitidas em uma vizinhança deste tipo. Em  $D_X(f)$ , as funções  $f$  e  $f^m$ , são invertíveis, porque estamos deixando fora do conjunto aberto todas aquelas que vão se anular em algum ponto. Munindo as potências invertidas e as funções polinomiais, obtemos a  $\mathbb{k}$ -álgebra  $\mathbb{k}[X]_f$ , cujos elementos podem ser pensados como frações da forma  $\frac{g}{f^m}$ , onde  $g \in \mathbb{k}[X]$  com  $m \geq 0$  e duas frações da forma  $\frac{g}{f^m}$  e  $\frac{g'}{f^{m'}}$ , definem a mesma função em  $D_X(f)$  se, e somente se  $gf^{m'} - g'f^m \equiv 0$ , como funções em  $D_X(f)$ , ou seja

$$f(gf^{m'} - g'f^m) = 0 \text{ em todo } X \text{ mas isto é } f(gf^{m'} - g'f^m) = 0 \in \mathbb{k}[X].$$

Assim, o anel nós que estamos interessados,  $O_{X,p}$ , é obtido invertindo todas as funções em  $\mathbb{k}[X]$ , que não se anulam em  $p$  e suas elementos são frações do tipo  $\frac{g}{h}$  onde  $g, h \in \mathbb{k}[X]$  com  $h(p) \neq 0$  e onde duas de estas frações  $\frac{g}{h}$  e  $\frac{g'}{h'}$  são identificadas se

$$gh' - g'h = 0$$

em alguma vizinhança de  $p$  contida em  $D_X(h) \cap D_X(h')$ .

A construção de ambos anéis  $k[X]_f$  e  $O_{X,p}$  tem-se do seguinte princípio algébrico: vamos inverter os elementos de um subconjunto multiplicativo fechado  $S$  de um anel  $R$ . Note que é natural inverter os elementos de subconjuntos multiplicativos fechados já que o produto de dois elementos invertidos é um inverso do produto. Agora, o seguinte passo, é formalizar todo o anterior em uma teoria consistente.

### Construção de $O_{X,p}$

**Definição 2.43.** *Seja  $R$  um anel. Um conjunto multiplicativamente fechado  $S \subset R$  é um subconjunto que é fechado para o produto, ou seja se  $s, t \in S$ , temos  $st \in S$ . Para um anel com unidade, é chamado de um conjunto multiplicativamente fechado  $S \subset R$  um conjunto multiplicativamente fechado com unidade, se  $1 \in S$ .*

**Exemplo 2.44.** *Seja  $R$  um anel comutativo com unidade.*

- (1) *Seja  $S$  o conjunto de divisores de zero não nulos em  $R$ . Então  $S$  é multiplicativamente fechado. De fato, se  $a, b \in S$  então  $ab$  também não é um divisor de zero, já que  $abc = 0$ , para algum  $c \in R$ , isto implica que  $bc = 0$ , porque  $a \in S$ , então  $c = 0$  já que  $b \in S$ . De particular importância é o caso quando  $R$  é um domínio integridade. Então  $S = R \setminus \{0\}$ , para qualquer domínio de integridade  $R$  e cada elemento diferente não nulo  $\frac{r}{s}$ , é uma unidade em  $S^{-1}R$  com inverso  $\frac{s}{r}$ . Portanto  $S^{-1}R$  é um corpo, chamado de **corpo quociente** de  $R$ . A motivação de este conceito, está motivada desde o Exemplo 1.8 item (3).*
- (2) *Sejam  $\mathfrak{p} \subset R$  um ideal primo. Então  $S = R \setminus \mathfrak{p}$  é um conjunto multiplicativamente fechado, já que se  $a \notin \mathfrak{p}$  e  $b \notin \mathfrak{p}$  então  $ab \notin \mathfrak{p}$ , por definição de ideal primo. Note que  $R \setminus \mathfrak{p}$ , agora não é um conjunto multiplicativamente fechado com unidade, porque  $1 \in \mathfrak{p}$ , para todos os ideais primos.*
- (3) *Seja  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ , para qualquer  $f \in R$ .  $S$  é um conjunto multiplicativamente fechado.*

A seguinte definição é inspirada na construção de  $\text{Frac}(R)$  no Exemplo 1.8 item (3).

**Definição 2.45.** *Sejam  $R$  um anel,  $S \subset R$  subconjunto multiplicativamente fechado e uma relação de equivalência  $\sim$  em  $R \times S$  definida por*

$$(r, s) \sim (r', s') \text{ se, e somente se existe } u \in S \text{ tal que } u(rs' - sr') = 0.$$

Denotamos como  $\frac{r}{s}$  a classe de equivalência de  $(r, s)$  e

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \right\},$$

ao conjunto de todas as classes de equivalência. Dizemos que  $S^{-1}R$  é um anel, definindo as operações

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{sr' + s'r}{ss'}, \quad e \quad \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}.$$

onde o zero é dado por  $0 = \frac{0}{1}$  e a identidade é dada por  $1 = \frac{1}{1}$ . Este anel é chamado de **localização de  $R$  em  $S$** . Definimos o **homomorfismo canônico de anéis**

$$\begin{aligned} \iota : R &\longrightarrow S^{-1}R \\ r &\longmapsto \frac{r}{1}, \end{aligned}$$

cujo kernel é dado por

$$\ker(\iota) = \{r \in R \mid ur = 0 \text{ para algum } u \in S\}.$$

### Observação 2.46.

(i) Na Definição 2.45 a relação  $\sim$  é reflexiva, simétrica e transitiva. Vamos sô estudar a transitividade. Se  $(r, s) \sim (r', s')$  e  $(r', s') \sim (r'', s'')$ , então existem  $u, v \in S$  com  $u(rs' - sr') = v(r's'' - s'r'') = 0$  e assim

$$s'uv(rs' - r''s) = vs''u(rs' - r's) + usv(a's'' - a''s') = 0,$$

o que significa que  $(r, s) \sim (r'', s'')$ , já que  $S$  é multiplicativamente fechado e portanto,  $s'uv \in S$ . Além note que as operações do anel  $S^{-1}R$  são independentes da eleição dos representantes.

(ii) Seja  $S \subset R$ . Pela Definição 2.45  $\iota$  envia cada elemento de  $S$  para uma unidade em  $S^{-1}R$ . Além disso, pelo meio de  $\iota$ ,  $S^{-1}R$  é uma  $R$ -álgebra. Note que  $\iota$  sô é injetiva se  $S$  não contém divisores de zero.

(iii) Note que  $\iota$  mapea um elemento  $r \in R$  para zero  $r \mapsto 0$  se, e sómente se  $r$  é anulado por um elemento de  $S$ . Assim,  $S^{-1}R$  é zero se, e somente se  $0 \in S$ .

### Exemplo 2.47.

(1) Note que  $S = \{1\}$  é um conjunto multiplicativamente. A localização de  $R$  em  $S$ , é  $S^{-1}R \cong R$ .

(2) Considere  $S$  como no Exemplo 2.44 item (2). A localização  $S^{-1}R$ , é denotada como  $R_{\mathfrak{p}}$  e é chamada de **localização de  $R$  no ideal primo  $\mathfrak{p}$** . O conjunto das não unidades de  $R_{\mathfrak{p}}$ , é o ideal dado por

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{p}{r} \mid p \in \mathfrak{p}, r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}.$$

Vamos a aplicar o anterior para um caso muito interessante. Sejam  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica e  $\mathbb{k}[X]$  seu anel de coordenadas. Pela Proposição 2.34 temos que  $\mathbb{k}[X]$  é um domínio de integridade e que  $I(X)$ , é um ideal primo de  $\mathbb{k}[X]$ . Pelo Exemplo 2.44 item (3), temos que  $S = \mathbb{k}[X] \setminus I(X) \subset \mathbb{k}[X]$ , é um subconjunto multiplicativamente fechado. Inverter todos os elementos não nulos de  $\mathbb{k}[X]$ , é decrever  $S^{-1}\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[X]_{I(X)}$ . Vejamos un exemplo particular. Considere a variedade algébrica da Observação 2.30,  $X = V(x_1x_2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  e seu anel de coordenadas  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2]/\langle x_1x_2 \rangle$ . Queremos formalmente inverter todas as funções  $f \in \mathbb{k}[X]$ ,



que não se anulam em  $p = (1, 0)$ . Pela Definição 2.43 e o Lema 2.16, o conjunto multiplicativamente fechado  $S$ , é dado por

$$\begin{aligned} S &= \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(p) \neq 0\} \\ &= \mathbb{k}[X] \setminus I(p) \\ &= \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f \neq \langle x-1, y \rangle\}. \end{aligned}$$

Note que  $x_1 \in S$ , já que não se anula em  $p = (1, 0)$ . Considere as funções  $0$  e  $x_2$  em  $\mathbb{k}[X]$ , diferente em um início. Porém, depois de localizar perto do ponto  $p$  e restringir  $0$  e  $x_2$  à vizinhança de  $p$ , como por exemplo  $(x_1 - C_2) \setminus 0 = X \setminus V(x_1)$ , onde  $C_2 = \{x_2 \mid x_1 x_2 = 0\}$  assim as funções  $0$  e  $f$  são iguais. Ou seja, queremos

$$x_2 = \frac{x_1}{1} \cdot \frac{0}{1} = 0$$

em  $S^{-1}\mathbb{k}[X]$ . De fato,  $u(x_2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0 \in \mathbb{k}[X]$ , com  $u = x_1 \in S$ . Note que  $u$  desempenha um papel importante para nosso exemplo e em geral para a Definição 2.45, já que garante a localização e identifique as funções que queremos considerar iguais, de fato, sem  $u$  a definição falha. Além disso, queremos que as funções locais de  $X$  perto do ponto  $p$ , concordem com as funções locais da componente irredutível  $V(x_2) = (x_1 - C_2)$  perto do  $p$ . Intuitivamente, esperamos que a localização  $S^{-1}\mathbb{k}[X]$ , seja isomorfica à  $\mathbb{k}$ -álgebra  $\mathbb{k}[x_1]$ , depois de inverter todos os elementos  $h \in \mathbb{k}[x_1] \setminus I(p)$ , portanto

$$\mathbb{k}_{I(p)} = \mathbb{k}[x_1] \left[ \frac{1}{h} \mid h(p) \neq 0 \right] \subset \text{Frac}(\mathbb{k}[x_1]) = \mathbb{k}(x_1).$$

- (3) Vamos localizar um anel  $R$ , no conjunto multiplicativamente fechado  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$  do Exemplo 2.47 item (3). Denotamos como  $R_f = S^{-1}R$  a localização de  $R$  em  $S$ . Então

$$R_f = \left\{ \frac{r}{f^m} \mid r \in R, f^m \in S, m \geq 0 \right\},$$

onde  $\frac{r}{f^m} = \frac{rf}{f^{m+1}}$  e mais geralmente

$$\frac{r}{f^m} = \frac{r'}{f^n} \iff f^N (rf^n - r'f^m) = 0$$

para algum  $N \geq 0$ . Note que se  $f$  é nilpotente, temos  $f^N \in S$ , para algum  $N$  e assim,  $R_f = \{0\}$ . Mais ainda,  $R_f = 0$  se, e somente se  $f$  é nilpotente. Agora, se  $R$  é um domínio de integridade, temos

$$R_f = R \left[ \frac{1}{f} \right] \subset \text{Frac}(R).$$

Em particular, se  $R = \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2] / \langle x_1 x_2 \rangle$ , como no item (2) e  $S = \{1, x, x^2, \dots\}$ , então  $x_2 = \frac{x_2}{1}$  é zero, já que  $x_2$  é anulado por  $x_1 \in S$ , e assim

$$S^{-1}\mathbb{k}[X] \cong \mathbb{k}[X]_{x_2} = \mathbb{k}[x_1, x_1^{-1}] \subset \text{Frac}(\mathbb{k}[x_1]) = \mathbb{k}(x_1).$$

**Definição 2.48.** Um anel  $R$  é chamado de **anel local**, se possui um único ideal maximal. Se  $R$  é um anel local com ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , o corpo  $R/\mathfrak{m}$  é chamado de **corpo residual** de  $R$ .

**Exemplo 2.49.**

- (1) Se  $\mathbb{k}$  é um corpo qualquer, o único ideal maximal é  $\mathfrak{m} = \{0\}$ , por tanto qualquer corpo é um anel local com corpo residual  $\mathbb{k}/\{0\}$ .
- (2) Pelo Exemplo 2.19 item (3), temos que o anel de polinômios  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  não é um anel local. Mas, o anel das **séries formais de potência**  $\mathbb{k}[[x_1]]$  com coeficientes em  $\mathbb{k}$ , que consiste do conjunto de todas as expressões da forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_i x_1^i + \dots, \quad a_i \in \mathbb{k},$$

é um anel local com ideal maximal  $\langle x_1 \rangle$  e corpo residual  $\mathbb{k}$ . Mais geralmente, temos que  $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$  é local com ideal maximal  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , que é o complementar do grupo das unidades de  $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ , definido como

$$\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]^\times = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \mid a_{0, \dots, 0} \neq 0 \right\}.$$

O corpo residual de  $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$  é

$$\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \mathbb{k}.$$

**Proposição 2.50.** Sejam  $R$  um anel e  $\mathfrak{p}$  um ideal primo em  $R$ . Então,  $R_{\mathfrak{p}}$  é um anel local.

*Demonstração.* Seja  $R_{\mathfrak{p}}$  a localização de  $R$  em  $\mathfrak{p}$ , com  $\mathfrak{p}$  um ideal primo de  $R$ . Pela Definição 2.45, temos que existe uma inclusão de  $R$  em  $R_{\mathfrak{p}}$  dada por

$$\begin{aligned} \iota: R &\longrightarrow R_{\mathfrak{p}} \\ r &\longmapsto \frac{r}{1}. \end{aligned}$$

Portanto, temos a identificação  $\mathfrak{p} \longmapsto \frac{\mathfrak{p}}{1}$ , com  $p \in \mathfrak{p}$ , e assim escrevemos o ideal

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} &= \left\{ \frac{p}{1} \cdot \frac{r}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, r \in R, s \in S \right\} \\ &= \left\{ \frac{pr}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, r \in R, s \in S \right\} \\ &= \left\{ \frac{p}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S \right\}. \end{aligned}$$

Vamos ver que  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  é um ideal maximal em  $R_{\mathfrak{p}}$ . Seja  $I \subset R_{\mathfrak{p}}$  um ideal, tal que  $I \not\subseteq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ . Se  $r \in \mathfrak{p}$ , então  $\frac{r}{s} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ , mas como  $I \not\subseteq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ , devemos ter que existe um elemento  $\frac{r}{s} \in I$ , tal que  $r, s \in S$  e  $\frac{s}{r}$  é um elemento de  $R_{\mathfrak{p}}$ . Note que  $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = 1$ , logo  $I$  contém o elemento invertível  $\frac{r}{s}$ , assim  $I = R_{\mathfrak{p}}$ , é um ideal maximal de  $R_{\mathfrak{p}}$ .

Por outro lado note que  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  é o único ideal maximal em  $R_{\mathfrak{p}}$ . Note que a caracterização do ideal maximal em  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ , o conjunto das não unidades de  $R_{\mathfrak{p}}$ , implica que  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  é o único ideal maximal em  $R_{\mathfrak{p}}$ . De fato, qualquer ideal proprio  $\mathfrak{m} \subsetneq R_{\mathfrak{p}}$  tem que estar contido no conjunto das não unidades (já que de outra forma,  $\mathfrak{m}$  conteria uma unidade e isso implica que o ideal é todo o anel), ou seja  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  e por tanto, se  $\mathfrak{m}$  é o maximal, temos que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ .

Resumindo, temos que  $R_{\mathfrak{p}}$  é um anel local. □

**Exemplo 2.51.** Vamos localizar  $\mathbb{Z}$  no ideal primo  $\langle p \rangle$ , com  $p$  primo. Ou seja

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \nmid b \right\},$$

cujo ideal maximal é dado por

$$\mathfrak{m}_p = p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \mid a, p \nmid b \right\}.$$

Note que o corpo residual é

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} / \mathfrak{m}_p &\cong \mathbb{Z} / \langle p \rangle \\ \frac{a}{b} &\mapsto ab^{-1}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.52. (Propriedade universal da localização).** Sejam  $R$  um anel,  $S \subset R$  um conjunto multiplicativamente fechado e  $\iota : R \rightarrow S^{-1}R$  o função de localização. Para um anel  $R'$  denote por

$$\text{Hom}_S(R, R') = \{ \phi \in \text{Hom}_S(R, R') \mid \phi(S) \subseteq R' \setminus \{0\} \}$$

para os homomorfismos de  $R$  a  $R'$ . Temos uma bijeção natural

$$\begin{aligned} \text{Hom}(S^{-1}R, R') &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_S(R, R') \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \iota, \end{aligned}$$

cujo inverso leva  $\phi \in \text{Hom}_S(R, R')$ , em  $\psi \in \text{Hom}(S^{-1}R, R')$  definido por

$$\psi\left(\frac{r}{s}\right) = \phi(s)^{-1} \cdot \phi(r) \quad \text{com } r \in R, s \in S.$$

Assim, para todo  $\phi \in \text{Hom}_S(R, R')$ , existe um único  $\psi \in \text{Hom}(S^{-1}R, R')$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R' \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \psi & \\ S^{-1}R & & \end{array} \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Note que  $\psi$  está bem definida, ou seja

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \in S^{-1}R, \quad r, r' \in R \text{ e } s, s' \in S, \quad (2.2)$$

então existe  $u \in S$ , tal que  $us'r = usr'$  então  $\phi(us'r) = \phi(usr')$ , equivalente à

$$\phi(u)\phi(s')\phi(r) = \phi(u)\phi(s)\phi(r').$$

Portanto obtemos  $\phi(s)^{-1}\phi(r) = \phi(s')^{-1}\phi(r')$ , pois  $\phi(u), \phi(s'), \phi(s) \in R \setminus \{0\}$ . Basta notar que a associação  $\phi \mapsto \psi$  é a inversa de  $\psi \mapsto \psi \circ \iota$ , a assim provamos a propriedade universal da localização.  $\square$

**Corolário 2.53.** (*Localização comutativa com passagem para quocientes por ideais*). Sejam  $R$  um anel,  $S$  um conjunto multiplicativamente fechado,  $I \subset R$  um ideal e  $\bar{S}$  uma classe de equivalência e a imagem de  $S$  em  $R/I$ . O função natural

$$R \rightarrow S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}R/I(S^{-1}R),$$

induz o isomorfismo

$$S^{-1}(R/I) \cong S^{-1}R/I(S^{-1}R).$$

**Exemplo 2.54.**

(1) Considere a localização do Exemplo 2.47. O Corolário 2.53, é verdade, em particular para

$$(R/I)_p \cong R_p/IR_p.$$

(2) Consideremos como no Exemplo 2.47 o anel de coordenadas  $\mathbb{k}[x_1, x_2]/\langle x_1x_2 \rangle$ . Pela Observação 2.30,  $X = X_1 \cup X_2$ , onde  $X_1 = V(x_1) = (x_1 - \text{eixo})$  e  $X_2 = V(x_2) = (x_2 - C_2)$ . Considere  $p = (1, 0) \in X_1 \setminus X_2$  e  $\mathfrak{m}_p = I(p)$ , como no Lema 2.16. Note que qualquer  $f \in \langle x_2 \subset \mathbb{k}[X_2] = \rangle$  é zero em  $\mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p}$ , já que  $x_1f = 0 \in \mathbb{k}[X]$ , onde  $x \in S = \mathbb{k}[X] \setminus \mathfrak{m}_p$ . Se  $I = x_2\mathbb{k}[X] \subset \mathbb{k}[X]$ , então  $I\mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p}$ , assim, como  $\mathbb{k}[X]/I \cong \mathbb{k}[x_1] = \mathbb{k}[X_1]$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p} &\cong \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p}/I\mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p} \\ &\cong (\mathbb{k}[X]/I)_{\mathfrak{m}_p} \\ &\cong \mathbb{k}[X_1]_{\mathfrak{m}_p} = \mathbb{k}[x_1] \left[ \frac{1}{h} \mid h(p) \neq 0 \right] \subset \mathbb{k}(x_1). \end{aligned}$$

Em geral, localizamos em um ponto  $p$  que pertencem apenas a um componente irredutível, então o anel local em  $p$  coincide com o anel local da componente irredutível em  $p$ .

Queremos agora considerar a  $\mathbb{k}$ -álgebra de funções que são naturalmente definidas em um aberto Zariski perto de um ponto  $p$ , tal que qualquer função que não se anule em  $p$  seja invertível perto de  $p$ . Para motivar a seguinte definição, temos que em geral, para um espaço topológico  $X$ , o **germen de uma função** perto de  $p \in X$ , significam as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$ , definidas em uma vizinhança  $U \in X$ , de  $p$ , onde identificamos dois de estas funções  $U \rightarrow \mathbb{k}$  e  $U' \rightarrow \mathbb{k}$  se elas coincidem em uma vizinhança de  $p$ . Assim, um germen é uma classe de equivalência, que neste trabalho vamos denotar como  $[(U, f)]$

**Definição 2.55.** Sejam  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica e  $p \in X$  um ponto. Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$ , definida em uma vizinhança de  $p$ , é chamada de **regular no ponto**  $p$ , se em algum aberto  $W \subset U$ , as seguintes funções são iguais

$$f = \frac{g}{h},$$

para algum  $g, h \in \mathbb{k}[X]$ , e  $h(w) \neq 0$ , para todo  $w \in W$ . Denotamos como  $O_X(U)$  a  $\mathbb{k}$ -álgebra de funções regulares  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$  em todos os pontos de um aberto  $U \subset X$ .

**Observação 2.56.** Neste trabalho vamos denotar como  $O_{X,p}$  a  $\mathbb{k}$ -álgebra de germes de funções regulares em  $p$ . Se temos as classes de equivalência de pares  $(U, f)$ , com  $p \in U \subset X$ , onde  $U$  é aberto, e  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$  uma função regular, podemos identificamos  $(U, f) \sim (V, g)$  se  $f|_W = g|_W$  sobre um aberto  $p \in W \subset U \cap V$ .

**Exemplo 2.57.**

(1) Para qualquer  $f \in \mathbb{k}[X]$ , temos que  $f : X \rightarrow \mathbb{k}$  é regular em cada ponto, por exemplo, se consideramos  $U = X$  e  $f = \frac{f}{1}$ . No Lema 2.58 vamos ver que funções regulares em cada ponto de  $X$ , sempre surgem desta forma, e portanto

$$O_X(X) \cong \mathbb{k}[X].$$

(2) Sejam  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Temos que

$$\begin{aligned} f : U = D_x = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{k} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^m}, \end{aligned}$$

é regular em qualquer ponto  $p \in U$ , assim  $f \in O(U)$ .

(3) Sejam a variedade  $X = V(x_1x_2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$  considerada na Observação 2.30 e  $U = X \setminus V(x_2) = (x_1 - C_2) \setminus \{0\}$ . Temos que

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} \in O(U), \end{aligned}$$

mas  $(U, f) \sim (U, 0)$ , já que pelo Exemplo 2.47 item (2),

$$y = 0 : U \longrightarrow \mathbb{k},$$

e assim  $[(U, f)] = 0$ .

**Lema 2.58.** Seja  $X \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  e  $p \in X$  um ponto. Então

$$O_{X,p} \cong \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p},$$

onde  $\mathfrak{m}_p = I(p) = \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(p) = 0\}$  é o ideal maximal correspondente ao ponto  $p$ .

*Demonstração.* Vamos provar que o isomorfismo está definido como

$$\begin{aligned} O_{X,p} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p} \\ (U, f) &\mapsto \frac{g}{h} \end{aligned}$$

onde  $f|_U = \frac{g}{h}$ , para  $g, h \in \mathbb{k}[X]$ ,  $h(p) \neq 0$ . A função está bem definida, já que

$$0 \neq h(p) \notin \mathfrak{m}_p \text{ portanto } \frac{g}{h} \in \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p}.$$

Mais ainda, se  $(U, f) \sim (U', f')$ , então  $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$  em um aberto  $p \in D_s \subset U \cap U'$ , onde  $s \in \mathbb{k}[X]$ , portanto  $(gh' - g'h) = 0$  em  $D_s$ . Como  $s(p) \neq 0$ , temos que  $s \notin \mathfrak{m}_p$ . Assim,

$$s(gh' - g'h) = 0,$$

em todo  $X$  e portanto  $s(gh' - g'h) \equiv 0 \in \mathbb{k}[X]$ . Concluimos que  $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$  está  $\mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p}$ . Agora, vamos construir a função inversa. Para  $h \notin \mathfrak{m}_p$ , seja  $U = D_h$ , então

$$\frac{g}{h} \longmapsto (U, \frac{g}{h}).$$

Mais ainda, se  $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$  em  $\mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p}$ , e portanto

$$s(gh' - g'h) = 0,$$

para algum  $s \in \mathbb{k}[X] \setminus \mathfrak{m}_p$ . Então  $s(p) \neq 0$ , com  $p \in D_s$  e  $gh' - g'h = 0$  em  $D_s$ . Note que construímos duas funções, uma inversa da outra, por tanto, temos o isomorfismo que queríamos.  $\square$

**Exemplo 2.59.** Para uma variedade irredutível  $X$ , obtemos um domínio de integridade  $\mathbb{k}[X]$ , então o Lema 2.58 torna-se

$$O_{X,p} = \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}_p} = \mathbb{k}[X] \left[ \frac{1}{h} \mid h(p) \neq 0 \right] \subset \mathbb{k}(X).$$

**Observação 2.60.** Vamos aprensetar uma conclusão importante desta seção. Temos a seguinte correspondência

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variedade irredutíveis } Y \subset X \\ \text{que passam pelo ponto } p \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{Ideais primos em } O_{X,p} \}$$

$$Y = V(J) \longleftrightarrow J \cdot O_{X,p} = \{ f \in O_{X,p} \mid f(Y) = 0 \}$$

onde  $J = I(Y)$ . Em particular, o ponto  $Y = \{p\}$ , corresponde ao ideal maximal  $\mathfrak{m}_p O_{X,p} \subset O_{X,p}$  e pela Proposição 2.50 temos que é o único ideal maximal e seu quociente é uma cobertura para todo o corpo  $\mathbb{k}$ , ou seja

$$O_{X,p} / \mathfrak{m}_p O_{X,p} \xrightarrow{\cong} \mathbb{k}$$

$$\frac{g}{h} \mapsto \frac{g(p)}{h(p)}.$$

Na seguinte seção, vamos aprensetar a aplicação do estudado neste capítulo, para introduzir o um dos conceitos mais importantes de este trabalho, o espaço tangente de Zariski.

## 2.2.1 Propriedades Geométricas Locais

Nesta seção vamos estudar as propriedades geométricas locais, no sentido que elas refletem o comportamento da variedade algébrica  $X$  perto de um ponto dado  $p \in X$ . Motivados pelos conceitos da geometria diferencial (ver [Lee13]), a propriedade local básica será a suavidade e assim definiremos o conceito de espaço tangente de Zariski. Intuitivamente,  $p$  é um ponto suave de  $X$  se o espaço tangente  $T_p X$  aproxima  $X$  perto de  $p$ , no caso contrário, diremos que  $p$  é um ponto singular de  $X$ . Aqui, vamos definir  $T_p X$  sobre um corpo  $k$  algébricamente fechado, e não é necessário nenhum processo do limite como no cálculo diferencial. Comenzaremos com algumas noções de derivação.

## 2.2.2 Derivações

**Definição 2.61.** Sejam  $R$  é um anel e  $M$  é um  $R$ -módulo. A função de grupos abelianos  $D : R \rightarrow M$  é chamada uma **derivação**, se satisfaz a regra de Leibniz

$$D(fg) = fDg + gDf, \quad \text{para } f, g \in R$$

**Observação 2.62.** Se  $R$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra, então dizemos que  $D$  é uma derivação  $\mathbb{k}$ -linear, se é um função de  $\mathbb{k}$ -módulos. Denotamos como  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(R, M)$  o conjunto de todas as derivações  $\mathbb{k}$ -lineares e existe um  $R$ -módulo natural, com a multiplicação definida como

$$bD : f \mapsto b(D(f)) \quad \text{onde } b(D(f)) \in M.$$

**Exemplo 2.63.** Seja  $R = k[x, y]$  o anel de polinômios em duas variáveis. Então, a derivada parcial

$$\begin{aligned} \mathbb{k}[x, y] &\longrightarrow \mathbb{k}[x, y] \\ f(x, y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

é uma derivação de  $R$  para ela mesma.

### Construção do módulo de diferenciais de Kähler.

Sejam  $R$  e  $C$  anéis e  $N$  um ideal de  $C$ , com  $N^2 = 0$ . Seja  $j : C \rightarrow C/N$ , o morfismo natural (ver Observação 1.16),  $u, u' : R \rightarrow C$  dois homomorfismos de anéis tal que

$$ju = ju', \quad e \quad d = u' - u.$$

Note que  $u$  e  $u'$  induzem a mesma estrutura de  $R$ -módulo em  $N$  e assim,  $D : R \rightarrow N$  é uma derivação. De fato

$$\begin{aligned} u'(fg) &= u'(f)u'(g) = (u(f) + D(f))(u(g) + D(g)) \\ &= u(fg) + fD(g) + gD(f). \end{aligned}$$

Por outro, se  $u : R \rightarrow C$  é um homomorfismo e  $D : R \rightarrow N$  é uma derivação, em relação à estrutura do  $R$ -módulo  $N$  induzida por  $u$ , então  $u' = u + D$  é um homomorfismo. Agora, sejam  $\mathbb{k}$  é um anel e  $R$  uma  $\mathbb{k}$ -álgebra e  $S = R \otimes_{\mathbb{k}} R$ . Considere o homomorfismos de  $\mathbb{k}$ -álgebras

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon : S \longrightarrow R & \lambda_1 : R \longrightarrow S & \lambda_2 : R \longrightarrow S \\ (r \otimes r') \longmapsto rr' & r \longmapsto r \otimes 1 & r \longmapsto 1 \otimes r. \end{array}$$

Assim,  $S = R \otimes_{\mathbb{k}} R$  é uma  $R$ -álgebra via  $\lambda_1$ . Denotamos o kernel de  $\varepsilon$ , por  $I_{R/\mathbb{k}}$ , mas, por simplicidade de notação, sô  $I$  e  $I/I^2 = \Omega_{R/\mathbb{k}}$ . Note que os  $S$ -módulos  $I$ ,  $I^2$  e  $\Omega_{R/\mathbb{k}}$ , são também  $R$ -módulos, via  $\lambda_1 : R \rightarrow S$ . O  $R$ -módulo  $\Omega_{R/\mathbb{k}}$ , é chamado de **módulo de diferenciais** ou **diferencial de Kähler** de  $R$  sobre  $\mathbb{k}$ . Temos que  $\varepsilon\lambda_1 = \varepsilon\lambda_2 = id_{\mathbb{k}}$  e um homomorfismo natural  $\nu S \rightarrow S/I^2$  e se escrevemos

$$d^* = \lambda_2 - \lambda_1 \quad e \quad \delta = \nu d^*$$

e obtemos a derivação  $d : R \rightarrow \Omega_{R/\mathbb{k}}$ . Tal que  $S/I^2 = \nu\lambda_1(A) \oplus \Omega_{R/\mathbb{k}}$ , como  $R$ -módulos, então  $S = \lambda_1(R) \oplus I$ . Se identificamos  $\nu\lambda_1(R)$  com  $R$ , obtemos

$$S/I^2 = R \oplus \Omega_{R/\mathbb{k}}.$$

Em outras palavras,  $S/I^2$  é uma extensão trivial de  $\Omega_{R/\mathbb{k}}$  por  $R$ .

**Teorema 2.64.** *Seja  $R$  um anel. O  $R$ -módulo  $\Omega_{R/\mathbb{k}}$  munido com  $d$ , cumpre a seguinte propriedade universal: Se  $D$  é uma derivação de  $R$  sobre  $\mathbb{k}$  em um  $R$ -módulo  $M$ , então existe um única função  $h : \Omega_{R/\mathbb{k}} \rightarrow M$ , tal que  $D = hd$ .*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{D} & M \\ d \downarrow & \nearrow \exists! h & \\ \Omega_{R/\mathbb{k}} & & \end{array}$$

*Demonstração.* Para  $S = R \otimes_{\mathbb{k}} R$ , temos que

$$x \otimes y = xy \otimes 1 + x(1 \otimes y - y \otimes 1) = \varepsilon(x \otimes y) + xd^*y.$$

Portanto, se  $\sum_i x_i \otimes y_i \in I = \ker(\varepsilon)$ , então

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i x_i d^*y_i.$$

Note que  $d^*y \text{ mod } I^2 = dy$ , qualquer elemento de  $\Omega_{R/\mathbb{k}} = I/I^2$ , tem a forma  $\sum_i x_i dy_i$ , com  $x_i, y_i \in R$ . Em outras palavras,  $\Omega_{R/\mathbb{k}}$  é gerado por  $\{dy \mid y \in R\}$  como  $R$ -módulo. Assim,  $h$  é única. Pela existência de  $h$ , tomamos uma extensão trivial  $R \star M$  e definimos o homomorfismo de  $R$ -álgebra

$$\begin{aligned} \phi : S = R \otimes_{\mathbb{k}} R &\longrightarrow R \star M \\ x \otimes y &\longmapsto \phi(x \otimes y) = (xy, xD(y)) \end{aligned}$$

Tal que  $\phi(I) \subseteq M$  e  $M^2 = 0$ , temos  $\phi(I) = 0$ , então, para  $dy \in \Omega_{R/\mathbb{k}}$ , temos que  $\phi$  induz um homomorfismo  $\hat{\phi}$  de  $R$ -álgebras. Usaremos a notação  $R \star \Omega_{R/\mathbb{k}}$  para a restrição definida como

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : S/I^2 = R \star \Omega_{R/\mathbb{k}} &\longrightarrow R \star M \\ (y, dy) &\longmapsto \hat{\phi}(y, dy) = \phi(d^*y) = \phi(1 \otimes y - y \otimes 1) = (0, Dy). \end{aligned}$$

Esto implica uma função  $R$ -linear  $h : \Omega_{R/\mathbb{k}} \rightarrow M$ , tal que  $h \circ d = D$ .  $\square$

**Observação 2.65.** *Uma consequência direta do Teorema 2.64 é o isomorfismo canônico de  $R$ -módulos*

$$\text{Der}_{\mathbb{k}}(R, M) \cong \text{Hom}_R(\Omega_{R/\mathbb{k}}, M),$$

dado por  $D \mapsto (\Omega_{R/\mathbb{k}} \rightarrow M, df \mapsto Df)$ .

**Definição 2.66.** *Sejam  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  um polinômio,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  um ponto. O diferencial de  $f$  em  $p$ , denotado como  $d_p f$ , é definido como*

$$d_p f = \langle df|_{x=p}, x-p \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - a_i) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n].$$

**Observação 2.67.** *Lembre que a expansão de Taylor em  $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , é dada por*

$$\begin{aligned} f &= f(p) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p (x_n - \lambda_n) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p (x_1 - \lambda_1)}_{\text{parte linear em torno de } p} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_p (x_1 - \lambda_1)^2 + \dots \\ &+ \left( \frac{1}{i_1!} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \right) \dots \left( \frac{1}{i_n!} \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} \right) f \Big|_p (x_1 - \lambda_1)^{i_1} \dots (x_n - \lambda_n)^{i_n}. \end{aligned}$$



**Exemplo 2.68.** Seja  $p = 0$ . Pela Observação 2.67 temos que

$$f(x) = f(0) + a_0x_0 + \dots + a_nx_n + \dots,$$

onde a parte linear desta expansão de Taylor é  $d_0f = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ .

**Definição 2.69.** Seja  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica e  $p \in X$  um ponto. O espaço tangente de  $X$  no ponto  $p$ , com  $I(X) = \langle f_1, \dots, f_N \rangle$ , é definido como

$$T_p X = V(d_p f_1, \dots, d_p f_N) = \bigcap_i \ker(df_i) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n.$$

**Observação 2.70.**

- (i) O espaço tangente  $T_p X$  é uma interseção de hiperplanos (ver Definição 2.9)  $V(d_p f)$ , portanto  $T_p X$  é uma subvariedade linear.
- (ii) Para  $p \in T_p X$ ,  $T_p X$  é o plano que "melhor" aproxima  $X$  perto de  $p$ .
- (iii) Fazendo uma translação  $-p + T_p X$ , obtemos o espaço vetorial que "melhor" aproxima  $X$  perto de  $p$ , com 0 correspondente a  $p$ . Este também é um espaço tangente.

**Exemplo 2.71.**

(1) Sejam  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  e  $I(X) = 0$  (ver Exemplo 2.24 item (1)),  $T_p \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ .

(2) Seja a variedade algébrica

$$X = V(y^2 - x^3) = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{k}\},$$

determinada por  $f = y^2 - x^3$ . Se  $p = (t^2, t^3)$ , temos que

$$df = -3x^2 dx + 2y dy = \begin{bmatrix} -3x^2 \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$d_p f = -3t^4(x - t^2) + 2t^3(y - t^3).$$

Para  $t \neq 0$ ,  $T_p X = \ker d_p f$ , é a linha reta, de 1 dimensão, perpendicular à  $(-3t^4, 2t^3)$ , (ver Figura 2). Mas, em  $t = 0$ , temos que  $d_p f = 0$ , então  $T_p X = V(0) = \mathbb{k}^2$  e é de dimensão 2.

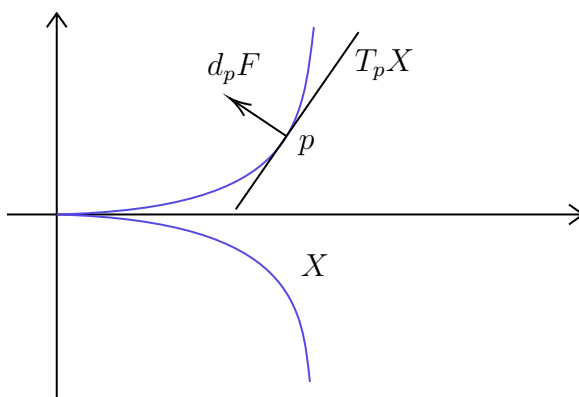


Figura 2

**Observação 2.72.** Lembre-se que uma linha através de  $p$  tem a forma  $\ell(t) = p + tv$ , para algum  $v \in \mathbb{k}^n$ . Uma reta, é chamada de tangente para  $X$  em  $p$ ,  $f_i(\ell(t))$ , tem raiz repetida em  $t = 0$ . Assim,  $T_p X$  é a união de todas as linhas tangentes de  $X$  em  $p$ . De fato, sabemos que  $t = 0$  é uma raiz, já que  $f_i$  se anula em  $p \in X$ .

Para a seguinte definição, vamos utilizar a notação dada na Observação [2.37](#).

**Definição 2.73.** Sejam  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  e  $p \in X$ . Dizemos que  $p$  é um **ponto suave**, se  $\dim_{\mathbb{k}} T_p X = \dim_p X$ . Um ponto  $p$  é dito de **singular**, se  $\dim_{\mathbb{k}} T_p X > \dim_p X$ . Denotamos o conjunto de todos os pontos singulares como  $\text{Sing}(X) \subset X$ .

**Observação 2.74.** Na Definição [2.73](#),  $\dim_p X$  é a dimensão da componente irredutível de  $X$  que contém  $p$ .

**Teorema 2.75.** Sejam  $X$  uma variedade algébrica irredutível de dimensão  $d$ , um polinômio  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  e o ideal  $I(X) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ . Então  $\text{Sing}(X) \subset X$  é uma subvariedade algébrica, dada pela variedade em  $X$ , de todos os menores de tamanho  $(n-d) \times (n-d)$ , da matriz Jacobiana

$$\text{Jac}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}.$$

*Demonstração.* De fato, para  $p \in X$ ,  $T_p X$  é o conjunto de zeros de

$$\varphi_p : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix},$$

portanto,  $p \in \text{Sing}(X)$  se, e somente se  $\dim \ker(\varphi_p^{-1}) > d$ , tal que  $\dim \ker(\text{Jac}_p(f)) > d$ . Mas isso acontece, se, e somente se todos os menores de tamanho  $(n-d) \times (n-d)$ , se anulam. De outra forma, nós encontraríamos colunas linearmente independente  $n-d$ , e portanto a dimensão do posto, seria a pelo menos  $n-d$ , logo o a dimensão do kernel seria pelo menos  $d$ .  $\square$

**Exemplo 2.76.** No Exemplo [2.71](#) item (2),  $f = y^2 - x^3$ , portanto  $\text{Jac}(f) = \begin{bmatrix} -3x^2 & 2y \end{bmatrix}$ ,  $n = 2$  e  $d = 1$ . Assim, todos os menores de tamanho  $1 \times 1$ , se anulam quando  $(x, y) = (0, 0)$ .

No seguinte teorema, vamos utilizar a notação dada na Definição [2.55](#) e o Lema [2.58](#).

**Teorema 2.77.** Sejam  $X$  uma variedade algébrica,  $p \in X$  e o ideal maximal de  $O_{X,p}$ , dado por

$$\mathfrak{m}_p = \left\{ \frac{F}{G} \in O_{X,p} \mid F(p) = 0 \right\}.$$

Então, canonicamente, temos que

$$T_p X \cong (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*.$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos assumir  $p = 0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ . Sejam

$$\begin{aligned} \mathbb{k}[\mathbb{A}^n] \supset \mathfrak{m} &= \{ F : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \rightarrow \mathbb{k} \mid F(0) = 0 \} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \\ \mathbb{k}[X] \supset \overline{\mathfrak{m}} &= \{ F : X \rightarrow \mathbb{k} \mid F(0) = 0 \} = \mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[X] = \mathfrak{m} + I(X) \\ O_{X,0} \supset \mathfrak{m}_0 &= \left\{ \frac{F}{G} \mid F, G \in \mathbb{k}[X], G(0) \neq 0, F(0) = 0 \right\} = \mathfrak{m} \cdot O_{X,0}, \end{aligned}$$

ideais maximais respectivamente. Provemos o teorema para  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ . Note que  $d_0F = \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \Big|_0 \cdot x_i$  é um funcional linear. Utilizando o Exemplo 2.71 item (3), temos que

$$T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \cong \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n,$$

portanto  $d_0F \in (T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n)^*$ , e assim

$$\begin{aligned} d_0 : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow (T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n)^* \\ F &\longmapsto d_0F, \end{aligned}$$

onde  $d_0$  é linear, já que

$$d_0(\lambda F + \mu G) = \lambda d_0F + \mu d_0G.$$

Note que se restringimos  $d_0$  à o ideal maximal  $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  daqueles  $F$ , com  $F(0) = 0$ , obtemos

$$d_0|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow (T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n)^*,$$

talque  $d_0|_{\mathfrak{m}}$  é linear e sobrejetora, porque  $d_0x_i = x_i$  e mais ainda, são bases para  $(T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n)^*$ . Note que  $\ker(d_0|_{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}^2$  e portanto

$$d_0|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow (T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n)^*,$$

é um isomorfismo. De fato,

$$\begin{aligned} d_0f = 0 &\iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0 \\ &\iff f \in \mathfrak{m}^2, \end{aligned}$$

já que  $f$  sô tem monomios de grau  $\geq 2$ . Agora, vamos provar o teorema para o caso geral,  $X$ . Note que inclusão  $\iota : T_0X \hookrightarrow T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  é injetora e o dual, explicitamente,  $\iota^*$  é a função restringida assim

$$\iota^*f = f \circ \iota = f|_{T_0X} : T_0X \xrightarrow{\iota} T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \xrightarrow{f} \mathbb{k},$$

é sobrejetora

$$\iota^* : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong (T_0\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n)^* \longrightarrow (T_0X)^*,$$

portanto  $\iota^* \circ d_0 : \mathfrak{m} \longrightarrow (T_0X)^*$ , é sobrejetora. Agora, como  $\bar{\mathfrak{m}}$  denota a imagem de  $\mathfrak{m}$  no quociente  $\mathbb{k}[X] = R/I(X)$ , precisamos verificar que o  $\ker(\iota^* \circ d_0) = \mathfrak{m}^2 + I(X) = \bar{\mathfrak{m}}^2 \subset \mathbb{k}[X]$ , já que  $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + I(X)) \cong (T_0X)^*$ . Note que

$$\begin{aligned} f \in \ker(\iota^* \circ d_0) &\iff \iota^*d_0f = d_f|_{T_0X} = 0 \\ &\iff d_0f \in I(T_0X) \\ &\iff d_0f \in \langle d_0f_1, \dots, d_0f_N \rangle, \text{ onde } I(X) = \langle f_1, \dots, f_N \rangle \\ &\iff d_0f = \sum_{i=1}^n a_i d_0f_i, \text{ onde } a_i \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \\ &\iff d_0 \left( f - \sum_{i=1}^n a_i d_0f_i \right) = - \left( \sum_{i=1}^n d_0a_i \right) \cdot f_i(0) = 0, \text{ } 0 = p \in V(f_1, \dots, f_N) \\ &\iff f - \sum_{i=1}^n a_i f_i \in \ker(d_0|_{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}^2 \\ &\iff f \in I(X) + \mathfrak{m}^2. \end{aligned}$$

Além, como  $I(X) \subset \mathfrak{m}$ , e já que  $f|_X = 0$ , implica  $f|_p = 0$ , podemos concluir que

$$(T_p X)^* \cong \mathfrak{m} / (\mathfrak{m}^2 + I(X)) \cong \overline{\mathfrak{m}} / \overline{\mathfrak{m}^2},$$

onde o último isomorfismo é dado pelo teorema de isomorfismos, ou seja, fazendo o quociente do numerador pelo denominador por um submódulo comum  $I(X)$ , assim

$$\mathfrak{m} \longrightarrow \overline{\mathfrak{m}} / \overline{\mathfrak{m}^2},$$

onde a função é sobrejetiva, com kernel  $\mathfrak{m}^2 + I(X)$ . Agora, vamos localizar, é dizer vamos provar o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \overline{\mathfrak{m}} / \overline{\mathfrak{m}^2} &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2 \\ F &\longmapsto \frac{F}{1}. \end{aligned}$$

Vejamos que  $\varphi$  é sobrejetora. Para  $\frac{F}{G} \in \mathfrak{m}_{X,0}$ , seja  $c = G(0) \neq 0$ , então temos que

$$\varphi\left(\frac{F}{c}\right) - \frac{F}{G} = \frac{F}{c} - \frac{F}{G} = \frac{F}{1} \cdot \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{G}\right) \in \mathfrak{m}_0,$$

já que  $\frac{F}{1} \in \mathfrak{m}_0$  e  $\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{G}\right) \in \mathfrak{m}_0$ , e concluímos que  $\varphi\left(\frac{F}{c}\right) = \frac{F}{G}$  módulo  $\mathfrak{m}_0^2$ . Falta provar que  $\varphi$  é injetora. Vamos ver que  $\ker(\varphi) = 0$ . Suponha  $\frac{F}{1} \in \mathfrak{m}_0^2$ . Note que  $\mathfrak{m}_0^2$  é finitamente gerado pelo produtos de quaisquer dois elementos de  $\mathfrak{m}_0$ , então consideremos toda a soma de produtos, ou seja

$$\frac{F}{1} = \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{H_i} \cdot \frac{G'_i}{H'_i}$$

onde  $G_i, G'_i \in \overline{\mathfrak{m}}$  e  $H_i, H'_i \in \mathbb{k}[X] \setminus \overline{\mathfrak{m}}$ . Vamos tomar denominadores comuns e redefinir  $G_i$ , para obter

$$\frac{F}{1} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i G'_i}{1},$$

para algum  $H \in \mathbb{k}[X] \setminus \overline{\mathfrak{m}}$ . Então,

$$s \cdot \left( FG - \sum_{i=1}^n G_i G'_i \right) = 0 \in \mathbb{k}[X],$$

para algum  $s \in \mathbb{k}[X] \setminus \overline{\mathfrak{m}}$ , assim  $sFH \in \overline{\mathfrak{m}^2} = \mathfrak{m} + I(X)$ . Como  $f \in \overline{\mathfrak{m}}$ , temos que  $(sH - s(0)H(0))F \in \overline{\mathfrak{m}^2}$ , já que  $sH - s(0)H(0)$  e  $F$ , se anulam em 0. Assim,  $s(0)H(0)F \in \overline{\mathfrak{m}^2}$ , forçando que  $F \in \overline{\mathfrak{m}^2}$ . Portanto  $\frac{F}{1} = 0 \in \overline{\mathfrak{m}} / \overline{\mathfrak{m}^2}$ , como precisávamos. E assim provamos todo o teorema.  $\square$

### Observação 2.78.

- (i) O espaço vetorial  $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$ , é chamado de **espaço cotangente de  $X$  no ponto  $p$** .
- (ii) Uma consequência direta do Teorema [2.77](#), é o isomorfismo

$$T_p X \cong (\mathcal{I}_p / \mathcal{I}_p^2)^*,$$

onde  $\mathcal{I}_p = \langle x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n \rangle \subset \mathbb{k}[X]$ .

(iii) Note que  $T_p X$  é independente da eleição de  $f_i$ , com  $I(X) = \langle f_1, \dots, f_N \rangle$  e é independente da eleição de  $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , em outras palavras, o isomorfismo é invariante. Vamos formalizar este comentário em um Corolário.

**Corolário 2.79.**  $T_p X$  sô depende de uma vizinhança aberta de  $p \in X$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.77,  $T_p X$  sô depende do anel local  $\mathcal{O}_{X,p}$ , cujo único ideal maximal é  $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_{X,p}$ .  $\square$

**Definição 2.80.** Sejam  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  uma variedade algébrica e  $p \in X$  um ponto. Definimos o **espaço tangente Zariski de  $X$  em  $p$** , por

$$T_p X \cong (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*.$$

**Observação 2.81.** Para  $F : X \rightarrow Y$  um morfismo de variedades algébricas, tem-se que:

(i) Existe um homomorfismo de anéis locais

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{O}_{Y, F(p)} &\longrightarrow \mathcal{O}_{X,p} \\ \mathfrak{m}_{F(p)} &\longrightarrow \mathfrak{m}_p \\ g &\longmapsto F^* g := g \circ F. \end{aligned}$$

já que  $g(F(p)) = 0$  implica  $(F^* g)(p) = 0$ .

(ii) Podemos construir uma função derivação

$$D_p F : T_p X \longrightarrow T_{F(p)} Y.$$

Com efeito, por (i), temos que  $F^*(\mathfrak{m}_{F(p)}) \subset \mathfrak{m}_p$ , então  $F^*(\mathfrak{m}_{F(p)}^2) \subset \mathfrak{m}_p^2$  e assim

$$F^* : \mathfrak{m}_{F(p)} / \mathfrak{m}_{F(p)}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2,$$

e seu dual define a função de derivação

$$D_p F = (F^*)^* : (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^* \longrightarrow (\mathfrak{m}_{F(p)} / \mathfrak{m}_{F(p)}^2)^*.$$

(iii) Localmente, para abertos Zariski em torno dos pontos  $p$  e  $F(p)$ , podemos identificar  $D_p F$  com a matriz Jacobiana de  $F$ . Mais precisamente, note que localmente,  $F : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m$ , com  $p = 0$  e  $F(p) = 0$ , onde a matriz Jacobiana  $Jac(F) = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]$  age por multiplicação à esquerda assim

$$\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \cong T_0 \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m \cong T_0 \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m.$$

**Exemplo 2.82.** Sejam  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  e  $V(y - x^2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$  duas variedades algébricas e

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 &\longrightarrow V(y - x^2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2 \\ t &\longmapsto F(t) = (t, t^2) \end{aligned}$$

um morfismo de variedades algébricas, tal que  $F(0) = (0, 0)$ . Para  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  temos que

$$\mathfrak{m}_0 = t \cdot \mathbb{k}[t]_{(t)} \subset \mathbb{k}[t]_{(t)},$$

ou seja, invertemos qualquer elemento que não seja um múltiplo de  $t$ . Para  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$ , temos que

$$\mathfrak{m}_{F(0)} = \langle x, y \rangle \cdot (\mathbb{k}[x, y] / \langle y - x^2 \rangle)_{\langle x, y \rangle} \subset (\mathbb{k}[x, y] / \langle y - x^2 \rangle)_{\langle x, y \rangle}.$$

Note que a função  $F^*$  da Observação 2.81 para nosso exemplo está definida como

$$\overline{ax + by + \dots} \in \mathfrak{m}_{F(0)} / \mathfrak{m}_{F(0)}^2 \longmapsto \overline{at + at^2} = a\bar{t} \in \mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$$

e portanto

$$D_0F = (F^*)^* : t^* \longmapsto x^*,$$

onde  $t^*(a\bar{t}) = a$  e  $x^*(\overline{ax + by}) = a$ , e podemos concluir que  $D_0F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , nas bases  $x^*, y^*$  do conjunto de contradomínio e nas bases  $t^*$  no domínio. Note que isto coincide com a matriz Jacobiana de derivadas parciais

$$D_0F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O seguinte teorema é uma das conclusões principais deste capítulo. Precisaremos de toda a teoria estudada, mas, principalmente, a Definição 1.10, a Definição 1.17, a Definição 2.61, a Definição 2.55 e a Observação 2.56. O que denotamos como  $T_pX$ , no Teorema 2.77, vai corresponder á  $p + T_pX$  no teorema a seguir, já que queremos expressar  $T_pX$  como espaço vetorial e não como um plano afim transladado. O objetivo é resaltar a importância do conceito do espaço tangente, neste trabalho, e sua relação com o diferencial de Kähler.

**Teorema 2.83.** *Seja  $X = V(f_1, \dots, f_n) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ . As seguintes definições são equivalentes:*

(i) *Escrevemos  $\ell_v(t) = p + tv$ , para a reta em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , através de  $p$  com vetor velocidade  $v$ . Assim,  $T_pX$ , é a união dos  $\ell_v$ , tal que todos os  $f_j(\ell_v(t))$  de ordem  $\geq 2$ , em  $t = 0$ , se anulam. Note que  $p + T_pX \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ .*

(ii) *Seja  $d_p f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - a_i)$ . Assim,  $p + T_pX$  é a interseção de hiperplanos e escrevemos*

$$p + T_pX = V(d_p f_1, \dots, d_p f_N) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n.$$

(iii) *Seja o operador  $D_p f \cdot v = \langle \partial f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}(v_i)$ . Assim,  $T_pX$  é o espaço vetorial*

$$T_pX = \ker(D_p f_1) \cap \dots \cap \ker(D_p f_N) \subset \mathbb{k}^n.$$

(iv) *Seja  $Jac(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$  a matriz Jacobiana de  $f = (f_1, \dots, f_N) : \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ , portanto  $X = f^{-1}(0)$ . Assim, temos*

$$T_pX = \ker(Jac(f)).$$

(v) *Seja  $\mathbb{k}$  um  $O_{X,p}$ -módulo, via*

$$\begin{array}{ccc} O_{X,p} / \mathfrak{m}_p & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{k} \\ G & \longmapsto & G(p) \\ H & \longmapsto & H(p) \end{array}$$

por tanto temos que

$$T_pX = Der_{\mathbb{k}}(O_{X,p}, \mathbb{k}).$$

(vi) O espaço cotangente de  $X$  no ponto  $p$ , é o  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial  $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  e seu dual é

$$T_p X = (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*.$$

(vii)

$$T_p X = \text{Hom}_{\mathbb{k}\text{-alg}}(O_{X,p}, \mathbb{k}[t]/t^2).$$

*Demonstração.* É uma consequência imediata da Definição 1.10, Definição 1.17, Definição 2.61, Definição 2.55, Observação 2.56 e do Teorema 2.77.  $\square$

**Observação 2.84.** Uma conclusão desta seção é: Na construção do diferencial de Kähler dada em 2.2.2 (ver Observação 2.65), se  $R$  é um anel local, com ideal maximal  $\mathfrak{m}$  e corpo residual  $R/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$ , temos que existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 &\xrightarrow{\cong} \Omega_{R/\mathbb{k}} \otimes_R \mathbb{k} \\ f &\longmapsto df. \end{aligned}$$

Se denotamos  $\Omega_{X,p} = \Omega_{O_{X,p}/\mathbb{k}}$ , para  $X$  uma variedade algébrica, temos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 &\xrightarrow{\cong} \Omega_{X,p} \otimes_{O_{X,p}} \mathbb{k} \\ f &\longmapsto df, \end{aligned}$$

mais ainda, temos

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{k}}(O_{X,p}, \mathbb{k}) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{O_{X,p}}(\Omega_{X,p}, \mathbb{k}) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{x=p} &\longmapsto (dx_j)^*, \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{k} = O_{X,p}/\mathfrak{m}_p$ , como um  $O_{X,p}$ -módulo e  $(dx_j)^*$  é definido como

$$(dx_j)^*(dx_i) = dx_i \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \delta_{i,j},$$

onde a última expressão significa a ação da derivação na matriz Jacobiana.

**Exemplo 2.85.** Este exemplo tem a intenção de descrever  $T_p \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , utilizando as equivalências dadas no Teorema 2.77

- (1) Pelo Teorema 2.77 item (i), temos que  $I(\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n) = \{0\}$  e  $(0 \circ \ell)(t)$  se anula para  $\ell(p) = p + tv$ , para qualquer  $v \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ .
- (2) Pelo Teorema 2.77 item (ii), (iii) ou (iv), temos que  $\ker(D_p 0) = \ker(0) = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ .
- (3) Pelo Teorema 2.77 item (v), temos que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, p} = \left\{ f = \frac{g}{h} \mid h(p) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$$

e assim,

$$\text{Der}_{\mathbb{k}}(O_{\mathbb{A}^n, p}, \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}D_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{k}D_n$$

onde  $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$ , é uma derivação que cumpre a regra de Leibniz (ver Definição 2.61).

(4) Pelo Teorema 2.77 item (vi) e a Definição 2.80 temos que

$$\mathfrak{m}_p = \langle x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n \rangle \cdot \mathcal{O}_{X,p} = \left\{ \frac{g}{h} \mid g(p) = 0, h(p) \neq 0 \right\} \subset k(x_1, \dots, x_n).$$

Assim, obtemos o isomorfismo

$$\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{k}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{k}e_n \cong \mathbb{k}^n$$

de espaços vetoriais com bases  $e_i = \overline{x_i - p_i}$ , assim

$$(\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^* \cong \mathbb{k}\overline{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{k}\overline{D}_n,$$

usando a base dual

$$\overline{D}_j = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{x=p} : \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow \mathbb{k}.$$

Para este trabalho, é importante entender o espaço tangente do conjunto aberto Zariski dado no Exemplo 2.11. Além disso, precisamos definir, varios dos conceitos anteriores, para grupos adequados, que permitam a construção da variedade principal deste trabalho, as variedades de quivers.

## 2.3 Grupos Lineares Algébricos

Neste trabalho, os grupos algébricos lineares são uma ferramenta, que vai permitir a descrição de alguns objetos algébricos na seguinte seção, por isso, vamos estudar todos os conceitos anteriores, mas nestos grupos particulares, sobre um corpo algébricamente fechado.

Aproveitando toda a teoria, também vamos estudar algumas das propriedades das órbitas, mergulhadas naturalmente na estrutura dos grupos lineares algébricos, agindo em uma variedade algébrica, porquanto arbitraria.

**Definição 2.86.** Um grupo linear algébrico é uma variedade algébrica  $G$  munido com uma estrutura de grupo tal que o morfismo produto

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e o morfismo inverso

$$\begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são morfismos de variedades algébricas.

### Exemplo 2.87.

- (1) O grupo aditivo  $G = (\mathbb{k}, +)$  de  $\mathbb{k}$  é definido pelo ideal nulo  $I = (0)$  em  $\mathbb{k}[x]$  e a soma está dada por um polinômio, por tanto  $G$  é um grupo algébrico, denotado  $G_a$ .



- (2) O grupo multiplicativo  $G = (\mathbb{k}^\times, \cdot)$  de  $\mathbb{k}$ , pode ser identificado com o conjunto de pares  $\{(x, y) \in \mathbb{k}^2 \mid xy = 1\}$ , ou seja, o conjunto algébrico definido por o ideal  $I = (xy - 1) \triangleright \mathbb{k}[x, y]$ , onde o produto é componente a componente. Este grupo é denotado como  $G_m$ .
- (3) Considere o aberto Zariski do Exemplo 2.11 (1). Seja uma variedade algébrica  $W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2+1}$ , definido como

$$W := \{(x_{ij}, t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2+1} \mid \det(A)t = 1\}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \phi : GL_n(\mathbb{k}) &\longrightarrow W \\ (a_{i,j}) &\longmapsto \left( (a_{i,j}), \frac{1}{\det(a_{i,j})} \right), \end{aligned}$$

onde  $((a_{i,j}), \frac{1}{\det(a_{i,j})})$  é uma  $(n^2 + 1)$ -tupla. Por definição de  $W$  temos que

$$\det(a_{i,j}) \cdot \frac{1}{\det(a_{i,j})} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

assim  $\phi$  é bijetora e portanto  $GL(n, k)$  é a variedade algébrica

$$GL_n(\mathbb{k}) = \{A \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2+1} \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Além, pela Observação 2.10, note que

$$GL_n(\mathbb{k}) \times GL_n(\mathbb{k}) = \{(A, B) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2+1} \times \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2+1} \mid \det(A) \neq 0 \text{ e } \det(B) \neq 0\},$$

também é um conjunto fechado com a topologia de Zariski, ou seja uma variedade algébrica. Agora vamos provar que

$$\begin{aligned} f : GL_n(\mathbb{k}) \times GL_n(\mathbb{k}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{k}) & \iota : GL_n(\mathbb{k}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{k}) \\ (A, B) &\longmapsto A \cdot B & A &\longmapsto A^{-1}, \end{aligned}$$

são morfismos de variedades algébricas. Se  $A = (a_{i,j})$  e  $B = (b_{i,j})$ , então o produto de matrizes está definido como

$$(a_{i,j}) \cdot (b_{i,j}) = (c_{i,j}),$$

onde  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$ , logo  $f$  é um morfismo de variedades algébricas. Por outro lado, pelo teorema de Cayley-Hamilton temos que

$$\chi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A^1 + \alpha_0I_n = 0_n.$$

Se  $\alpha_0 \neq 0$  então

$$\begin{aligned} A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \dots + \alpha_1A &= -\alpha_0I_n \\ \text{portanto } A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \alpha_{n-2}A^{n-3} + \dots + \alpha_1A &= -\alpha_0A^{-1} \\ \text{tal que } A^{-1} &= \frac{-1}{\alpha_0} (A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \dots + \alpha_1A). \end{aligned}$$

Assim  $\iota$  é um morfismo de variedades algébricas, logo  $GL_n(\mathbb{k})$  é um grupo algébrico. Note que  $\prod GL_n(k)$  também é um grupo algébrico.

**Observação 2.88.** No Exemplo 2.87 o anel de coordenadas respectivamente, é dado por:

(i)  $\mathbb{k}[G] = \mathbb{k}[x]$ .

(ii)  $\mathbb{k}[G] = \mathbb{k}[x, y]/(xy - 1) \cong \mathbb{k}[x, x^{-1}]$ .

(iii)  $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})] = \mathbb{k}[a_{i,j}, t \mid 1 \leq i, j \leq n]/(\det(a_{i,j})t - 1)$   
 $\cong \mathbb{k}[a_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n]_{\det(a_{i,j})}$ , a localização de  $\mathbb{k}[a_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n]$  no conjunto multiplicativo gerado por  $\det(a_{i,j})$ .

Funções entre grupos algébricos, preservam a estrutura de grupo mais a estrutura de variedade algébrica.

**Definição 2.89.** Um função  $\varphi : G \rightarrow G'$  de grupos lineares algébricos e um **morfismo de grupos lineares algébricos**, se é um homomorfismo de grupo e também é um morfismo de variedades algébricas, ou seja que o função induzido  $\varphi^* : \mathbb{k}[G'] \rightarrow \mathbb{k}[G]$  é um homomorfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras.

**Exemplo 2.90.**

(1) Se  $G$  é um subgrupo fechado de  $GL_n(\mathbb{k})$  então o morfismo injetivo natural  $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{k})$  é um morfismo de grupos lineares algébricos.

(2) O função determinante  $\det : GL_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ , definido como usual  $A \mapsto \det A$ , é um homomorfismo de grupos e claramente também é um homomorfismo de variedades, portanto é um morfismo de grupos algébricos.

**Observação 2.91. (O espaço tangente Zariski de um grupo linear algébrico.)** No subseção anterior, estudamos de forma extensa o espaço tangente Zariski. A priori, a mesma análise não pode ser feito para um grupo linear algébrico. Para isto, requerimos do conceito de Álgebra de Lie de um grupo algébrico linear que vai permitir "linearizar" como foi feito no caso da parábola. Vamos ver de forma superficial este espaço tangente Zariski e os detalhes podem ser encontrados em [MT11] e em [Kim03]. Um cálculo rápido mostra que se  $d_1$  e  $d_2$  são duas derivações Definição 2.61 do anel  $R$  então o  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial  $Der_{\mathbb{k}}(R)$  das derivações de  $R$  tem estrutura de álgebra de Lie com o colchete de Lie bem definido. Seja  $R = \mathbb{k}[G]$  o anel de coordenadas de um grupo linear algébrico  $G$ , então para  $x \in G$  temos a ação  $\lambda_x : \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}[G]$  em  $\mathbb{k}[G]$  via  $(\lambda_x \cdot f)(g) := f(x^{-1}g)$  para  $f \in \mathbb{k}[G]$  e  $g \in G$ . Assim, a álgebra de Lie de  $G$  é o subespaço

$$Lie(G) := \{d \in Der_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[G]) \mid d\lambda_x = \lambda_x d, \forall x \in G\},$$

de todas as derivações invariantes à esquerda de  $\mathbb{k}[G]$ , a subálgebra de Lie de  $Der_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[G])$ . Pela Propriedade Universal do diferencial de Kähler Teorema 2.64 temos que para uma variedade algébrica  $X$  o espaço tangente de  $X$  em um ponto  $x \in X$  está definido como

$$T_x X = \{\delta : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k} \mid \delta(fg) = f(x)\delta(g) + \delta(f)g(x), \text{ com } f, g \in \mathbb{k}[X]\},$$

o  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial de derivações pontuais em  $x$ . No caso que  $X$  seja um grupo algébrico  $G$ , então  $G$  age em ele mesmo por translação à esquerda e assim o espaço tangente em qualquer elemento  $g \in G$  é naturalmente isomorfo para  $T_1(G)$ , ou seja o espaço tangente na identidade. Portanto, sempre vamos considerar o espaço tangente  $T_1(G)$ . Agora

$$\theta : Lie(G) \rightarrow T_1(G), \quad \theta(D)(f) := D(f)(1)$$

é um função  $\mathbb{k}$ -linear. Na verdade, um cálculo simples mostra que este é um isomorfismo de espaços vetoriais, ver [Kim03]. Com isso, a estrutura de álgebra de Lie em  $Lie(G)$  pode ser transportada para  $T_1(G)$ . Assim, se  $G = GL_n(\mathbb{k})$  é fácil ver que  $Lie(GL_n(\mathbb{k})) \cong \mathfrak{gl}_n$  onde  $\mathfrak{gl}_n$  é a álgebra de Lie das matrizes quadradas  $n \times n$   $M_n(\mathbb{k})$  com colchete de Lie  $[X, Y] = XY - YX$ . Só basta definir

$$\mathfrak{gl}_n \longrightarrow Der_{\mathbb{k}}(G), \quad X \longmapsto D_X$$

por  $D_X(a_{ij}) := \sum_{l=1}^n x_{il}X_{lj}$ , lembrando que  $\mathbb{k}[G] = \mathbb{k}\left[a_{ij}, \frac{1}{\det a_{ij}}\right]$  e provando que  $D_X$  é uma derivação, mais ainda uma derivação invariante à esquerda e que  $X \mapsto D_X$  define um homomorfismo de álgebras de Lie.

**Definição 2.92.** Um espaço topológico  $X$  é dito de **conexo**, se não pode-se decompor como união disjunta  $X = X_1 \sqcup X_2$ , onde cada  $X_i$  é um subconjunto fechado não vazio.

**Exemplo 2.93.**

(1) Sejam os grupos  $G_a$  e  $G_m$  do Exemplo 2.87. Pela Proposição 2.34 e a Observação 2.88, note que  $\mathbb{k}[G_a] = \mathbb{k}[x]$  e  $\mathbb{k}[G_m] = \mathbb{k}[x, x^{-1}]$ , são domínios de integridade, logo  $G_a$  e  $G_m$  são conexos.

(2) Análogamente, o grupo linear geral  $GL_n(\mathbb{k})$ , é conexo, pois  $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})] = \mathbb{k}[x_{i,j}]_{\det(x_{i,j})}$  é um domínio de integridade, sendo uma localização do anel de polinômios  $\mathbb{k}[x_{i,j}]$ .

### 2.3.1 Propriedades das Órbitas

Para o objetivo de este trabalho, precisamos fazer uma caracterização das órbitas sub uma ação em particular, logo algumas definições e resultados da teoria de órbitas vai ser apresentados como ferramenta importante para a seguinte seção. Os seguinte são uma parte pequena do que na literatura se condesidera como teoria de órbitas.

**Definição 2.94.** Seja  $X$  uma variedade algébrica. Um **subconjunto localmente fechado** de  $X$ , é a interseção de um subconjunto aberto e outro fechado. Um subconjunto de  $X$  é chamado de **construtível** se é a união de conjuntos localmente fechados.

**Exemplo 2.95.** Seja a variedade algébrica estudada na Observação 2.30. Um exemplo de um conjunto construtível mas não localmente fechado é

$$\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2 \setminus \{x - C_2\} \cup \{0\} = \{(x, y) \mid x = yz, \text{ para algum } z\}.$$

Este exemplo tem como objetivo, motivar o Teorema 2.97

A seguinte definição é totalmente inspirada na Definição 2.36 e a Definição 2.39.

**Definição 2.96.** Sejam  $X$  uma variedade algébrica e  $U \in X$  um subconjunto localmente fechado não vazio. Definimos a **dimensão** de  $U$  como o conjunto

$$\sup \{n \mid \exists Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n \text{ subconjuntos fechados irredutíveis } U\}$$

Temos que  $\dim U = \dim \bar{U}$ . If  $W = U \cup V$  then  $\dim W = \max \{\dim U, \dim V\}$ .

**Teorema 2.97.** *Seja  $X$  uma variedade algébrica. Então  $Y \subset X$  é construtível se, e somente se contem um subconjunto aberto e denso em seu fecho. Em particular,  $Y$  é construtível se, e somente se, é a união disjunta de subconjuntos localmente fechados.*

*Demonstração.* Para a primeira parte, se  $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ , onde  $Y_i$ , é a interseção de um subconjunto aberto e outro fechado de  $X$ , aplicamos indução sobre  $r$  e vamos obter um subconjunto aberto e denso  $U \subset \overline{Y}$  contido em  $Y$ . Para a segunda parte se  $Y = U \cup (Y \setminus U)$  e fazemos de novo indução, conseguimos provar a segunda parte do teorema.  $\square$

A seguinte definição é totalmente inspirada na Observação 2.33, na seção anterior.

**Definição 2.98.** *Seja  $X$  uma variedade algébrica. Um subconjunto  $U \subset X$  é irreduzível se qualquer subconjunto não vazio de  $U$  que é aberto em  $U$  é denso em  $U$ .*

A demonstração do seguinte Teorema será omitida para não fugir dos scopus de este trabalho e a mesma pode ser encontrada em [FR05, Theorem 4.91, pp. 49]

**Teorema 2.99.** [FR05] (Teorema de Chevalley) *Sejam  $X, Y$  variedades algébricas e  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo. Então  $f(X)$  contém um subconjunto aberto e denso de  $f(X)$ . Em particular,  $f(X)$  é construtível em  $Y$ .*

Existem varias versões do Teorema 2.99. Neste trabalho vamos precisar de duas de elas. A seguir vamos apresentar a versão que relaciona as dimensões das variedades algébricas e seus componentes irreduzíveis. A demonstração pode ser encontrada em [Cra93].

**Teorema 2.100.** [Cra93] *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo de variedades algébricas tal que  $f(X) = Y$ , então qualquer componente irreduzível de  $f^{-1}(y), y \in Y$  tem dimensão pelo menos  $\dim X - \dim Y$ . Mais ainda, existe um subconjunto aberto não vazio  $U \subseteq Y$  tal que  $\dim f^{-1}(u) = \dim X - \dim Y$  para todo  $u \in U$ .*

**Proposição 2.101.** *Se  $\varphi : G \rightarrow G'$  é um homomorfismo de grupos algébricos, então  $\ker \varphi$ , é um subgrupo fechado normal de  $G$ , e se  $G$  for irreduzível,  $\text{im } \varphi$  é um subgrupo fechado de  $G'$ .*

*Demonstração.* A primeira parte é uma implicação direita de teoria de grupos. Para a segunda parte, temos que pelo Teorema 2.99, a  $\text{im } \varphi$  é um conjunto construtível, e como é denso em  $\overline{\text{im } \varphi}$ , então deve conter um aberto  $U$  grupo algébrico  $G$ . Suponha que  $G$  irreduzível, então  $\overline{\text{im } \varphi}$  é irreduzível e assim  $U$  é denso. Desse modo, para qualquer  $g' \in \overline{\text{im } \varphi}$ , os abertos  $U$  e  $U^{-1} \cdot g'$  se intercectam, ou seja  $g' \in U \cdot U$ , o que mostra que  $U \cdot U = \overline{\text{im } \varphi}$ . Como  $U \cdot U \subseteq \text{im } \varphi$ , concluímos que  $\text{im } \varphi = \overline{\text{im } \varphi}$ .  $\square$

Os exemplos das seguintes definições, vão ser apresentados no seguinte capítulo a detalhe, para o caso particular do interesse deste trabalho.

**Definição 2.102.** *Sejam  $X$  uma variedade algébrica e  $G$  um grupo algébrico. Uma ação de  $G$  em  $X$  é um morfismo*

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot x) &= (g \cdot h) \cdot x \quad \forall g, h \in G, x \in X \\ e \cdot x &= x \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

**Definição 2.103.** Seja  $G$  um grupo algébrico e  $X$  uma  $G$ -variedade. Se  $x \in X$ , definimos a  $G$ -órbita (ou simplesmente órbita) de  $x$ , denotada como  $\mathcal{O}_x$ , como o subconjunto

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X.$$

O subgrupo estabilizador ou subgrupo de isotropia de  $x \in X$  é o conjunto

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \trianglelefteq G.$$

Dizemos que  $X$  é um **espaço homogêneo** se a ação de  $G$  em  $X$  é transitiva, ou seja, uma ação é **transitiva** se existe  $x \in X$  tal que  $\mathcal{O}_x = X$ . Neste caso dizemos que  $X$  é uma  $G$ -variedade algébrica, simplesmente  $G$ -variedade ou um  $G$ -espaço. Definimos o **morfismo de órbita**

$$\begin{aligned} \pi_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto \pi_x(g) = g \cdot x, \end{aligned}$$

para um ponto fixo  $x \in X$ .

**Proposição 2.104.** Seja  $X$  um  $G$  espaço. Para cada  $x \in X$ , o grupo estabilizador  $G_x$  é um subgrupo fechado.

*Demonstração.* Pela Definição 2.103, para qualquer elemento  $x \in X$ , o morfismo de órbita  $\pi_x(g)$ , é um morfismo de variedades algébricas, portanto  $\pi_x^{-1}(x) = G_x$  é um subgrupo fechado.  $\square$

**Exemplo 2.105.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{k}$ . Um morfismo de grupos algébricos

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V)$$

é chamado de **representação racional de  $G$** , e o espaço  $V$  é chamado de  $\mathbb{k}G$ -módulo. Assim,  $V$  é um  $G$ -espaço via a ação

$$(g, v) \longmapsto \varphi(g) \cdot v$$

**Observação 2.106.**

(i) Se  $X$  é um  $G$ -espaço e fixamos  $g \in G$ , o morfismo definido como

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \varphi_g(x) = g \cdot x, \end{aligned}$$

é um isomorfismo de variedades algébricas com inverso  $\varphi_{g^{-1}}$ , mais ainda,  $\varphi_1 = id_X$ .

(ii) Note que da Definição 2.103 e do fato que  $G_x$  é um subgrupo de  $G$ , podemos construir a função

$$\begin{aligned} G_x &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ g &\longmapsto g \cdot x, \quad g \in G, \end{aligned}$$

que induz uma bijeção

$$G/G_x \longrightarrow \mathcal{O}_x,$$

portanto as órbitas de quaisquer dois pontos de  $X$ , não se cruzam ou coincidem, ou seja que as órbitas definem uma partição do conjunto  $X$ , e assim o estabilizador é um subgrupo normal, já que estabiliza cada elemento da órbita. O quociente, pela relação de equivalência definida por esta partição, é chamado de **espaço órbitas de  $X$  por  $G$** , e é denotado por  $X/G$ . Atribuindo a cada ponto sua órbita, definimos o função canônico

$$\pi_{X,G} : X \longrightarrow X/G.$$

Os estabilizadores dos pontos de uma órbita são, conjugados em  $G$ , mais precisamente

$$\mathcal{O}_x = gGg^{-1}.$$

Se houver apenas uma órbita em  $X$ , então  $X$  é um **espaço homogêneo do grupo  $G$**  e  $G$  também age transitivamente em  $X$ .

(iii) Para  $G$  um grupo algébrico e  $X$  é uma variedade algébrica, sobre um corpo algebricamente fechado  $\mathbb{k}$ , tal que  $G$  age em  $X$ , temos que qualquer órbita  $\mathcal{O}_x$  é uma variedade localmente fechada, ou seja aberta em seu fecho  $\overline{\mathcal{O}_x}$ , isto, na topologia de Zariski, enquanto  $\overline{\mathcal{O}_x}$  sempre contém uma órbita fechada do grupo  $G$ . Neste caso, o morfismo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ g &\longmapsto g \cdot x = gxg^{-1} \end{aligned}$$

induz um isomorfismo de variedades algébricas

$$G/G_x \longrightarrow \mathcal{O}_x,$$

se, e somente se o morfismo é separable, mas esta condição é sempre satisfeita se  $\mathbb{k}$  é um corpo característica zero. Além, note que as órbitas de dimensão máxima formam um conjunto aberto em  $X$ .

**Proposição 2.107.** *Seja  $G$  um grupo algébrico irredutível e  $X$  um  $G$ -espaço. Então, para qualquer ponto  $x \in X$ , a órbita  $\mathcal{O}_x$  é aberta em seu fecho, ou seja em  $\overline{\mathcal{O}_x}$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e consideremos  $\pi_x : G \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_x} = Y$ . Utilizando o Teorema 2.99, vamos deduzir que a imagem de  $\pi_x$ , ou seja  $\mathcal{O}(x)$ , contém um subconjunto aberto  $U$  de  $Y$ . Como  $\mathcal{O}_x$  é um espaço homogêneo, traduzindo  $U$  por um elemento geral de  $G$  concluímos que  $\mathcal{O}_x$  é aberto em  $Y$ , ou seja em  $\overline{\mathcal{O}_x}$ .  $\square$

**Corolário 2.108.** *Seja  $G$  um grupo algébrico e  $X$  uma  $G$ -variedade algébrica. Então, as órbitas são  $G$ -variedade algébricas não singulares.*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{O}_x \subset X$  com  $x \in X$ , então  $\overline{\mathcal{O}_x}$  é uma subvariedade fechada de  $X$ . Como  $\mathcal{O}_x$  é aberta em  $\overline{\mathcal{O}_x}$ , também é uma subvariedade aberta de  $\overline{\mathcal{O}_x}$  e portanto uma variedade algébrica. Note que com esta estrutura induzida, a restrição  $G \times \overline{\mathcal{O}_x} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_x}$  é uma ação, mais ainda, como em uma variedade algébrica arbitrária existem subconjuntos não vazios abertos de pontos não singulares, pela homogeneidade da órbita, concluímos que todos os pontos são não singulares e assim é uma  $G$ -variedade não singular.  $\square$

**Corolário 2.109.** *Seja  $G$  um grupo algébrico e  $X$  uma  $G$ -variedade. Existem  $G$ -órbitas fechadas em  $X$ .*

**Proposição 2.110.** *Seja o grupo algébrico  $G$  agindo na variedade  $X$ . Então cada órbita é um subconjunto localmente fechado de  $X$ . Em particular, o fecho de  $X$  é a união de órbitas de dimensão estritamente menor. Em particular, órbitas de dimensão minimal são fechadas (então existem órbitas fechadas).*

*Demonstração.* Suponha  $Y = \mathcal{O}_x$  a órbita de  $x \in X$ . Como a imagem de  $G$ , sob o morfismo de órbitas  $\mathcal{O}_x = Y$ , então  $Y$  é construtível e portanto contém um subconjunto aberto denso de  $\overline{Y}$ , ou seja, podemos escrever a órbita como união de órbitas assim

$$\mathcal{O}_x = \bigcup_{g \in G} g \cdot U,$$

onde  $g \cdot U$  é um aberto como imagem isomorfa de um conjunto aberto. Mas  $G$  age transitivamente em  $\mathcal{O}_x$  (deixando  $\overline{\mathcal{O}_x}$  estável), então  $\mathcal{O}_x$  é não singular e contém uma vizinhança em  $\overline{\mathcal{O}_x}$  para cada ponto, ou seja,  $\mathcal{O}_x$  é aberto em  $\overline{Y}$ . Assim,  $\overline{\mathcal{O}_x} \setminus \mathcal{O}_x$  é fechado e cada componente irredutível de esse conjunto, é um subconjunto de uma componente irredutível de  $\overline{\mathcal{O}_x}$  porque  $\mathcal{O}_x$  é denso em  $\overline{\mathcal{O}_x}$ , então pela definição de dimensão, ele tem dimensão estritamente menor. Note que a órbita é  $G$ -estável e o fecho é justamente a união de outras  $G$ -órbitas.  $\square$

**Observação 2.111.** *Definimos a noção de órbitas nesta seção com uma ação geral de um grupo  $G$  sobre uma variedade algébrica  $X$ . Para o seguinte capítulo vamos especificar a ação como sendo a ação pela conjugação, como em Observação 2.106 item (iii).*

# Capítulo 3

## Variedade de Representações de Quivers

Neste capítulo vamos apresentar uma abordagem geométrica para as representações de quivers, identificando o conjunto de classes de isomorfismos de representações com as órbitas de uma ação de grupo particular. Para isto, vamos usar todos os conceitos e exemplos, estudados nas seções anteriores. Vamos assumir  $\mathbb{k}$  um corpo algébricamente fechado.

### 3.1 Variedade de Representações de um Quiver

Nesta primeira seção deste capítulo, queremos começar a combinar o que foi apresentado nas seções anteriores. A variedade apresentada a seguir, será nosso espaço ambiente a partir de agora, mais exatamente, nosso espaço afim (ver Definição 2.1 e Observação 2.2). Vamos lembrar a notação da Definição 1.20 e os fatos dados na Observação 1.57. Os exemplos das definições desta seção, vão ser apresentados com detalhe na seguinte seção.

**Definição 3.1.** *Seja  $Q$  um quiver e  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^r$  o vetor dimensão, tal que  $r$  é o número de vértices de  $Q$ . Definimos a **variedade de representações do quiver  $Q$  ou espaço de representações de  $Q$** , com vetor dimensão fixo  $\mathbf{v}$ , como*

$$R(Q, \mathbf{v}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{v_s(\alpha)}, \mathbb{k}^{v_t(\alpha)}),$$

e sua dimensão como

$$\sum_{\alpha \in Q_1} v_t(\alpha)v_s(\alpha).$$

**Observação 3.2.**

(i) Pelo Exemplo 4.6 e a Observação 1.57 note que na Definição 3.1 note que

$$\begin{aligned} R(Q, \mathbf{v}) &= \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{v_s(\alpha)}, \mathbb{k}^{v_t(\alpha)}) \\ &\cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1} M_{v_t(\alpha) \times v_s(\alpha)}(\mathbb{k}) \\ &\cong \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \end{aligned}$$

onde  $n = \sum_{\alpha \in Q_1} v_t(\alpha)v_s(\alpha)$ .



- (ii) Cada elemento (ou ponto) da variedade de representações, denotado como  $x \in R(Q, \mathbf{v})$ , define uma representação de  $Q$ , que vamos denotar como  $M^x$  a qual é dada por  $(M_i)_{i \in Q_0} = \mathbb{k}^{v_i}$ , onde  $\varphi_\alpha$  é a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica é  $x_\alpha$ , para  $\alpha \in Q_1$ . Ou seja

$$\{\text{Elementos } x \in R(Q, \mathbf{v})\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Objetos } M \in \text{rep } Q\}.$$

- (iii) Usando o obtido no Exemplo 2.85 para  $x \in R(Q, \mathbf{v})$ , temos que

$$T_x R(Q, \mathbf{v}) \cong T_x \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \cong \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$$

Pela Definição 2.86 e o Exemplo 2.87, vamos considerar o seguinte grupo algébrico, indexado pelo conjunto de vértices  $Q_0$ , do quiver  $Q$  (ver Definição 1.20).

**Definição 3.3.** Seja  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^r$  um vetor dimensão, tal que  $r \geq 1$ . Definimos o grupo algébrico

$$GL(\mathbf{v}) = \bigoplus_{i \in Q_0}^r GL_{v_i}(\mathbb{k}).$$

**Observação 3.4.**

- (i) Note que pelo Exemplo 2.11 temos que  $GL(\mathbf{v})$  é um conjunto aberto Zariski na variedade de representações  $R(Q, \mathbf{v}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^s$ , onde  $s = \sum_{i=1}^r v_i^2$ .
- (ii) Seja  $Q$  um quiver com  $r$  vértices. Temos que  $GL(\mathbf{v})$  age sobre  $R(Q, \mathbf{v})$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} GL(\mathbf{v}) \times R(Q, \mathbf{v}) &\longrightarrow R(Q, \mathbf{v}) \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x := \left( g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1} \right), \end{aligned}$$

onde  $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in GL(\mathbf{v})$  e  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in R(Q, \mathbf{v})$ .

- (iii) Note que a órbita em um ponto  $x \in R(Q, \mathbf{v})$  é dada por

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in GL(\mathbf{v})\} \subseteq R(Q, \mathbf{v}),$$

e o subgrupo estabilizador sub a ação definida em 3.3 é dado por

$$GL(\mathbf{v})_x = \left\{ g \in GL(\mathbf{v}) \mid g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1} \right\} \trianglelefteq GL(\mathbf{v}).$$

- (iv) No Capítulo 1 deste trabalho, a discussão foi em torno ao problema de classificação das representações indecomponíveis de um quiver finito (ver Teorema 1.59) e no Exemplo 1.60 estudamos a forma dar solução para este problema, mas a teoria clássica não é suficiente para todo tipo de quivers, como aconteceu no Exemplo 1.60 item (iii), dado que este quiver induz uma álgebra de tipo selvagem (ver Definição 1.62). Com a ajuda das ferramentas da geometria algébrica estudadas no Capítulo 2, vamos ver que o problema de classificação, agora vai ser em termos de classificação de órbitas no espaço  $R(Q, \mathbf{v})$ . Nesse sentido, queremos motivar o seguinte teorema, com a seguinte correspondência

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Classes de isomorfismos em } \text{rep } Q, \\ \text{com vetor dimensão fixo } \mathbf{v} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \{GL(\mathbf{v}) - \text{órbitas em } R(Q, \mathbf{v})\}.$$

**Teorema 3.5.** *Dois elementos  $x, x' \in R(Q, \mathbf{v})$ , definem representações isomorfas de  $Q$  se, e somente se estão na mesma  $GL(\mathbf{v})$ -órbita.*

*Demonstração.* Sejam dois elementos  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}, x' = (x'_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in R(\mathbf{v})$ , tal que definem representações isomorfas. Pela Definição 1.52 temos que existe um isomorfismo  $g : x \rightarrow x'$  onde  $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in GL(\mathbf{v})$ , por tanto pode-se construir o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}^{v_i} & \xrightarrow{x_\alpha} & \mathbb{k}^{v_j} \\ g_i \downarrow & & \downarrow g_j \\ \mathbb{k}^{v'_i} & \xrightarrow{x'_\alpha} & \mathbb{k}^{v'_j}, \end{array}$$

que comuta e portanto tem-se as seguintes relações

$$g \cdot x = g_j x_\alpha g_i^{-1} = x'_\alpha = g \cdot x'$$

e assim

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x &= \{g \cdot x \in R(Q, \mathbf{v}) \mid g \in GL(\mathbf{v})\} \\ &= \{g \cdot x' \in R(Q, \mathbf{v}) \mid g \in GL(\mathbf{v})\} \\ &= \mathcal{O}_{x'} \end{aligned}$$

logo  $x$  e  $x'$  pertencem a mesma órbita. □

## 3.2 Exemplos do Tipo Finito, Manso e Selvagem

Os seguintes exemplos são feitos com o objetivo de estudar alguns dos quivers apresentados no corrido do trabalho e usar toda a teoria ate agora apresentada, para conseguir dar uma boa solução ao problema de classificação na discussão do Capítulo 1 e assim entender a importância da geometria algébrica nas teoria de representações de quivers.

### 3.2.1 Tipo Finito

Seja o quiver  $\mathbb{A}_3 := 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ . Vamos considerar a representação de  $\mathbb{A}_3$  dada por

$$M^x := M_1 \xrightarrow{\varphi_\alpha} M_2 \xrightarrow{\varphi_\beta} M_3,$$

tal que sua vetor dimensão é dado por  $\dim M^x = (\dim M_1, \dim M_2, \dim M_3)$ . Escolhendo as bases canônicas, consideremos o seguinte isomorfismo de representações

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_2 & \xrightarrow{\varphi_\beta} & M_3 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathbb{k}^{\dim M_1} & \xrightarrow{x_\alpha} & \mathbb{k}^{\dim M_2} & \xrightarrow{x_\beta} & \mathbb{k}^{\dim M_3}. \end{array}$$

Note que todas as representações de  $\mathbb{A}_3$ , a menos de isomorfismos, são da forma

$$\mathbb{k}^{v_1} \xrightarrow{x_\alpha} \mathbb{k}^{v_2} \xrightarrow{x_\beta} \mathbb{k}^{v_3}$$

onde  $x_\alpha \in M_{v_2 \times v_1}(\mathbb{k})$  e  $x_\beta \in M_{v_3 \times v_2}(\mathbb{k})$ . Assim, queremos estudar as representações de  $\mathbb{A}_3$  com vetor dimensão fixo  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , ou seja todas as possíveis matrizes que posso associar à cada flecha do quiver. Usando a Definição 3.1, denotemos a coleção de todas as representações de  $\mathbb{A}_3$  com vetor dimensão fixo  $\mathbf{v}$ , é dizer, a variedade de representações, dada por

$$\begin{aligned} R(\mathbb{A}_3, \mathbf{v}) &= M_{v_2 \times v_1}(\mathbb{k}) \oplus M_{v_3 \times v_2}(\mathbb{k}) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{v_1}, \mathbb{k}^{v_2}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{v_2}, \mathbb{k}^{v_3}). \end{aligned}$$

Agora, vamos estudar os morfismos. Para isto, vamos usar a Definição 1.52, ou seja vamos considerar uma terna de morfismos dada por  $(g_1, g_2, g_3)$ , onde  $g_1 \in M_{v_1}(\mathbb{k})$ ,  $g_2 \in M_{v_2}(\mathbb{k})$  e  $g_3 \in M_{v_3}(\mathbb{k})$ , tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k}^{v_1} & \xrightarrow{x_\alpha} & \mathbb{k}^{v_2} & \xrightarrow{x_\beta} & \mathbb{k}^{v_3} \\ g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow & & g_3 \downarrow \\ \mathbb{k}^{v_1} & \xrightarrow{x'_\alpha} & \mathbb{k}^{v_2} & \xrightarrow{x'_\beta} & \mathbb{k}^{v_3}, \end{array}$$

é dizer  $x'_\alpha g_1 = g_2 x_\alpha$  e  $x'_\beta g_2 = g_3 x_\beta$ . Note que as representações são isomorfas se

$$(x_\alpha, x_\beta) = (g_2 x'_\alpha g_1^{-1}, g_3 x'_\beta g_2^{-1}),$$

tal que  $g_1 \in GL_{v_1}(\mathbb{k})$ ,  $g_2 \in GL_{v_2}(\mathbb{k})$  e  $g_3 \in GL_{v_3}(\mathbb{k})$ . Assim, vamos considerar o grupo algébrico dado por

$$GL(\mathbf{v}) = GL_{v_1}(\mathbb{k}) \oplus GL_{v_2}(\mathbb{k}) \oplus GL_{v_3}(\mathbb{k}) = \bigoplus_{i \in Q_0} GL_{v_i}(\mathbb{k}),$$

e pela Observação 3.4, temos que a ação é dada por

$$\begin{aligned} GL(\mathbf{v}) \times R(\mathbb{A}_3, \mathbf{v}) &\longrightarrow R(\mathbb{A}_3, \mathbf{v}) \\ ((g_1, g_2, g_3), (x_\alpha, x_\beta)) &\longmapsto (g_2 x_\alpha g_1^{-1}, g_3 x_\beta g_2^{-1}). \end{aligned}$$

Note que para cada  $(x_\alpha, x_\beta) \in R(\mathbb{A}_3, \mathbf{v})$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(x_\alpha, x_\beta)} &= \{g \cdot (x_\alpha, x_\beta) \mid g \in GL(\mathbf{v})\} \\ &= \{(g_2 x_\alpha g_1^{-1}, g_3 x_\beta g_2^{-1}) \mid (g_1, g_2, g_3) \in GL(\mathbf{v})\}, \end{aligned}$$

mais ainda, um elemento  $(x'_\alpha, x'_\beta)$  esta em  $\mathcal{O}_{(x_\alpha, x_\beta)}$  se, e somente se duas representações  $M^x$  e  $M^{x'}$ , são isomorfas. Em particular, se  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ , temos que a variedade de representações é dada por  $R((\mathbb{A}_3), (1, 1, 1)) \cong \mathbb{k}^2$ , o grupo algébrico por  $GL((1, 1, 1)) = \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^\times$  e dois pontos  $(x, y), (x', y') \in R(\mathbb{A}_3, (1, 1, 1))$ , estão na mesma órbita se, e somente se, existem  $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{k}^\times$ , tal que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k} & \xrightarrow{x} & \mathbb{k} & \xrightarrow{y} & \mathbb{k} \\ g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow & & g_3 \downarrow \\ \mathbb{k} & \xrightarrow{x'} & \mathbb{k} & \xrightarrow{y'} & \mathbb{k}, \end{array}$$

ou seja,

$$x = 0 \text{ se, e somente se } x' = 0, \quad y = 0 \text{ se, e somente se } y' = 0,$$

portanto temos quatro órbitas dadas por

- $\mathcal{O}_{(0,0)} = \{(0, 0)\}$  corresponde ao origem, ver Figura 3.
- $\mathcal{O}_{(0,1)} = \{(x, y) \in \mathbb{k}^2 \mid x = 0, y \neq 0\}$  corresponde ao eixo  $y$  sem a origem, representado em vermelho na Figura 3.
- $\mathcal{O}_{(1,0)} = \{(x, y) \in \mathbb{k}^2 \mid y = 0, x \neq 0\}$  corresponde ao eixo  $x$  sem a origem, representado em azul na Figura 3.
- $\mathcal{O}_{(1,1)} = \{(x, y) \in \mathbb{k}^2 \mid x, y \neq 0\}$  corresponde ao todo o espaço, sem os eixos, representado em amarelo na Figura 3. Note que neste caso o espaço tangente  $T_{(x,y)}\mathcal{O}_{(x,y)}$ , é todo o espaço, logo tem a mesma dimensão que  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$ .

e as representações correspondentes, dadas por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} & \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} \\ \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k} & \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k} \xrightarrow{1} \mathbb{k}. \end{array}$$

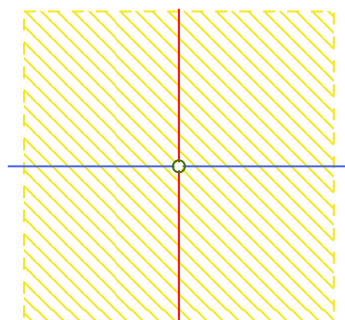


Figura 3

### 3.2.2 Tipo Manso

Considere o quiver de Jordan do Exemplo [1.21](#), que neste exemplo vamos denotar como  $J$ . Para  $\mathbf{v} = (n)$ , todas as as representações de  $J$  com vetor dimensão  $\mathbf{v}$  são da forma

$$\begin{array}{c} \mathbb{k}^n \\ \curvearrowright \\ x_\alpha \end{array}$$

A variedade de representações de  $J$ , com vetor dimensão  $\mathbf{v}$ , é dada por

$$R(J, \mathbf{v}) = M_n(\mathbb{k}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^n).$$

Agora vamos estudar os morfismos, para isto consideremos um morfismo  $g \in M_n(\mathbb{k})$ , tal que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}^n & \xrightarrow{x_\alpha} & \mathbb{k}^n \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{x'_\alpha} & \mathbb{k}^n, \end{array}$$

ou seja,  $x'_\alpha g = g x_\alpha$  e portanto  $x'_\alpha = g x_\alpha g^{-1}$  desde que  $g \in GL_n(\mathbb{k})$ , isto é certo, para quaisquer  $x_\alpha$  e  $x'_\alpha$  duas representações isomorfas. Assim o grupo algébrico é  $GL(\mathbf{v}) = GL_n(\mathbb{k})$  e a ação é dada por

$$\begin{aligned} GL(\mathbf{v}) \times R(J, \mathbf{v}) &\longrightarrow R(J, \mathbf{v}) \\ (g, x_\alpha) &\longmapsto g x_\alpha g^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, cada órbita define-se como  $\mathcal{O}_{x_\alpha} = \{g_1 x_\alpha g_1^{-1} \mid g_1 \in \mathbb{k}^\times\}$ , para um ponto  $x_\alpha \in R(J, \mathbf{v})$ . Note que isso implica que cada  $(x_\alpha)$  é uma matriz diagonalizável de tamanho  $n \times n$ , tal que existe  $g$  invertível de tamanho  $n \times n$ . Assim, no caso particular em que  $\mathbf{v} = (2)$  obtemos as seguintes órbitas:

(i) Quando  $x_\alpha$  é diagonalizável com diferentes autovalores, ou seja

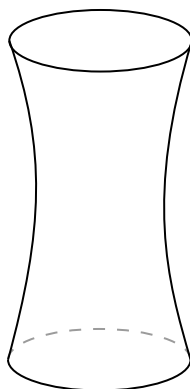
$$[x_\alpha] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

com  $s \neq t$ . Neste caso, a órbita de  $x_\alpha$  corresponde as matrizes diagonalizáveis de traço  $s + t$  com determinante  $st$ , ou seja

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & s + t - x \end{bmatrix}$$

$$x^2 - (s + t)x - zy = st,$$

Graficamente esta órbita corresponde à seguinte subvariedade de  $R(J, \mathbf{v})$



(ii) Quando  $x_\alpha$  é diagonalizável e tem um único autovalor, ou seja

$$[x_\alpha] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

portanto a órbita de  $x_\alpha$  é só o conjunto unitário  $\{x_\alpha\}$ .

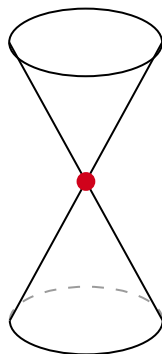
(iii) Quando  $x_\alpha$  não é diagonalizável, portanto é semelhante à um bloco de Jordan da forma

$$[x_\alpha] = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

isto implica que a órbita de  $x_\alpha$  corresponde as matrizes não diagonalizáveis de traço  $2s$  e determinante  $s^2$ , ou seja matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & 2s - x \end{bmatrix}$$

onde  $(x, y, z) \neq (s, 0, 0)$  e  $(x - s)^2 + yz = 0$ . Isto corresponde a cônica a seguir sem a origem (em vermelho)



### 3.2.3 Tipo Selvagem

Com o intuito de chamar a atenção nas vantagens desta abordagem geométrica, queremos destacar o Lema 2.3 em [Rei08] e nesta subseção abriremos todos os detalhes. Seja o quiver de Kronecker como no Exemplo 1.21 item (iii)

$$\mathbb{K}_3 := \mathbb{k}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{B} \\ \xrightarrow{C} \end{array} \mathbb{k}^n.$$

- Uma representação de  $\mathbb{K}_3$  é dada por  $(A, B, C)$ , tal que  $A, B, C \in M_n(\mathbb{k})$ .
- Vamos denotar tal representação por  $M(\lambda_*, a_{**})$  iff

$$\begin{aligned} A &= I, \\ B &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ with } \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j \\ C &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 1 & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \neq 0. \end{aligned}$$

Vamos ver que quasi todas as representações de  $\mathbb{K}_3$  de vetor dimensão  $\mathbf{v} = (n, n)$ , são isomorfas a uma das representações  $M(\lambda_*, a_{**})$ , além, todas as representações  $M(\lambda_*, a_{**})$  são indecomponíveis, com anel de endomorfismo trivial. Finalmente vamos provar que dada uma tupla  $(\lambda_*, a_{**})$ , existem sô um número finito (no maximo  $n!$ ) de tuplas  $(\lambda'_*, a'_{**})$ , tais que  $M(\lambda_*, a_{**}) \cong M(\lambda'_*, a'_{**})$ .

Note que pela Definição 3.1, a variedade de representações de  $\mathbb{K}_3$  está dada por

$$\begin{aligned} R(\mathbb{K}_3, (n, n)) &= \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^n) \\ &= \bigoplus_{i \in Q_0} M_n(\mathbb{k}) \\ &= \{(A, B, C) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{3n^2} \mid A, B, C \in M_n(\mathbb{k})\} \\ &\cong \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{3n^2}. \end{aligned}$$

Pela Definição 3.3, o grupo algébrico é

$$GL(\mathbf{v}) = GL_n(\mathbb{k}) \times GL_n(\mathbb{k}),$$

e que a ação está dada por

$$\begin{aligned} GL(\mathbf{v}) \times R(\mathbb{K}_3, \mathbf{v}) &\longrightarrow R(Q, \mathbf{v}) \\ ((g_1, g_2), (A, B, C)) &\longmapsto (g_2 A g_1^{-1}, g_2 B g_1^{-1}, g_2 C g_1^{-1}). \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 2.11 item (i), o grupo algébrico  $GL_n(\mathbb{k})$  é um aberto Zariski em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2}$ . Como os abertos Zariski são densos, vamos considerar, genericamente,  $A \in GL_n(\mathbb{k})$ , ou seja, existe  $\tilde{A} \in GL_n(\mathbb{k})$  tal que  $(A, B, C)$  está muito próximo de  $(\tilde{A}, B, C)$ . Vía a ação temos que

$$(I, A^{-1}) \cdot (A, B, C) = (I, A^{-1}B, A^{-1}C)$$

e portanto

$$\mathcal{O}_{(A, B, C)} = \mathcal{O}_{(I, A^{-1}B, A^{-1}C)}$$

Consideramos o aberto Zariski dado no Exemplo 2.11 item (ii), das matrizes diagonalizáveis com autovalores diferentes dois a dois em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2}$ , denotado como  $\text{Diag}_{\lambda_i \neq \lambda_j}$ . Seja  $A^{-1}B \in \text{Diag}_{\lambda_i \neq \lambda_j}$  genericamente, ou seja, existe  $\tilde{B} \in \text{Diag}_{\lambda_i \neq \lambda_j}$  tal que  $(I, A^{-1}B, A^{-1}C)$  está muito próximo a  $(I, \tilde{B}, A^{-1}C)$ , assim, existe  $P \in GL_n(\mathbb{k})$  tal que  $PA^{-1}BP^{-1} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$  com  $t_i \neq t_j$ , tal que vía a ação temos que

$$(P, P) \cdot (I, A^{-1}B, A^{-1}C) = (I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), PA^{-1}CP^{-1})$$

e portanto

$$\mathcal{O}_{(I, \tilde{B}, A^{-1}C)} = \mathcal{O}_{(I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), PA^{-1}CP^{-1})}$$

Para a última órbita, vamos considerar o aberto Zariski dado no Exemplo 2.11 item (iii),  $U_\pi$  em  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2}$ . Podemos considerar, genericamente,  $C' := PA^{-1}CP^{-1} \in U_\pi$ , ou seja, existe  $\tilde{C} \in U_\pi$  tal que  $(I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), C')$ , está muito próximo a  $(I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), \tilde{C})$ . Vamos precisar da seguinte conta auxiliar. Seja  $Z = (z_{i,j})_{i,j=1}^n$  e  $D = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$  com  $p_i \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} DZD^{-1} &= \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n,1} & \cdots & z_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{-1} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{p_i}{p_j} z_{i,j} \right)_{i,j=1}^n \end{aligned}$$

Notemos que se  $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{c'_{k+1,k}}$  então

$$\hat{C} = DC'D^{-1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 1 & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ & & \cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

com  $a_{i,j} \neq 0$ . Assim, via a ação temos que

$$(D, D) \cdot (I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), C') = (I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), \hat{C}),$$

e portanto

$$\mathcal{O}_{(I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), C')} = \mathcal{O}_{(I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), \hat{C})}.$$

Note que  $\mathcal{O}_{(A, B, C)} = \mathcal{O}_{(I, \text{diag}(t_1, \dots, t_n), \hat{C})}$ , assim, temos que quasi todas as representações de  $\mathbb{K}_3$  são isomorfas a uma representação da forma  $M(t_*, a_{**})$ . Agora, sejam  $M(\lambda_*, a_{**}) \cong M(\lambda'_*, a'_{**})$  denotadas como

$$M(\lambda_*, a_{**}) = (I, D, C) \quad \text{e} \quad M(\lambda'_*, a'_{**}) = (I, D', C')$$

onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $D' = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ , então, existe um isomorfismo  $g \in GL_n(\mathbb{k})$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}^n & \xrightarrow{I} & \mathbb{k}^n \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{I} & \mathbb{k}^n \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{k}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{k}^n \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{D'} & \mathbb{k}^n \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{k}^n & \xrightarrow{C} & \mathbb{k}^n \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{C'} & \mathbb{k}^n \end{array}.$$

Do segundo diagrama comutativo, temos que  $gD = D'g$ , ou seja

$$g \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) g$$

$$\begin{bmatrix} g_{11}\lambda_1 & g_{12}\lambda_2 & \cdots & g_{1n}\lambda_n \\ g_{21}\lambda_1 & g_{22}\lambda_2 & \cdots & g_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}\lambda_1 & g_{n2}\lambda_2 & \cdots & g_{nn}\lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}\lambda'_1 & g_{12}\lambda'_1 & \cdots & g_{1n}\lambda'_1 \\ g_{21}\lambda'_2 & g_{22}\lambda'_2 & \cdots & g_{2n}\lambda'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}\lambda'_n & g_{n2}\lambda'_n & \cdots & g_{nn}\lambda'_n \end{bmatrix}$$

Vamos analisar os casos das linhas e as colunas. Para o caso das linhas vamos fixar  $i$ . Note que para todo  $j$  temos

$$g_{ij}\lambda_j = g_{ij}\lambda'_i$$

Dado que  $g$  é invertível, existe  $j$  tal que  $g_{ij} \neq 0$  então  $\lambda_j = \lambda'_i$ . Se consideramos  $k \neq j$  temos que  $g_{i,k} = 0$ , caso contrario  $\lambda_j = \lambda_k$  portanto  $j = k$ , mas isso é uma contradição. Note que  $g_{i,j}$  nunca podese anular, portanto, temos em cada linha, exatamente um elemento diferente de zero. O caso das colunas é totalmente análogo, fixando  $j$ . Munindo o caso das linha e o caso



das colunas obtemos que  $g$  é uma matriz monomial, logo existe uma permutação  $\sigma \in S_n$  tal que cada  $g_{ij} = 0$  para  $j \neq \sigma(i)$  e que  $\lambda'_i = \lambda_{\sigma(i)}$ . Se denotamos  $g_{i,\sigma(i)} = \rho_i$ , note que

$$\begin{aligned} gCg^{-1} = C' &\implies \frac{\rho_i}{\rho_j} a_{\sigma(i),\sigma(j)} = a'_{ij}, \\ &\implies \rho_i = \frac{a'_{ij}}{a_{\sigma(i),\sigma(j)}} \rho_j, \end{aligned}$$

para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Em particular, para  $(i+1, i)$ , temos

$$\rho_{i+1} = \frac{a'_{(i+1),1}}{a_{\sigma(i+1),\sigma(i)}} \rho_i = \frac{1}{a_{\sigma(i+1),\sigma(i)}} \rho_i,$$

e obtemos que  $\rho_i$  está dado como

$$\rho_k = \left( \prod_{l < k} a_{\sigma(l+1),\sigma l} \right)^{-1} \rho_1.$$

Assim, a permutação está determinada pelo isomorfismo das representações. Como existem  $n!$  permutações, então existem no máximo  $n!$  pares da forma  $(\lambda'_*, a'_{**})$ , tais que  $M(\lambda_*, a_{**}) \cong M(\lambda'_*, a'_{**})$ . Note que se  $\lambda'_* = \lambda_*$  e  $a'_{**} = a_{**}$ , e seguindo o mesmo processo feito acima, podemos concluir que a permutação  $\sigma$  é a identidade, mais ainda, concluímos que

$$g_{k,k} = \rho_k = \left( \prod_{l < k} a_{l+1,l} \right)^{-1} \rho_1 = \rho_1$$

e assim,  $g = \rho_1 I$  e portanto  $\text{Aut}(M(\lambda_*, a_{**})) \cong k^*$ , então o anel de endomorfismo de  $M(\lambda_*, a_{**})$  são todos escalares. Isso implica que os únicos idempotentes vão ser os elementos triviais 0 e 1, por tanto as  $n!$  representações encontradas, são indecomponíveis, com anel de endomorfismo trivial.

### 3.3 Propriedades das órbitas em variedades de quivers

No Capítulo 2 foram apresentadas algumas das propriedades das órbitas de forma geral. Agora nosso interesse é descrever algumas de elas, como consequência do estudado, e entender sua utilidade, quando se trata de obter informação na teoria de representações de quivers clássica, isto, dada sua natureza em partições de conjuntos, em particular, para nosso caso, variedades de representações de quivers.

**Proposição 3.6.** *Seja  $Q$  um quiver,  $\mathbf{v}$  um vetor dimensão fixo, para uma representação de  $Q$  e  $R(Q, \mathbf{v})$  a variedade de representações. Então:*

- (i) *Para qualquer representação  $M^x$  com vetor dimensão  $\mathbf{v}$ , as dimensões de  $\mathcal{O}_x$ ,  $GL(\mathbf{v})_x$  e  $GL(\mathbf{v})$  cumprem que*

$$\dim \mathcal{O}_x = \dim GL(\mathbf{v}) - \dim GL(\mathbf{v})_x.$$

- (ii) *Existe ao menos uma órbita de codimensão zero em  $R(Q, \mathbf{v})$ .*

*Demonstração.*

(i) Pela Observação 2.106 temos o morfismo bijetor

$$GL(\mathbf{v})/GL(\mathbf{v})_x \longrightarrow \mathcal{O}_x,$$

que envia classes de equivalência  $\bar{g}$  de um elemento  $g \in GL(\mathbf{v})$ , à um elemento  $g \cdot M^x \in \mathcal{O}_x$ . Portanto  $GL(\mathbf{v})/GL(\mathbf{v})_x$  e  $\mathcal{O}_x$ , tem a mesma dimensão e se segue o resultado.

(ii) Note que  $R(Q, \mathbf{v})$  é uma variedade algébrica irredutível, ou seja qualquer subconjunto aberto é denso, e uma órbita de codimensão zero é aberta em  $R(Q, \mathbf{v})$ , portanto o resultado se segue. □

**Proposição 3.7.** *Existe no máximo uma órbita de dimensão igual a  $\dim R(Q, \mathbf{v})$ . Se existe, é aberta e densa em  $R(Q, \mathbf{v})$ .*

*Demonstração.* Seja  $R(Q, \mathbf{v})$  irredutível. Suponha que existe uma órbita tal que  $\dim \mathcal{O}_x = \dim R(Q, \mathbf{v})$ . Sabemos que  $\mathcal{O}_x \subset R(Q, \mathbf{v})$ , então vamos considerar  $\overline{\mathcal{O}_x} \subset R(Q, \mathbf{v})$ . Como  $\mathcal{O}_x$  e  $R(Q, \mathbf{v})$  é irredutível, então  $\dim \mathcal{O}_x < \dim R(Q, \mathbf{v})$  e como  $\mathcal{O}_x$  é um conjunto localmente fechado, então  $\dim \overline{\mathcal{O}_x} = \dim \mathcal{O}_x$ , mas isso contradiz a suposição inicial, portanto  $\overline{\mathcal{O}_x} = R(Q, \mathbf{v})$  e provamos que se existe uma órbita com dimensão igual a dimensão do espaço então ela é densa. Agora, como as órbitas são conjuntos localmente fechados então é aberta em seu fecho, além já vimos que  $\overline{\mathcal{O}_x} = R(Q, \mathbf{v})$  então a órbita é aberta em  $R(Q, \mathbf{v})$ .

Suponha que  $\dim \mathcal{O}_x = \dim \mathcal{O}_y = \dim R(Q, \mathbf{v})$ , pelo dito acima temos que

$$y \in \mathcal{O}_y \subset \overline{\mathcal{O}_y} = R(Q, \mathbf{v}) = \overline{\mathcal{O}_x}$$

logo  $y \in \overline{\mathcal{O}_x}$ , então  $\dim \mathcal{O}_y \leq \dim \mathcal{O}_x$ , com igualdade se, e somente se  $y$  está na órbita, logo  $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_x$  e assim provamos que existe no máximo uma órbita de dimensão igual a dimensão de  $R(Q, \mathbf{v})$ . □

**Proposição 3.8.** *Se  $R(Q, \mathbf{v})$  tem um número finito de órbitas, então existe uma órbita  $\mathcal{O}_x$  de dimensão igual a  $\dim R(\mathbf{v})$ .*

*Demonstração.* Se  $R(Q, \mathbf{v})$  tem um número finito de órbitas então

$$R(Q, \mathbf{v}) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i \text{ portanto } \dim R(\mathbf{v}) = \dim \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i,$$

e como as órbitas são conjuntos localmente fechados em  $R(Q, \mathbf{v})$  é pelo Teorema 2.110, a dimensão de uma união finita de conjuntos localmente fechado é igual ao máximo de esos conjuntos localmente fechados, portanto

$$\dim \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i = \max \dim \mathcal{O}_i, 1 \leq i \leq n$$

assim  $\dim R(Q, \mathbf{v}) = \dim \mathcal{O}_{i_0}$ . □

O seguinte resultado é uma propriedade específica para o caso da teoria de representações de quivers dado em [Kir16] p. 25, não é um resultado geral da geometria algébrica.

**Teorema 3.9.** *Para cada  $x \in R(Q, \mathbf{v})$ , o estabilizador  $G_x$  é conexo na topologia de Zariski.*

*Demonstração.* Vamos provar que  $G_x$  não pode ser escrito como união disjunta de abertos não vazios. Por definição temos que

$$G_x = \{g \in GL(\mathbf{v}) \mid g_j x_\alpha g_i^{-1} = \varphi_\alpha, \text{ para cada flecha } \alpha : i \longrightarrow j\}.$$

Por outro lado temos que

$$G_x = \text{Aut}_Q(M^x) = \{f \in \text{End}_Q(M^x) \mid f \text{ é invertível}\}$$

onde  $M^x$  é uma representação de  $Q$  que corresponde a  $x \in R(Q, \mathbf{v})$ .  $\text{Aut}_Q(M^x)$  é o subconjunto  $\text{End}_Q(M^x)$  que consiste de operadores  $A$  que satisfazem  $\det A \neq 0$ . Logo  $\text{Aut}_Q(M^x)$  pode ser escrito como  $L - X$  onde  $L$  é um espaço vetorial em particular  $L = \text{End}_Q(M^x)$  e  $X$  é fechado tal que  $X = \text{End}_Q(M^x)$ ,  $\det A \neq 0$ . Note que todo subconjunto aberto de  $L - X$  é também aberto em  $L$  e pela topologia de Zariski, quaisquer dois conjuntos abertos não vazios se intersectam, então  $G_x$  é conexo na topologia de Zariski.  $\square$

**Observação 3.10.** *Pelo Exemplo 2.87 item (ii), sabemos que o grupo linear geral das matrizes invertíveis  $GL_n$  é um grupo algébrico, e pela Observação 2.91 temos que o espaço tangente Zariski na matriz identidade  $I$ , para o grupo linear geral, é dado por  $T_I GL = M_n(\mathbb{k})$ , portanto, para nosso caso temos que*

$$T_I GL(\mathbf{v}) = T_I \bigoplus_{i \in Q_0}^r GL_{v_i}(\mathbb{k}) = \bigoplus_{i \in Q_0}^r M_{v_i}(\mathbb{k}) \cong \bigoplus_{i \in Q_0}^r \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{v_i}),$$

onde o último isomorfismo foi estudado no Exemplo 1.11 item (2). Análogamente e pelo Teorema 3.9 como  $GL(\mathbf{v})_x$  é um subgrupo de  $GL(\mathbf{v})$ , então o espaço tangente Zariski para o estabilizador é dado por

$$T_I GL(\mathbf{v})_x = M_{v_i}(\mathbb{k}) \cong \text{End}_Q(M^x).$$

Pela Observação 2.106, temos que para nosso caso

$$T_x \mathcal{O}_x \cong T_I GL(\mathbf{v}) / T_I GL(\mathbf{v})_x \cong \text{End}(\mathbf{v}) / \text{End}_Q(M^x),$$

onde  $\text{End}(\mathbf{v}) = \bigoplus_{i \in Q_0}^r \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{v_i})$ .

Agora, já que fizemos uma boa aproximação da geometria algébrica para a teoria de representações de quivers, vamos continuar obtendo mais informação valiosa com esta poderosa ferramenta.

**Teorema 3.11.** *Seja  $x \in R(Q, \mathbf{v})$  e seja  $M^x \in \text{rep } Q$  sua correspondente representação. Então*

(i)  $T_x \mathcal{O}_x \cong \text{End}(\mathbf{v}) / \text{End}_Q(M^x)$ , onde  $\text{End}(\mathbf{v}) = \bigoplus_{i \in Q_0} \text{End}(\mathbb{k}^{v_i})$ .

(ii) Seja  $N_x \mathcal{O}_x = T_x R(Q, \mathbf{v}) / T_x \mathcal{O}_x$  o espaço normal no ponto  $x$  da órbita. Então,  $N_x \mathcal{O}_x = \text{Ext}_Q^1(M^x, M^x)$ .

*Demonstração.*

(i) Se segue direto da Observação 3.10.

(ii) Considere a sequência exata do Lema [1.77](#)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Hom_Q(M, N) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in Q_0} Hom_{\mathbb{k}}(M_i, N_i) & & \\
 & & & & \searrow & & \\
 \bigoplus_{\alpha \in Q_1} Hom_{\mathbb{k}}(M_{s(\alpha)}, N_{t(\alpha)}) & \longrightarrow & Ext_Q^1(M, N) & \longrightarrow & 0 & & 
 \end{array}$$

Se  $M = N$ , obtemos

$$0 \longrightarrow End_Q(M^x) \longrightarrow End(\mathbf{v}) \longrightarrow R(Q, \mathbf{v}) \longrightarrow Ext_Q^1(M^x, M^x) \longrightarrow 0$$

logo pela Observação [3.10](#), temos que

$$0 \longrightarrow T_x \mathcal{O}_x \longrightarrow R(Q, \mathbf{v}) \longrightarrow Ext_Q^1(M^x, M^x) \longrightarrow 0.$$

□

**Corolário 3.12.** A órbita  $\mathcal{O}_x$  é aberta se, e somente se  $Ext_Q^1(M^x, M^x) = 0$ .

*Demonstração.* Primeiro temos que se  $Ext_Q^1(M^x, M^x) = 0$ , pelo Teorema [3.11](#), e como a órbita é não singular, temos que

$$\dim R(Q, \mathbf{v}) = \dim T_x \mathcal{O}_x = \dim \mathcal{O}_x,$$

portanto  $\mathcal{O}_x$  é aberta. Por outro lado, se  $\mathcal{O}_x$  é aberta em  $R(Q, \mathbf{v})$ , que é irredutível, então todo aberto é denso, ou seja  $\overline{\mathcal{O}_x} = R(Q, \mathbf{v})$ , além temos que a órbita é localmente fechada, portanto

$$\dim T_x \mathcal{O}_x = \dim \mathcal{O}_x = \dim \mathcal{O}_x = \dim R(Q, \mathbf{v})$$

e pelo Teorema [3.11](#), temos que  $Ext_Q^1(M^x, M^x) = 0$ .

□

# Capítulo 4

## Apêndice

**Definição 4.1.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dada por:

- (i) Uma classe de objetos, denotada por  $Obj(\mathcal{C})$ .
- (ii) Para cada  $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ , tem-se um conjunto de morfismos entre  $X$  e  $Y$  denotado por  $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , tal que para dois pares de objetos de  $\mathcal{C}$ , se  $X \neq W$  e  $Y \neq Z$ , temos que  $Hom_{\mathcal{C}} \cap Hom_{\mathcal{C}}(W, Z) = \emptyset$ . Além disso, para  $X, Y$  e  $Z \in Obj(\mathcal{C})$ , tem-se uma operação binária chamada de **composição**, dada por

$$\begin{aligned} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto \circ(f, g) = g \circ f, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) *Associatividade.* Para todo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in Hom_{\mathcal{C}}$  e  $h \in Hom$ , tem-se  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .
- (b) *Existência de um elemento unitário associado a cada objeto  $X \in Obj(\mathcal{C})$ .* Para cada  $X \in Obj(\mathcal{C})$ , existe  $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ , tal que qualquer  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  e  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$ , temos que  $f \circ 1_X = f$  e  $1_X \circ g = g$ .

**Exemplo 4.2.**

1. A categoria dos conjuntos **Conj** é a categoria em que  $Obj(\mathbf{Conj})$  é a coleção de todos os conjuntos. Para quaisquer  $X, Y \in Obj(\mathbf{Conj})$ , o conjunto de morfismos

$$Hom_{\mathbf{Conj}}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ é função}\},$$

e a operação é a composição usual.

2. A categoria dos grupos **Gr** é a categoria em que  $Obj(\mathbf{Gr})$  é a coleção de todos os grupos e os morfismos são

$$Hom_{\mathbf{Gr}}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ é um homomorfismo de grupos}\}.$$

Da mesma forma, temos as categoria dos grupos abelianos **Gb** e dos anéis **Ring**.

3. Seja  $\mathbb{k}$  um corpo. Denotamos por  $\mathbf{Vet}_{\mathbb{k}}$  a categoria dos espaços vetoriais, sendo que os objetos  $\text{Obj}(\mathbf{Vet}_{\mathbb{k}})$  é a coleção de todos os  $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais e

$$\text{Hom}_{\mathbf{Vet}_{\mathbb{k}}}(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y \mid T \text{ é uma transformação } \mathbb{k}\text{-linear}\}.$$

Defina-se  $\mathbf{fvet}_{\mathbb{k}}$  a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita.

4. Seja  $R$  um anel. A categoria  $R\text{-mod}$  é a categoria em que  $\text{Obj}(R\text{-mod})$  é a coleção de todos os  $R$ -módulos à esquerda e

$$\text{Hom}_{R\text{-mod}}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ é um homomorfismo de } R\text{-módulos}\}.$$

Analogamente, podemos definir a categoria dos  $R$ -módulos à direita  $\text{mod-}R$ .

5. Seja  $\mathbb{k}$  um corpo. Denotamos por  $\mathbf{Mat}_{\mathbb{k}}$  a categoria das matrizes sobre  $\mathbb{k}$ , definida por  $\text{Obj}(\mathbf{Mat}_{\mathbb{k}}) = \mathbb{N}$  e  $\text{Hom}_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{k}}}(n, m) = M_{n \times m}(\mathbb{k})$ , e com a composição dada pelo produto de matrizes.

6. Para uma categoria  $\mathcal{C}$ , defina-se a categoria oposta  $\mathcal{C}^{op}$  em que  $\text{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Obj}(\mathcal{C})$  e  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  para quaisquer  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C}^{op})$ .

**Definição 4.3.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Definimos  $\mathcal{S}$  é uma **subcategoria** de  $\mathcal{C}$ , denotada  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ , se satisfaz:

- (i)  $\text{Obj}(\mathcal{S}) \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$ .
- (ii)  $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , para quaisquer  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{S})$ .
- (iii) Tem como operação a mesma composição em  $\mathcal{C}$ .
- (iv) Para todo  $X \in \text{Obj}(\mathcal{S})$ , o morfismo identidade  $1_X$  em  $\mathcal{S}$  é o mesmo em  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 4.4.** Temos as seguintes cadeias de subcategorias

1. **Field**  $\subseteq$  **Ring** <sub>$\mathcal{C}$</sub>   $\subseteq$  **Ring**<sub>1</sub>  $\subseteq$  **Ring**  $\subseteq$  **Gb**  $\subseteq$  **Gr**  $\subseteq$  **Conj**. Além disso, As categorias  $R\text{-mod}$  e  $\text{mod-}R$  são subcategorias de **Conj**. E  $\mathbf{Vet}_{\mathbb{k}} \subseteq \mathbf{Gb} \subseteq \mathbf{Gr} \subseteq \mathbf{Conj}$ .
2. **Conj** não é uma subcategoria de **Gr**, pois o conjunto vazio não é um grupo.

**Definição 4.5.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias, um functor **covariante** (resp. **contravariante**)  $\mathcal{F}$  é uma aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  que satisfaz:

- (i) Se  $X \in \mathcal{C}$  então  $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{D}$ ;
- (ii) Se  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  então  $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$  (respectivamente,  $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ );
- (iii) Se  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  então  $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$  (respectivamente,  $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ );
- (iv)  $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ , para todo  $X \in \mathcal{C}$ .

**Exemplo 4.6.**

1. Um funtor de  $\mathcal{C}$  para **Conj** é o **funtor de esquecimento**, o qual esquece toda estrutura álgebraica tanto para objetos como para morfismos, sendo  $\mathcal{C} = \mathbf{Gr}, \mathbf{Vet}_{\mathbb{k}}, R\text{-mod}, \mathbf{mod}\text{-}R$  ou **Ring**, por exemplo

$$\mathbf{Vet}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Conj}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longmapsto & \mathcal{F}(V) \\ T \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(T)=T \\ W & \longmapsto & \mathcal{F}(W) \end{array}$$

2. Para qualquer categoria  $\mathcal{C}$ , existe o **functor identidade**  $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definido por  $1_{\mathcal{C}}(X) = X$  e  $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ , para qualquer  $X \in \mathcal{C}$  e  $f$  morfismo em  $\mathcal{C}$ .
3. Para uma categoria  $\mathcal{C}$  e  $X \in \mathcal{C}$ , existe o funtor contravariante  $\text{Hom}(-, X) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}$ , definido por

$$\text{Hom}(B, X) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X), \text{ para todo } B \in \mathcal{C}$$

$$\text{Hom}(f, X) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X), \text{ para todo } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$$

sendo que  $\text{Hom}(f, X)(g) = gf$ , para todo  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, X)$ .

4. Considere o seguinte funtor  $\mathbb{F} : \mathbf{Mat}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{fvet}_{\mathbb{k}}$  definido do seguinte modo.

$$\mathbb{F} : \mathbf{Mat}_{\mathbb{k}} \longrightarrow \mathbf{fvet}_{\mathbb{k}}$$

$$\begin{array}{ccc} m & \longrightarrow & \mathcal{F}(m) = \mathbb{k}^m \\ M_{m \times n} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(M_{m \times b}) = M_{m \times n} \\ n & \longrightarrow & \mathcal{F}(n) = \mathbb{k}^n \end{array}$$

Assim temos um vetor  $m$ -dimensional  $x = [x_1, \dots, x_m]^T \in \mathbb{k}^m$  aplicando  $T$  temos o vetor  $n$ -dimensional  $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{k}^n$  dado por  $x^T M$ .

**Definição 4.7.** Sejam  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  dois funtores. Uma **transformação natural**  $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  é uma família  $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \mathcal{C}}$  de morfismos  $\Psi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  em  $\mathcal{D}$  tal que para qualquer  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ , o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & \mathcal{G}(X) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

Diremos que  $\Psi$  é um **isomorfismo natural**, se para qualquer  $X \in \mathcal{C}$ , se cumpre que  $\Psi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  é um isomorfismo em  $\mathcal{D}$ , e o denotaremos por  $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ .

**Definição 4.8.** *Duas categoria  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são **equivalentes**, se existem funtores covariantes  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , tal que  $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong 1_{\mathcal{D}}$  e  $\mathcal{G}\mathcal{F} \cong 1_{\mathcal{C}}$ . Os funtores  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são chamados **equivalência de categorias**.*

**Exemplo 4.9.**

- (1) *A categoria dos  $\mathbf{R}$ -mod e  $\text{mod-}\mathbf{R}$  são equivalentes.*
- (2) *A categoria das  $\mathbf{Mat}_{\mathbf{k}}$  e  $\mathbf{fvet}_{\mathbf{k}}$  são equivalentes.*



# Referências Bibliográficas

- [ASS06] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras, Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Ass97] I. Assem, *Algèbres et modules, Cours et exercices*, Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997.
- [AP78] M. Auslander and M. I. Platzeck, *Representation theory of hereditary artin algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol.37, 389-424, Dekker, New York, 1978.
- [ARS97] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, corrected reprint of the 1995 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Bäc72] K. J. Bäckström, *Orders with finitely many indecomposable lattices*. Ph D Thesis, Göteborg, 1972
- [Bar15] M. Barot, *Introduction to the representation theory of algebras*, Springer, Cham, 2015.
- [BGP73] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspechi Mat. Nauk. 28, 19-38, 1973. Russian Math. Surveys 28, 17-32, 1973.
- [Cra93] W. Crawley-Boevey, *Geometry of representations of algebras*, Mathematical Institute, Oxford University, 1993.
- [DR75] V. Dlab, C. M. Ringel, *On algebras of finite representation type*, J. Algebra 33, 306-394, 1975.
- [DR76] V. Dlab, C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Am. Math. Soc. 6(173), v+57, 1976.
- [DG79] V. Dlab and P. Gabriel, *Representation Theory II*, Proceedings of the Second International Conference on Representations of Algebras, Ottawa, Carleton University, August 13-25, 1979.
- [DF73] P. Donovan and M. R. Freislich, *The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras*, Carleton Math Lecture Notes, No 5, 1973.

- [Eis95] D. Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 150, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [FR05] W. Ferrer Santos and A. Rittatore, *Actions and invariants of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 269, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [Gab72] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math. 6, 71-103, 1972.
- [Gab73] P. Gabriel, *Indecomposable representations. II*, Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971) (Academic, London, 1973), pp. 81-104.
- [GP70] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space*, In: Coll. Math. Soc. Janos Bolyai 5. Hilbert Space Operators. Tihany, Hungary, 163-237, 1970.
- [Gin12] V. Ginzburg, *Lectures on Nakajima's quiver varieties* (English, with English and French summaries), Geometric methods in representation theory. I, Sémin. Congr., Vol. 24, Soc. Math. France, Paris, pp. 145-219, 2012.
- [Kac80] V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*. Invent. Math. 56, no. 1, 57–92, 1980.
- [Kim03] T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author, Translations of Mathematical Monographs, 215, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Kin94] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 45, Issue 4, December, 1994.
- [Kir16] A. Kirillov, Jr., *Quiver representations and quiver varieties*, Graduate Studies in Mathematics, 174, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.
- [Lee13] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York, 2013.
- [Lus98] G. Lusztig, *On Quiver Varieties*, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, January 3, 1998, Advances in Mathematics **136**, 141-182, Article No. AI981729
- [MT11] G. Malle and D. Testerman, *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 133, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [Mat89] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Vol. 8 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second ed. ISBN 0-521-36764-6, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.
- [Nak99] A. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series, Vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

- [NR73] L. A. Nazarova and A. V. Rojter, *On a problem of I. M. Gelfand*. Funkc. Anal. i. Pril. 7, 54-69, 1973. Engl. transl. Funct. Anal. Appl. 1973.
- [Naz73] L. A. Nazarova, *Representations of quivers of infinite type*. Izv Akad Nauk SSSR, Ser. Mat, 37, 752-791, 1973.
- [Rei08] M. Reineke, *Moduli of representations of quivers*, in *Trends in representation theory of algebras and related topics*, 589–637, EMS Ser. Congr. Rep, Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.
- [Rin84] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*. Lecture Notes in Mathematics, 1099. Springer-Verlag, Berlin, 1984. xiii+376 pp. ISBN: 3-540-13905-2.
- [Rin90] C. M. Ringel, Claus Michael. *Hall polynomials for the representation-finite hereditary algebras*. Adv. Math. 84 (1990), no. 2, 137–178.
- [Rin96] C. M. Ringel, *PBW-bases of quantum groups*, J. Reine Angew. Math. 470, 51–88, 1996.
- [Rin16] C. M. Ringel, *Representation theory of Dynkin quivers. Three contributions*, Frontiers of Mathematics in China 11, no. 4: 765-814, 2016.
- [Rot09] J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, second edition, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [Sch14] R. Schiffler, *Quiver representations*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, Cham, 2014.
- [Yos56] T. Yoshii *On algebras of bounded representation type*. Osaka Math J, 8: 51-105, 1956.
- [Zim14] A. Zimmermann, *Representation theory*, Algebra and Applications, 19, Springer, Cham, 2014.