Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Estimativas universais para autovalores de operadores na forma divergente em variedades Riemannianas isometricamente imersas no espaço Euclidiano

Cristiano de Souza Silva

Manaus – AM
Março de 2023

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Estimativas universais para autovalores de operadores na forma divergente em variedades Riemannianas isometricamente imersas no espaço Euclidiano

por

Cristiano de Souza Silva

sob a orientação da

Profª**. Dr**ª**. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda**

Manaus – AM
Março de 2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586e Silva, Cristiano de Souza

Estimativas universais para autovalores de operadores na forma divergente em variedades Riemannianas isometricamente imersas no espaço Euclidiano / Cristiano de Souza Silva . 2023

56 f.: 31 cm.

Orientadora: Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Problema de Dirichlet. 2. Autovalores. 3. Operador (, T)-divergente. 4. Inequações Universais. I. Miranda, Juliana Ferreira Ribeiro de. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Estimativas universais para autovalores de operadores na forma divergente em variedades Riemannianas isometricamente imersas no espaço Euclidiano

por

Cristiano de Souza Silva[1]

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Associação Ampla com a Universidade Federal do Pará e a Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada em 09 de Março de 2023.

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda – (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos – (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros – (Membro Externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes – (Membro Externo)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR

Prof. Dr. Marcio Costa Araújo Filho – (Membro Externo)
Universidade Federal de Rondônia - UNIR

[1]O autor foi bolsista da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM durante a elaboração desta Tese.

Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

"ESTIMATIVAS UNIVERSAIS PARA AUTOVALORES DE OPERADORES NA FORMA DIVERGENTE EM VARIEDADES RIEMANNIANAS ISOMETRICAMENTE IMERSAS NO ESPAÇO EUCLIDIANO"

CRISTIANO DE SOUZA SILVA

Tese de Doutorado defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Professores:

Profª. Drª. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda - UFAM - Presidente

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos - UFAM - Membro

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros - UFC - Membro Externo

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes - UFSCar - Membro Externo

Prof. Dr. Marcio Costa Araújo Filho - UNIR - Membro Externo

Manaus, 09 de Março de 2023

Documento assinado eletronicamente por **Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/03/2023, às 20:57, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Mendonça Marrocos**, **Coordenador**, em 13/03/2023, às 20:59, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Nazareno Vieira Gomes**, **Usuário Externo**, em 13/03/2023, às 21:08, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcio Costa Araújo Filho**, **Usuário Externo**, em 14/03/2023, às 08:09, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Abdênago Alves de Barros**, **Usuário Externo**, em 14/03/2023, às 08:21, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1405614** e o código CRC **28311460**.

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Raimunda de Souza Silva e ao meu pai José Chaves da Silva que sempre foram os meus incentivadores.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Primeiramente à FAPEAM, pelo apoio financeiro, bem como à professora Juliana Miranda por aceitar me orientar em meu Doutorado.

Aos professores Marcos Marrocos e José Nazareno pela grande ajuda e todas as dicas no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de doutorado Abraão Caetano, Adrian Ribeiro, Andrea Mota, Claudeilsio Carvalho, Clebes Brandão, Edson Lopes, João Filipe, Hugo Adolfo, Júlio Cesar, Leonardo Brito, Matheus Hudson e Raimundo que estiveram presente durante todo o processo de obtenção do título de Doutor, em que estivemos socializando e tendo trocas de conhecimentos e experiencias na aprendizagem, bem como meus Colegas de UFAM Alan Kardec, Airton Freitas, Ayana Santana, Bruno Reis, Danielle Aguiar, Edfram Pereira, Fernando Soares, Flávia Furtado, Gabriel Araújo, João Raimundo, Márcia Sarraff, Maristela Barbasa, Miqueias Lobo, Roseane Pereira, Suellen Paulino, Téo Felipe e Wanessa Tavares que acompanharam toda a minha caminhada na pós graduação e dividindo alegrias e perrengues. Não posso esquecer de também mencionar meu colega Gustavo da Costa e seu irmão Antônio Victor da Costa pelo importante apoio dado para a continuidade do desenvolvimento desta tese junto a UFAM.

Aos Funcionários da UFAM, por toda a ajuda e prestações de serviço no decorrer de todo o curso de pós graduação (Mestrado e Doutorado).

Aos membros da banca por suas sugestões para versão final desta tese.

Por fim, a minha esposa, Vanessa Albuquerque, nossas crianças, Carlos Eduardo e Luiz Fernando, e aos meus familiares por me apoiar e acreditarem em minhas decisões a cerca da vida acadêmica.

Resumo

O foco deste trabalho é o estudo do problema de autovalor para o operador (η, T)-divergente $\mathcal{L}$, com condição de fronteira de Dirichlet, definido em um domínio limitado de uma variedade Riemanniana completa, isometricamente imersa no espaço Euclidiano. Obtivemos desigualdades universais de autovalores em função de sua ordem e do primeiro autovalor. Como aplicação obtivemos uma estimativa do *gap* entre autovalores consecutivos, também em termos da ordem e do primeiro autovalor para o caso Euclidiano. Em variedade Cartan-Hadamard pinçada obtivemos uma estimativa para o *gap* em casos particulares do operador $\mathcal{L}$.

Palavras-chave: Problema de Dirichlet; Autovalores; Operador (η, T)-divergente; Inequações Universais.

Abstract

The focus of this work is the study of the Dirichlet eigenvalue problem for the (η, T)-divergent operator, $\mathcal{L}$, in a bounded domain of a complete Riemannian manifold, isometrically immersed in Euclidean space . We obtained estimates of universal inequalities of eigenvalues as a function of their order and the first eigenvalue. As an application we obtained the estimate of the *gap* between consecutive eigenvalues, also in terms of the order and the first eigenvalue for the Euclidean case, and if M is a pinched Cartan-Hadamard Manifold, we obtained the estimate of *gap* in particular cases of the $\mathcal{L}$ operator.

Keywords: Laplacian; Dirichlet Problem; Estimates of the eigenvalue; Divergent Operator.

Sumário

Introdução

Em outubro de 1910, o físico holandês Hendrik Lorentz ministrou uma série de palestras sobre os velhos e novos problemas da física em que um dos tópicos discutidos envolvia as vibrações do tambor que podem ser modeladas a partir da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

em que u descreve o deslocamento vertical do tambor na posição (x, y) no tempo t e c é uma constante. O método desenvolvido por Fourier para descobrir soluções envolve encontrar números λ e funções não nulas u tais que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u.$$

Os números λ são chamados os autovalores da membrana do tambor e estão relacionados aos seus tons fundamentais. Lorentz conjecturou que dado um tambor, ou uma forma com um fronteira fixa, pode-se calcular sua área A a partir dos números λ acima. Matematicamente ele expressou isto como

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{2\pi D(\lambda)}{\lambda} = A,$$

onde $D(\lambda)$ é o número de autovalores menor que um dado autovalor λ. O matemático alemão Hermann Weyl, presente nas palestras, achou essa conjectura interessante e mais tarde provou que na verdade

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{4\pi D(\lambda)}{\lambda} = A,$$

mostrando que Lorentz estava equivocado por um fator dois.

Weyl observou que as autofunções e autovalores podem ser obtidos explicitamente considerando domínios simples, como retângulos e círculos. Para estes casos a conjectura foi verificada diretamente e possibilitou a generalização para domínios arbitrários. A prova de Weyl para essa lei assimptótica suscitou à questão da possibilidade de se determinar o formato do domínio a partir dos autovalores. Esta conjectura foi proposta por Mark Kac em seu célebre artigo "Can You Hear the Shape of a Drum?", ver [12], e respondida negativamente por Carolyn Gordon, David Webb e Scott Wolpert em 1992, ver [9].

Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa M n-dimensional com fronteira $\partial\Omega$ suave (possivelmente vazia). O problema de autovalores do Laplaciano em Ω com condição de Dirichlet é dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & -\lambda u & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{no } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

É bem conhecido que os autovalores de (1) são dados por uma sequência não decrescente e se acumula apenas no infinito

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \nearrow \infty,$$

e as autofunções $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ constituem um sistema ortonormal completo para o espaço $L_2(\Omega)$.

Um aspecto importante do estudo de autovalores é estimar-los em função da geometria do domínio, obter cotas superiores para os autovalores em domínio com volume fixado e estimar *gap* entre autovalores consecutivos. Abaixo descrevemos alguns dos principais resultados existentes na literatura.

Quando Ω é um domínio limitado no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$, Payne, Pólya e Weinberger [16, 17] em 1955 provaram a seguinte estimativa

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Thompson [20] em 1969 estendeu a estimativa anterior para o caso n-dimensional e obteve

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Hile e Protter [11] em 1980, melhoraram a estimativa acima para

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1} - \lambda_j} \geq \frac{nk}{4}.$$

Yang [22] em 1991, obteve a seguinte inequação

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_i, \tag{2}$$

em domínios do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a partir da qual é possível obter

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1 + \frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Ainda a partir da inequação quadrática (2), Cheng e Yang [4] obtiveram em 2005

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq 2\left[\left(\frac{2}{n}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2 - \left(1 + \frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\lambda_j - \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

para domínios na esfera unitária n-dimensional, e em 2007 (cf. [5]) os mesmos autores obtiveram

$$\lambda_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) k^{\frac{2}{n}} \lambda_1.$$

A partir da inequação (2), uma série de estimativas foram obtidas. Tais inequações são conhecidas como inequações universais uma vez que, inicialmente trabalhando em espaços Euclidianos, elas não envolvem dependência em relação ao domínio.

Considerando uma variedade Riemanniana completa M^n isometricamente imersa em $\mathbb{R}^m$, se denotarmos por α a sua segunda forma fundamental, temos que o vetor curvatura média de M é definido por $\mathbf{H} = \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(\alpha)$. Quando Ω é um domínio limitado de uma variedade Riemanniana completa M, Chen e Cheng [3] em 2008, utilizando o teorema de Nash [15], obtiveram

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\left(\lambda_j + \frac{1}{4}n^2H_0^2\right), \tag{4}$$

em que

$$H_0^2 = \inf_{\psi\in\Phi}\sup_{\Omega}|\mathbf{H}|^2,$$

com $\Phi = \{\psi \mid \psi$ é uma imersão isométrica de M em um espaço Euclidiano$\}$.

Destacamos as seguintes inequações também obtidas em [3]

$$\lambda_{k+1} + \frac{n^2H_0^2}{4} \leq \left(1+\frac{4}{n}\right)\left(\lambda_1 + \frac{n^2H_0^2}{4}\right)k^{\frac{2}{n}},$$

e

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leq 2\left[\left(\frac{2}{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{1}{2}nH_0^2\right)^2 - \left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Inequações do tipo (5) são conhecidas como *gap* e desempenharão um papel importante na segunda parte do nosso trabalho.

Gomes e Miranda em 2018 [10], estudando o Laplaciano deformado Δ_η, para um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa M^n isometricamente imersa em $\mathbb{R}^m$, obtiveram o seguinte resultado

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\left(\lambda_1 + \frac{n^2H_0^2+\eta_0^2+2\overline{\eta_0}}{4}\right), \tag{6}$$

em que $\eta_0 = \sup_{\overline{\Omega}}|\nabla\eta|$ e $\overline{\eta_0} = \sup_{\overline{\Omega}}|\Delta_\eta\eta|$, e como consequência obteveram a inequação a seguir

$$\lambda_{k+1} + \frac{n^2H_0^2+\eta_0^2+2\overline{\eta_0}}{4} \leq \left(1+\frac{4}{n}\right)k^{\frac{2}{n}}\left(\lambda_1 + \frac{n^2H_0^2+\eta_0^2+2\overline{\eta_0}}{4}\right).$$

Em [1], [8], [10] e [14], os autores também consideraram operadores elípticos mais gerais da forma $\mathcal{L}(f) = \mathrm{div}(T(\nabla f)) - \langle\nabla\eta, T(\nabla f)\rangle$. A seguir apresentaremos alguns dos principais resultados destes trabalhos, onde as desigualdades universais obtidas estão em função de T, η e do mergulho isométrico. Seja T um $(1,1)$-tensor simétrico, considere o campo nomeado vetor curvatura média generalizado $\mathbf{H}_T$, da seguinte forma

$$\mathbf{H}_T := \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\alpha\circ T) = \sum_{j=1}^{n}\alpha(T(e_j),e_j).$$

Araújo Filho e Gomes [1] em 2022, trabalharam com o operador Cheng-Yau deformado $\square_\eta$ e utilizando o Lema 2.2 em Gomes e Miranda [10] obtiveram

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\left(\lambda_j+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\right). \tag{7}$$

Convém observar que o operador $\square_\eta$ é um caso particular do operador $\mathcal{L}$ quando o tensor T é livre de divergência. A estimativa (7) é uma inequação do tipo (4), em que $C_0 = \sup_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{div}\Big(T^2(\nabla\eta)\Big) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right\}$ e $H_0 = \sup_{\overline{\Omega}}|\mathbf{H}_T|$, com $\varepsilon \leq \langle T(X), X\rangle \leq \delta$, para X unitário. Com isso, foi possível estimar que

$$\lambda_{k+1}+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta} \leq \left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)k^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}\left(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\right).$$

Podemos notar que a inequação (7) melhora a inequação (6) quando nos restringimos ao operador Δ_η uma vez que $4C_0 = \sup_{\overline{\Omega}}\{2\Delta\eta - |\nabla\eta|^2\} \leq \eta_0^2 + 2\overline{\eta_0}$.

Fonseca e Gomes em [8] consideraram o operador $\square_\eta$ em variedades Cartan-Hadamard pinçada ($-\kappa_1^2 \leq K \leq -\kappa_2^2$). Para T radialmente paralelo e tendo a direção radial como um autovetor obtiveram

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq &\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Bigg(\frac{4\delta^2}{\varepsilon}\lambda_j-(n-1)^2\varepsilon^2\kappa_2^2+2(n-1)(\delta^2\kappa_1^2-\varepsilon^2\kappa_2^2)\\ &+2C_0(n-1)\left(\kappa_1+\frac{1}{d}\right)+C_1+\frac{a(n,\varepsilon,\delta)}{d^2}\Bigg),\end{aligned}$$

para certas constantes C_0, C_1, d e $a(n,\varepsilon,\delta)$.

Considerando o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ e admitindo $T(\nabla\log x_n) = \psi\nabla\log x_n$, em que a função ψ e a função deformadora η são radialmente constantes, os autores no mesmo trabalho obtiveram a seguinte desigualdade para o operador $\mathcal{L}$

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\left(\lambda_j-\frac{(n-1)^2\varepsilon^3\kappa^2}{4\delta^2}\right).$$

Das expressões em (3) e (5), é possível ver que as estimativas de *gap* entre autovalores consecutivos do Laplaciano estão na ordem de $k^{\frac{3}{2n}}$. No entanto, pelo cálculo do *gap* entre os autovalores consecutivos em $\mathbb{S}^n$ com a métrica usual e a fórmula assintótica de Weyl, a ordem do limite superior desse *gap* é $k^{\frac{1}{n}}$. Baseado nessa observação Chen, Zheng e Yang [7] sugeriram a seguinte conjectura.

Conjectura 1. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa n-dimensional M. Para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases}\Delta u = -\lambda u & \text{em } \Omega\\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega,\end{cases}$$

a cota superior para o gap entre autovalores consecutivos do Laplaciano deve ser

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leq C_{n,\Omega}k^{\frac{1}{n}},\ k>1,$$

onde $C_{n,\Omega}$ é uma constante que depende de Ω e da dimensão n de M.

No mesmo trabalho, obtiveram uma resposta afirmativa para esta conjectura nos casos em que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e mais geralmente em variedades de Cartan-Hadamard pinçada.

Nesta tese, iremos considerar $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana completa n-dimensional, Ω um domínio limitado em M e T um $(1,1)$-tensor simétrico, positivo definido em M. Estamos interessados em estudar estimativas do problema de autovalor com a condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= -\lambda u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\; \text{no } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

em que

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}_\eta(T(\nabla u)) = \operatorname{div}(T(\nabla u)) - \langle T(\nabla u), \nabla\eta\rangle.$$

O primeiro resultado apresentado neste trabalho é uma generalização da inequação universal (7) para o operador $\mathcal{L}$ qualquer.

Teorema 1. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa n-dimensional M isometricamente imersa em $\mathbb{R}^m$, e λ_j o j-ésimo autovalor do problema (8). Então teremos*

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\left(\lambda_j + \frac{n^2H_0^2 + 4C_0 + T_0^2}{4\delta}\right) \tag{9}$$

em que $H_0 = \sup_{\overline{\Omega}} |\mathbf{H}_T|$, $C_0 = \sup_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{div}\Big(T\Big(T(\nabla\eta) - \operatorname{tr}(\nabla T)\Big)\Big) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right\}$ *e* $T_0 = \sup_{\overline{\Omega}} |\operatorname{tr}(\nabla T)|$, *com ε e δ conforme em (1.4).*

Definindo $\upsilon_j = \lambda_j + \frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}$, obtemos como consequência do Teorema 1 o seguinte corolário.

Corolário 1. *Nas hipóteses do Teorema anterior obtemos as três inequações a seguir*

$$\upsilon_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j$$

$$\upsilon_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\upsilon_{k+1} - \upsilon_k \leq 2\left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

O próximo resultado também é consequência da inequação (9).

Corolário 2. *Nas hipóteses do teorema 2.1, temos que*

$$\upsilon_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4\delta}{n\varepsilon}\right) k^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}} \upsilon_1.$$

Na segunda parte deste trabalho investigamos uma conjectura para o problema (8) análoga a conjectura 1 de Chen, Zheng e Yang, a saber

Conjectura 2. *Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio limitado, em uma variedade Riemanniana completa. Para o problema de Dirichlet (8), a cota superior para o gap entre autovalores consecutivos do operador $\mathcal{L}$ deve ser*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},\ k > 1,$$

onde $C_{n,\Omega}$ é uma constante que depende de Ω, da dimensão n de M, do tensor T e da função deformadora η.

Os resultados parciais obtidos podem ser apresentados resumidamente da seguinte forma. A Conjectura 2 é verdadeira para os casos:

i) se Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, ver Teorema 3.1;

ii) se Ω é um domínio limitado em $\mathbb{H}^n$, com a função deformadora η radialmente constante e T é tal que $T(\partial_n) = \psi\partial_n$ para alguma função ψ radialmente constante, ver Teorema 3.2;

iii) se Ω é um domínio limitado em variedades Cartan-Hadamard pinçadas, com T livre de divergência, radialmente paralelo e a direção radial é seu autovetor, ver Teorema 3.3.

Estruturamos o trabalho da seguinte forma: no primeiro capítulo fixamos a notação e apresentamos as definições e resultados importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. No segundo capítulo, obtivemos inequações universais refentes ao problema (8) para o operador $\mathcal{L}$ qualquer, generalizando a expressão (7). No último capítulo apresentamos os resutados parciais para a Conjectura 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, fixaremos as notações que serão utilizada e destacaremos conceitos e resultados presentes em geometria Riemanniana com intuito de apresentar o operador na forma divergente $\mathcal{L}$. Definiremos as variedades de Cartan-Hadamard pinçada onde iremos trabalhar no último capítulo desta tese, bem como exibiremos a complexificação do espaço tangente que será uma ferramenta necessária no desenvolvimento do trabalho.

1.1 Motivando o Operador $\mathcal{L}$

Relembremos que um $(1,1)$-tensor T em uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ X &\mapsto T(X), \end{aligned}$$

linear sobre o espaço das funções $C^\infty(M)$. Similarmente, temos que um $(0,2)$-tensor T é uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ (X,Y) &\mapsto T(X,Y). \end{aligned}$$

De modo geral, dado um $(0,2)$-tensor T, é possível identificá-lo com um $(1,1)$-tensor $\widetilde{T}$ através de um tensor métrico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M da seguinte forma

$$T(X,Y) := \langle \widetilde{T}(X), Y \rangle.$$

Usaremos a mesma notação para o $(0,2)$-tensor e o seu $(1,1)$-tensor correspondente. Em particular, o $(0,2)$-tensor métrico g tem o tensor identidade I como o seu $(1,1)$-tensor correspondente. Em particular definimos o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} {}^\flat : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}^*(M) \\ X &\longmapsto X^\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ &\qquad\qquad Y \longmapsto X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Denotamos a sua aplicação inversa por ${}^\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Esses isomorfismos são conhecidos como isomorfismos musicais. Quando não houver perigo de confusão, omitiremos por simplicidade o símbolo "$\sharp$".

Lembremos que para um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ na variedade Riemanniana M^n, o operador $\nabla X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é definido por $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$ em que, no lado direito da igualdade, ∇ é a conexão Riemanniana em M. Com isso, podemos definir a divergência do campo X como a função $\mathrm{div}X : M \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{div}X = \mathrm{tr}\{\nabla X\}$, isto é, o traço do operador linear $T_pM \ni v \mapsto \nabla_v X(p)$. Dessa forma, temos para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, que valem

$$\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}(X) + \mathrm{div}(Y) \quad \text{e} \quad \mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle.$$

De posse disso, podemos definir formalmente o operador laplaciano.

Definição 1.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

A conexão de Levi-Civita induz uma derivada natural de tensores. Por exemplo, a derivada covariante de um $(1,1)$-tensor T é um $(1,2)$-tensor ∇T dado por

$$\nabla T(X,Y) = \nabla_X T(Y) - T(\nabla_X Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Define-se a derivada covariante $\nabla_X T$, de T em relação a X, como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$(\nabla_X T)Y := \nabla T(X,Y),$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.Dizemos que um tensor T é paralelo quando $\nabla T = 0$. Também podemos definir o campo vetorial $\mathrm{tr}(\nabla T) \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\mathrm{tr}(\nabla T) := \sum_{j=1}^{n} \nabla T(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\nabla_{e_j} T(e_j) - T(\nabla_{e_j} e_j) \right),$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial local ortonormal em $p \in M^n$.

Definição 1.2. *Dado o $(1,1)$-tensor T em M^n, definimos a divergência de T como sendo o $(0,1)$-tensor dado por*

$$(\mathrm{div}T)(v)_p = \mathrm{tr}(w \mapsto (\nabla_w T)(v)_p) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle (\nabla_{e_j} T)(v)_p, e_j \right\rangle,$$

onde $p \in M$ e $v \in T_pM$. Além disso, dizemos que o tensor T é livre de divergência se $\mathrm{div}T = 0$.

Dados os $(1,1)$-tensores T e S em M^n e seus respectivos adjuntos T^* e S^* lembramos que o produto interno de Hilbert-Schmidt é definido por

$$\langle T, S \rangle := \mathrm{tr}(TS^*) = \sum_{j=1}^{n} \langle TS^*(e_j), e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle S^*(e_j), T^*(e_j) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle T(e_j), S(e_j) \rangle.$$

Como a métrica Riemanniana em M induz uma métrica Riemanniana em $\mathfrak{X}^*(M)$ por

$$\left\langle X^\flat, Y^\flat \right\rangle = \langle X, Y \rangle$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^\flat, Y^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$, podemos verificar usando (1.1) que

$$\left\langle \mathrm{div}T, Z^\flat \right\rangle = \left\langle (\mathrm{div}T)^\sharp, Z \right\rangle = (\mathrm{div}T)(Z)$$

em que T é um $(1,1)$-tensor em M e $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Uma propriedade importante da divergência de um tensor, que faremos uso adiante, é que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}T)(Z) &= \sum_j \left\langle (\nabla_{e_j}T)(Z), e_j \right\rangle = \sum_j \left\langle \nabla_{e_j}T(Z) - T(\nabla_{e_j}Z), e_j \right\rangle \\
&= \sum_j \left\langle \nabla_{e_j}T(Z), e_j \right\rangle - \sum_j \left\langle T(\nabla_{e_j}Z), e_j \right\rangle \\
&= \sum_j \left\langle (\nabla_{e_j}T(Z)), e_j \right\rangle - \sum_j \left\langle \nabla_{e_j}Z, T^*(e_j) \right\rangle \\
&= \mathrm{div}(T(Z)) - \langle \nabla Z, T^* \rangle,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

para $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Consequentemente, se T é livre de divergência teremos que

$$\mathrm{div}(T(Z)) = (\mathrm{div}T)(Z) + \langle \nabla Z, T^* \rangle = \langle \nabla Z, T^* \rangle. \tag{1.3}$$

Se T é um $(1,1)$-tensor simétrico e positivo definido, temos que $\nabla_X T$ também é simétrico para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\langle (\nabla_X T)Y, Z \rangle = \langle Y, (\nabla_X T)Z \rangle.$$

De fato, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_X T)Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X T(Y) - T(\nabla_X Y), Z \rangle \\
&= X \langle T(Y), Z \rangle - \langle T(Y), \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Y, T(Z) \rangle \\
&= X \langle Y, T(Z) \rangle - \langle Y, T(\nabla_X Z) \rangle - \langle \nabla_X Y, T(Z) \rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, T(Z) \rangle + \langle Y, \nabla_X T(Z) \rangle - \langle Y, T(\nabla_X Z) \rangle - \langle \nabla_X Y, T(Z) \rangle \\
&= \langle Y, \nabla_X T(Z) - T(\nabla_X Z) \rangle = \langle Y, (\nabla_X T)Z \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, se T é simétrico e livre de divergência, temos

$$0 = \mathrm{div}T(X) = \sum_{j=1}^n \left\langle (\nabla_{e_j}T)(X), e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle X, (\nabla_{e_j}T)(e_j) \right\rangle = \left\langle X, \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j}T)(e_j) \right\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, logo $\mathrm{tr}(\nabla T) = \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j}T)(e_j) = 0$.

Seja Ω um aberto e limitado contido em M e T um $(1,1)$-tensor simétrico e positivo definido. Podemos observar que T é limitado em $\overline{\Omega}$ e com isso existirão números ε e δ positivos tais que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, a seguinte relação é satisfeita

$$\varepsilon |X|^2 \leq \langle T(X), X \rangle \leq \delta |X|^2 \tag{1.4}$$

com $\varepsilon = \min\limits_{|X|=1} \langle T(X), X \rangle$ e $\delta = \max\limits_{|X|=1} \langle T(X), X \rangle$. Nesta direção, iremos necessitar do seguinte lema.

Lema 1.1. *Seja T um $(1,1)$-tensor simétrico positivo definido em uma variedade Riemanniana M^n. Se $\varepsilon I \leq T \leq \delta I$, para números reais positivos ε e δ, então*

$$\varepsilon\langle T(X), X\rangle \leq |T(X)|^2 \leq \delta\langle T(X), X\rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}\left(M^n\right).$$

Em particular, obtemos

$$\varepsilon^2|\nabla\eta| \leq |T(\nabla\eta)|^2 \leq \delta^2|\nabla\eta|^2.$$

para alguma função $\eta \in C^\infty\left(M^n\right)$.

Demonstração. Como T é simétrico e positivo definido, existe um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$, tal que, $T\left(e_j\right) = \psi_j e_j$, com $\psi_j > 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Por hipótese, para todo $1 \leq j \leq n$ temos que

$$\varepsilon \leq \psi_j = \langle Te_j, e_j\rangle \leq \delta.$$

Para qualquer $X \in \mathfrak{X}\left(M^n\right)$, cuja representação no referencial escolhido é $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, observe que

$$|T(X)|^2 = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right), T\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right)\right\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i^2 a_i^2.$$

Para concluir a demonstração é suficiente notar que

$$\varepsilon\sum_{i=1}^n \psi_i a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \psi_i\psi_i a_i^2 \leq \delta\sum_{i=1}^n \psi_i a_i^2.$$

□

Fixando agora uma função $\eta \in C^\infty(M)$ definimos a η-divergência de um campo X em M por

$$\operatorname{div}_\eta(X) := \operatorname{div}(X) - \langle X, \nabla\eta\rangle,$$

Em que valem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(e^{-\eta}X) &= e^{-\eta}\operatorname{div}_\eta(X),\\
\operatorname{div}_\eta(X+Y) &= \operatorname{div}_\eta(X) + \operatorname{div}_\eta(Y),\\
\operatorname{div}_\eta(hX) &= h\operatorname{div}_\eta(X) + \langle\nabla h, X\rangle,
\end{aligned}$$

em que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $h : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Agora, ao considerar um $(1,1)$-tensor T em $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, podemos definir um tensor que estende a Definições 1.2. Definimos por η-divergência de T o $(0,1)$-tensor dado por

$$\operatorname{div}_\eta T := \operatorname{div}T - d\eta \circ T.$$

Considerando um $(0,2)$-tensor T simétrico, positivo definido em M, de modo que o seu $(1,1)$-tensor correspondente seja simétrico e positivo definido, vamos definir um operador que é uma extensão da η-divergência.

Definição 1.3. *Seja T um $(1,1)$-tensor simétrico, positivo definido em M e considere a função $\eta \in C^\infty(M)$. Definimos o operador $\mathcal{L}$, conhecido como a (η, T)-divergência, por*

$$\mathcal{L}f := \operatorname{div}_\eta(T(\nabla f)) = \operatorname{div}(T(\nabla f)) - \langle T(\nabla f), \nabla \eta \rangle \tag{1.5}$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$.

Em particular, quando T é o tensor identidade temos que $\mathcal{L}$ é o Laplaciano deformado Δ_η, e, se além disso, a função η for constante, temos o Laplaciano usual.

Em 1977, Cheng e Yau [6] introduziram o seguinte operador

$$\Box f = \operatorname{tr}(\nabla^2 f \circ T) = \left\langle \nabla^2 f, T \right\rangle, \tag{1.6}$$

onde $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$ e T é um $(1,1)$-tensor simétrico. Para o caso em que M^n é orientável e compacta, eles provaram que o operador $\Box$ é auto-adjunto se, e somente se, T é livre de divergência, ou seja, $\operatorname{div}T = 0$.

Observemos que a partir de (1.2), (1.5) e (1.6) teremos que

$$\mathcal{L}f = \Box f - \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla f \rangle = \Box_\eta f - \langle \operatorname{div}T, \nabla f \rangle \tag{1.7}$$

em que $\Box_\eta f = \langle \nabla^2 f, T \rangle - \langle \nabla \eta, T(\nabla f) \rangle$. Em particular, se o operador $\Box$ é auto-adjunto, de (1.3), a equação (1.7) se resume a

$$\mathcal{L}f = \Box_\eta f = \left\langle \nabla^2 f, T \right\rangle - \langle \nabla \eta, T(\nabla f) \rangle,$$

que é uma pertubação de primeira ordem do operador de Cheng-Yau, denominado por Araújo Filho e Gomes [1] de operador de Cheng-Yau deformado $\Box_\eta$. Note que se, além de T ser livre de divergência, a função η for constante, teremos o operador Cheng-Yau usual.

Uma das principal ferramentas para obtenção das estimativas inferiores para o primeiro autovalor positivo do operador $\mathcal{L}$ em variedades Riemannianas compactas é uma fórmula tipo Bochner provada por Gomes e Miranda [10] para o operador $\mathcal{L}$ e que é dada por

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\mathcal{L}f), \nabla f \rangle + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle, \tag{1.8}$$

em que $R_{\eta,T} = R_T - \nabla(\operatorname{div}_n T)^\sharp$ com $R_T(X,Y) := \operatorname{tr}(T \circ (Z \mapsto R(X,Z)Y))$ e $R(X,Z)Y$ é o tensor curvatura de Riemann da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

A fórmula tipo Bochner em (1.8) é o caso mais geral da fórmula de Bochner que relaciona funções f harmônicas em variedades Riemannianas e a curvatura de Ricci

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2.$$

Como caso particular da equação (1.8) podemos citar a fórmula de Bochner para o operador laplaciano deformado Δ_η

$$\frac{1}{2}\Delta_\eta(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\Delta_\eta f), \nabla f \rangle + Ric_\eta(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2,$$

onde $Ric_\eta = Ric + \nabla^2$. Além disso, para o operador de Cheng-Yau $\Box$, tem-se

$$\frac{1}{2}\Box(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\Box f), \nabla f\rangle + R_T(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T\rangle,$$

em que $R_T(X,Y)$ é definido conforme em (1.8). Bem como, para o operador Cheng-Yau deformado $\Box_\eta$

$$\frac{1}{2}\Box_\eta(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\Box_\eta f), \nabla f\rangle + R_{\eta,T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T\rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T\rangle, \tag{1.9}$$

em que $R_{\eta,T}$ é definido conforme descrito em (1.8).

1.2 Fatos básicos sobre operadores na forma divergente

Temos como objetivo estudar o problema de autovalor com a condição de fronteira de Dirichlet para o operador $\mathcal{L}$ definido em (1.5), ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= -\lambda u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{no } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Ao longo do texto, consideraremos $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, completa e Ω é um domínio(aberto e conexo) limitado com bordo suave $\partial\Omega$.

Considere em M a medida com peso dada por $\mathrm{dm} = e^{-\eta} dvol\Omega$, para alguma função suave η. É bem conhecido que vale o teorema da divergência considerando a medida pesada e o operador div_η. Como consequência temos as seguintes identidade para o operador $\mathcal{L}$,

$$\int_\Omega \mathcal{L}f \mathrm{dm} = \int_{\partial\Omega} \langle \nu, T(\nabla f)\rangle d\tau$$

e

$$\int_\Omega h\mathcal{L}f \mathrm{dm} = -\int_\Omega \langle T(\nabla h), \nabla f\rangle \,\mathrm{dm} + \int_{\partial\Omega} h\, \langle \nu, T(\nabla f)\rangle \, d\tau \tag{1.11}$$

onde ν é o campo de vetores normal exterior a bordo $\partial\Omega$, $d\tau = e^{-\eta} d\partial\Omega$ é a forma volume com peso induzida sobre o bordo.

De (1.11) conclui-se que $\mathcal{L}$ é um operador simétrico no espaço das funções $C_c^\infty(\Omega)$. Assim o problema (1.10) tem espectro real e discreto, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \nearrow \infty$, em que, cada λ_j é repetido de acordo com sua multiplicidade (cf. [2]). As autofunções u_j associadas aos autovalores λ_j formam uma base ortonormal em $L^2(\Omega, \mathrm{dm})$, além disso, para $f \in L^2(\Omega, \mathrm{dm})$ temos

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j\rangle u_j, \tag{1.12}$$

e

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j\rangle^2. \tag{1.13}$$

As fórmulas (1.12) e (1.13) são chamadas de identidades de Parseval. Por fim, os autovalores podem ser calculados através da seguinte expressão

$$\lambda_j = -\int_\Omega u_j \mathcal{L} u_j \ \mathrm{dm} = \int_\Omega T(\nabla u_j, \nabla u_j) \ \mathrm{dm}.$$

1.3 Variedades Cartan-Hadamard

Um importante resultado em variedades Riemannianas completas de curvatura seccional não positiva é o teorema de Cartan-Hadamard a seguir.

Teorema 1.1 (Teorema de Cartan-Hadmard, ver [19], p. 239)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K \leq 0$. Então M é difeomorfa ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, mais precisamente, $\exp_p : T_pM \to M^n$ é um difeomorfismo de classe C^∞ para cada $p \in M$.*

Uma variedade satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.1, isto é, uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura seccional não positiva é chamada de variedade Cartan-Hadamard. O Teorema 1.1 assegura que se M^n é uma variedade Cartan-Hadamard, então M tem a mesma topologia e estrutura diferenciável do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Segue desse teorema que, qualquer par de pontos distintos em uma variedade Cartan-Hadamard é ligado por um único segmento geodésico.

Os exemplos mais simples de variedades Cartan-Hadamard são: o espaço Euclidiano e o espaço Hiperbólico, ambos com suas respectivas métricas canônicas. Mais exemplos podem ser encontradas em [19].

Observação 1. *Iremos chamar de variedade* ***Cartan-Hadamard pinçada*** *as variedades Cartan-Hadamard em que sua curvatura seccional satisfaz $-\kappa_1^2 \leq K \leq -\kappa_2^2$, para as constantes $0 \leq \kappa_2 \leq \kappa_1$.*

No que segue, denotaremos por $r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, r(x) = d(x, o)$ a função distância a partir de um ponto fixado $o \in M \backslash \overline{\Omega}$, que é diferenciável, com $|\nabla r| = 1$ e $\nabla r = \partial_r$.

Definição 1.4. *Diremos que um tensor T é radialmente paralelo se ele é paralelo na direção radial, isto é, $\nabla_{\partial r} T = 0$. Em particular, para campos de vetores X tal que $\nabla_{\partial r} X = 0$ diremos que ele é um campo radialmente paralelo.*

Com relação as variedades de Cartan-Hadamard, gostaríamos de citar o seguinte resultado

Lema 1.2 (Comparação de Rauch). *Assuma que $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisfaz $c \leq K \leq C$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + g_r$ representa a métrica em coordenadas polares, então*

$$\frac{sn_C'(r)}{sn_C(r)} g_r \leq \nabla^2 r \leq \frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)} g_r$$

em que sn_k denota a única solução para $\ddot{x}(r) + k \cdot x(r) = 0$ com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

Uma prova deste lema pode ser vista em [21] página 255. Em particular, se $k < 0$ temos $\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} = \sqrt{-k} \frac{\cosh(\sqrt{-k}r)}{\sinh(\sqrt{-k}r)}$, se $k = 0$ temos $\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} = \frac{1}{r}$, e se $k > 0$ temos $\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} = \sqrt{k} \frac{\cos(\sqrt{k}r)}{\sin(\sqrt{k}r)}$.

1.4 Complexificação do espaço tangente

Seja M uma variedade diferenciável e T_pM seu espaço tangente. Consideraremos a seguinte complexificação do espaço tangente

$$T_p^{\mathbb{C}}M := \{X_p + iY_p;\ X_p, Y_p \in T_pM\}.$$

Considerando uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M, podemos munir $T_p^{\mathbb{C}}M$ com um produto interno hermitiano da seguinte forma: primeiramente estendemos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ bilinearmente ao $T_p^{\mathbb{C}}M$ sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ tomando

$$\langle iX, Y \rangle_p = \langle X, iY \rangle_p = i\langle X, Y \rangle_p, \quad \text{em que } i = \sqrt{-1}$$

e então definimos

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}}M \times T_p^{\mathbb{C}}M &\longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ (Z, W) \quad &\longmapsto \langle Z, W \rangle_p^{\mathbb{C}} := \langle Z, \overline{W} \rangle_p, \end{aligned}$$

em que $\overline{W}_p = X_p - iY_p$ é o vetor conjugado de $W_p = X_p + iY_p$. E o espaço de campos diferenciáveis de vetores complexos em M será denotado por

$$\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}} = \{X + iY;\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

Para uma função complexa $f : M^n \to \mathbb{C}$ suave, isto é, $f = f_1 + if_2$ com $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, o gradiente de f será o campo vetorial $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$, definido sobre M por

$$\left\langle \nabla f, \overline{X} \right\rangle^{\mathbb{C}} = X(f) = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$. Em coordenadas temos

$$\nabla f = \sum_{j,s=1}^{n} g^{js} \left\langle \partial_j, \overline{\nabla f} \right\rangle^{\mathbb{C}} \partial_s = \sum_{j,s=1}^{n} g^{js} \left\langle \nabla f, \partial_j \right\rangle^{\mathbb{C}} \partial_s = \sum_{j,s=1}^{n} g^{js} \partial_j(f) \partial_s,$$

e escrevendo $f = f_1 + if_2$, e usando as regras de derivação teremos

$$\nabla f = \sum_{j,s=1}^{n} g^{js} \partial_j(f_1 + if_2) \partial_s = \sum_{j,s=1}^{n} g^{js} \partial_j(f_1) \partial_s + i \sum_{j,s=1}^{n} g^{js} \partial_j(f_2) \partial_s = \nabla f_1 + i \nabla f_2. \tag{1.14}$$

Já que, para funções reais f definidas sobre M, temos que $\nabla f_p \in T_pM$ e para funções complexas h temos $\nabla h_p \in T_p^{\mathbb{C}}M$, então, utilizando a definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{C}}$ teremos

$$\left\langle \nabla \overline{h}, \nabla f \right\rangle^{\mathbb{C}} = \overline{\langle \nabla h, \nabla f \rangle^{\mathbb{C}}}.$$

Além disso, para $Z = Z_1 + iZ_2$ temos

$$\mathrm{div} Z = \mathrm{div} Z_1 + i\, \mathrm{div} Z_2.$$

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ e $f : M \to \mathbb{C}$ uma função suave, utilizando a definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{C}}$ teremos

$$\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div} X + \mathrm{div} Y \quad \text{e} \quad \mathrm{div}(fX) = f \mathrm{div} X + \left\langle \nabla f, \overline{X} \right\rangle^{\mathbb{C}}. \tag{1.15}$$

A partir de (1.14) e (1.15), também para uma função complexa $f : M^n \to \mathbb{C}$ suave, definimos o Laplaciano de f como a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f_1 + i\Delta f_2,$$

que em coordenadas, será dada por

$$\Delta f = \sum_{j,s=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{js})}} \partial_j \left(g^{js} \sqrt{\det(g_{js})} \partial_s(f_1) \right) + i \sum_{j,s=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{js})}} \partial_j \left(g^{js} \sqrt{\det(g_{js})} \partial_s(f_2) \right).$$

Observamos também que, para uma função $\eta \in C^\infty(M)$ a η-divergência de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ se defini de forma análoga, e todas as propriedades anteriores são válidas para este. Em particular para um $(1,1)$-tensor real, teremos para um campo $X \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ que

$$\operatorname{div}_\eta(T(hX)) = h \operatorname{div}_\eta(T(X)) + \left\langle \nabla h, \overline{T(X)} \right\rangle^{\mathbb{C}}$$

em que $h : M \to \mathbb{C}$ é uma funções suave, lembrando que T satisfaz

$$T(X + iY) = T(X) + iT(Y).$$

Podemos então estender o operador $\mathcal{L}$ para o caso complexo da seguinte forma

$$\mathcal{L}(h) = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla h)) = \operatorname{div}(T(\nabla h)) - \langle T(\nabla h), \nabla \eta \rangle^{\mathbb{C}}, \tag{1.16}$$

para toda função $h : M \to \mathbb{C}$ suave. Assim, teremos que o teorema da divergência assume a seguinte forma

$$\int_\Omega h\mathcal{L}g \mathrm{dm} = -\int_\Omega \left\langle T(\nabla h), \overline{\nabla g} \right\rangle^{\mathbb{C}} \mathrm{dm} + \int_{\partial\Omega} h \left\langle \nu, T(\overline{\nabla g}) \right\rangle^{\mathbb{C}} \mathrm{d}\tau.$$

Finalizaremos a seção com duas propriedades elementares do operador $\mathcal{L}$. Dadas as funções complexa suaves $g = g_1 + ig_2$ e $h = h_1 + ih_2$ definidas em M^n, e considerando o operador $\mathcal{L}$ temos

$$\mathcal{L}h = \mathcal{L}h_1 + i\mathcal{L}h_2,$$

e com isso,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(hg) =& \mathcal{L}(h_1 g_1 + i^2 h_2 g_2 + ih_1 g_2 + ih_2 g_1) \\
=& \mathcal{L}(h_1 g_1) + i^2 \mathcal{L}(h_2 g_2) + i\mathcal{L}(h_1 g_2) + i\mathcal{L}(h_2 g_1) \\
=& h_1 \mathcal{L} g_1 + g_1 \mathcal{L} h_1 + 2\langle \nabla h_1, \nabla g_1 \rangle + i^2 h_2 \mathcal{L} g_2 + i^2 g_2 \mathcal{L} h_2 + 2i^2 \langle \nabla h_2, \nabla g_2 \rangle \\
& + ih_1 \mathcal{L} g_2 + ig_2 \mathcal{L} h_1 + 2i \langle \nabla h_1, \nabla g_2 \rangle + ih_2 \mathcal{L} g_1 + ig_1 \mathcal{L} h_2 + 2i \langle \nabla h_2, \nabla g_1 \rangle \\
=& (h_1 + ih_2)\mathcal{L} g_1 + (g_1 + ig_2)\mathcal{L} h_1 + 2\langle \nabla(h_1 + ih_2), \nabla g_1 \rangle \\
& + (h_1 + ih_2) i\mathcal{L} g_2 + (g_1 + ig_2) i\mathcal{L} h_2 + 2\langle \nabla(h_1 + ih_2), i\nabla g_2 \rangle \\
=& (h_1 + ih_2)\mathcal{L}(g_1 + ig_2) + (g_1 + ig_2)\mathcal{L}(h_1 + ih_2) + 2\langle \nabla(h_1 + ih_2), \nabla(g_1 + ig_2) \rangle \\
=& h\mathcal{L}g + g\mathcal{L}h + 2\left\langle T(\nabla h), \overline{\nabla g} \right\rangle^{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Estimativas universais para autovalores

Neste capítulo iremos abordar algumas estimativas universais a cerca dos autovalores para o operador $\mathcal{L}$. O principal resultado é uma desigualdade quadrática do tipo Yang, ver Teorema 2.1.

Começamos por apresentar um dos resultados de Araújo Filho e Gomes.

Lema 2.1 (Araújo Filho e Gomes, ver [1], p. 8-9)**.** *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa n-dimensional M isometricamente imersa em $\mathbb{R}^m$, λ_j o j-ésimo autovalor do problema (8) e u_j em $L^2(\Omega, \mathrm{dm})$ sua correspondente autofunção de valor real normalizada. Então é válido*

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2\int_\Omega u_j^2\mathrm{tr}(T)\mathrm{dm}\\
&\leq 4\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Bigg\{\int_\Omega |T(\nabla u_i)|^2\mathrm{dm}+\frac{n^2}{4}\int_\Omega u_j^2|\mathbf{H}_T|^2\mathrm{dm}+\int_\Omega u_j\left\langle \mathrm{tr}(\nabla T), T(\nabla u_j)\right\rangle\mathrm{dm}\\
&\quad+\int_\Omega u_j^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{div}(T^2(\nabla\eta))-\frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right)\mathrm{dm}+\frac{1}{4}\int_\Omega u_j^2\langle \mathrm{tr}(\nabla T), \mathrm{tr}(\nabla T)-2T(\nabla\eta)\rangle\,\mathrm{dm}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $\mathbf{H}_T = \mathrm{tr}(\alpha\circ T)$, α sendo a segunda forma fundamental.

A partir do Lema 2.1 e com argumentações semelhantes à do Teorema 1.1 em [1], nosso primeiro resultado é o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana completa n-dimensional M isometricamente imersa em $\mathbb{R}^m$, e λ_j o j-ésimo autovalor do problema (8). Então teremos*

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)^2 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\left(\lambda_j+\frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}\right) \tag{2.2}$$

em que $H_0 = \sup_{\overline{\Omega}}|\mathbf{H}_T|$, $C_0 = \sup_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{div}\Big(T\Big(T(\nabla\eta)-\mathrm{tr}(\nabla T)\Big)\Big)-\frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right\}$ e $T_0 = \sup_{\overline{\Omega}}|\mathrm{tr}(\nabla T)|$, com ε e δ conforme em (1.4).

Demonstração. A prova é uma consequência do Lema 2.1. Primeiramente observamos que, como existem números reais positivos ε e δ tais que $\varepsilon|X|^2 \leq \langle T(X), X\rangle \leq \delta|X|^2$, para qualquer campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, teremos que $n\varepsilon \leq \mathrm{tr}(T)$. Consequentemente, no lado esquerdo da expressão (2.1) temos

$$n\varepsilon = n\varepsilon \int_\Omega u_j^2 \mathrm{dm} = \int_\Omega u_j^2 n\varepsilon \mathrm{dm} \leq \int_\Omega u_j^2 \mathrm{tr}(T)\mathrm{dm}. \tag{2.3}$$

Em seguida, tomando $H_0 = \sup_{\overline{\Omega}} |\mathbf{H}_T|$ e usando o Lema 1.1, notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |T(\nabla u_j)|^2 \mathrm{dm} + \frac{n^2}{4}\int_\Omega u_j^2 |\mathbf{H}_T|^2 \mathrm{dm} &\leq \int_\Omega \delta \langle T(\nabla u_j), \nabla u_j\rangle \,\mathrm{dm} + \frac{n^2}{4}\int_\Omega u_j^2 H_0^2 \mathrm{dm}\\ &\leq \delta \int_\Omega \langle T(\nabla u_j), \nabla u_j\rangle \,\mathrm{dm} + \frac{n^2 H_0^2}{4}\int_\Omega u_j^2 \mathrm{dm}\\ &\leq \delta\lambda_j + \frac{n^2 H_0^2}{4}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ainda, tomando $T_0 = \sup_{\overline{\Omega}} |\mathrm{tr}(\nabla T)|$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_j \langle \mathrm{tr}(\nabla T), T(\nabla u_j)\rangle \,\mathrm{dm} + \frac{1}{4}\int_\Omega u_j^2 \langle \mathrm{tr}(\nabla T), \mathrm{tr}(\nabla T) - 2T(\nabla \eta)\rangle \,\mathrm{dm}\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\langle T(\mathrm{tr}(\nabla T)), \nabla(u_j^2)\right\rangle \mathrm{dm} + \frac{1}{4}\int_\Omega u_j^2 \langle \mathrm{tr}(\nabla T), \mathrm{tr}(\nabla T) - 2T(\nabla \eta)\rangle \,\mathrm{dm}\\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \mathrm{div}_\eta(T(\mathrm{tr}(\nabla T)))\mathrm{dm} + \frac{1}{4}\int_\Omega u_j^2 |\mathrm{tr}(\nabla T)|^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \langle \mathrm{tr}(\nabla T), T(\nabla \eta)\rangle \,\mathrm{dm}\\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \mathrm{div}(T(\mathrm{tr}(\nabla T)))\mathrm{dm} + \frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \langle \mathrm{tr}(\nabla T), T(\nabla \eta)\rangle \,\mathrm{dm}\\ &\quad + \frac{1}{4}\int_\Omega u_j^2 |\mathrm{tr}(\nabla T)|^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \langle \mathrm{tr}(\nabla T), T(\nabla \eta)\rangle \,\mathrm{dm}\\ &\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \mathrm{div}(T(\mathrm{tr}(\nabla T)))\mathrm{dm} + \frac{T_0^2}{4}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_j^2 \left(\frac{1}{2}\mathrm{div}(T^2(\nabla\eta)) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right) \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega u_j^2 \mathrm{div}(T(\mathrm{tr}(\nabla T)))\mathrm{dm}\\ &= \int_\Omega u_j^2 \left(\frac{1}{2}\mathrm{div}\Big(T\Big(T(\nabla\eta) - \mathrm{tr}(\nabla T)\Big)\Big) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right) \mathrm{dm} \leq C_0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $C_0 = \sup_{\overline{\Omega}} \left\{\frac{1}{2}\mathrm{div}\Big(T\Big(T(\nabla\eta) - \mathrm{tr}(\nabla T)\Big)\Big) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right\}$.

Então, substituindo (2.3)-(2.6) no Lema 2.1 obtemos

$$n\varepsilon \sum_{j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_j)^2 \leq 4\sum_{j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_j)\left(\delta\lambda_j + \frac{n^2 H_0^2}{4} + C_0 + \frac{T_0^2}{4}\right),$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_j)^2 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\sum_{j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_j)\left(\lambda_j + \frac{n^2 H_0^2 + 4C_0 + T_0^2}{4\delta}\right).$$

□

O teorema acima generaliza, com respeito ao problema de autovalor com condição de fronteira de Dirichlet, o resultado obtido por Araújo Filho e Gomes (Corolário 1.1 em [1]) para $\square_\eta$, bem como o resultado obtido por Gomes e Miranda (Teorema 4 em [10]) para o laplaciano deformado Δ_η e o resultado obtido por Chen e Cheng (4) para o Laplaciano Δ.

Para aplicações do Teorema 2.1, definimos $\upsilon_j = \lambda_j + \frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}$, e com essa notação, a inequação (2.2) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_{k+1}-\upsilon_j)^2 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_{k+1}-\upsilon_j)\upsilon_j. \tag{2.7}$$

Dessa forma, seguem como consequências da estimativa quadrática (2.7) os seguintes resultados.

Corolário 2.1. *Nas hipóteses do Teorema 2.1 temos as três estimativas a seguir*

$$\upsilon_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j, \tag{2.8}$$

$$\upsilon_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

$$\upsilon_{k+1}-\upsilon_k \leq 2\left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Demonstração. Da estimativa (2.7) podemos escrever

$$\mathcal{P}(\upsilon_{k+1}) = k(\upsilon_{k+1})^2 - \upsilon_{k+1}\left(2+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2 \leq 0$$

que é uma inequação quadrática em υ_{k+1}, e podemos então afirmar que o discriminante de $\mathcal{P}(\upsilon_{k+1})$ satisfaz

$$\mathcal{D} = \left(2+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - 4k\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2 \geq 0. \tag{2.11}$$

Como $\mathcal{P}(\upsilon_{k+1}) \leq 0$ temos $r_{k+1}^\eta \leq \upsilon_{k+1} \leq R_{k+1}^\eta$, em que r_{k+1}^η e R_{k+1}^η são, respectivamente, a menor e a maior raiz de $\mathcal{P}$. Então

$$\upsilon_{k+1} \leq R_{k+1}^\eta = \frac{1}{2k}\left[\left(2+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \sqrt{\mathcal{D}}\right]. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) em (2.12) obtemos

$$\upsilon_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \frac{1}{k}\left[\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - k\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 \leq k\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j^2$, que podemos substituir na expressão acima para obter

$$\begin{aligned}
\upsilon_{k+1} &\leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \frac{1}{k}\left[\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \frac{1}{k}\left[\left(\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j.
\end{aligned}$$

o que prova (2.8).

Para provar (2.9), notemos que a partir de (2.13) teremos

$$\begin{aligned}
\upsilon_{k+1} &\leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{1}{k}+\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\upsilon_{k+1} &\leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2 - \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2 - \frac{2}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 + \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right.$$
$$\left. -\frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_j)^2 - \frac{2}{k}\sum_{j,l=1}^{k}\upsilon_j\upsilon_l + \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\upsilon_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j + \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente para provar (2.10), como (2.7) é verdade para qualquer k, segue que

$$\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_k-\upsilon_j)^2 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}(\upsilon_k-\upsilon_j)\upsilon_j,$$

isto é, podemos novamente observar que o polinômio $\mathcal{P}(\upsilon_k) \leq 0$. Analogamente temos

$$\upsilon_k \geq r_k^{\eta} = \frac{1}{k}\left(1+\frac{2\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j - \left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.14}$$

Portanto de (2.9) e (2.14), obtemos o gap entre autovalores consecutivos

$$\upsilon_{k+1}-\upsilon_k \leq 2\left[\left(\frac{2\delta}{kn\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\upsilon_l - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

□

O resultado a seguir também é consequência da expressão (2.7).

Corolário 2.2. *Nas hipóteses do teorema 2.1, temos que*

$$\upsilon_{k+1} \leq \left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)k^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}\upsilon_1. \tag{2.15}$$

Demonstração. O Corolário 2.1 em Miranda, J.F.R. (ver [13], p 74) nos diz que dada uma sequência de números reais não negativos $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_{k+1}$ e constantes c e n positivas que satisfazem a inequação

$$\sum_{i=1}^{k}(\eta_{k+1}-\eta_i)^2 \leq \frac{4c}{n}\sum_{i=1}^{k}(\eta_{k+1}-\eta_i)\eta_i,$$

então, vale que

$$\eta_{k+1} \leq \left(1+\frac{4c}{n}\right)k^{\frac{2c}{n}}\eta_1.$$

Desta forma, basta aplicar este resultado tomando $c = \dfrac{\delta}{\varepsilon}$ em (2.7). □

Observação 2. *Uma vez que* Ω *é conexo, temos que o primeiro autovalor* λ_1 *é simples, isto é,* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \nearrow +\infty$*, com isso, tomando* $k = 1$ *em* (2.2) *teremos que o gap fundamental dos autovalores de* $\mathcal{L}$ *é dado por*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leq \frac{4\delta}{n\varepsilon}\left(\lambda_1 + \frac{n^2 H_0^2 + 4C_0 + T_0^2}{4\delta}\right).$$

Capítulo 3

Estimativas de *gaps*

Este capítulo foi motivado pelo trabalho de Chen, Zheng e Yang [7] e tem o intuito de generalizar, para o caso do operador $\mathcal{L}$, as estimativas de *gap* entre autovalores consecutivos apresentados por eles para o caso do operador Laplaciano Δ. Utilizaremos técnicas similares as exibidas por eles. Como mencionado na introdução, nós provamos a Conjectura 2, para o caso em que a variedade M é o espaço Euclidiano, ver Teorema 3.1. Quando M é o espaço Hiperbólico a Conjectura 2 foi provada com as seguintes hipóteses adicionais: a função deformadora η é radialmente constante e T é um $(1,1)$-tensor limitado, tal que $T(\nabla \log x_n) = \psi \nabla \log x_n$ para alguma função radialmente constante $\psi \in C^\infty(M)$, ver Teorema 3.2. Por fim, provamos a Conjectura 2 para o operador $\Box_\eta$ em domínios limitados em variedades Cartan-Hadamard pinçadas, ver Teorema 3.3.

3.1 Resultados técnicos importantes

O primeiro lema a ser apresentado é devido a Chen, Zheng e Yang, e está presente no artigo [7].

Lema 3.1 (Chen, Zheng e Yang, ver [7], p. 298)**.** *Assuma que $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência não-decrescente, ou seja,*

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots \to +\infty,$$

onde cada μ_j tem multiplicidade finita m_j e se repete de acordo com esta multiplicidade. Dado $r = (r_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$ tal que $r_{m_1} \neq 0$ e $\sum_{j=1}^\infty \mu_j r_j^2 < \sqrt{AB}$ com

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^\infty r_j^2 \quad e \\ A &= \sum_{j=1}^\infty \mu_j^2 r_j^2 < +\infty \ , \end{aligned}$$

então

$$\sum_{j=1}^\infty \mu_j r_j^2 \leq \frac{A + \mu_{m_1}\mu_{m_1+1}B}{\mu_{m_1} + \mu_{m_1+1}}.$$

Uma prova minunciosa do Lema 3.1 pode ser conferida em [18].

Para o próximo resultado, observe que dada uma função complexa g suave em M^n teremos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(|g|^2) &= \mathcal{L}(g\overline{g}) = g\mathcal{L}\overline{g} + \overline{g}\mathcal{L}g + 2\left\langle T(\nabla g), \overline{\nabla \overline{g}}\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= (g_1 + ig_2)\mathcal{L}(g_1 - ig_2) + (g_1 - ig_2)\mathcal{L}(g_1 + ig_2) \\
&\quad + 2\left\langle T(\nabla(g_1 + ig_2)), \overline{\nabla(g_1 - ig_2)}\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= g_1(\mathcal{L}g_1 - i\mathcal{L}g_2) + ig_2(\mathcal{L}g_1 - i\mathcal{L}g_2) + g_1(\mathcal{L}g_1 + i\mathcal{L}g_2) \\
&\quad - ig_2(\mathcal{L}g_1 + i\mathcal{L}g_2) + 2\left\langle T(\nabla(g_1 + ig_2)), \overline{\nabla g_1 - i\nabla g_2}\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= g_1(\mathcal{L}g_1 - i\mathcal{L}g_2 + \mathcal{L}g_1 + i\mathcal{L}g_2) + ig_2(\mathcal{L}g_1 - i\mathcal{L}g_2 - \mathcal{L}g_1 - i\mathcal{L}g_2) \\
&\quad + 2\left\langle T(\nabla(g_1 + ig_2)), \nabla g_1 + i\nabla g_2\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= 2g_1\mathcal{L}g_1 + 2g_2\mathcal{L}g_2 + 2\left\langle T(\nabla g), \nabla g\right\rangle^{\mathbb{C}},
\end{aligned}$$

com isso, podemos concluir que $\langle T(\nabla g), \nabla g\rangle^{\mathbb{C}}$ toma valores em $\mathbb{R}$ para todo $p \in M^n$.

Lema 3.2. *Considerando os autovalores do operador $\mathcal{L}$ para o problema de Dirichlet (8), seja $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ o conjunto das autofunções ortonormais, em que cada autofunção u_k é associada ao k-ésimo autovalor λ_k. Então para uma função complexa $g \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ tal que gu_j não é uma combinação $\mathbb{C}$-linear de $u_1, u_2, \cdots, u_{k+1}$ e tal que*

$$\int_{\Omega} gu_j u_{k+1} \mathrm{dm} \neq 0$$

com $\lambda_j < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}, \quad k, j \in \mathbb{Z}^+, \quad j \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left[(\lambda_{k+1} - \lambda_j) + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)\right] \int_{\Omega} \langle \nabla g, T(\nabla g)\rangle^{\mathbb{C}} u_j^2 \mathrm{dm} \\
&\qquad \leq \int_{\Omega} \left| 2\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\rangle^{\mathbb{C}} + u_j\mathcal{L}g\right|^2 \mathrm{dm} + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \int_{\Omega} |gu_j|^2 \mathrm{dm}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstração. Para a demonstração deste lema buscamos aplicar o teorema anterior, para isso façamos uma construção com intuito de satisfazer as hipóteses do mesmo.

Definamos

$$\begin{aligned}
a_{js} &= \int_{\Omega} gu_j u_s \mathrm{dm} \\
b_{js} &= \int_{\Omega} \left(u_j\mathcal{L}g + 2\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}\right) u_s \mathrm{dm},
\end{aligned}$$

e com isso, teremos

$$a_{js} = \int_{\Omega} gu_j u_s \mathrm{dm} = \int_{\Omega} gu_s u_j \mathrm{dm} = a_{sj}.$$

Além disso,

$$\lambda_s a_{js} = \lambda_s \int_{\Omega} gu_j u_s \mathrm{dm} = \int_{\Omega} gu_j(\lambda_s u_s)\mathrm{dm} = \int_{\Omega} gu_j(-\mathcal{L}u_s)\mathrm{dm},$$

e utilizando a fórmula de Green, podemos então usar a expressão (1.16) para obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_s a_{js} &= -\int_\Omega g u_j(\mathcal{L}u_s)\mathrm{dm} = -\int_\Omega (\mathcal{L}gu_j)\, u_s\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega \Big(g\mathcal{L}u_j + u_j\mathcal{L}g + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big)u_s\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega \Big(-g\lambda_j u_j + u_j\mathcal{L}g + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big)u_s\mathrm{dm}\\
&= \lambda_j\int_\Omega g u_j u_s\mathrm{dm} - \int_\Omega \Big(u_j\mathcal{L}g + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big)u_s\mathrm{dm}\\
&= \lambda_j a_{js} - b_{js}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\lambda_s a_{js} - \lambda_j a_{js} = (\lambda_s - \lambda_j)a_{js} = -b_{js}. \tag{3.2}$$

Sendo que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal completa de $L_2(\Omega, \mathrm{dm})$, utilizando o produto interno de $L_2(\Omega, \mathrm{dm})$, em seguida a identidade de Parseval, e por fim a definição de a_{js}, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |gu_j|^2\mathrm{dm} &= |gu_j|^2_{L_2(\Omega,\mathrm{dm})} = \sum_{s=1}^{\infty}\left|\langle gu_j, u_s\rangle\right|^2\\
&= \sum_{s=1}^{\infty}\left|\int_\Omega gu_j\overline{u_s}\mathrm{dm}\right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty}\left|\int_\Omega gu_j u_s\mathrm{dm}\right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty}|a_{js}|^2.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Utilizando o fato de u_j ser uma função real para todo j e logo na sequência a fórmula de Green, teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \nabla g, T(\nabla g)\rangle^{\mathbb{C}} u_j^2\mathrm{dm} &= \int_\Omega \left\langle \nabla g, T(\overline{u}_j^2\nabla g)\right\rangle^{\mathbb{C}}\mathrm{dm} = -\int_\Omega g\left(\mathrm{div}_\eta(T(u_j^2\nabla\overline{g}))\right)\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega g\Big(u_j^2\mathrm{div}_\eta(T(\nabla\overline{g})) + \left\langle T(\nabla u_j^2), \overline{\nabla\overline{g}}\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big)\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega g\Big(u_j^2\mathcal{L}\overline{g} + \langle 2u_jT(\nabla u_j), \nabla g\rangle^{\mathbb{C}}\Big)\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega g\Big(u_j^2\mathcal{L}\overline{g} + 2u_j\left\langle T(\nabla u_j), \nabla g\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big)\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega gu_j\left(u_j\mathcal{L}\overline{g} + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla g\right\rangle^{\mathbb{C}}\right)\mathrm{dm}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, a partir da definição de a_{js} e b_{js} e utilizando as identidades (3.2) e (3.4) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \nabla g, T(\nabla g)\rangle^{\mathbb{C}} u_j^2\mathrm{dm} &= -\int_\Omega gu_j\left(u_j\mathcal{L}\overline{g} + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla g\right\rangle^{\mathbb{C}}\right)\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega gu_j\left(\overline{u_j\mathcal{L}g} + 2\overline{\left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}}\right)\mathrm{dm}\\
&= -\int_\Omega gu_j\left(\overline{u_j\mathcal{L}g + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}}\right)\mathrm{dm}\\
&= -\left\langle gu_j, u_j\mathcal{L}g + 2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left\langle \sum_{s=1}^{\infty} \langle gu_j, u_s\rangle u_s, \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}, u_k\right\rangle u_k \right\rangle \\
&= -\sum_{s=1}^{\infty} \langle gu_j, u_s\rangle \left\langle u_s, \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}, u_k\right\rangle u_k \right\rangle \\
&= -\sum_{s=1}^{\infty} \langle gu_j, u_s\rangle \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}, u_k\right\rangle} \langle u_s, u_k\rangle \\
&= -\sum_{s,k=1}^{\infty} \langle gu_j, u_s\rangle \overline{\left\langle u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}, u_k\right\rangle}\delta_{sk} \\
&= -\sum_{s=1}^{\infty} \langle gu_j, u_s\rangle \overline{\left\langle u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}, u_s\right\rangle} \\
&= -\sum_{s=1}^{\infty} \int_\Omega gu_ju_s\mathrm{dm}\overline{\int_\Omega \left(u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}\right)u_s\mathrm{dm}} \\
&= -\sum_{s=1}^{\infty} a_{js}\overline{b_{js}} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{js}\overline{(-b_{js})} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{js}\overline{(\lambda_s-\lambda_j)a_{js}} \\
&= \sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)a_{js}\overline{a_{js}} = \sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Segue da identidade de Parseval, e utilizando mais uma vez a equação (3.2), que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left|u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}\right|^2\mathrm{dm} &= \left|u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}\right|^2_{L_2(\Omega,\mathrm{dm})} \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \left|\left\langle u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}, u_s\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \left|\int_\Omega \left(u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}\right)\overline{u_s}\mathrm{dm}\right|^2 \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \left|\int_\Omega \left(u_j\mathcal{L}g + 2\,\langle T(\nabla u_j), \nabla\overline{g}\rangle^{\mathbb{C}}\right)u_s\mathrm{dm}\right|^2 \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} |b_{js}|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |(\lambda_j-\lambda_s)a_{js}|^2 \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \left|(\lambda_j-\lambda_s)\right|^2\left|a_{js}\right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)^2\left|a_{js}\right|^2.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

A partir de equação (3.5), podemos deduzir que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega \langle\nabla g, T(\nabla g)\rangle^{\mathbb{C}} u_j^2\mathrm{dm} - \sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2\right)^2 &= \left(\sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2 - \sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2\right)^2 \\
&= \left(\sum_{s=k+1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2\right)^2,
\end{aligned}
$$

Segue das identidade (3.3), (3.6) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s=k+1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2\right)^2 &= \left(\sum_{s=k+1}^{\infty}\Big((\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|\Big)|a_{js}|\right)^2\\ &\leq \left(\sum_{s=k+1}^{\infty}(|a_{js}|)^2\right)\left(\sum_{s=k+1}^{\infty}\Big((\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|\Big)^2\right)\\ &= \left(\sum_{s=k+1}^{\infty}|a_{js}|^2\right)\left(\sum_{s=k+1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2\right)\\ &= \left(\sum_{s=1}^{\infty}|a_{js}|^2-\sum_{s=1}^{k}|a_{js}|^2\right)\left(\sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2\right.\\ &\quad\left.-\sum_{j=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2\right)\\ &= \left(\int_\Omega|gu_j|^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}|a_{js}|^2\right)\left(\int_\Omega\left|u_j\mathcal{L}g+2\left\langle T(\nabla u_j),\nabla\overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\right|^2\mathrm{dm}\right.\\ &\quad\left.-\sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\left(\int_\Omega\langle\nabla g,T(\nabla g)\rangle u_j^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2\right)^2\\ &\leq\left(\int_\Omega|gu_j|^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}|a_{js}|^2\right)\left(\int_\Omega\left|u_j\mathcal{L}g+2\left\langle T(\nabla u_j),\nabla\overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\right|^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, uma vez que $a_{jk+1}=\int_\Omega gu_ju_{k+1}\neq 0$, defina

$$A(j)=\int_\Omega\left|u_j\mathcal{L}g+2\left\langle T(\nabla u_j),\nabla\overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}}\right|^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2=\sum_{s=k+1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)^2|a_{js}|^2>0,$$

$$B(j)=\int_\Omega|gu_j|^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}|a_{js}|^2=\sum_{s=k+1}^{\infty}|a_{js}|^2>0,$$

$$C(j)=\int_\Omega\langle\nabla g,T(\nabla g)\rangle u_j^2\mathrm{dm}-\sum_{s=1}^{k}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2=\sum_{s=k+1}^{\infty}(\lambda_s-\lambda_j)|a_{js}|^2>0.$$

Uma vez que gu_j não é uma combinação $\mathbb{C}$-linear de $u_1,\cdots,u_{k+1}$ existe algum $l>k+1$ tal que

$$a_{jl}=\int_\Omega gu_ju_l\neq 0.$$

Dado que $\lambda_j < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} \leq \lambda_l$, o vetor $(|a_{js}|)_{s=k+1}^{\infty}$ não é proporcional a $((\lambda_s - \lambda_j)^2 |a_{js}|)_{s=k+1}^{\infty}$, e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que (3.7) é equivalente a

$$C(j) < \sqrt{A(j)B(j)}. \tag{3.8}$$

Desde que $a_{jk+1} \neq 0$ e uma vez que valha (3.8) aplicamos o Teorema 3.1 para obter

$$C(j) \leq \frac{A(j) + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j)B(j)}{(\lambda_{k+2} - \lambda_j) + (\lambda_{k+1} - \lambda_j)}. \tag{3.9}$$

Como consequência de (3.9) e das definições de $A(j), B(j)$ e $C(j)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&((\lambda_{k+2} - \lambda_j) + (\lambda_{k+1} - \lambda_j)) \left(\int_\Omega \langle \nabla g, T(\nabla g) \rangle u_j^2 \mathrm{dm} - \sum_{s=1}^{k} (\lambda_s - \lambda_j) |a_{js}|^2 \right) \\
&\qquad \leq \int_\Omega \left| u_j \mathcal{L} g + 2 \left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g} \right\rangle^{\mathbb{C}} \right|^2 \mathrm{dm} - \sum_{s=1}^{k} (\lambda_s - \lambda_j)^2 |a_{js}|^2 \\
&\qquad + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \left(\int_\Omega |g u_j|^2 \mathrm{dm} - \sum_{s=1}^{k} |a_{js}|^2 \right),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&((\lambda_{k+2} - \lambda_j) + (\lambda_{k+1} - \lambda_j)) \int_\Omega \langle \nabla g, T(\nabla g) \rangle u_j^2 \mathrm{dm} \\
&\quad \leq \int_\Omega \left| u_j \mathcal{L} g + 2 \left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g} \right\rangle^{\mathbb{C}} \right|^2 \mathrm{dm} + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \int_\Omega |g u_j|^2 \mathrm{dm} \\
&\quad + \left[\Big((\lambda_{k+2} - \lambda_j) + (\lambda_{k+1} - \lambda_j) \Big) \sum_{s=1}^{k} (\lambda_s - \lambda_j) |a_{js}|^2 - \sum_{s=1}^{k} (\lambda_s - \lambda_j)^2 |a_{js}|^2 \right] \\
&\quad - (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \sum_{s=1}^{k} |a_{js}|^2 \\
&\quad = \int_\Omega \left| u_j \mathcal{L} g + 2 \left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g} \right\rangle^{\mathbb{C}} \right|^2 \mathrm{dm} + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \int_\Omega |g u_j|^2 \mathrm{dm} \\
&\quad + \sum_{s=1}^{k} \Big[(\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_s - \lambda_j) + (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(\lambda_s - \lambda_j) \\
&\quad - \quad (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) - (\lambda_s - \lambda_j)^2 \Big] |a_{js}|^2 \\
&\quad = \int_\Omega \left| u_j \mathcal{L} g + 2 \left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g} \right\rangle^{\mathbb{C}} \right|^2 \mathrm{dm} + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \int_\Omega |g u_j|^2 \mathrm{dm} \\
&\quad - \sum_{s=1}^{k} \Big[(\lambda_{k+2} - \lambda_s)(\lambda_{k+1} - \lambda_s) \Big] |a_{js}|^2 \\
&\quad \leq \int_\Omega \left| u_j \mathcal{L} g + 2 \left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g} \right\rangle^{\mathbb{C}} \right|^2 \mathrm{dm} + (\lambda_{k+2} - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) \int_\Omega |g u_j|^2 \mathrm{dm}.
\end{aligned}$$

$\square$

De posse deste lema, e fazendo a escolha da função complexa adequada, obtemos os resultados a seguir para funções reais.

Corolário 3.1. *Considerando os autovalores do operador $\mathcal{L}$ para o problema de Dirichlet, seja $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ o conjunto das autofunções ortonormais, em que cada autofunção u_k é associada ao k-ésimo autovalor λ_k, então para qualquer função real não constante $f \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, temos*

$$
\begin{aligned}
&\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle u_j^2 \mathrm{dm} \\
&\quad \leq 2\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \mathrm{dm}} + \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle + u_j \mathcal{L} f\Big)^2 \mathrm{dm}.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Demonstração. A intenção é aplicarmos o resultado do Lema 3.2. Sejam $f \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ não constante, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $i = \sqrt{-1}$. Para $g = e^{(i\alpha f)}$ temos

$$\nabla g = \nabla(e^{i\alpha f}) = e^{i\alpha f}(i\alpha \nabla f),$$

bem como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} g :&= \mathrm{div}_\eta (T(\nabla g) = \mathrm{div}(T(\nabla g)) - \langle T(\nabla g), \nabla \eta\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= \mathrm{div}(e^{i\alpha f} i\alpha T(\nabla f)) - \left\langle i\alpha e^{i\alpha f} T(\nabla f), \nabla \eta\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= i\alpha e^{i\alpha f}\mathrm{div}(T(\nabla f)) + \left\langle T(\nabla f), \overline{-\alpha^2 e^{i\alpha f}\nabla f}\right\rangle^{\mathbb{C}} - i\alpha e^{i\alpha f}\left\langle T(\nabla f), \nabla \eta\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= i\alpha e^{i\alpha f}\mathrm{div}_\eta(T(\nabla f)) - \alpha^2 e^{i\alpha f}\left\langle T(\nabla f), \nabla f\right\rangle^{\mathbb{C}} \\
&= i\alpha (e^{i\alpha f})\mathcal{L} f - \alpha^2 e^{i\alpha f}\left\langle T(\nabla f), \nabla f\right\rangle^{\mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

e

$$\int_\Omega |g u_j|^2 \mathrm{dm} = \int_\Omega \left|e^{i\alpha f} u_j\right|^2 \mathrm{dm} = \int_\Omega \left|e^{i\alpha f}\right|^2 |u_j|^2 \mathrm{dm} = \int_\Omega u_j^2 \mathrm{dm} = 1. \tag{3.11}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \nabla g, T(\nabla g)\rangle^{\mathbb{C}} u_j^2 \, \mathrm{dm} &= \int_\Omega i\alpha e^{i\alpha f}\left\langle \nabla f, i\alpha e^{i\alpha f} T(\nabla f)\right\rangle^{\mathbb{C}} \mathrm{dm} \\
&= \int_\Omega i\alpha e^{i\alpha f}\overline{i\alpha e^{i\alpha f}}\left\langle \nabla f, T(\nabla f)\right\rangle^{\mathbb{C}} \mathrm{dm} \\
&= \int_\Omega |i\alpha(e^{i\alpha f})|^2 \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle u_j^2 \, \mathrm{dm} \\
&= \alpha^2 \int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle u_j^2 \, \mathrm{dm},
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left|2\left\langle T(\nabla u_j), \nabla \overline{g}\right\rangle^{\mathbb{C}} + u_j \mathcal{L} g\right|^2 \mathrm{dm} &= \int_\Omega \left|2\left\langle T(\nabla u_j), \overline{i\alpha e^{i\alpha f}\nabla f}\right\rangle^{\mathbb{C}} + u_j \mathcal{L} g\right|^2 \mathrm{dm} \\
&= \int_\Omega \left|2i\alpha e^{i\alpha f}\left\langle T(\nabla u_j), \nabla f\right\rangle^{\mathbb{C}}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ u_j i\alpha e^{i\alpha f}\mathcal{L}f \\
&- u_j\alpha^2 e^{i\alpha f}\left\langle T(\nabla f),\nabla f\right\rangle^{\mathbb{C}}\Big|^2 \mathrm{dm} \\
= &\int_\Omega \Big| e^{i\alpha f}\Big[i\alpha\big(2\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle + u_j\mathcal{L}f\big) \\
&- u_j\alpha^2\langle T(\nabla f),\nabla f\rangle\Big]\Big|^2 \mathrm{dm} \\
= &\int_\Omega \Big| i\alpha\big(2\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle + u_j\mathcal{L}f\big) \\
&- u_j\alpha^2\langle T(\nabla f),\nabla f\rangle\Big|^2 \mathrm{dm} \\
= &\ \alpha^2\int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle + u_j\mathcal{L}f\Big)^2 \mathrm{dm} \\
&+ \alpha^4\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2\ \mathrm{dm}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Aplicamos então as equações (3.11), (3.12) e (3.13) na expressão (3.1), obtida no Lema 3.2, para obtermos

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle u_j^2\ \mathrm{dm} \\
&\quad\le \alpha^4\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2\ \mathrm{dm} + \alpha^2\int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle + u_j\mathcal{L}f\Big)^2 \mathrm{dm} \\
&\quad\quad + (\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j).
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Dividindo (3.14) por α^2, conseguiremos

$$
\begin{aligned}
&\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle u_j^2\ \mathrm{dm} \\
&\quad\le \alpha^2\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2\ \mathrm{dm} + \frac{1}{\alpha^2}(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j) + \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle + u_j\mathcal{L}f\Big)^2 \mathrm{dm}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Desde que a desigualdade (3.15) é válida para todo $\alpha \neq 0$, e como

$$
(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2\ \mathrm{dm} \neq 0,
$$

podemos escolher

$$
\alpha^2 = \left(\frac{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)}{\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2\ \mathrm{dm}}\right)^{\frac{1}{2}},
$$

em (3.15) e obter

$$
\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)\int_\Omega \langle\nabla f, T(\nabla f)\rangle u_j^2\ \mathrm{dm}
$$

$$\leq \left(\frac{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)}{\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \,\mathrm{dm}}\right)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \,\mathrm{dm} + \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle + u_j \mathcal{L} f\Big)^2 \mathrm{dm}$$
$$+ \left(\frac{\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \,\mathrm{dm}}{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)}\right)^{\frac{1}{2}} (\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)$$

$$= \Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \,\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle + u_j \mathcal{L} f\Big)^2 \mathrm{dm}$$
$$+ \left(\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \,\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}} \Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j) \int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla f)\rangle^2 u_j^2 \,\mathrm{dm}} + \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle + u_j \mathcal{L} f\Big)^2 \mathrm{dm},$$

concluindo a prova do Corolário 3.1 □

Como consequência obtemos o resultado a seguir que será fundamental na prova de nosso resultado principal deste capítulo.

Corolário 3.2. *Sejam $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ o conjunto das autofunções ortonormais para o operador $\mathcal{L}$ em que cada autofunção u_k é associada ao k-ésimo autovalor λ_k, então para uma função real $f \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ com $|\nabla f|^2 = 1$, teremos*

$$(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \leq \frac{16}{\sigma}\left(\int_\Omega \langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mathcal{L} f)^2 u_j^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\mathcal{L} f), T(\nabla f)\rangle u_j^2 \mathrm{dm}\right)\lambda_{k+2}. \tag{3.16}$$

Além disso,

$$\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} \leq \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_j - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mathcal{L} f)^2 u_j^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\mathcal{L} f), T(\nabla f)\rangle u_j^2 \mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{k+2}}, \tag{3.17}$$

onde $\sigma = 2\delta - \varepsilon$ e as constantes ε e δ são conforme em (1.4).

Demonstração. Pela expressão (3.10) do Corolário 3.1 e usando que $|\nabla f|^2 = 1$, temos

$$\varepsilon\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)\int_\Omega u_j^2 \,\mathrm{dm} \leq 2\delta\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\int_\Omega u_j^2 \,\mathrm{dm}}$$
$$+ \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle + u_j \mathcal{L} f\Big)^2 \mathrm{dm},$$

ou seja,

$$\varepsilon\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big) - 2\delta\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)} \leq \int_\Omega \Big(2\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle + u_j \mathcal{L} f\Big)^2 \mathrm{dm}.$$

Tomando $\sigma = 2\delta - \varepsilon$ teremos

$$\frac{\sqrt{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)}}{(\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)} \leq \frac{\varepsilon-\sigma}{2(\delta-\sigma)}$$

daí obtemos que

$$\sigma\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}-\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_j}\right)^2\leq\varepsilon\Big((\lambda_{k+2}-\lambda_j)+(\lambda_{k+1}-\lambda_j)\Big)-2\delta\sqrt{\big(\lambda_{k+2}-\lambda_j\big)\big(\lambda_{k+1}-\lambda_j\big)}$$

$$\leq\int_\Omega\Big(2\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle+u_j\mathcal{L}f\Big)^2\mathrm{dm}$$

$$=\int_\Omega\Big(4\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2+(\mathcal{L}f)^2u_j^2+4\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle u_j\mathcal{L}f\Big)\mathrm{dm}$$

$$=4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2\mathrm{dm}+\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}+4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle u_j\mathcal{L}f\mathrm{dm}.$$

Utilizando a fórmula de Green e uma vez que f é uma função real, temos

$$\begin{aligned}4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle u_j\mathcal{L}f\mathrm{dm}&=2\int_\Omega\langle T(\nabla u_j^2),(\mathcal{L}f)\nabla f\rangle\mathrm{dm}=2\int_\Omega\langle\nabla u_j^2,T((\mathcal{L}f)\nabla f)\rangle\mathrm{dm}\\&=-2\int_\Omega u_j^2(\mathrm{div}_\eta[T((\mathcal{L}f)\nabla f)])\mathrm{dm}\\&=-2\int_\Omega u_j^2\Big(\mathcal{L}f(\mathrm{div}_\eta[T(\nabla f)])+\langle T(\nabla f),\nabla(\mathcal{L}f)\rangle\Big)\mathrm{dm}\\&=-2\int_\Omega u_j^2(\mathcal{L}f)^2\mathrm{dm}-2\int_\Omega u_j^2\langle\nabla(\mathcal{L}f),T(\nabla f)\rangle\mathrm{dm}.\end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}\sigma\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}-\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_j}\right)^2&\leq4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2\mathrm{dm}+\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}+4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle u_j\mathcal{L}f\mathrm{dm}\\&=4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2\mathrm{dm}+\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}-2\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}\\&\quad-2\int_\Omega\langle\nabla(\mathcal{L}f),T(\nabla f)\rangle u_j^2\mathrm{dm}\\&=4\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2\mathrm{dm}-\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}-2\int_\Omega\langle\nabla(\mathcal{L}f),T(\nabla f)\rangle u_j^2\mathrm{dm}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Multiplicando $\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}+\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_j}\right)^2$ e dividindo por σ em ambos os extremos da inequação (3.18), iremos obter

$$\begin{aligned}\Big(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1}\Big)^2&\leq\frac{4}{\sigma}\left(\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2\mathrm{dm}-\frac{1}{4}\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2}\int_\Omega\langle\nabla(\mathcal{L}f),T(\nabla f)\rangle u_j^2\mathrm{dm}\right)\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}+\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_j}\right)^2\\&\leq\frac{16}{\sigma}\left(\int_\Omega\langle T(\nabla u_j),\nabla f\rangle^2\mathrm{dm}-\frac{1}{4}\int_\Omega(\mathcal{L}f)^2u_j^2\mathrm{dm}-\frac{1}{2}\int_\Omega\langle\nabla(\mathcal{L}f),T(\nabla f)\rangle u_j^2\mathrm{dm}\right)\lambda_{k+2},\end{aligned}$$

visto que $\lambda_{k+1}\leq\lambda_{k+2}$ implica em

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}+\sqrt{\lambda_{k+1}-\lambda_j}\right)^2&\leq\left(\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}+\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}\right)^2=\left(2\sqrt{\lambda_{k+2}-\lambda_j}\right)^2\\&=4(\lambda_{k+2}-\lambda_j)\leq4\lambda_{k+2}.\end{aligned}$$

E com isto, provamos a inequação (3.16).

Uma vez que $|\nabla f|^2 = 1$ segue do Lema 1.1 que

$$\begin{aligned}\langle T(\nabla u_j), \nabla f\rangle^2 &= |\langle T(\nabla u_j), (\nabla f)\rangle|^2 \leq |T(\nabla u_j)|^2 |\nabla f|^2 \\ &= |T(\nabla u_j)|^2 \leq \delta \langle \nabla u_j, T(\nabla u_j)\rangle. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Aplicando (3.19) em (3.16) e lembrando que $\lambda_j = \int_\Omega \langle \nabla u_j, T(\nabla u_j)\rangle \mathrm{dm}$ temos

$$\begin{aligned}\Big(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1}\Big)^2 &\leq \frac{16}{\sigma}\Big(\int_\Omega \langle \nabla f, T(\nabla u_j)\rangle \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mathcal{L}f)^2 u_j^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\mathcal{L}f), T(\nabla f)\rangle u_j^2 \mathrm{dm}\Big)\lambda_{k+2} \\ &\leq \frac{16}{\sigma}\Big(\delta \int_\Omega \langle \nabla u_j, T(\nabla u_j)\rangle \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mathcal{L}f)^2 u_j^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\mathcal{L}f), T(\nabla f)\rangle u_j^2 \mathrm{dm}\Big)\lambda_{k+2} \\ &= \frac{16}{\sigma}\Big(\delta\lambda_j - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mathcal{L}f)^2 u_j^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\mathcal{L}f), T(\nabla f)\rangle u_j^2 \mathrm{dm}\Big)\lambda_{k+2}. \end{aligned}$$

Com isso provamos a expressão (3.17). □

3.2 Resultados principais

A partir de agora apresentaremos os resultados principais deste capítulo. O primeiro resultado a ser apresentado afirma que a Conjectura 2 é verdadeira no caso Euclidiano. Ressaltamos que o principal ingrediente na demonstração é o corolário 3.2.

Teorema 3.1. *Se Ω é um domínio limitado no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e λ_k o k-ésimo $(k > 1)$ autovalor do problema de autovalor de Dirichlet (8) para o operador $\mathcal{L}$, então*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\left(\lambda_1 + \dfrac{4C_0 + T_0^2}{4\delta}\right)\sqrt{\dfrac{\delta}{\sigma n}\left(1 + \dfrac{4\delta}{n\varepsilon}\right)}$, *sendo* $\sigma = 2\delta - \varepsilon$ *e com* C_0 *e* T_0 *conforme em* (2.2).

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}$. Seja $\{x_1, \cdots, x_n\}$ a base de funções coordenadas em $\mathbb{R}^n$. Uma vez que $\nabla x_l = e_l$ para todo $l = 1, \cdots, n$, temos $|\nabla x_l| = 1$, tome $j = 1$ e $f = x_l$ em (3.16). Com isso, teremos

$$\begin{aligned}(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1})^2 \leq & \frac{16}{\sigma}\Big(\int_\Omega \langle \nabla x_l, T(\nabla u_1)\rangle^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mathcal{L}x_l)^2 u_1^2 \mathrm{dm} \\ & - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla(\mathcal{L}x_l), T(\nabla x_l)\rangle u_1^2 \mathrm{dm}\Big)\lambda_{k+2} \\ = & \frac{16}{\sigma}\Big(\int_\Omega \langle e_l, T(\nabla u_1)\rangle^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega \big(\mathrm{div}(T(e_l)) - \langle \nabla\eta, T(e_l)\rangle\big)^2 u_1^2 \mathrm{dm} \\ & - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla\big(\mathrm{div}(T(e_l)) - \langle \nabla\eta, T(e_l)\rangle\big), T(e_l)\rangle u_1^2 \mathrm{dm}\Big)\lambda_{k+2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Consequentemente, variando l em (3.20) e somando as n inequações obtidas, teremos

$$n(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1})^2 \leq \frac{16}{\sigma}\Big(\int_\Omega \sum_{l=1}^n \langle e_l, T(\nabla u_1)\rangle^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{l=1}^n \big(\mathrm{div}(T(e_l) - \langle T(\nabla\eta), e_l\rangle\big)^2 u_1^2 \mathrm{dm}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla\big(\mathrm{div}(T(e_l)-\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle\big),T(e_l)\rangle u_1^2\mathrm{dm}\Bigg)\lambda_{k+2}. \tag{3.21}$$

Inicialmente, usando o Lema 1.1 podemos ver que

$$\int_{\Omega}\sum_{l=1}^{n}\langle e_l,T(\nabla u_1)\rangle^2\mathrm{dm}=\int_{\Omega}|T(\nabla u_1)|^2\mathrm{dm}\leq\delta\int_{\Omega}\langle T(\nabla u_1),\nabla u_1\rangle\mathrm{dm}=\delta\lambda_1. \tag{3.22}$$

E observando que

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(T(e_l))&=\sum_{j=1}^{n}\big\langle\nabla_{e_j}T(e_l),e_j\big\rangle=\sum_{j=1}^{n}\big\langle(\nabla_{e_j}T)(e_l)+T(\nabla_{e_j}e_l),e_j\big\rangle\\&=\sum_{j=1}^{n}\big\langle(\nabla_{e_j}T)(e_l),e_j\big\rangle=\left\langle e_l,\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}T)e_j\right\rangle=\langle e_l,\mathrm{tr}(\nabla T)\rangle\,,\end{aligned}$$

obtemos em seguida que

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\sum_{l=1}^{n}\big(\mathrm{div}(T(e_l))-\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle\big)^2u_1^2\mathrm{dm}\\
&=-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\left(\sum_{l=1}^{n}(\mathrm{div}(T(e_l)))^2-2\sum_{l=1}^{n}\mathrm{div}(T(e_l))\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle+\sum_{l=1}^{n}\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle^2\right)u_1^2\mathrm{dm}\\
&=-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle e_l,\mathrm{tr}(\nabla T)\rangle^2-2\mathrm{div}\left(T\left(\sum_{l=1}^{n}\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle\,e_l\right)\right)\right.\\
&\quad\left.+2\sum_{l=1}^{n}\big\langle\nabla\big(\,\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle\,\big),T(e_l)\big\rangle+|T(\nabla\eta)|^2\right)u_1^2\mathrm{dm}\\
&=-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\Big(|\mathrm{tr}(\nabla T)|^2-2\mathrm{div}\left(T\left(T(\nabla\eta)\right)\right)\\
&\quad\left.+2\sum_{l=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{n}\big\langle\nabla_{e_j}T(\nabla\eta),e_l\big\rangle\,e_j,T(e_l)\right\rangle+|T(\nabla\eta)|^2\right)u_1^2\mathrm{dm}\\
&=-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\Big(|\mathrm{tr}(\nabla T)|^2-2\mathrm{div}\left(T^2(\nabla\eta)\right)\\
&\quad\left.+2\sum_{j=1}^{n}\left\langle\nabla_{e_j}T(\nabla\eta),\sum_{l=1}^{n}\langle T(e_j),e_l\rangle\,e_l\right\rangle+|T(\nabla\eta)|^2\right)u_1^2\mathrm{dm}\\
&=-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\left(|\mathrm{tr}(\nabla T)|^2-2\mathrm{div}\left(T^2(\nabla\eta)\right)+2\sum_{j=1}^{n}\big\langle\nabla_{e_j}T(\nabla\eta),T(e_j)\big\rangle+|T(\nabla\eta)|^2\right)u_1^2\mathrm{dm}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Além disso, teremos

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla\big(\mathrm{div}(T(e_l)-\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle\big),T(e_l)\rangle u_1^2\mathrm{dm}\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{l=1}^{n}\Big(\,\big\langle\nabla\big(\,\langle e_l,\mathrm{tr}(\nabla T)\rangle\,\big),T(e_l)\big\rangle-\big\langle\nabla\big(\,\langle T(\nabla\eta),e_l\rangle\,\big),T(e_l)\big\rangle\Big)u_1^2\mathrm{dm}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{l=1}^n \left(\left\langle \sum_{j=1}^n \langle e_l, \nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T)\rangle e_j, T(e_l) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j} T(\nabla\eta), e_l\rangle e_j, T(e_l) \right\rangle \right) u_1^2 \mathrm{dm}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \left\langle \sum_{l=1}^n \langle T(e_j), e_l, \rangle e_l, \nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T) \right\rangle - \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} T(\nabla\eta), \sum_{l=1}^n \langle T(e_j), e_l\rangle e_l \right\rangle \right) u_1^2 \mathrm{dm}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \left\langle T(e_j), \nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T)\right\rangle - \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} T(\nabla\eta), T(e_j)\right\rangle \right) u_1^2 \mathrm{dm}. \tag{3.24}$$

Ainda, uma vez que

$$\mathrm{div}\Big(T\big(\mathrm{tr}(\nabla T)\big)\Big) = \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} T(\mathrm{tr}(\nabla T)), e_j\right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle (\nabla_{e_j} T)(\mathrm{tr}(\nabla T)) + T(\nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T)), e_j\right\rangle$$

$$= \left\langle \mathrm{tr}(\nabla T), \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j} T) e_j \right\rangle + \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T), T(e_j)\right\rangle = |\mathrm{tr}(\nabla T)|^2 + \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T), T(e_j)\right\rangle,$$

e utilizando as estimativas feitas em (3.22), (3.23) e (3.24) na expressão (3.21), teremos

$$\begin{aligned}
(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})^2 \leq & \frac{16}{\sigma n}\Bigg(\int_\Omega \sum_{l=1}^n \langle e_l, T(\nabla u_1)\rangle^2 \mathrm{dm} - \frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{l=1}^n \big(\mathrm{div}(T(e_l) - \langle T(\nabla\eta), e_l\rangle\big)^2 u_1^2 \mathrm{dm} \\
& -\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{l=1}^n \langle \nabla\big(\mathrm{div}(T(e_l) - \langle T(\nabla\eta), e_l\rangle\big), T(e_l)\rangle u_1^2 \mathrm{dm}\Bigg)\lambda_{k+2} \\
\leq & \frac{16}{\sigma n}\Bigg(\delta\lambda_1 + \int_\Omega u_1^2\Bigg[-\frac{1}{4}|\mathrm{tr}(\nabla T)|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{div}\left(T^2(\nabla\eta)\right) \\
& -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} T(\nabla\eta), T(e_j)\right\rangle - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2 \\
& -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left\langle T(e_j), \nabla_{e_j}\mathrm{tr}(\nabla T)\right\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} T(\nabla\eta), T(e_j)\right\rangle \Bigg]\mathrm{dm}\Bigg)\lambda_{k+2} \\
= & \frac{16}{\sigma n}\Bigg(\delta\lambda_1 + \int_\Omega u_1^2\Bigg[\frac{1}{2}\mathrm{div}\left(T^2(\nabla\eta)\right) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2 \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{div}(T(\mathrm{tr}(\nabla T))) + \frac{1}{4}|\mathrm{tr}(\nabla T)|^2\Bigg]\mathrm{dm}\Bigg)\lambda_{k+2} \\
= & \frac{16}{\sigma n}\Bigg(\delta\lambda_1 + \int_\Omega u_1^2\Bigg[\frac{1}{2}\mathrm{div}\Big(T\Big(T(\nabla\eta) - \mathrm{tr}(\nabla T)\Big)\Big) - \frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2 \\
& +\frac{1}{4}|\mathrm{tr}(\nabla T)|^2\Bigg]\mathrm{dm}\Bigg)\lambda_{k+2} \\
\leq & \frac{16}{\sigma n}\left(\delta\lambda_1 + \int_\Omega u_1^2\left[C_0 + \frac{T_0^2}{4}\right]\mathrm{dm}\right)\lambda_{k+2} = \frac{16}{\sigma n}\left(\delta\lambda_1 + C_0 + \frac{T_0^2}{4}\right)\lambda_{k+2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a partir da expressão (2.15) do Corolário 2.2, e como $H_0^2 = 0$ no $\mathbb{R}^n$, nós deduzimos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1} \leq & 4\sqrt{\frac{1}{\sigma n}\left(\delta\lambda_1 + C_0 + \frac{T_0^2}{4}\right)\lambda_{k+2}} \\
\leq & 4\sqrt{\frac{1}{\sigma n}\left(\delta\lambda_1 + C_0 + \frac{T_0^2}{4}\right)\left(1 + \frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\lambda_1 + \frac{4C_0 + T_0^2}{4\delta}\right)(k+1)^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\sqrt{\frac{\delta}{\sigma n}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)}\sqrt{\left(\lambda_1+\frac{4C_0+T_0^2}{4\delta}\right)^2(k+1)^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}} \\
&= 4\sqrt{\frac{\delta}{\sigma n}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)}\left(\lambda_1+\frac{4C_0+T_0^2}{4\delta}\right)(k+1)^{\frac{\delta}{n\varepsilon}} \\
&= C_{n,\Omega}(k+1)^{\frac{\delta}{n\varepsilon}} \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\left(\lambda_1+\frac{4C_0+T_0^2}{4\delta}\right)\sqrt{\frac{\delta}{\sigma n}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)}$. Portanto, (3.25) vale para $k > 1$ arbitrário. $\square$

Em particular, temos os seguinte corolário

Corolário 3.3. *Seja Ω um domínio limitado no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e λ_k o k-ésimo $(k > 1)$ autovalor do problema de autovalor de Dirichlet (8).*

i) Se o tensor T é livre de divergência, então, para o operador de Cheng-Yau deformado $\square_\eta$, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\left(\lambda_1+\frac{C_0}{\delta}\right)\sqrt{\frac{\delta}{\sigma n}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)}$;

ii) Se o tensor T é livre de divergência, e a função deformadora η é constante, então, para o operador de Cheng-Yau $\square$, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\lambda_1\sqrt{\frac{\delta}{\sigma n}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)}$.

iii) Se T é o tensor identidade, então, para o operador Laplaciano deformado Δ_η, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}},$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\left(\lambda_1+\frac{C_0}{\delta}\right)\sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)}$;

iv) Se T é o tensor identidade, e a função deformadora η é constante, então, para o operador Laplaciano Δ, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{1}{n}},$$

em que $C_{n,\Omega} = 4\lambda_1\sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)}$.

Demonstração. Basta observar que, quando T é livre de divergência teremos $T_0 = 0$ pois tr(∇T)=0, e, se além disso, η for constante, teremos que $C_0 = 0$ pois $\nabla\eta = 0$.

Já para o caso de $T = I$ teremos que $T_0 = 0$ pois $\nabla T = 0$ e teremos que $\varepsilon = \delta = 1$, e, se além disso, η for constante, novamente $C_0 = 0$. $\square$

Observação 3. *O item iv) do Corolario 3.4 resgata o resultado obtido por Chen, Zheng e Yang em [7] para o caso do gap de autovalores do problema de Dirichlet no $\mathbb{R}^n$ para o operado Laplaciano Δ.*

Além do Teorema 3.1 ser uma resposta a Conjectura 2, obtida para o caso do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, também foi possível obter os Teoremas 3.2 e 3.3 com a adição de algumas hipóteses adicionais.

Teorema 3.2. *Seja Ω um domínio limitado no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ e λ_k o k-ésimo ($k > 1$) autovalor do problema de autovalor de Dirichlet (8) para o operador $\mathcal{L}$. Se a função deformadora η é radialmente constante e T é um $(1,1)$-tensor, tal que $T(\partial_n) = \psi\partial_n$ para alguma função radialmente constante $\psi \in C^\infty(M)$, então*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega}$ depende de Ω e da dimensão n, sendo dado por

$$C_{n,\Omega} = \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\right)\left(\lambda_j + \frac{n^2H_0^2 + 4C_0 + T_0^2}{4\delta}\right)},$$

sendo $\sigma = 2\delta - \varepsilon$ e com H_0, C_0 e T_0 conforme em (2.2).

Demonstração. Por conveniência, vamos usar o modelo do semiplano superior do espaço hiperbólico, ou seja,

$$\mathbb{H}^n(-1) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

com a métrica

$$g_{js}(x_1, \cdots, x_n) = \langle \partial_j, \partial_s \rangle = \frac{1}{(x_n)^2}\delta_{js}$$

em que $\{\partial_j\}_{j=1}^n$ é a base de campos coordenados de $\mathbb{H}^n$. Note que os componentes da inversa da matriz métrica são dados por $g^{js} = (x_n)^2\delta_{js}$.

Uma vez que em $\mathbb{H}^n$ temos $\det(g_{js}) = \frac{1}{x_n^{2n}}$ e tomando $f = \log x_n$ teremos em coordenadas

$$\nabla(\log x_n) = x_n^2 \sum_{j=i}^n \partial_j(\log x_n)\partial_j = x_n^2 \sum_{j=i}^n \delta_{jn}\frac{1}{x_n}\partial_j = x_n\partial_n,$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta(\log x_n) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_n^{2n}}}}\partial_i\left(\delta_{ij}(x_n)^2\sqrt{\frac{1}{x_n^{2n}}}\partial_j(\log x_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_n^n\partial_i\left((x_n)^2\frac{1}{x_n^n}\partial_i(\log x_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_n^n\partial_i\left(\frac{1}{x_n^{n-2}}\delta_{in}\frac{1}{x_n}\right) \\
&= x_n^n\partial_n\left(\frac{1}{x_n^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

$$= -x_n^n(n-1)\frac{1}{x_n^n}$$
$$= -(n-1),$$

com isso temos

$$|\nabla(\log x_n)| = |x_n\partial_n| = \Big(\langle x_n\partial_n, x_n\partial_n\rangle\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(x_n^2\langle\partial_n,\partial_n\rangle\Big)^{\frac{1}{2}} = \left(x_n^2\frac{1}{(x_n)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (3.26)$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\log x_n) &= \mathrm{div}(T(\nabla(\log x_n))) - \langle\nabla\eta, T(\nabla(\log x_n))\rangle\\ &= \mathrm{div}(T(x_n\partial_n)) - \langle\nabla\eta, T(x_n\partial_n)\rangle\\ &= \mathrm{div}(\psi(x_n\partial_n)) - \langle\nabla\eta, \psi(x_n\partial_n)\rangle\\ &= \mathrm{div}(\psi\nabla(\log x_n))) - \langle\nabla\eta, \psi\nabla(\log x_n)\rangle\\ &= \psi\mathrm{div}(\nabla(\log x_n))) + \langle\nabla\psi, \nabla(\log x_n)\rangle - \psi\,\langle\nabla\eta, \nabla(\log x_n)\rangle\\ &= \psi\Delta(\log x_n) + \langle\nabla\psi, x_n\partial_n\rangle - \psi\,\langle\nabla\eta, x_n\partial_n\rangle\\ &= -(n-1)\psi. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda_{k+1} < \lambda_{k+2}$. Tomando $j = 1$ e aplicando (3.27) e (3.26) em (3.17) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} &\leq \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}\int_\Omega\big(\mathcal{L}(\log x_n)\big)^2u_1^2\mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega\Big\langle\nabla(\mathcal{L}(\log x_n)), T(\nabla(\log x_n))\Big\rangle u_1^2\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}\int_\Omega(n-1)^2\psi^2u_1^2\mathrm{dm} - \frac{1}{2}\int_\Omega\Big\langle -(n-1)\nabla\psi, \psi x_n\partial_n\Big\rangle u_1^2\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\int_\Omega\psi^2u_1^2\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}\end{aligned}$$

e uma vez que $\varepsilon \leq \langle T(\nabla\log x_n), \nabla\log x_n\rangle = \psi$ teremos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} &\leq \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\int_\Omega\psi^2u_1^2\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}\\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\varepsilon^2\int_\Omega u_1^2\mathrm{dm}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}.\end{aligned} \quad (3.28)$$

A partir da expressão (2.15) do Corolário 2.2 temos

$$\lambda_{k+1} \leq \left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\lambda_1 + \frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}\right)k^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}. \quad (3.29)$$

E aplicando (3.29) a desigualdade (3.28), obtemos

$$\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1} \leq \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\left(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}\right)(k+1)^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\Big(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\Big(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\Big)\Big(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}\Big)}\Big(k+1\Big)^{\frac{\delta}{n\varepsilon}}$$
$$= C_{n,\Omega}\Big(k+1\Big)^{\frac{\delta}{n\varepsilon}}, \tag{3.30}$$

em que $C_{n,\Omega} = \frac{4}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\Big(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\Big)\Big(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\Big)\Big(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0+T_0^2}{4\delta}\Big)}$. Consequentemente, podemos deduzir (3.30) para qualquer $k > 1$. □

Corolário 3.4. *Nas hipóteses do Teorema 3.2, adicionalmente teremos que:*

i) Se o tensor T é livre de divergência, então, para o operador de Cheng-Yau deformado $\Box_\eta$, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega}k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega} = \Big[\Big(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\Big)\Big(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\Big)\Big(\lambda_j+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}$;

ii) Se o tensor T é livre de divergência, e a função deformadora η é constante, então, para o operador de Cheng-Yau $\Box$, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega}k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega} = \Big[\Big(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\Big)\Big(\delta\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\Big)\Big(\lambda_j+\frac{n^2H_0^2}{4\delta}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}$.

iii) Se T é o tensor identidade, então, para o operador Laplaciano deformado Δ_η, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega}k^{\frac{1}{n}},$$

em que $C_{n,\Omega} = \Big[\Big(1+\frac{4}{n}\Big)\Big(\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\Big)\Big(\lambda_j+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}$;

iv) Se T é o tensor identidade, e a função deformadora η é constante, então, para o operador Laplaciano Δ, temos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega}k^{\frac{1}{n}},$$

em que $C_{n,\Omega} = \Big[\Big(1+\frac{4}{n}\Big)\Big(\lambda_1 - \frac{1}{4}(n-1)^2\Big)\Big(\lambda_j+\frac{n^2H_0^2}{4}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}$.

Observação 4. *O item iv) do Corolario 3.6 resgata o resultado obtido por Chen, Zheng e Yang em [7] para o caso do gap de autovalores do problema de Dirichlet no $\mathbb{H}^n$ para o operado Laplaciano Δ.*

Por fim, chegamos ao último resultado obtido em nosso trabalho. No que se segue, $\Omega \subset M^n$, é um domínio limitado em uma variedade Cartan-Hadamard pinçada, conforme descrito anteriormente na observação 1.

A proposição a seguir é uma extensão, para o operador $\Box_\eta$, da proposição 1 em Fonseca e Gomes (cf. [8] p. 8).

Proposição 3.1. *Fixe uma origem* $o \in M^n \backslash \Omega$ *e seja* $r(x)$ *a função distância a partir de* o. *Considere* T *um* $(1,1)$*–tensor simétrico positivo definido sobre* M *tal que* ∂r *é um autovetor de* T. *Tomando* $C = -k_2^2$ *e* $c = -k_1^2$ *no Lema 1.2, as seguintes afirmações são verdadeiras em* Ω*:*

i) $(n-1)\varepsilon\frac{sn_C'(r)}{sn_C(r)} - \delta|\nabla\eta| \leq \Box_\eta r \leq (n-1)\delta\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)} + \delta|\nabla\eta|$;

e quando T *é radialmente paralelo*

ii) $R_{\eta,T}(\partial_r, \partial_r) \leq -\varepsilon(n-1)k_2^2 + \delta|\nabla^2\eta(\partial r, \partial r)|$.

Demonstração. Tome $x \in \Omega$ e complete ∂_r para uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n = \partial_r\}$ de T_xM tal que $T(e_j) = \psi_j e_j$. Note que $\varepsilon \leq \psi_j \leq \delta$ sobre Ω, para $j = 1, \cdots, n$ assim,

$$\begin{aligned}\Box_\eta r &= \langle\nabla^2 r, T\rangle - \langle\nabla\eta, T(\partial_r)\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle\nabla^2 r(e_j), T(e_j)\rangle - \langle\nabla\eta, T(\partial_r)\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n}\psi_j\langle\nabla^2 r(e_j), e_j\rangle - \psi_n\langle\nabla\eta, \partial_r\rangle.\end{aligned}$$

A convexidade da função distância $r(x)$ nos garante que o Hessiano é semi-definido positivo, e desse modo,

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla^2 r(e_j), e_j\rangle - \delta|\nabla\eta| \leq \Box_\eta r \leq \delta\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla^2 r(e_j), e_j\rangle + \delta|\nabla\eta|,$$

o que implica que

$$\varepsilon\Delta r - \delta|\nabla\eta| \leq \Box_\eta r \leq \delta\Delta r + \delta|\nabla\eta|.$$

Logo, a primeira afirmação da proposição 3.1 segue tomando o traço na desigualdade do Lema 1.2. Para provar a segunda afirmação é suficiente calcular

$$\begin{aligned}R_{\eta,T}(\partial_r, \partial_r) &= \sum_{j=1}^{n-1}\langle R(e_j, \partial_r)\partial_r, T(e_j)\rangle - \langle\nabla_{\partial_r}((\mathrm{div}T)^\sharp - T(\nabla\eta)), \partial_r\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\psi_j\langle R(e_j, \partial_r)\partial_r, e_j\rangle + \langle\nabla_{\partial_r}T(\nabla\eta), \partial_r\rangle \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} -\psi_j k_2^2 + \langle(\nabla_{\partial_r}T)(\nabla\eta) + T(\nabla_{\partial_r}\nabla\eta), \partial_r\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} -\psi_j k_2^2 + \psi_n\langle\nabla_{\partial_r}\nabla\eta, \partial_r\rangle \\ &\leq -(n-1)\varepsilon k_2^2 + \psi_n|\nabla^2\eta(\partial_r, \partial_r)| \\ &= -(n-1)\varepsilon k_2^2 + \delta|\nabla^2\eta(\partial_r, \partial_r)|.\end{aligned}$$

$\Box$

O resultado a seguir prova a Conjectura 2 para o caso em que M é uma variedade de Cartan-Hadamard pinçada mais hipóteses adicionais sobre T. A demonstração é uma adaptação das técnicas apresentadas na prova da Proposição 2 de Fonseca e Gomes [8] e do Corolário 1.7 de Chen, Zheng e Yang em [7].

Teorema 3.3. *Considere M uma variedade Cartan-Hadamard pinçada n-dimensional. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado e λ_k o k-ésimo ($k > 1$) autovalor de (8) para o operador $\Box_\eta$, com u_k sua autofunção correspondente. Fixe uma origem $o \in M \setminus \overline{\Omega}$ e considere $r(x)$ a função distância a partir de o, tal que ∂_r é um autovetor de T. Se T for radialmente paralelo, então*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_{n,\Omega} k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},$$

em que $C_{n,\Omega}$ depende de Ω e da dimensão n, sendo dado por

$$C_{n,\Omega} = \frac{4}{\sqrt{\sigma}} \left(\delta\lambda_1 - \frac{(n-1)^2\varepsilon^2 k_2^2}{4} + \frac{(n-1)\big(\delta^2 k_1^2 - \varepsilon^2 k_2^2\big)}{2} + \frac{\delta^2(-\eta_1 + 2\eta_2)}{4} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)\varepsilon\delta\eta_0 d_0}{2} + \frac{a(n,T)}{4d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda_1 + \frac{n^2 H_0^2 + 4C_0}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$a(n,T) = \begin{cases} 0, & se\ -(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2 \leq 0, \\ -(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2, & se\ -(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2 > 0, \end{cases}$$

$\sigma = 2\delta - \varepsilon$, $\eta_0 = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla\eta|$, $\eta_1 = \inf_{\overline{\Omega}} |\nabla\eta|^2$, $\eta_2 = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla^2\eta(\partial r, \partial r)|$, $d = dist(\Omega, o)$,

$$d_0 := \begin{cases} k_2 \coth(k_2 d), & se\ k_2 > 0, \\ \frac{1}{d^2}, & se\ k_2 = 0. \end{cases}$$

e com H_0 e C_0 conforme em (2.2).

Demonstração. Usando a inequação (3.17) do corolário 3.2 para $j = 1$ e $f = r$ a função distância, uma vez que $|\nabla r|^2 = 1$ teremos

$$\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1} \leq \frac{4}{\sqrt{\sigma}} \left(\delta\lambda_1 + \frac{1}{4}\int_\Omega \left(-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle\nabla(\Box_\eta r), T(\partial r)\rangle\right) u_1^2 \mathrm{dm} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{k+2}}. \tag{3.31}$$

Vamos então estimar a expressão $-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle\nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle$. Para isso, usamos que T é radialmente paralelo, ou seja, $\nabla_{\partial_r} T$ é nulo, de modo que, da fórmula tipo Bochner (1.9) para o operador Cheng-Yau deformado, obtemos

$$-\langle\nabla(\Box_\eta r), \partial_r\rangle = R_{\eta,T}(\partial_r, \partial_r) + \langle\nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T\rangle.$$

Lembramos que T satisfaz

$$\langle\nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T\rangle \leq (n-1)\delta \left(\frac{sn_c'(r)}{sn_c(r)}\right)^2, \tag{3.32}$$

conforme o item (2) na proposição 1 em Fonseca e Gomes [8].

Como $T(\partial_r) = \psi_n \partial_r$, de (3.32) e da Proposição 3.1, temos

$$
\begin{aligned}
-\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle &= -\psi_n \langle \nabla(\Box_\eta r), \partial_r\rangle = \psi_n R_{\eta,T}(\partial_r,\partial_r) + \psi_n \langle \nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T\rangle \\
&\leq -\psi_n \varepsilon (n-1) k_2^2 + \psi_n \delta |\nabla^2 \eta(\partial r, \partial r)| + \psi_n (n-1)\delta \left(\frac{sn'_{-k_1^2}(r)}{sn_{-k_1^2}(r)}\right)^2 \\
&\leq -\varepsilon^2 (n-1) k_2^2 + \delta^2 |\nabla^2 \eta(\partial r, \partial r)| + (n-1)\delta^2 \left(\frac{sn'_{-k_1^2}(r)}{sn_{-k_1^2}(r)}\right)^2,
\end{aligned}
$$

bem como,

$$
\begin{aligned}
-(\Box_\eta r)^2 &\leq -\left((n-1)\varepsilon \left(\frac{sn'_{-k_2^2}(r)}{sn_{-k_2^2}(r)}\right) - \delta |\nabla \eta|\right)^2 \\
&= -(n-1)^2 \varepsilon^2 \left(\frac{sn'_{-k_2^2}(r)}{sn_{-k_2^2}(r)}\right)^2 + 2(n-1)\varepsilon\delta |\nabla\eta| \left(\frac{sn'_{-k_2^2}(r)}{sn_{-k_2^2}(r)}\right) - \delta^2 |\nabla \eta|^2.
\end{aligned}
$$

Existem três casos a considerar:

(1) $0 < k_2 \leq k_1$: Usando a identidade trigonométrica $\cosh^2(\theta) = 1 + \sinh^2(\theta)$, segue que

$$
\begin{aligned}
&-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle \\
&\leq -(n-1)^2 \varepsilon^2 k_2^2 \frac{\cosh^2(k_2 r)}{\sinh^2(k_2 r)} + 2(n-1)\delta^2 k_1^2 \frac{\cosh^2(k_1 r)}{\sinh^2(k_1 r)} - 2(n-1)\varepsilon^2 k_2^2 \\
&\quad - \delta^2 |\nabla\eta|^2 + 2\delta^2 |\nabla^2 \eta(\partial r, \partial r)| + 2(n-1)\varepsilon\delta |\nabla \eta| k_2 \frac{\cosh(k_2 r)}{\sinh(k_2 r)} \\
&= -(n-1)^2 \varepsilon^2 k_2^2 + 2(n-1)\left(\delta^2 k_1^2 - \varepsilon^2 k_2^2\right) - \delta^2 |\nabla\eta|^2 + 2\delta^2 |\nabla^2 \eta(\partial r, \partial r)| \\
&\quad + 2(n-1)\varepsilon\delta |\nabla\eta| k_2 \frac{\cosh(k_2 r)}{\sinh(k_2 r)} + \left[-(n-1)^2 \varepsilon^2 \frac{k_2^2}{\sinh^2(k_2 r)} + 2(n-1)\delta^2 \frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)}\right].
\end{aligned}
$$

Visto que $0 < k_2 \leq k_1$ e $0 < r$, temos que

$$
\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)} \leq \frac{k_2^2}{\sinh^2(k_2 r)},
$$

pois basta verificar que a função $f(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\sinh^2(a\theta)}$, onde $a > 0$, é decrescente para valores de $\theta > 0$. Assim,

$$
-(n-1)^2 \varepsilon^2 \frac{k_2^2}{\sinh^2(k_2 r)} + 2(n-1)\delta^2 \frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)} \leq \left(-(n-1)^2 \varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2\right) \frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)}
$$

e tomando $d = dist(\Omega, o)$, temos $0 < d \leq r(x)$ para todo $x \in \Omega$. Desta forma, devido a função $\coth(\theta)$ ser decrescente para $\theta > 0$, teremos que

$$
\coth(k_2 d) = \frac{\cosh(k_2 d)}{\sinh(k_2 d)} \geq \frac{\cosh(k_2 r)}{\sinh(k_2 r)}.
$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
&-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle \\
&\le -(n-1)^2\varepsilon^2 k_2^2 + 2(n-1)\left(\delta^2 k_1^2 - \varepsilon^2 k_2^2\right) - \delta^2|\nabla\eta|^2 + 2\delta^2|\nabla^2\eta(\partial r,\partial r)| \\
&\quad + 2(n-1)\varepsilon\delta|\nabla\eta| k_2 \coth(k_2 d) + \Big(-(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2\Big)\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

(2) $0 = k_2 < k_1$: Estimamos a expressão

$$\begin{aligned}
&-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle \\
&\le 2(n-1)\left(\delta^2 k_1^2\right) - \delta^2|\nabla\eta|^2 + 2\delta^2|\nabla^2\eta(\partial r,\partial r)| \\
&\quad + 2(n-1)\varepsilon\delta|\nabla\eta|\frac{1}{r} + \left[-(n-1)^2\varepsilon^2\frac{1}{r^2} + 2(n-1)\delta^2\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)}\right].
\end{aligned}$$

Por $0 < k_1$ e $0 < r$, temos

$$\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)} \le \frac{1}{r^2}, \qquad (3.34)$$

pois basta verificar que a função $g(\theta) = \sinh(a\theta) - a\theta$, onde $a > 0$, é estritamente crescente para valores de $\theta > 0$ e $g(0) = 0$. Então,

$$-(n-1)^2\varepsilon^2\frac{1}{r^2} + 2(n-1)\delta^2\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)} \le \Big(-(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2\Big)\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle \\
&\le 2(n-1)\left(\delta^2 k_1^2\right) - \delta^2|\nabla\eta|^2 + 2\delta^2|\nabla^2\eta(\partial r,\partial r)| \\
&\quad + 2(n-1)\varepsilon\delta|\nabla\eta|\frac{1}{r} + \Big(-(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2\Big)\frac{k_1^2}{\sinh^2(k_1 r)}. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

(3) $0 = k_2 = k_1$: Estimamos a expressão

$$\begin{aligned}
-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle &\le -\delta^2|\nabla\eta|^2 + 2\delta^2|\nabla^2\eta(\partial r,\partial r)| + 2(n-1)\varepsilon\delta|\nabla\eta|\frac{1}{r} \\
&\quad + \Big[-(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2\Big]\frac{1}{r^2}. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Através das inequações (3.33)-(3.36), quando $\Big[-(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2\Big] \le 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
-(\Box_\eta r)^2 - 2\langle \nabla(\Box_\eta r), T(\partial_r)\rangle &\le -(n-1)^2\varepsilon^2 k_2^2 + 2(n-1)\left(\delta^2 k_1^2 - \varepsilon^2 k_2^2\right) \\
&\quad - \delta^2\eta_1 + 2\delta^2\eta_2 + 2(n-1)\varepsilon\delta\eta_0 d_0
\end{aligned}$$

em que $\eta_0 = \sup_{\overline{\Omega}}|\nabla\eta|$, $\eta_1 = \inf_{\overline{\Omega}}|\nabla\eta|^2$, $\eta_2 = \sup_{\overline{\Omega}}|\nabla^2\eta(\partial r,\partial r)|$ e

$$d_0 := \begin{cases} k_2\coth(k_2 d), & \text{se } k_2 > 0, \\ \frac{1}{d^2}, & \text{se } k_2 = 0. \end{cases}$$

E quando $\Big[-(n-1)^2\varepsilon^2+2(n-1)\delta^2\Big]>0$, primeiramente notemos que $\frac{1}{r^2}\leq\frac{1}{d^2}$, para assim obtermos que

$$\begin{aligned}-(\Box_\eta r)^2-\langle\nabla(\Box_\eta r),T(\partial_r)\rangle\leq &-(n-1)^2\varepsilon^2k_2^2+2(n-1)\left(\delta^2k_1^2-\varepsilon^2k_2^2\right)\\ &-\delta^2\eta_1+2\delta^2\eta_2+2(n-1)\varepsilon\delta\eta_0d_0\\ &+\Big[-(n-1)^2\varepsilon^2+2(n-1)\delta^2\Big]\frac{1}{d^2}.\end{aligned}$$

Definindo então

$$a(n,T):=\begin{cases}0, & \text{se }-(n-1)^2\varepsilon^2+2(n-1)\delta^2\leq 0,\\ -(n-1)^2\varepsilon^2+2(n-1)\delta^2, & \text{se }-(n-1)^2\varepsilon^2+2(n-1)\delta^2>0.\end{cases}$$

teremos que

$$\begin{aligned}-(\Box_\eta r)^2-2\langle\nabla(\Box_\eta r),T(\partial_r)\rangle\leq &-(n-1)^2\varepsilon^2k_2^2+2(n-1)\left(\delta^2k_1^2-\varepsilon^2k_2^2\right)\\ &-\delta^2\eta_1+2\delta^2\eta_2+2(n-1)\varepsilon\delta\eta_0d_0+\frac{a(n,T)}{d^2},\end{aligned}\tag{3.37}$$

assim aplicando (3.37) em (3.31) teremos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1}\leq&\frac{4}{\sqrt{\sigma}}\Bigg(\delta\lambda_1-\frac{(n-1)^2\varepsilon^2k_2^2}{4}+\frac{(n-1)\big(\delta^2k_1^2-\varepsilon^2k_2^2\big)}{2}\\ &+\frac{\delta^2(-\eta_1+2\eta_2)}{4}+\frac{(n-1)\varepsilon\delta\eta_0d_0}{2}+\frac{a(n,T)}{4d^2}\Bigg)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda_{k+2}}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Para o caso do operador $\Box_\eta$ a expressão (2.15) do Corolário 2.2 se resume a

$$\lambda_{k+1}\leq\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\right)k^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}},\tag{3.39}$$

com $C_0=\sup\limits_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{div}\big(T^2(\nabla\eta)\big)-\frac{1}{4}|T(\nabla\eta)|^2\right\}$ e $H_0=\sup\limits_{\overline{\Omega}}|\mathbf{H}_T|$. E aplicando então (3.39) a (3.38) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1}\leq&\frac{4}{\sqrt{\sigma}}\Bigg(\delta\lambda_1-\frac{(n-1)^2\varepsilon^2k_2^2}{4}+\frac{(n-1)\big(\delta^2k_1^2-\varepsilon^2k_2^2\big)}{2}+\frac{\delta^2(-\eta_1+2\eta_2)}{4}\\ &+\frac{(n-1)\varepsilon\delta\eta_0d_0}{2}+\frac{a(n,T)}{4d^2}\Bigg)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)\left(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\right)k^{\frac{2\delta}{n\varepsilon}}}\\ =&\frac{4}{\sqrt{\sigma}}\Bigg(\delta\lambda_1-\frac{(n-1)^2\varepsilon^2k_2^2}{4}+\frac{(n-1)\big(\delta^2k_1^2-\varepsilon^2k_2^2\big)}{2}+\frac{\delta^2(-\eta_1+2\eta_2)}{4}\\ &+\frac{(n-1)\varepsilon\delta\eta_0d_0}{2}+\frac{a(n,T)}{4d^2}\Bigg)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}}\\ =&\,C_{n,\Omega}k^{\frac{\delta}{n\varepsilon}},\end{aligned}\tag{3.40}$$

em que

$$C_{n,\Omega}=\frac{4}{\sqrt{\sigma}}\Bigg(\delta\lambda_1-\frac{(n-1)^2\varepsilon^2k_2^2}{4}+\frac{(n-1)\big(\delta^2k_1^2-\varepsilon^2k_2^2\big)}{2}+\frac{\delta^2(-\eta_1+2\eta_2)}{4}$$

$$+\frac{(n-1)\varepsilon\delta\eta_0 d_0}{2}+\frac{a(n,T)}{4d^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4\delta}{n\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\lambda_1+\frac{n^2H_0^2+4C_0}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Consequentemente, podemos deduzir (3.40) para qualquer $k > 1$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Araújo Filho, M.C., Gomes, J.N.V., *Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form on Riemannian manifolds isometrically immersed in Euclidean space*, arXiv:2206.09431v1, 2022.

[2] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry. Pure and applied mathematics, 115*, New York, Academic Press, 1984.

[3] Chen, D. and Cheng, Q.-M., *Extrinsic Estimates for Eigenvalues of the Laplace Operator*, J. Math. Soc. Japan vo. 60. no. 2. p. 325 – 339, 2008.

[4] Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Estimates on Eigenvalues of Laplacian*, Math. Ann. vo. 331. no. 2. p. 445 – 460, 2005.

[5] Cheng, Q.-M. and Yang, H., *Bounds on Eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. vo. 337. no. 1. p. 159 – 175, 2007.

[6] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., *Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature*, Math. Ann. 225, 195 - 204. 1977.

[7] Chen, D., Zheng, T. and Yang, H., *Estimates of the Gaps Between Consecutive Eigenvalues of Laplacian*, Pacific J. Math. vo. 282. no. 2. p. 293 - 311, 2016.

[8] Fonseca, J.C.M., Gomes, J.N.V., *Eigenvalue estimates of the drifted Cheng-Yau operator on bounded domains in pinched Cartan-Hadamard manifolds*, arXiv:2107.09135v4, 2022.

[9] Gordon, C., Webb, D. and Wolpert, S., *One Cannot Hear the Shape of a Drum*, Bull. of the AMS, 1992.

[10] Gomes, J.N.V., Miranda J.F.R., *Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form*, Nonlinear Analysis. vo.176 p. 1 - 19, 2018.

[11] Hile, G.N. and Protter, M.H., *Inequalities for Eigenvalues of the Laplacian*, Indiana Univ. Math. J. vo. 29. no. 4. p. 523 – 538, 1980.

[12] Kac, M., *Can You Hear the Shape of a Drum?*, Amer. Math. Monthly. no. 4, part II, p. 1-23, 1966.

[13] Miranda, J.F.R., *Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco e estimativas de autovalores para uma classe de operadores diferenciais elípticos*, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2015).

[14] MOTA, A.M., *Estimativas para o primeiro autovalor positivo de um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente e alguns teoremas de comparação*, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2020).

[15] NASH, J., *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds*, Ann. of Math. Japan vo. 63. no. 1. 241 p. 20 – 63, 1956.

[16] PAYNE, L.E., PÓLYA, G. AND WEINBERGER, H.F., *Sur le Quotient de Deux Fréquences Propres Consécutives*, C. R. Acad. Sci. Paris vo. 241 p. 917 – 919, 1955.

[17] PAYNE, L.E., PÓLYA, G. AND WEINBERGER, H.F., *On the Ratio of Consecutive Eigenvalues*, C. R. Acad. Sci. Paris vo. 241 p. 917 – 919, 1956.

[18] SILVA, C.S., *Estimativas de Gaps entre Autovalores Consecutivos do Laplaciano*, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

[19] SHIGA, K., *Hadamard Manifolds*, Geometry of Geodesics and Related Topics. Adv. Stud. Pure Math. 3 (1984), 239-281.

[20] THOMPSON, C.J., *On the Ratio of Consecutive Eigenvalues in N-dimensions*, Studies in Appl. Math. vo. 48. p. 281 – 283, 1969.

[21] PETERSEN, P., *Riemannian Geometry*, Third Edition, Springer, Los Angeles, USA, 2016.

[22] YANG, H., *An Estimate of the Difference Between Consecutive Eigenvalues*, preprint, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1991, disponível em `https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:23015356`