Universidade Federal do Amazonas
Programa de Pós-graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teorema de Linking Abstrato e uma Aplicação às Equações de Schrödinger Assintoticamente Lineares em $\mathbb{R}^n$

Gabriel Souza Reis

Manaus - AM
2023

Universidade Federal do Amazonas
Programa de Pós-graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teorema de Linking Abstrato e uma Aplicação às Equações de Schrödinger Assintoticamente Lineares em $\mathbb{R}^n$

por

Gabriel Souza Reis

sob a orientação de

Profa. Dra. Somayeh Mousavinasr

Manaus - AM
2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R375t

Reis, Gabriel Souza
Teorema de linking abstrato e uma aplicação às equações de Schrodinger assintoticamente linear / Gabriel Souza Reis . 2023
70 f.: 31 cm.

Orientadora: Somayeh Mousavinasr
Dissertação (Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Geometria de linking. 2. Equação de Schrodinger. 3. Sequências de Cerami. 4. Assintoticamente linear. I. Mousavinasr, Somayeh. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

"Não se deve comparar com os outros,
mas com o melhor que se pode ser."
(William Shakespeare)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter colocado esse novo objetivo na minha vida quando me encontrava em momentos de dificuldade e ter tornado possível a realização desse sonho.

Aos meus pais Luiza de Marilac Góes da Silva e Souza e Muracy Silva Reis pelo incentivo e apoio. Ao meu irmão Guilherme Souza Reis, que isso sirva de inspiração para que possa trilhar o mesmo caminho.

À minha amada esposa Marta de Souza Paiva e meu filho Arthur Gael Paiva Reis que estiveram ao meu lado me dando forças durante essa jornada.

À minha orientadora Somayeh Mousavinasr por me aceitar como orientando pela paciência e dedicação, à seu marido Alireza Khatib pela ajuda em diversas situações. Aos professores Moacir Aloísio Nascimento dos Santos e Marcus Antonio Mendonça Marrocos pelas palavras de incentivo e inspiração.

À FAPEAM pelo apoio financeiro e a todos que contribuíram de forma direta e indireta para esta dissertação.

Resumo

Neste trabalho é mostrado um Teorema de Linking Abstrato para sequências de Cerami $(C)_c$, porém sem a condição de Cerami. Com esse resultado é possível mostrar a existência de soluções para problemas fortemente indefinidos. Para a aplicação consideramos a equação não linear de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

para $n \geq 3$, onde $g(x,s) = h(x)f(s)$, f é uma função assintoticamente linear no infinito e $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = V_\infty > 0,$$

e o espectro do operador $A = -\Delta + V$ tem ínfimo negativo. Utilizando o método variacional associamos um funcional energia I a equação não linear e então aplicamos o resultado abstrato. Assim, o Teorema de linking nos forneceu um $c > 0$, que é valor crítico de I. Portanto, deve existir $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ que é solução fraca não-trivial para equação não linear.

Palavras-chave: Geometria de Linking, Equação de Schrödinger, Sequências de Cerami.

Abstract

In this work, an Abstract Linking Theorem for Cerami sequences $(C)_c$ is shown, but without the Cerami condition. With this result it is possible to show the existence of solutions for strongly undefined problems. For the application we consider the non-linear Schrödinger equation

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

for $n \geq 3$, where $g(x,s) = h(x)f(s)$, f is an asymptotically linear function at infinity and $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Also,

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty > 0.$$

and the spectrum of the operator $A = -\Delta + V$ has negative infimum. Using the variational method we associate an energy functional I to the nonlinear equation and then apply the abstract result. So the Linking Theorem has given us a $c > 0$, which is the critical value of I. Therefore, there must exist $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ which is non-trivial weak solution to non-linear equation.

keywords: Linking Geometry, Schödinger Equation, Cerami Sequences.

Notações

$\overline{\Omega}$	fecho de Ω;
$\partial\Omega$	fronteira de Ω;
B_r	bola fechada de raio r centrada em zero;
$B_r(x)$	bola aberta de raio r centrada em x;
$supp(f)$	$supp(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$;
$C(X,Y)$	funções contínuas de X, Y;
$C^1(X,Y)$	funções continuamente diferenciável de X em Y;
$C^\infty(\Omega)$	funções reais infinitamente diferenciáveis em Ω;
$C_c(\mathbb{R}^n)$	funções contínuas com suporte compacto;
$C_c^\infty(\Omega)$	funções reais infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;
$V \subset\subset \Omega$	$\overline{V}$ é compacto e um subconjunto de Ω;
X^*	espaço dual de X;
$L^p(\Omega)$	funções $p-$integráveis a Lebesgue;
$L^p_{loc}(\Omega)$	$L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(V), \text{ para todo } V \subset\subset \Omega\}$;
$\|\alpha\|$	multi-índice de ordem $\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$;
$D^\alpha u(x)$	$D^\alpha u(x) = \dfrac{\partial^{\|\alpha\|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$;
$W^{k,p}(\Omega)$	$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } \|\alpha\| \leq k\}$;
$H^1(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$;
$u_n \to u$	convergência forte (na norma);
$u_n \rightharpoonup u$	convergência fraca;
$u_n \to u$ $q.t.p.$ em Ω	convergência em quase todo ponto em Ω;
$p^* = \frac{np}{n-p},\ 1 \leq p < n$	expoente crítico de Sobolev;
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	gradiente de u;
$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u;
$\sigma(A)$	espectro do operador A.

Sumário

Introdução

Esta dissertação foi baseado no trabalho de L. Maia e M. Soares [19] e tem como objetivo principal mostrar um Teorema de Linking Abstrato para sequências de Cerami [12], porém sem a condição de Cerami. Aqui, mostraremos como L. Maia e M. Soares apresentam uma versão mais geral do principal resultado de V. Benci. e P. H. Rabinowitz em [4], sendo estabelecido para sequências de Cerami, sequências $(C)_c$, para abreviar. Com esse resultado foi possível mostrar a existência de soluções para equações não lineares de Schrödinger com potenciais muito variados que tornam os problemas fortemente indefinidos. Para obter a geometria de linking são exploradas as propriedades espectrais dos operadores autoadjuntos, neste caso o operador de Schrödinger, pois quando se trabalham com termos não lineares não é possível realizar as projeções na chamada variedade de Nahari como em [22, 26], devido esses termos não satisfazerem nenhuma condição de monotonicidade.

O primeiro trabalho nesse sentido foi de P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunado em [3], onde foi provado um lema da deformação quantitativa com a condição $(C)_c$, para então estender resultados de pontos críticos para problemas não-superquadráticos. Ainda usando esse mesmo lema da deformação em [13], D. Costa e C. Magalhães mostram resultados abstratos para problemas não-quadráticos em domínios limitados.

Mais recentemente, no artigo de G. Li e C. Wang [17] é apresentado um lema da deformação, sem a condição $(C)_c$, no entanto é usado em um teorema de linking com a condição de Cerami. Ainda mais, é exigido que um dos subespaços na decomposição de linking fosse de dimensão finita. Enquanto que nos resultados de L. Maia e M. Soares ambos os subsespaços na decomposição podem ter dimensão infinita. Essa construção foi inspirada por [27] para o lema da deformação, porém orientadas pelas ideias não padronizadas em [4]. Pois, o propósito de L. Maia e M. Soares foi construir um η satisfazendo propriedades espectrais que seriam fundamentais para atingir o nível c.

O resultado principal desta dissertação é o seguinte:

Teorema de Linking Abstrato. Seja E um espaço de Hilbert real, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, E_1 um subespaço fechado de E e $E_2 = E_1^{\perp}$. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo:

(I_1) $I(u) = \dfrac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, para todo $u \in E$, onde $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$ e $L_i : E_i \to E_i, i = 1, 2$, é uma aplicação autoadjunta linear limitada.

(I_2) B é fracamente contínua e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E.

(I_3) Existem variedades de Hilbert $S, Q \subset E$, tal que Q é limitada e tem fronteira ∂Q, e constantes $\alpha > \omega$ e $v \in E_2$ tais que

(i) $\quad S \subset v + E_1 \text{ e } I \geq \alpha \text{ em } S$,

(ii) $\quad I \leq \omega \text{ em } \partial Q$,

(iii) $\quad S$ e ∂Q, são link,

(I_4) Se $I(u_n)$ para uma sequência $(u_n) \subset E$, é limitada e $(1+ \| u_n \|) \| I'(u_n) \| \to 0$ com $n \to +\infty$, então (u_n) é limitada.

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$.

É importante observar que a hipótese de B ser fracamente contínua e uniformemente diferenciável em (I_2) implicam que B' é completamente contínua, ou seja, mapeia sequências fracamente convergente em fortemente convergente e isso resulta numa espécie de compacidade parcial para I. Ao compararmos a definição da condição de Cerami com a hipótese (I_4) percebemos que é uma versão enfraquecida dessa condição. Aqui, a limitação de qualquer sequência $(C)_c$ será suficiente para procurar um ponto crítico não trivial sem que necessariamente ela possua uma subsequência convergente.

Além disso, as hipóteses (I_1) e (I_3) produzem uma geometria de linking geral para o funcional I possibilitando que ambos os subespaços na decomposição de Hilbert sejam de dimensão infinita. A conjunção dessas hipóteses reproduz ferramentas suficientes para obter um ponto crítico não trivial para I. Nesta dissertação, apresentamos uma aplicação das equações de Schrödinger para o resultado abstrato. Outras aplicações podem ser encontradas em [19], onde L. Maia e M. Soares provam a existência de soluções para sistemas hamiltonianos e elípticos aplicando este resultado abstrato.

Para essa aplicação é considerado o seguinte problema

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{P}$$

para $n \geq 3$, onde $g(x,s) = h(x)f(s)$, e h satisfaz:

(h_1) $h \in C(\mathbb{R}^n, (0,+\infty))$ e $\lim_{|x|\to+\infty} h(x) = 0$;

(h_2) $h \in L^q(\mathbb{R}^n), q = \frac{2^*}{2^*-p}$ para algum $p \in (2, 2^*)$.

Além disso, f é assintoticamente linear satisfazendo as seguintes condições:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$.

(f_2) Existe $a > 0$ tal que $\lim_{s\to+\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{a}{2}$, onde $F(s) := \int_0^s f(s)dt$, e $F(s) \geq 0$.

(f_3) Definindo $Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos

$$\lim_{s\to+\infty} Q(s) = +\infty.$$

Ainda mais, vamos assumir que V satisfaz as seguintes condições:

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty > 0$.

(V_2) Definindo $A := -\Delta + V(x)$ como um operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup[\sigma(A) \cap (-\infty, 0)] = \sigma^- < 0 < \sigma^+ = \inf[\sigma(A) \cap (0, +\infty)].$$

Esta aplicação foi inspirada em [20], onde L. Maia, J. C. de Oliveira Junior e R. Ruviaro resolveram o problema (P) com potencial V não periódico que muda de sinal e f é assintoticamente linear. Além disso, eles exigiram que V possuísse limite positivo no infinito e o espectro do operador A tivesse ínfimo negativo. Tentando melhorar o resultado deles em [19] L. Maia e M. Soares, aplicam o teorema de linking abstrato para sequências $(C)_c$ e um ponto crítico não trivial é obtido imediatamente, evitando tais suposições de monotonicidade em f.

Existem outros trabalhos presentes na literatura que assumem condições diferentes para o potencial V e para a função g. Como em [26], que consideram a mesma equação de Schrödinger não linear, porém com g superlinear e subcrítica, V e g periódicos em x e 0 pertencente a um gap espectral do operador A. Para encontrar soluções ground state, é utilizado um método baseado em uma redução direta e simples do problema variacional indefinido para um definido, e dá origem a uma nova caracterização minimax do correspondente valor crítico.

Em [2], A. Azzollini e A. Pomponio provam a existência de uma solução positiva para essa mesma equação não linear, assumindo hipóteses de não linearidade sobre g introduzidas por H. Berestycki e P. L. Lions em [5]. Além disso, assumem algumas hipóteses geométricas sobre o potencial V, porém com isso não foi permitido usar argumentos de concentração-compacidade. Assim, exigiram uma propriedade de simetria em V para evitar qualquer possível perda de massa no infinito.

Com o objetivo de encontrar uma solução fraca para o problema (*P*), nesta dissertação é utilizada uma abordagem variacional, onde é associado a (*P*) um funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ que foi definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Uma solução fraca para o problema (*P*) então seria uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ que é ponto crítico do funcional energia, ou seja,

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(u)v\ dx = 0 \ \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

1 Resultados Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições e resultados básicos de Teoria da Medida, Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais, que serão cruciais para o entendimento do resultado pincipal e suas aplicações. Algumas demostrações aqui serão omitidas, mas podem ser facilmente encontradas em [7, 8, 11, 16].

1.1 Noções de Teoria da Medida

Definição 1.1 (Medida). Uma *medida* no espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos de Σ, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$, e é dita σ-finita se existirem conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. O terno (X, Σ, μ) é chamado de espaço de medida.

Definição 1.2 (Função Mensurável). Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ é *mensurável* se para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a, +\infty])$ é um elemento de Σ. O conjunto formado por tais funções será denotado por $M(X, \Sigma)$.

Definição 1.3. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f, g, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$. Diz-se que :

(i) f é igual a g *μ-quase sempre* se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ pata todo $x \in A^c$. Neste caso escreve-se $f = g$ $\mu-$quase sempre ou $\mu - q.s.$.

(ii) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f $\mu-$quase sempre se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in A^c$. Neste caso escrevemos $f_n \to f$ $\mu-$quase sempre ou $f_n \to f$ $\mu-$q.s.

Às vezes também usaremos a abreviação $(q.t.p.)$, que significa *quase em toda parte*, no lugar $(q.s.)$. De qualquer forma estaremos nos referindo ao mesmo conceito.

Teorema 1.1 (Teorema de Egoroff). *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e f_k, f, funções mensuráveis, e suponha*

$$f_k \to f \ q.s. \ em \ A,$$

onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, $\mu(A) < \infty$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto mensurável $E \subset A$ tal que

(i) $\mu(A - E) \leq \varepsilon$

(ii) $f_k \to f$ *uniformemente em* E.

Definição 1.4. Dados um espaço mensurável (X, Σ) e $A \subset X$, a *função característica* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ de A é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Uma combinação linear de funções características mensurável é chamada de *função simples mensurável.* Toda função simples mensurável φ admite uma única representação da forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ são números reais não-nulos e distintos, $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos mensuráveis não-vazios dois a dois disjuntos. Esta é a *representação canônica* da função simples mensurável φ.

Definição 1.5. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.

(i) A integral da função simples $\varphi \in M^+(X, \Sigma) = \{f \in M(X, \Sigma) : f(x) \geq 0$ para todo $x \in X\ \}$, cuja representação canônica é $\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$, em relação à medida μ é definida por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j).$$

(ii) A integral da função $f \in M^+(X, \Sigma)$ em relação à medida μ é definida por

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

(iii) Para $f \in M^+(X, \Sigma)$ e $A \in \Sigma$, define-se

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

Lema 1.1 (Lema de Fatou). *Se* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência em* $M^+(X, \Sigma)$, *então*

(i) $\displaystyle\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

(ii) *Em particular , se* $f_n \to f$ *q.t.p. em* X, $\displaystyle\int_X f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$

Definição 1.6. (i) Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, as funções $f^+, f^- : X \to [0, \infty)$ são definidas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

(ii) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Uma função $f \in M(X, \Sigma)$ é dita *Lebesgue-integrável* (ou integrável) se $\int_X f^+ d\mu < \infty$ e $\int_X f^- d\mu < \infty$. Neste caso, definimos

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

O conjunto de todas as funções integráveis $f : X \to \mathbb{R}$ é denotado por $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema 1.2 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ que converge $\mu-$quase sempre para uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Se existe $g \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $\mid f_n(x) \mid \leq g(x)$ $q.s., x \in X$, então $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Definição 1.7. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ tais que

$$\| f \|_p := \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $\mathscr{L}_p(X, \Sigma, \mu)$. Definimos o espaço $L_p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ como o espaço quociente

$$L_p(X, \Sigma, \mu) := \mathscr{L}_p(X, \Sigma, \mu)/ \sim$$

onde a relação de equivalência em $\mathscr{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ é definida por $f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \mu - q.s.$ Definimos ainda a função $\| \cdot \|$: $L_p(X, \Sigma, \mu) \to [0, \infty)$ por

$$\| [f] \|_p := \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } [f] \in L_p(X, \Sigma, \mu)$$

onde denotamos por $[f]$ a classe de equivalência das funções que são iguais a f $\mu-$quase sempre. Para $p = +\infty$ a definição é especial:

Definição 1.8 (Função essencialmente limitada). Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita essencialmente limitada se $\exists\ c > 0$ tal que $\mid f(x) \mid \leq c \ \mu - q.s. \ x \in X$. E designamos por $\mathscr{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto das funções essencialmente limitadas. Definimos ainda o espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ como

$$L_\infty(X, \Sigma, \mu) := \mathscr{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)/ \sim .$$

Definimos ainda a função $\| \cdot \|_\infty$: $L_\infty(X, \Sigma, \mu) \to [0, +\infty)$ por

$$\| [f] \|_\infty := \inf\{c > 0, \mid f(x) \mid \leq c \ \mu - q.s. \ x \in X\} = \sup ess(\mid f \mid).$$

Vale ressaltar que se $1 \leq p \leq \infty$, então $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|_p$. E ao decorrer da dissertação também usaremos a seguinte notação para os espaços acima definidos: L^p, L^∞.

Notação 1.1. *Seja $1 < p < \infty$; vamos denotar por p' o expoente conjugado,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de X em Y será denotado por $\mathscr{L}(X,Y)$. Claramente $\mathscr{L}(X,Y)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de funções equipado com a norma

$$\| T \|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \| Tx \| .$$

Se Y for o corpo dos escalares, escreveremos X^* no lugar de $\mathscr{L}(X,\mathbb{R})$, chamaremos esse espaço de *dual* de X, seus elementos são *funcionais lineares contínuos*.

Teorema 1.3 (Teorema da Representação de Riesz). *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\phi \in (L^p)^*$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\phi(f) = \int uf \, d\mu \ para\ todo\ f \in L^p.$$

Além disso,

$$\| u \|_{p'} = \| \phi \|_{(L^p)^*}$$

O teorema acima é muito importante. Diz que qualquer função linear contínua em L^p com $1 < p < \infty$ pode ser representada concretamente como uma integral. A aplicação $\phi \mapsto u$, que é uma isometria sobrejetiva, nos permite identificar o espaço abstrato $(L^p)^*$ com $L^{p'}$. Consideremos ainda a seguinte identificação

$$(L^p)^* = L^{p'}.$$

Teorema 1.4 (Desigualdade de Hölder para integrais). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in L_q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q .$$

Teorema 1.5 (Desigualdade de Minkowski para integrais). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f, g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$, então $f + g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p .$$

1.2 Conceitos de Análise Funcional

Nesta seção, forneceremos alguns conceitos elementares de Análise Funcional: Espaços com Produto Interno, Espaços de Sequências, Espaços Reflexivos. Além de teoremas e proposições que serão necessários.

1.2.1 Espaços com Produto Interno

Primeiramente, consideremos E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um *produto interno* em E é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = E \times E \to \mathbb{R},$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

tal que para quaisquer x, y, z e $w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(P1)$ $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$,

$(P2)$ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

$(P3)$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

$(P4)$ $\langle x, x \rangle > 0, \text{ para todo } x \neq 0$, quando $\langle x, x \rangle = 0$, então $x = 0$.

Neste caso a função $\| \cdot \|$: $E \to \mathbb{R}$, definida por $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, é uma norma em E, chamada norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \cdot \| y \|$$

para quaisquer x, y em E. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores x e y são linearmente dependentes.

Definição 1.9. Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de *Espaço de Hilbert* e denotaremos por H. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|$, induzida pelo produto interno.

Exemplo 1.1. *$L^2(\Omega)$ equipado com o produto interno*

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x) v(x) d\mu$$

é um espaço de Hilbert. O dual de um espaço de Hilbert é também um espaço de Hilbert. Assim como o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ que será estudado na próxima seção.

Diz-se que o produto interno geometriza o estudo dos espaços vetoriais pois é por meio dele que definimos o conceito de vetores ortogonais. Em $\mathbb{R}^2$ a ortogonalidade é um conceito geométrico e dois vetores $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ são ortogonais se, e somente se,

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

Em outras palavras, dois vetores do $\mathbb{R}^2$ são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre eles é igual a zero. Essa é a chave para definir ortogonalidade em espaços vetoriais com produto interno.

Definição 1.10. Seja E um espaço com produto interno. Dizemos que os vetores x e y de E são *ortogonais* se $\langle x, y\rangle = 0$. Neste caso escrevemos $x \perp y$.

Definição 1.11. Sejam E um espaço com produto interno e A um subconjunto de E. Denominamos o subconjunto

$$A^{\perp} = \{y \in E : \langle x, y\rangle = 0, \text{ para todo } x \in A\}$$

de *complemento ortogonal* de A.

O próximo teorema é central no estudo dos espaços normados, é às vezes chamado de teorema da projeção ortogonal, e servirá de base para a demonstração do teorema posterior.

Teorema 1.6. *Seja E um espaço com produto interno e seja M um subespaço completo de E. Para todo $x \in E$ existe um único $p \in M$ tal que*

$$\| x - p \| = dist(x, M) := \inf_{y \in M} \| x - y \| \; .$$

Teorema 1.7. *Sejam E um espaço com produto interno e M um subespaço completo de E. Então $E = M \oplus M^{\perp}$, isto é, cada $x \in E$ admite uma única representação na forma*

$$x = p + q \;\; com \; p \in M \;\; e \; q \in M^{\perp}.$$

Demonstração. Dado $x \in E$, pelo Teorema 1.6, existe um único vetor $p \in M$ tal que

$$\| x - p \| = dist(x, M).$$

Tomando $q = x - p$ segue imediatamente que $x = p + q$. Basta então provar que $q \in M^{\perp}$. Para todo $y \in M$ e todo escalar λ, o vetor $p + \lambda y$ pertence a M, logo

$$\begin{aligned} \| q \|^2 &= \| x - p \|^2 = dist(x, M)^2 \leq \| x - (p + \lambda y) \|^2 \\ &= \| q - \lambda y \|^2 = \langle q - \lambda y, q - \lambda y\rangle \\ &= \| q \|^2 - \lambda y \langle y, q\rangle - \overline{\lambda}\langle q, y\rangle + \lambda\overline{\lambda} \| y \|^2 \; . \end{aligned}$$

Disso concluímos que

$$0 \leq | \lambda |^2 \| y \|^2 - 2Re(\lambda\langle y, q\rangle).$$

Escreva $\langle y, q\rangle$ na forma polar $| \langle y, q\rangle | e^{i\theta}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$ chame $\lambda = te^{-i\theta}$. Da desigualdade acima segue que

$$0 \leq t^2 \| y \|^2 - 2t \, | \langle y, q\rangle | \;\; \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

e consequentemente o discriminante do binômio é menor ou igual a zero. Isso nos dá $| \langle y, q\rangle | = 0$, e portanto $q \in M^{\perp}$.

Para provar a unicidade, suponha que $p + q = p_1 + q_1$ com $p, p_1 \in M$ e $q, q_1 \in M^{\perp}$. Como M e $M^{\perp}$ são subespaços,

$$p - p_1 = q_1 - q \in M \cap M^{\perp} = \{0\}.$$

Segue que $p = p_1$ e $q = q_1$.

□

Nas duas próximas subseções definiremos dois espaços cujos conceitos são importantes. Os Espaços de Sequências, do qual utilizaremos a Desigualdade de Hölder, e os Espaços Reflexivos, classe da qual faz parte o espaço com que trabalharemos nessa dissertação, os Espaços de Hilbert.

1.2.2 Espaços de Sequências

Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$l_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{R} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} \mid a_j \mid^p < \infty \right\}.$$

Considerando o conjunto $P(\mathbb{N})$ das partes de $\mathbb{N}$ e a medida de contagem μ_c em $P(\mathbb{N})$, não é difícil verificar que l_p é na verdade o espaço $L_p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu_c)$. Ainda mais, nesse caso as operações usuais de funções se transformam nas operações usuais de sequências e a norma $\| \cdot \|_p$ se transforma em

$$\| (a_j)_{j=1}^{\infty} \|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_j \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dessa forma resulta que l_p é um espaço de Banach com as operações usuais de sequências com a norma $\| \cdot \|_p$. Em particular, temos

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder para sequências). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} \mid a_j b_j \mid \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \mid a_j \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mid b_j \mid^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. E ainda, para $a_j \in l^p$ e $b_j \in l^q$, vale:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \right| &\leq \sup_n \sum_{j=1}^{n} \mid a_j b_j \mid \leq \sup_n \left(\sum_{j=1}^{n} \mid a_j \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mid b_j \mid^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_j \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid b_j \mid^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

1.2.3 Espaços Reflexivos

Seja E um espaço vetorial normado, para cada $x \in E$, temos

$$\| x \|_E = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Além disso, seja E^* o espaço dual de E com a norma

$$\| f \|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Denotaremos por E^{**} o *espaço bidual* de E com norma

$$\| \xi \|_{E^{**}} = \sup_{f\in E^*, \|f\|\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|, \text{ com } \xi \in E^{**}.$$

Podemos definir um operador linear limitado canônico

$$J : E \to E^{**}$$

da seguinte forma: para cada $x \in E$, o funcional linear limitado $Jx : E^* \to \mathbb{R}$ é dado por

$$(Jx)(f) = f(x)$$

para todo $f \in E$. De fato, Jx é um funcional linear limitado em E^* pois

$$| (Jx)(f) | = | f(x) | \leq \| f \| \| x \|,$$

ou seja

$$\| Jx \| \leq \| x \| .$$

Além disso, J é realmente uma isometria de E sobre sua imagem $J(E)$. Com efeito, pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$ existe um funcional linear $f_0 \in E^*$ tal que $\| f_0 \| = 1$ e $f_0(x) = \| x \|$, logo

$$\| Jx \| = \sup_{\|f\|=1} |(Jx)(f)| \geq |(Jx)(f_0)| = f_0(x) = \| x \|,$$

portanto

$$\| Jx \| = \| x \|$$

para todo $x \in E$. Em particular, J é injetivo. Se J também for sobrejetivo, dizemos que E é *reflexivo*.

Exemplo 1.2. *Espaços normados de dimensão finita, e os espaços de Hilbert, são exemplos de espaços reflexivos.*

1.2.4 Convergência Fraca

Precisaremos apenas de conceitos elementares sobre convergência fraca, esses resultados enunciaremos na forma de uma proposição e um teorema cujas demonstrações podem ser encontradas em [7, 8]. Assim como os resultados da próxima subseção.

Definição 1.12. A topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E^*$ será chamada de *topologia fraca* no espaço normado E e será denotada por $\sigma(E, E^*)$. Diremos que a sequência (x_n) *converge fraco* para um ponto x de E, e denotaremos por $x_n \rightharpoonup x$, se converge na topologia fraca.

Proposição 1.3. *Sejam E um espaço normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Então $x_n \rightharpoonup x$, se, e somente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E^*$.*

Teorema 1.8. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

1.2.5 Limitação Uniforme

Uma consequência do Teorema da Limitação Uniforme será necessário em algumas demonstrações posteriores. Enunciaremos esta consequência na forma de um corolário.

Teorema 1.9 (Banach-Steinhaus, princípio da limitação uniforme). *Sejam X, Y espaços de Banach. Consideremos também $\{T_\lambda\}$ com λ pertencentes a Λ, uma coleção (não necessariamente enumerável) de operadores lineares limitados de X em Y. Suponha que*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \| T_\lambda x \| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Então

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \| T_\lambda \|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty.$$

Em outras palavras, existe uma constante c tal que

$$\| T_\lambda x \| \leq c \| x \| \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Corolário 1.1. *Sejam E um espaço de Banach e $B \subset E$ um subconjunto. Se para todo $f \in E^*$ o conjunto $f(B)$ é limitado, então B é limitado.*

Demonstração. Aplicaremos o Teorema da Limitação Uniforme substituindo $X = X^*$ que é um espaço de Banach, $Y = \mathbb{R}$ e $\Lambda = B$. Para todo $b \in B$ vamos definir um operador linear limitado $T_b : E^* \to \mathbb{R}$ por

$$T_b f = f(b), \quad f \in X = X^*.$$

Como por hipótese $f(B)$ é limitada, temos

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| < \infty, \quad \forall f \in X.$$

Portanto, pelo Teorema da Limitação Uniforme existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|f(b)| \leq c \| f \|$$

para todo $f \in X^*$ e $b \in B$. Ainda mais, para todo vetor $b \in B$ vale

$$\| b \| = \sup_{f\in X^*, \|f\|\leq 1} |f(b)| \leq c,$$

e isso encerra a prova.

□

1.3 Teoria Espectral

Podemos considerar esta seção como a mais importante dos resultados preliminares, pois trata de conceitos não triviais que serão fortemente utilizados nos principais resultados desta dissertação. As provas serão omitidas, mas podem ser encontradas nas referências indicadas em seus enunciados.

Inicialmente, consideremos $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1.13. Seja $T : D(T) \subset H \to H$ um operador cujo domínio $D(T)$ é um subespaço denso de H. O operador adjunto de T, $T^* : D(T^*) \subset H \to H$, é definido da seguinte forma

$$v \in D(T^*) \iff \begin{cases} v \in H \text{ e existe um elemento } w \in H \\ \text{tal que } \langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle \text{ para todo } u \in D(T), \end{cases}$$

e $T^*v = w$ para todo $v \in D(T^*)$, onde w é o elemento associado a v na definição de $D(T^*)$. Diremos que um operador T é autoadjunto se $T = T^*$, isto é, $D(T) = D(T^*)$ e $T^*v = Tv$ para todo $v \in D(T^*)$.

Definição 1.14. Seja $T : D(T) \subset H \to H$ um operador autoadjunto. Definimos o *resolvente* de T como o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I : D(T) \to H \text{ é um isomorfismo}\},$$

e o *espectro* de T como o conjunto

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T).$$

Os elementos de $\rho(T)$ são chamados de regulares de T. O *espectro pontual* é dado pelo conjunto

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\},$$

e seus elementos são chamados de autovalores de T. O *espectro discreto* de T é o conjunto

$$\sigma_d = \{\lambda \in \sigma_p(T) : \dim\ker(T - \lambda I) < \infty \text{ e } \lambda \text{ é um ponto isolado de } \sigma_p(T)\},$$

e seu complemento em $\sigma(T)$ é chamado de *espectro essencial* de T, e é denotado por

$$\sigma_e(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_d(T).$$

Definição 1.15 (Operador de Schrödinger)**.** Dado $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos o *operador de Schrödinger* $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ gerado pelo potencial V por

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } Au = -\Delta u + V(x)u \text{ para todo } u \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.10. *Para $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, o operador de Schrödinger $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ gerado pelo potencial V é autoadjunto.*

Demonstração. Veja [21, Teorema 3].

□

Teorema 1.11. *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $V_\infty := \lim_{x\to+\infty} V(x)$. Então,*

$$\sigma_e(A) = [V_\infty, +\infty).$$

Demonstração. Veja [25, Theorem 3.15].

□

Teorema 1.12. *Se $V(x)$ é uma função mensurável localmente limitada tal que*

$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x) \geq a,$$

então o operador $A = -\Delta + V(x)$ é semi-limitado por baixo e tem um espectro discreto em $(-\infty, a)$, de modo que para qualquer $\varepsilon > 0$ o espectro de A em $(-\infty, a-\varepsilon)$ consiste de um número finito de autovalores de multiplicidade finita.

Demonstração. Veja [15, Theorem 30, p. 150].

□

Teorema 1.13. *Seja A um operador autoadjunto no espaço de Hilbert H. Então existe uma família espectral que denotaremos por $\mathscr{E}_\lambda$, $-\infty < \lambda < +\infty$, na verdade, trata-se de uma família de operadores projeções autoadjuntos $\mathscr{E}_\lambda$ em H que dependem de um parâmetro real λ satisfazendo:*

(i) $\mathscr{E}_\lambda \mathscr{E}_\mu = \mathscr{E}_\mu \mathscr{E}_\lambda = \mathscr{E}_\lambda$ para $\lambda \geq \mu$;

(ii) $\mathscr{E}_{\lambda+0} = \mathscr{E}_\lambda$ na topologia forte do operador, que é

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0} \mathscr{E}_{\lambda+\varepsilon} f = \mathscr{E}_\lambda f$$

na norma de H para qualquer $f \in H$;

(iii)na topologia forte do operador, temos

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \mathscr{E}_\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \mathscr{E}_\lambda = I;$$

(iv) se $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2]$ é um intervalo meio-aberto no eixo real, $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty$ e $E(\Lambda) = \mathscr{E}_{\lambda_2} - \mathscr{E}_{\lambda_1}$, então $E(\Lambda)H \subset D(A)$ e para $f \in E(\Lambda)H$ vale a desigualdade

$$\lambda_1\langle f, f\rangle \leq \langle Af, f\rangle \leq \lambda_2\langle f, f\rangle.$$

Além disso, para $f \in E(\Lambda)H$

$$\| (A - \lambda I)f \| \leq |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot |f|, \ \lambda \in \Lambda.$$

Demonstração. Veja [23, Proposition 3.8, p. 29] . Além disso, veja [6, Theorem 1.1'].

□

Observação 1.1. *A última desigualdade significa que, para Λ pequeno, elementos de $E(\Lambda)H$ são quase autovetores de A, com um autovalor $\lambda \in \Lambda$. Certamente, não é trivial apenas no caso $E(\Lambda) \neq 0$.*

1.4 Derivada Fraca

Definição 1.16. Definiremos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de todas as ordens contínuas e de suporte compacto.

Definição 1.17. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um vetor, onde os números α_i são inteiros não-negativos. Chamaremos de *multi-índice* de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Dado um multi-índice α e uma função $u \in C_c^\infty(\Omega)$, definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

quando a derivada mista do lado direito acima existe. Se $|\alpha| = 0$, escreveremos $D^\alpha(u) = u$, para facilitar a notação.

Para a próxima definição denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integrável, ou seja, $u \in L^p(V)$ para cada V mensurável compactamente contido em Ω. Neste caso usaremos a notação $V \subset\subset \Omega$.

Definição 1.18. Dados um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma $\alpha-$ésima derivada fraca de u se

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) \varphi(x) dx, \text{ para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Essencialmente, a definição acima diz que uma derivada fraca de uma função é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes. O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca.

Lema 1.2. *A $\alpha-$ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Exemplo 1.3. *Considere $\Omega = (0, 2)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se\ 0 < x \leq 1 \\ 1, & caso\ contrário\ . \end{cases}$$

Observe que $u \in L^1_{loc}(0, 2)$ e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada (clássica) no ponto $x = 1$. Vamos mostrar que u possui derivada fraca $v : (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & se\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & caso\ contrário\ . \end{cases}$$

De fato, dada $\varphi \in C_c^\infty(0,2)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 u\varphi' dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 \varphi'(x)dx \\
&= x\varphi(x) \mid_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi dx + (\varphi(2) - \varphi(1)) \\
&= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx - \varphi(1) \\
&= -\int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_0^2 v\varphi dx,
\end{aligned}$$

de modo que $v = u'$ (no sentido fraco).

1.5 Espaços de Sobolev

Definição 1.19. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{k,p} := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } \mid \alpha \mid \leq k\}.$$

Observe que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$. Uma observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Quando $p = 2$, denotaremos $W^{k,p}(\Omega)$ simplesmente por $H^k(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\right\}.$$

Ainda mais, $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + uv)dx,$$

e a correspondente norma

$$\| u \| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.14. *Se $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ então $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e note que, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\lambda u + \mu v) D^\alpha \varphi\, dx &= \lambda \int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx + \mu \int_\Omega v D^\alpha \varphi\, dx \\
&= \lambda(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi D^\alpha u\, dx + \mu(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi D^\alpha v\, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)\varphi\, dx,
\end{aligned}$$

que estabelece a veracidade do teorema. □

O teorema acima implica que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Vamos transformá-lo em um espaço normado introduzindo a seguinte norma

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma $\| \cdot \|_{k,p}$ é um espaço de Banach.

Definição 1.20. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{k,p}$, i.e. ,

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\| \cdot \|_{k,p}}.$$

De acordo com a definição, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Observe que $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{k,p}(\Omega)$. Note ainda que o espaço $H_0^k(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$.

1.6 Imersões de Sobolev

Definição 1.21. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que

$$\| x \|_Y \leq C \| x \|_X, \text{ para todo } x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 1.15 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). *Seja* $1 \leq p < n$. *Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

onde p^* *é dado por* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, *chamado de expoente crítico de Sobolev, e existe uma constante* $C = C(p,n)$ *tal que*

$$\| u \|_{p^*} \leq C \| \nabla u \|_p \ \textit{para todo } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Corolário 1.2. *Seja* $1 \leq p < n$. *Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \ \textit{para todo } q \in [p, p^*]$$

com imersão contínua.

Demonstração. Dado $q \in [p, p^*]$, escrevemos

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

para algum $\alpha \in [0,1]$. Segue da desigualdade de Young que

$$\| u \|_q \leq \| u \|_p^{\alpha} \| u \|_{p^*}^{1-\alpha} .$$

Pelo Teorema 1.15, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| u \|_q \leq C \| u \|_{W^{1,p}} \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

□

Assim, a inclusão do corolário poderia ser substituída pela notação de imersão contínua definida anteriormente, ficando da seguinte forma

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } q \in [p, p^*].$$

Teorema 1.16 (Teorema de imersão de Sobolev). *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n),\ 2 \leq p < \infty,\ n = 1, 2,$$

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n),\ 2 \leq p \leq 2^*,\ n \geq 3.$$

Definição 1.22. Sejam $(X, \| \cdot \|_X)$ e $(Y, \| \cdot \|_Y)$ espaços normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $I : X \to Y$ for compacta. Neste caso dizemos que X está imerso compactamente em Y, e escreveremos $X \overset{cpt}{\hookrightarrow} Y$.

Teorema 1.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Se $1 \leq p < n$, então a seguinte imersão é compacta*

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \textit{para todo } 1 \leq q < p^*.$$

Teorema 1.18 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \ \textit{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Uma consequência importante do resultado anterior é que podemos definir em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a seguinte norma

$$\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, note que

$$\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}^p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right) \leq \int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p = \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}^p .$$

1.7 Problema do Autovalor

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma *solução fraca* para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \text{ para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

O problema do autovalor para o laplaciano consiste em encontrar os valores λ tais que

$$-\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega$$

admite soluções não triviais, com alguma condição de fronteira sobre u. Vamos considerar o problema do autovalor com a condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos formular fracamente o problema da seguinte forma: dizemos que λ é um autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma autofunção correspondente se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Em particular, fazendo $v = u$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega u^2,$$

de modo que todos os autovalores do laplaciano com condição de Dirichlet são positivos. Caso $\lambda = 0$, a única solução do problema é a solução nula.

Teorema 1.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então o problema do autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui um número infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

tais que $\lambda_k \to \infty$, e autofunções $\{u_k\}$ que constituem uma base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$.

1.8 Elementos de Cálculo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e suponha $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ em C^1, $f = (f^1, \dots, f^n)$. Definimos o *gradiente da matriz de* f, como

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n_{x_1} & \cdots & f^n_{x_n} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

e o *Jacobiano de* f por

$$J_f = |\det \nabla f| = \left| \frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|.$$

Definição 1.23. Se $\partial\Omega$ é C^1, então ao longo de $\partial\Omega$ é definido o campo vetorial normal unitário apontando pra fora por $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$. Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$, denotaremos por

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla u$$

a derivada normal exterior de u.

Teorema 1.20 (Teorema de Gauss-Green). *Suponha U um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e ∂U de classe C^1.*

(i) *Então*

$$\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} u\nu^i dS, \;\; u \in C^1(\overline{U}) \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

(ii) *E temos*

$$\int_U div \; \mathbf{u} \; dx = \int_{\partial U} \mathbf{u} \cdot \nu dS$$

para cada campo vetorial $\mathbf{u} \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$.

A afirmação (ii), é chamada de Teorema da Divergência. Tal afirmação segue de (i) aplicado a cada componente de $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$.

Teorema 1.21 (Fórmula da integração por partes). *Seja $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então*

$$\int_U u_{x_i} v dx = \int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu^i dS \;\; (i = 1, \dots, n).$$

Teorema 1.22 (Fórmulas de Green). *Seja $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então*

(i) $\displaystyle\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$

(ii) $\displaystyle\int_U \nabla v \cdot \nabla u dx = -\int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$

(iii) $\displaystyle\int_U u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$

Agora, abordaremos resultados adicionais aos conceitos já estudados que serão necessários para complementar o entendimento dos resultados posteriores, e têm como principais referências [1, 8, 24].

1.9 Funcionais Diferenciáveis

Seja X^* o espaço dual de X. Dados $f \in X^*$ e $x \in X$ escreveremos (f, x) em vez de $f(x)$; e diremos que $(\cdot, \cdot)$ é o *produto interno* para a dualidade X^*, X.

Definição 1.24. Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. O funcional φ tem uma *derivada de Gateaux* $f \in X^*$ em $u \in U$ se, para cada $h \in X$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u) - (f, th)] = 0.$$

A derivada de Gateaux em u será denotada por $D\varphi(u)$.

Definição 1.25. O funcional φ tem *derivada de Fréchet* em $u \in U$ se existir $f \in X^*$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\| h \|}[\varphi(u + h) - \varphi(u) - (f, h)] = 0.$$

O funcional φ pertence a $C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de φ existe e é contínua em U. Denotaremos a derivada de Fréchet por $\varphi'(u)$.

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Suponha que $V \subset H$ é um subespaço linear denso em H. Identificando H^* com H e usando T como uma aplicação canônica de H^* em V^*, que é simplesmente a restrição a V de funcionais lineares contínuos φ em H, ou seja,

$$\langle T\varphi, v\rangle_{V^*,V} = \langle \varphi, v\rangle_{H^*,H}.$$

Além disso, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\| T\varphi \|_{V^*} \leq C|\varphi|_{H^*} \quad \forall \varphi \in H^*$,

(ii) T é injetiva,

(iii) $Im(T)$ é densa em V^* se V for reflexivo.

Usualmente escrevemos

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*,$$

onde todas as imersões são contínuas e densas (quando V for reflexivo). Note que os produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $(\cdot, \cdot)$ coincidem sempre que ambos fizerem sentido, ou seja,

$$(f, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

Exemplo 1.4. *Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to \mathbb{R}$ com $\varphi(u) = \| u \|^2$. Então, φ é Fréchet-diferenciável e $(f, h) = 2\langle u, h\rangle$ para todo $u, h \in H$. De fato,*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{\| h \|}[\varphi(u + h) - \varphi(u) - (f, h)] &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\| h \|}[\| u + h \|^2 - \| u \|^2 - 2\langle u, h\rangle] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\| u \|^2 + 2\langle u, h\rangle + \| h \|^2 - 2\langle u, h\rangle - \| u \|^2}{\| h \|} \\
&= \lim_{h\to 0} \| h \| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consideremos o funcional

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx,$$

onde

$$F(t) = \int_0^s f(t)dt$$

com $t \in [0,1]$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.4. *Suponhamos $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, e*

$$|f(u)| \leq c(|u|^{p_1-1} + |u|^{p_2-1})$$

com $1 < p_1 - 1 \leq p_2 - 1 < 2^* - 1$ e $n \geq 3$. Então, o funcional ψ é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^n),\mathbb{R})$ e

$$\langle \psi'(u), h\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)hdx, \ \ para\ todo\ h \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Veja [10, Lema 1.4, p. 15]. □

1.10 Variedades

Se U e V são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, uma função diferenciável $h : U \to V$ com inversa diferenciável $h^{-1} : U \to V$ é chamada um *difeomorfismo*. (Aqui diferenciável significa C^∞). Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é chamado *variedade k-dimensional* (em $\mathbb{R}^n$) se para qualquer ponto $x \in M$, existe um conjunto U contendo x, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e um difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^{k+1} = \cdots = y^n = 0\}.$$

Em outras palavras, uma *variedade* é um espaço topológico que se parece localmente com um espaço euclidiano nas vizinhanças de cada ponto. Relembre que um *homeomorfismo* entre espaços topológicos X e Y é uma função $f : X \to Y$ que é contínua, bijetora e tem inversa contínua. Com isso, podemos dizer que cada ponto de uma variedade de dimensão n tem uma vizinhança que é homeomorfa ao espaço euclidiano de dimensão n. Um exemplo comum de uma variedade n-dimensional é a esfera $\mathbb{S}^n$, definida como $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} :| x |= 1\}$. Uma *variedade de Hilbert* é uma variedade modelada em espaços de Hilbert.

1.11 Teoria do Grau

Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e $S = \{x \in \Omega : J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa a matriz jacobiana de φ. E seja $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$.

Definição 1.26. O *grau topológico de Brouwer* da aplicação φ em relação a Ω no ponto b é definido como sendo o número inteiro

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

com $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ com $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Além disso, sgn é a função sinal definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.5. *Considere a aplicação* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, *definida por* $\varphi(x) = sen(x)$, *com* $\Omega = (0, \frac{5\pi}{2})$ *e* $b = \frac{\pi}{4}$. *Queremos calcular o grau topológico de Brouwer de* φ *com relação a* Ω *no ponto* b, *ou seja,* $d(\varphi, \Omega, b)$.

Resolução: *Devemos primeiro verificar se* $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, *para que o* $d\left(sen(x), (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\right)$ *esteja bem definido. Observe que*

$\partial\Omega = \{0, \frac{5\pi}{2}\}$, $S = \{x \in (0, \frac{5\pi}{2}); cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, $\varphi(\partial\Omega) = \{0, 1\}$, $\varphi(S) = \{-1, 1\}$, *logo* $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-1, 0, 1\}$.

Com isso concluímos que $\frac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$. *Assim,*

$$\varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Note que quando observamos o comportamento da função seno no intervalo $(0, \frac{5\pi}{2})$ *podemos encontrar esses três pontos da pré-imagem. Observe ainda que se comparamos esses pontos com a função cosseno as imagens se alteram ficando* $\varphi'(\xi_1) > 0$, $\varphi'(\xi_2) < 0$ *e* $\varphi'(\xi_3) > 0$. *Com isso, temos*

$$d\left(sen(x), \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\})} sgn(J_{\varphi(\xi_i)}),$$

logo,

$$d\left(sen(x), \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = sgn(\varphi'(\xi_1)) + sgn(\varphi'(\xi_2)) + sgn(\varphi'(\xi_3))$$

consequentemente,

$$d\left(sen(x), \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1 + (-1) + 1.$$

Portanto,

$$d\left(sen(x), \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Agora, consideremos E um espaço de Banach real e $\Omega \subset E$ um aberto limitado. Seja $T \in C(\overline{\Omega}, E)$ uma aplicação tal que $T(\overline{\Omega})$ está contido num subespaço de dimensão finita de E. A aplicação $\varphi = I - T$ é chamada de *Perturbação de Dimensão Finita da Identidade*.

Definição 1.27. Seja $b \in E$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se F é um subconjunto de E de dimensão finita contendo $T(\overline{\Omega})$ e b, definimos o *grau de Leray e Schauder* de φ com relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi\,|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Definição 1.28. Diremos que uma aplicação $T : \overline{\Omega} \to E$ é *compacta* se T é contínua e $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto em E, ou seja, $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é um compacto em E.

No que segue denotaremos por $Q(\overline{\Omega}, E)$ o espaço de Banach dos operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to E$ munido da norma da convergência uniforme, isto é,

$$\| T \|_{\infty,\overline{\Omega}} = \| T \|_{\infty} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \| T(x) \|,$$

onde $\| \cdot \|$ é uma norma em E.

Propriedade da Invariância do Grau por Homotopia: Seja H uma aplicação tal que $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$ definida por $H(x,t) = x - S(x,t)$ onde $S \in Q(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$. Se $b \notin H(\Omega \times [0,1])$, então $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ é constante em $[0,1]$, (Veja [1], pág. 57).

2 Notação de Linking

Nesta seção encontram-se as notações e definições necessárias para a apresentação deste trabalho. Aqui, e no restante dos capítulos E denotará um espaço de Hilbert com produto interno fixo. Sejam E_1 e E_2 dois subespaços de E, $E_1 \cap E_2 = 0$ e $P_i : E \to E_i$, a projeção sobre $E_i, i = 1, 2$, onde $P_i(u) = u_i$. Denotaremos por $\mathscr{B}_r$ o conjunto $(B_r \cap E_1) \oplus (B_r \cap E_2)$ onde $B_r = \{u \in E :\| u \|\leq r\}$.

A seguir descrevemos o conceito de *"link"* entre variedades de Hilbert modeladas em E. Seja Σ a classe das aplicações $\Phi \in C([0,1] \times E, E)$, para as quais $P_2(\Phi_t(u) - u)$ é compacta para todo $t \in [0, 1]$.

Definição 2.1 (Cf. [4]). Sejam S e Q variedades de Hilbert, Q com fronteira ∂Q. Dizemos que S e ∂Q são *"link"* se sempre que $\Phi \in \Sigma$ e $\Phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$ então $\Phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$.

O seguinte lema é um exemplo útil de conjuntos linking, e servirá de suporte para a demonstração dos resultados principais.

Lema 2.1. *Sejam* $e \in \partial B_1 \cap E_1$ *e* $r_1 > \rho > 0$. *Se* $S = \partial B_\rho \cap E_1$ *e* $Q = \{re : r \in [0, r_1]\} \oplus (B_{r_2} \cap E_2)$, *então* S *e* ∂Q *são link.*

Demonstração. Inicialmente vamos supor que $\Phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$, com $\Phi \in \Sigma$. Então para mostrar que S e ∂Q são *link* precisamos verificar que $\Phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$. Utilizando o conceito da aplicação projeção e a definição de $S = \partial B_\rho \cap E_1$, para cada $t \in [0, 1]$ chegamos numa condição equivalente:

$$\Phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{ existe } q_t \in Q, \text{ tal que } P_2\Phi_t(q_t) = 0 \text{ e } \| P_1\Phi_t(q_t) \|=\| \Phi_t(q_t) \|= \rho.$$

De fato, o termo $P_2\Phi_t(q_t) = 0$ indica que $\Phi_t(q_t) \in E_1$ e a condição $\| P_1\Phi_t(q_t) \|=\| \Phi_t(q_t) \|= \rho$, mostra que $\Phi_t(q_t)$ está na fronteira de B_ρ, com isso segue a equivalência.

Agora, seja $re + u \in Q$, definamos

$$\Psi_t(re + u) := (\| P_1\Phi_t(re + u) \| -\rho, P_2\Phi_t(re + u)).$$

Note que escrevendo $P_2\Phi_t(re + u) = u - (u - P_2\Phi_t(re + u)$ a aplicação $W_t(re + u) = u - \Phi_t(re + u)$ possui a forma necessária para aplicarmos a teoria do grau de Leray-Schauder.

Vamos denotar o grau de Leray-Schauder da aplicação Ψ_t com relação a um conjunto aberto Q e um ponto $b \notin \Psi_t(\partial Q)$ por $d(\Psi_t, Q, b)$. Uma vez que $\Phi(\partial Q) \cap S = \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$, então $d(\Psi_t, Q, 0)$ está bem definida para todo $t \in [0, 1]$. De fato, se $0 \notin \Psi_t(\partial Q)$ então existe $q_t \in \partial Q$ satisfazendo $\| P_1\Phi_t(q_t) \|= \rho$ e $P_2\Phi_t(q_t) = 0$ e consequentemente $q_t \in S$, o que contradiz $\Phi(\partial Q) \cap S = \emptyset$. Com isso podemos utilizar a propriedade da invâriancia do grau por homotopia, para obter

$$d(\Psi_t, Q, 0) = d(\Psi_0, Q, 0) \text{ para todo } t \in [0,1],$$

logo precisamos apenas calcular $d(\Psi_0, Q, 0)$. Para isso, observe que $\Psi_0(re+u) = (r-\rho, u) = 0$ se, e somente se, $re+u = \rho e + 0 \in Q$. Calculando o jacobiano da aplicação, temos

$$J_{\Psi_0}(re+u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r-\rho) & \frac{\partial}{\partial u}(r-\rho) \\ \frac{\partial}{\partial r}(u) & \frac{\partial}{\partial u}(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Sendo $\Psi_0^{-1}(\{0\}) = \{(\rho e + 0)\}$, então pela definição de grau, temos

$$d(\Psi_0, Q, 0) = \sum_{\xi \in \Psi^{-1}(\{0\})} sgn(J_{\Psi_0}(\xi)) = 1.$$

Como consequência existe pelo menos um $q_t \in Q$ tal que $\Psi_t(q_t) = 0$, ou seja, $P_2\Phi_t(q_t) = 0$ e $\| P_1\Phi_t(q_t) \| = \rho$. Segue que $q_t \in \Phi_t(Q) \cap S$, portanto $\Phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$.

□

Definição 2.2. Seja $B : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que B é *uniformemente diferenciável* em um subconjunto limitado de E se para quaisquer $r, \varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(r, \varepsilon) > 0$, independente de u, tal que

$$| B(u+v) - B(u) - B'(u)v | \leq \varepsilon \| v \|$$

para todos $u, u+v \in B_r$ e $\| v \| \leq \delta$.

Definição 2.3. Seja X, Y espaços de Banach. Um operador $T : D \subset X \to Y$ é chamado *completamente contínuo* se, para cada sequência fracamente convergente $x_n \rightharpoonup x$ de X, a sequência $T(x_n) \to T(x)$ é convergente na norma em Y.

Lema 2.2. *Seja $B : E \to \mathbb{R}$ um funcional que é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável num subconjunto limitado de E. Então $B' : E \to E^*$ é completamente contínuo.*

Demonstração. Primeiramente, considere uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E. Afirmamos que (u_n) é limitada. De fato, pela Proposição 1.3 $u_n \rightharpoonup u$ se, e somente se, $f(u_n) \to f(u)$ para todo $f \in E^*$. Então como $f(u_n)$ é convergente na topologia forte, em particular $f(u_n)$ é limitada para todo $f \in E^*$, portanto pelo Corolário 1.1, (u_n) é limitada.

Logo existe $r > 0$ de tal forma que $(u_n) \subset B_r$ e $u \in B_r$. Utilizando a hipótese de que B é uniformemente diferenciável num subconjunto limitado de E, concluímos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$| B(u+v) - B(u) - B'(u)v | \leq \frac{\varepsilon}{4} \| v \|,$$

para todos $u, u+v \in B$, e $\| v \| \leq \delta$ e portanto

$$| B(u_n+v) - B(u_n) - B'(u_n)v | \leq \frac{\varepsilon}{4} \| v \|,$$

para todo $\| v \| \leq \delta$. Com isso e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
|(B'(u_n) - B'(u))v| &\leq |B'(u_n)v - B(u_n + v) + B(u_n)| + |B(u+v) - B(u) - B'(u)v| \\
&+ |B(u_n + v) - B(u+v)| + |B(u) - B(u_n)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \| v \| + | B(u_n + v) - B(u+v) | + | B(u) - B(u_n) | .
\end{aligned}$$

Por outro lado, como B é fracamente contínua, temos

$$| B(u_n + v) - B(u+v) | < \frac{\varepsilon}{4} \| v \|$$

e

$$| B(u) - B(u_n) | < \frac{\varepsilon}{4} \| v \|,$$

para n suficientemente grande. Então

$$| (B'(u_n) - B'(u))v | \leq \frac{\varepsilon}{2} \| v \| + \frac{\varepsilon}{4} \| v \| + \frac{\varepsilon}{4} \| v \|$$

Então,

$$\| B'(u_n) - B'(u) \| \leq \varepsilon.$$

Temos $B'(u_n) \to B'(u)$ quando $n \to +\infty$. Portanto, B' é completamente contínua.

□

2.1 Teorema de Linking Abstrato

Nesta subseção encontram-se as definições e notações que serão necessários para entendermos o resultado principal desta dissertação, o Teorema de Linking Abstrato, que é devido a L. Maia e M. Soares [19].

Definição 2.4. Denotaremos por Γ o conjunto das aplicações $h \in C([0,1] \times E, E)$ satisfazendo:

(Γ_1) $h_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, onde $U, K \in C([0,1] \times E, E), U_t$ é um homeomorfismo de E em E e K_t é compacto para cada $t \in [0,1]$;

(Γ_2) $U_0(u) = u, K_0(u) = 0$;

(Γ_3) $P_i U_i(u) = U_i(P_i(u)),\ i = 1, 2$;

(Γ_4) h_t mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados .

Além disso, para $h \in \Gamma$ denotaremos por $h_t^j(u)$ a j-ézima composição de h em si mesma, ou seja, $h_t^1(u) = h_t(u)$, e $h_t^j(u) = h_t(h^{j-1}(u))$ para $j > 1$.

Definição 2.5. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Uma sequência (u_n) é dita uma *sequência de Cerami*, ou uma sequência (C) abreviando, se satisfaz

$$\sup_n | I(u_n) | < +\infty \text{ e } \| I'(u_n) \| (1 + \| u_n \|) \to 0$$

com $n \to +\infty$. Dado $c \in \mathbb{R}$, $(u_n) \subset E$ é dita uma *sequência de Cerami no nível* c, ou sequência $(C)_c$ abreviando, se satisfaz

$$I(u_n) \to c \text{ e } \| I'(u_n) \| (1+ \| u_n \|) \to 0,$$

com $n \to +\infty$. Além disso, dizemos que o funcional I satisfaz a *condição de Cerami* ou condição (C) abreviando, se toda sequência Cerami de I tem uma subsequência convergente, analogamente para a condição $(C)_c$.

Teorema 2.1 (Teorema de Linking Abstrato). *Seja E um espaço de Hilbert real, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, E_1 um subespaço fechado de E e $E_2 = E_1^{\perp}$. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo:*

(I_1) $I(u) = \dfrac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, para todo $u \in E$, onde $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$ e $L_i : E_i \to E_i, i = 1, 2$ é uma aplicação autoadjunta linear limitada.

(I_2) B é fracamente contínua e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E.

(I_3) Existem variedades de Hilbert $S, Q \subset E$, tais que Q é limitada e tem fronteira ∂Q, constantes $\alpha > \omega$ e $v \in E_2$ tais que

(i) $S \subset v + E_1$ e $I \geq \alpha$ em S,

(ii) $I \leq \omega$ em ∂Q,

(iii) S e ∂Q, são link,

(I_4) Definindo

$$c := \inf_{h\in\Lambda} \sup_{u\in\overline{Q}} I(h_1(u)) \tag{2.1}$$

onde $\overline{Q}$ é o fecho de Q,

$$\Lambda := \Bigg\{ h \in C([0, 1] \times E, E) : h = h^{(1)} \circ \cdots \circ h^{(m)},\ com\ h^{(1)}, \ldots, h^{(m)} \in \Gamma,$$
$$m \in \mathbb{N},\ h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}, \beta \in \left(0, \frac{\alpha - \omega}{2}\right) \Bigg\}$$

e $I^{\lambda} = \{u \in E : I(u) \leq \lambda\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se para uma sequência $(u_m) \subset E$, existe uma constante $b > 0$ tal que $(u_m) \subset I^{-1}([c - b, c + b])$ e $(1+ \| u_m \|) \| I'(u_m) \| \to 0$ com $m \to +\infty$, então (u_m) é limitada.

Então $c \geq \alpha$ é valor crítico de I.

Para podermos observar as sutis diferenças dos teoremas do ponto crítico, enunciaremos o trabalho de V. Benci. e P. H. Rabinowitz [4], o qual foi usado como motivação para o Teorema de Linking desenvolvido por L. Maia e M. Soares.

Teorema 2.2. *Seja E um espaço de Hilbert real, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, E_1 um subespaço fechado de E e $E_2 = E_1^{\perp}$. Suponha que $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz:*

(f_1) $f(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, *para todo* $u \in E$, *onde* $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$ *e* $L_i : E_i \to E_i, i = 1, 2$ *é uma aplicação autoadjunta linear limitada.*

(f_2) B *é fracamente contínua e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de* E.

(f_3) *Se para uma sequência* $(u_m), f(u_m)$ *é limitada por cima e* $f'(u_m) \to 0$ *com* $m \to \infty$, *então* (u_m) *é limitada.*

(f_4) *Existem variedades de Hilbert* $S, Q \subset E$, *tais que* Q *é limitada, constantes* $\alpha > \omega$ *e* $v \in E_2$ *tais que*

(i) $S \subset v + E_1$ *e* $f \geq \alpha$ *em* S,

(ii) $f \leq \omega$ *em* ∂Q,

(iii) S *e* ∂Q, *são link,*

Então f *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$.

Note que os teoremas diferem apenas em uma das quatro hipóteses, correspondentes à (I_4) e (f_3). Além de $I(u_m)$ ser limitada por cima, em (I_4) L. Maia e M. Soares assumem que também seja limitada por baixo. Observe ainda que a condição (f_3) é uma versão enfraquecida da condição de Palais-Smale (PS), enquanto que (I_4) é uma versão enfraquecida da condição de Cerami (C).

3 Lema da Deformação Quantitativa

Neste capítulo, será apresentado o Lema da Deformação Quantitativa para sequências de Cerami baseado em [4], porém sem a condição de Cerami. Com esse resultado apresentaremos a demonstração de L. Maia e M. Soares para o Teorema 2.1.

Lema 3.1 (Lema da Deformação). *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo:*

(I_1) $I(u) = \dfrac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, *para todo* $u \in E$, *onde* $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$ *e* $L_i : E_i \to E_i, i = 1, 2$ *é uma aplicação autoadjunta linear limitada.*

(I_2) B *é fracamente contínua e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de* E.

Então para cada $R \in \mathbb{N}$, $\varrho > 0$ *e* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$ *existem* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\eta \in \Gamma$, *tais que:*

$i)$ $I(\eta_t^{ks}(u)) \leq I(u) + \varrho,$ *para todos* $u \in \mathscr{B}_{R+2}$ *e* $t \in [0, 1]$, $s := (R + 2)^2$;

$ii)$ *Se existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\| I'(w) \| (1+ \| w \|) \geq \sqrt{2\varepsilon}$, *para todo* $w \in \mathscr{B}_{R+1} \cap I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, *então* $I(\eta^{ks}(u)) \leq c - \frac{\varepsilon}{2}$, *sempre que* $u \in \mathscr{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$.

Demonstração. Primeiro de tudo, consideremos o seguinte:

Afirmação: Existe uma constante $M = M(R)$ tal que $\| I'(u) \| \leq M$ para $u \in \mathscr{B}_{R+2}$.

Iniciaremos mostrando que o funcional B' é limitado em $\mathscr{B}_{R+2}$. De fato, sabemos que E é Hilbert e portanto um espaço reflexivo, além disso $\mathscr{B}_{R+3}$ é limitada em E e portanto fracamente compacta. Como B é fracamente contínua, então $B(\mathscr{B}_{R+3})$ será compacta em $\mathbb{R}$ e portanto é limitada em $\mathbb{R}$. Agora, para todo $u \in \mathscr{B}_{R+3}$ consideremos $M_0 > 0$, tal que $|B(u)| \leq M_0$. Como B é uniformemente diferenciável em $\mathscr{B}_{R+3}$, fixando $\varepsilon = 1$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$| B(u + v) - B(u) - B'(u)v | \leq \| v \|,$$

para $u, u + v \in \mathscr{B}_{R+3}$ e $\| v \| \leq \delta_0$, donde, temos

$$\begin{aligned} | B'(u)v | &\leq | B'(u)v + B(u) - B(u + v) | + | B(u) | + | B(u + v) | \\ &\leq \| v \| + 2M_0 \leq \delta_0 + 2M_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo $u, u + v \in \mathscr{B}_{R+3}$ e $\| v \| \leq \delta_0$. Agora, vamos considerar dois casos:

Caso 1: Se $\delta_0 > 1$, para todos $u \in \mathscr{B}_{R+2}$ e $\| v \| \leq 1$, segue-se que $u + v \in \mathscr{B}_{R+3}$, então

$$| B'(u)v | \leq \delta_0 + 2M_0.$$

Caso 2: Se $\delta_0 \leq 1$ para todo $0 < \| v \| \leq 1$, note que $\left\| \dfrac{\delta_0}{\| v \|} v \right\| = \delta_0 \leq 1$, portanto para todo $u \in \mathscr{B}_{R+2}$ segue-se que $u + \dfrac{\delta_0}{\| v \|} v \in \mathscr{B}_{R+3}$ e então substituindo v por $\dfrac{\delta_0}{\| v \|} v$ em (3.1) temos $\left| B'(u) \dfrac{\delta_0}{\| v \|} v \right| \leq \delta_0 + 2M_0$, implicando

$$| B'(u)v |\leq (\delta_0 + 2M_0)\frac{\| v \|}{\delta_0} \leq \frac{1}{\delta_0}(\delta_0 + 2M_0).$$

Dessa forma, nos dois casos temos

$$\begin{aligned} |B'(u)v| &\leq (\delta_0 + 2M_0) + \frac{1}{\delta_0}(\delta_0 + 2M_0) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_0}\right)(\delta_0 + 2M_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\| B'(u) \| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_0}\right)(\delta_0 + 2M_0).$$

Agora, note que a derivada do primeiro termo do nosso funcional $I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$ é Lu. De fato, sabendo que L é uma aplicação autoadjunta, linear e limitada, temos

$$\begin{aligned} &\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\left|\frac{1}{2}\langle L(u+v), u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - (Lu, v)\right|}{\| v \|} \\ = &\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\left|\frac{1}{2}\langle Lu + Lv, u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - \langle Lu, v\rangle\right|}{\| v \|} \\ = &\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\left|\frac{1}{2}\Big(\langle Lu, u\rangle + \langle Lu, v\rangle + \langle Lv, u\rangle + \langle Lv, v\rangle - \langle Lu, u\rangle\Big) - \langle Lu, v\rangle\right|}{\| v \|} \\ = &\frac{1}{2}\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|\langle Lv, v\rangle|}{\| v \|} \leq \lim_{\|v\|\to 0} \frac{\| L \|\| v \|\| v \|}{\| v \|} = \lim_{\|v\|\to 0} \| L \|\| v \| = 0, \end{aligned}$$

para todo $u \in \mathscr{B}_{R+2}$. Com isso, segue que

$$\begin{aligned} \| I'(u) \| &= \| Lu + B'(u) \| \leq \| L \|\| u \| + \| B'(u) \| \\ &\leq (R+2) \| L \| + \left(1 + \frac{1}{\delta_0}\right)(\delta_0 + 2M_0). \end{aligned}$$

A afirmação segue, considerando

$$M := (R+2) \| L \| + \left(1 + \frac{1}{\delta_0}\right)(\delta_0 + 2M_0).$$

E com isso definimos

$$\overline{\varepsilon} := \frac{1}{Ms} \min\left(\varrho, \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.2}$$

Devido I ser uniformemente diferenciável em conjuntos limitados, existe um $\delta = \delta(\overline{\varepsilon}, R) > 0$ tal que

$$| I(u+v) - I(u) - I'(u)v | \leq \overline{\varepsilon} \| v \| \tag{3.3}$$

para todo $u, u+v \in \mathscr{B}_{R+2}$ e $\| v \| \leq \delta$.

Agora, vamos construir um truncamento do funcional I'. Seja $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função satisfazendo $(a) - (d)$:

$$\begin{array}{ll} (a) & \chi(t) = 1 \text{ para } t \leq R+1, \\ (b) & \chi(t) = 0 \text{ para } t \geq R+2, \\ (c) & \chi'(t) < 0 \text{ para } t \in (R+1, R+2), \\ (d) & \chi \leq (R+2-t)^2 \text{ para } t \in \left[R+\dfrac{3}{2}, R+2\right]. \end{array}$$

Definamos

$$V(u) := V_1(u) + V_2(u),$$

onde $V_i(u) := \chi(\| u_i \|)P_i I'(u), i = 1, 2$ com $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$. Vamos mostrar que a função

$$\eta_t(u) := u - \frac{t}{k} V(u)$$

pertence a Γ para algum k.

Iniciamos mostrando que η pode ser escrita como $\eta_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, onde U_t é um homeomorfismo e K_t é uma aplicação compacta. De fato, usando a definição da aplicação projeção, temos

$$\begin{aligned} P_i V(u) &= V_i(u) = \chi(\| u_i \|)P_i I'(u) \\ &= \chi(\| u_i \|)P_i(Lu + B'(u)) \\ &= \chi(\| u_i \|)(L_i u_i + P_i B'(u)). \end{aligned}$$

Segue

$$\begin{aligned} P_i \eta_t(u) &= P_i \left(u - \frac{t}{k} V(u)\right) = P_i(u) - \frac{t}{k} P_i V(u) \\ &= u_i - \frac{t}{k} \chi(\| u_i \|)(L_i u_i + P_i B'(u)) \\ &= u_i - \frac{t}{k} \chi(\| u_i \|) L_i u_i - \frac{t}{k} \chi(\| u_i \|) P_i B'(u)) \\ &= \left(Id - \frac{t}{k} \chi(\| u_i \|) L_i\right) u_i - \frac{t}{k} \chi(\| u_i \|) P_i B'(u)). \end{aligned}$$

Com isso, podemos definir

$$U_t(u) := \sum_{i=1,2} \left(Id - \frac{t}{k} \chi(\| u_i \|) L_i\right) u_i,$$

e

$$K_t(u) := -\frac{t}{k} \sum_{i=1,2} \chi(\| u_i \|) P_i B'(u),$$

assim teremos

$$\eta_t(u) = U_t(u) + K_t(u).$$

Vamos mostrar que η_t satisfaz as condições $(\Gamma_1) - (\Gamma_4)$ definidas em 2.4.

- U_t e K_t satisfazem (Γ_2), pois

$$U_0(u) = \sum_{i=1,2} \left(Id - \frac{0}{k}\chi(\| u_i \|)L_i \right) u_i = \sum_{i=1,2} u_i = u$$

e

$$K_0(u) = -\frac{0}{k} \sum_{i=1,2} \chi(\| u_i \|)P_i B'(u)) = 0$$

- U_t e K_t satisfazem (Γ_3): Faremos a prova para $i = 1$, sendo que o caso $i = 2$ prova-se de modo análogo. Temos

$$\begin{aligned} P_1U_t(u) &= P_1 \left(\sum_{i=1,2} \left(Id - \frac{t}{k}\chi(\| u_i \|)L_i \right) u_i \right) \\ &= P_1u_1 - \frac{t}{k}\chi(\| u_1 \|)P_1(L_1u_1) + P_1u_2 - \frac{t}{k}\chi(\| u_2 \|)P_1(L_2u_2) \\ &= u_1 - \frac{t}{k}\chi(\| u_1 \|)L_1u_1 \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} U_t(P_1(u)) &= U_t(P_1(u_1 + u_2)) = U_t(u_1) \\ &= u_1 - \frac{t}{k}\chi(\| u_1 \|)L_1u_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto,

$$P_1U_t(u) = U_t(P_1(u)).$$

- η satisfaz a condição (Γ_4). Pelas hipóteses $(I_1) - (I_2)$, para $u \in B_r$ existe uma constante $C = C(r)$ tal que $\| I'(u) \| = \| Lu + B'(u) \| \leq C$, portanto pela definição de η_t, temos

$$\| \eta_t(u) \| = \| u - \frac{t}{k}V(u) \| \leq \| u \| + \| V(u) \| \leq r + \| I'(u) \| \leq r + C.$$

Segue que η_t mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados.

- η satisfaz a condição (Γ_1). Precisamos mostrar que U_t é um homeomorfismo de E em E e K_t é uma aplicação compacta para cada $t \in [0, 1]$. Note que dado $u_n \rightharpoonup u$ em E, (I_2) e o Lema 2.2 implicam que $B'(u_n) \to B'(u)$ em E^*. Devido à aplicação projeção P_i ser contínua, segue que $K_t(u_n) \to K_t(u)$, então K_t é completamente contínua e como E é um espaço reflexivo então K_t é compacta para todo $t \in [0, 1]$.

Agora, vamos mostrar que U_t é um homeomorfismo de E em E. Por (Γ_3), é suficiente mostrar que P_iU_t é um homeomorfismo de E_i em E_i, $i = 1, 2$. Iniciaremos mostrando que $P_iU_t : E_i \to E_i$ é uma bijeção. Relembre que, para $u_i \in E_i$

$$P_iU_t(u_i) = u_i - \frac{t}{k}\chi(\| u_i \|)L_iu_i.$$

Tome $w \in E_i$, segue que

$$P_iU_t(u_i) = w \Leftrightarrow w + \frac{t}{k}\chi(\| u_i \|)L_iu_i = u_i.$$

Definindo, $\mathscr{L}_w(u_i) := \frac{t}{k}\chi(\| u_i \|)L_i u_i + w$, vemos que $P_i U_t(u_i) = w \Leftrightarrow \mathscr{L}_w(u_i) = u_i$.

Afirmação: $\mathscr{L}_w(u)$ é uma contração.

Sejam $u, v \in E_i$, para qualquer $t \in [0,1]$, pela definição de χ, se $\| u \|$, $\| v \| \geq R+2$, então

$$\frac{t}{k} \| \chi(\| u \|)L_i u - \chi(\| v \|)L_i v \| = 0 \leq \frac{1}{2} \| u - v \| \tag{3.5}$$

Portanto, sem perda de generalidade, suponha $\| v \| \leq R+2$. Pela desigualdade triangular, o Teorema do Valor Médio e a suposição acima, além das definições de χ, temos

$$\begin{aligned}
\frac{t}{k}\Big\|\chi(\| u \|)L_i u \quad - \quad \chi(\| v \|)L_i v\Big\| &\leq \frac{1}{k}\big\|\chi(\| u \|)(L_i u - L_i v)\big\| \\
&+ \quad \frac{1}{k}\big\|(\chi(\| u \|) - \chi(\| v \|))L_i v\big\| \\
&\leq \quad \frac{1}{k} \| L_i \| \| u - v \| + \frac{1}{k} \| L_i \| \quad |\chi(\| u \|) - \chi(\| v \|)| \quad \| v \| \\
&\leq \quad \frac{1}{k} \| L_i \| \Big(\| u - v \| + (R+2) \max_{\mathbb{R}} |\chi'(t)| \; | \; \| u \| - \| v \| \; | \Big) \\
&\leq \quad \frac{1}{k} \| L_i \| \, (R+2) \Big(1 + \max_{\mathbb{R}} \mid \chi'(t) \mid \Big) \| u - v \| \, .
\end{aligned}$$

Assim, tomando

$$k \geq 2 \| L_i \| \, (R+2) \Big(1 + \max_{\mathbb{R}} \mid \chi'(t) \mid \Big),$$

temos

$$\frac{t}{k}\Big\|\chi(\| u \|)L_i u - \chi(\| v \|)L_i v\Big\| \leq \frac{1}{2} \| u - v \|, \tag{3.6}$$

para u, v com $\| v \| \leq R+2$. Desse modo, para todo $u, v \in E_i$, por (3.5) e (3.6), teremos

$$\frac{t}{k}\Big\|\chi(\| u \|)L_i u - \chi(\| v \|)L_i v\Big\| \leq \frac{1}{2} \| u - v \| \, . \tag{3.7}$$

Segue que para cada $w \in E_i$ fixado a aplicação $\mathscr{L}_w(u)$ é uma contração em E_i. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo para Contrações, temos que $\mathscr{L}_w(u)$ tem um único ponto fixo, que denotaremos por u_w. Portanto, $u_w \in E_i$ é o único de forma que $\mathscr{L}_w(u_w) = u_w$, implicando em

$$P_i U_t(u_w) = u_w - \frac{t}{k}\chi(\| u_i \|)L_i u_i = w,$$

que é uma correspondência injetiva, e portanto $P_i U_t$ é uma bijeção. Além disso,

$$\begin{aligned}
\| P_i U_t(u) - P_i U_t(v) \| \quad &= \quad \| u - \frac{t}{k}\chi(\| u \|)L_i u - v + \frac{t}{k}\chi(\| v \|)L_i v \| \\
&= \quad \| (u - v) - \frac{t}{k}\big(\chi(\| u \|)L_i u - \chi(\| v \|)\big)L_i v \| \\
&\geq \quad \| (u - v) \| - \frac{t}{k}\Big\|(\chi(\| u \|)L_i u - \chi(\| v \|))L_i v\Big\|.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade (3.7), obtemos

$$\| P_i U_t(u) - P_i U_t(v) \| \quad \geq \quad \| (u - v) \| - \frac{1}{2} \| u - v \| = \frac{1}{2} \| u - v \|$$

o que implica $(P_iU_t)^{-1}$ contínua. Além disso, como P_iU_t é contínua por definição, isso assegura que é um homeomorfismo de E_i em E_i. Como consequência, η satisfaz (Γ_1).

Agora, vamos verificar que $\mathscr{B}_{R+2}$ é um conjunto invariante para η_t, para em seguida provarmos $(i)-(ii)$. De fato, para $u=u_1+u_2\in\mathscr{B}_{R+2}$, temos

$$\| P_i\eta_t(u) \| \leq \| P_i\eta_t(u)-u_i \| + \| u_i \|,$$

usando as definições de η e V, obtemos

$$\| P_i\eta_t(u)-u_i \| = \| (u_i - \frac{t}{k}V_i(u)) - u_i \| = \frac{t}{k} \| V_i(u) \| \leq \frac{M}{k}\chi(\| u_i \|). \tag{3.8}$$

Se $u_i\in B_{R+\frac{3}{2}}$, das propriedades de χ itens $(a),(c)$. Supondo $\delta\leq 1$ e escolhendo $k\geq\frac{2M}{\delta}$, obtemos

$$\frac{M}{k}\chi(\| u_i \|) \leq \frac{1}{2} \leq R+2- \| u_i \| . \tag{3.9}$$

Por outro lado, se $\| u_i \| \geq R+\dfrac{3}{2}$, então pela propriedade de χ item (d) e a forma como escolhemos k, temos

$$\frac{1}{2} \geq R+2- \| u_i \| \geq (R+2- \| u_i \|)^2 \geq \frac{M}{k}\chi(\| u_i \|). \tag{3.10}$$

Portanto, pelas Desigualdades (3.8), (3.9) e (3.10), concluímos

$$\| P_i\eta_t(u)-u_i \| \leq R+2- \| u_i \|, \qquad \text{para } i=1,2.$$

Logo, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \| P_i\eta_t(u) \| &\leq \| P_i\eta_t(u)-u_i \| + \| u_i \| \\ &\leq \frac{M}{k}\chi(\| u_i \|) + \| u_i \| \\ &\leq R+2- \| u_i \| + \| u_i \| \\ &\leq R+2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sabendo que $\mathscr{B}_r=(B_r\cap E_1)\oplus(B_r\cap E_2)$ temos

$$\textit{dist}(\eta_t(u),\partial\mathscr{B}_{R+2}) = \min_{i=1,2}(R+2- \| P_i\eta_t(u) \|),$$

segue de (3.11) que $\eta_t(u)\in\mathscr{B}_{R+2}$.

Agora, vamos provar $i)$. Note que pelas definições de η, M e k, temos

$$\begin{aligned} \| \eta_t(u)-u \| &= \| u-\frac{t}{k}V(u)-u \| = \| -\frac{t}{k}V(u) \| \\ &= \frac{t}{k} \| V(u) \| = \frac{t}{k} \| V_1(u)+V_2(u) \| \\ &= \frac{t}{k} \| \chi(u_1)P_1I'(u)+\chi(u_2)P_2I'(u) \| \\ &\leq \frac{t}{k} \| 1P_1I'(u)+1P_2I'(u) \| = \frac{t}{k} \| I'(u) \| \\ &\leq \frac{M}{k} < \frac{\delta}{2} < \delta, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $u \in \mathscr{B}_{R+2}$. Portanto, fixando $u \in \mathscr{B}_{R+2}$ com $v = -\frac{t}{k}V(u)$, encontramos

$$I(u+v) = I\Big(u - \frac{t}{k}V(u)\Big) = I(\eta_t(u)), \tag{3.13}$$

substituindo $v = -\frac{t}{k}V(u)$ em (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} I\big(u - \frac{t}{k}V(u)\big) - I(u) - \frac{t}{k}I'(u)V(u) &\leq \big|I(u - \frac{t}{k}V(u)) - I(u) - \frac{t}{k}I'(u)V(u)\big| \\ &\leq \frac{\overline{\varepsilon}t}{k} \parallel V(u) \parallel . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Reorganizando (3.14) e substituindo em (3.13), obtemos

$$I(\eta_t(u)) \leq I(u) - \frac{t}{k}I'(u)V(u) + \frac{\overline{\varepsilon}t}{k} \parallel V(u) \parallel . \tag{3.15}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz podemos identificar $I'(u)$ com um elemento em E, que denotaremos pelo próprio $I'(u)$. Com isso e pela definição de V, segue que

$$\begin{aligned} I'(u)V(u) &= \langle I'(u), V(u)\rangle \\ &= \big\langle I'(u), \big(V_1(u) + V_2(u)\big)\big\rangle \\ &= \Big\langle \big(P_1I'(u) + P_2I'(u)\big), \big(\chi(\parallel u_1 \parallel)P_1I'(u) + \chi(\parallel u_2 \parallel)P_2I'(u)\big)\Big\rangle \\ &= \chi(\parallel u_1 \parallel) \parallel P_1I'(u) \parallel^2 + \chi(\parallel u_2 \parallel) \parallel P_2(I'(u) \parallel^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Assim, usando (3.12) e (3.16) em (3.15), obtemos

$$I(\eta_t(u)) \leq I(u) + \frac{\overline{\varepsilon}M}{k}, \tag{3.17}$$

e pela definição de $\overline{\varepsilon}$, segue que

$$I(\eta_t(u)) \leq I(u) + \frac{\varrho}{Ms}\frac{M}{k} = I(u) + \frac{\varrho}{ks}. \tag{3.18}$$

Como $\mathscr{B}_{R+2}$ é invariante sob η_t, então $\eta_t(u) \in \mathscr{B}_{R+2}$. Usando $\eta_t(u)$ em vez de u em (3.18), e subsequentemente usando novamente a mesma desigualdade, mas para u, temos

$$I(\eta_t^2(u)) = I(\eta_t(\eta_t(u))) \leq I(\eta_t(u)) + \frac{\varrho}{ks} \leq I(u) + \frac{2\varrho}{ks}.$$

Então, repetindo ks vezes esse processo, obtemos

$$I(\eta_t^{ks}(u)) \leq I(u) + \frac{ks\varrho}{ks} \leq I(u) + \varrho,$$

encerrando a prova de i).

Agora, vamos provar ii). Por hipótese temos $u \in \mathscr{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Então vamos considerar três casos:

1º caso: Suponha $\eta_1^j(u) \in \mathscr{B}_{R+1} \cap I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]), 1 \leq j \leq ks$. Observe que $V(u) \equiv I'(u)$ em $\mathscr{B}_{R+1} = (B_{R+1} \cap E_1) \oplus (B_{R+1} \cap E_2)$. De fato, para $u \in \mathscr{B}_{R+1}$ pelo item (a) temos

$$V(u) = \chi(\| u_1 \|)P_1 I'(u) + \chi(\| u_2 \|)P_2 I'(u) = 1P_1 I'(u) + 1P_2 I'(u) = I'(u).$$

Então se fixarmos j e usarmos a definição de η_1, temos

$$\begin{aligned} \eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1} &= \eta_1(\eta_1^{j-1}(u)) - \eta_1^{j-1}(u) \\ &= \eta_1^{j-1}(u) - \frac{1}{k}V(\eta_1^{j-1}(u)) - \eta_1^{j-1}(u) \\ &= -\frac{1}{k}V(\eta_1^{j-1}(u)) = -\frac{1}{k}I'(\eta_1^{j-1}(u)). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Então, usando (3.15) para $\eta_1^j(u)$ e $\eta_1^{j-1}(u)$ no lugar de $u+v$ e u, obtemos

$$I(\eta_1^j(u)) \leq I(\eta_1^{j-1}(u)) - \frac{1}{k}I'(\eta_1^{j-1}(u))V(\eta_1^{j-1}(u)) + \frac{1}{k}\overline{\varepsilon} \parallel V(\eta_1^{j-1}(u)) \parallel .$$

Reorganizando e usando a definição de M, além de (3.2), temos

$$\begin{aligned} I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u)) &\leq -\frac{1}{k} \parallel I'(\eta_1^{j-1}(u) \parallel^2 + \frac{1}{k}\overline{\varepsilon}M \\ &= -\frac{1}{k} \parallel I'(\eta_1^{j-1}(u) \parallel^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{2Ms}\right)M \\ &\leq -\frac{1}{k} \parallel I'(\eta_1^{j-1}(u) \parallel^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Agora, usando (3.20) para todo $1 \leq j \leq ks$, segue-se que

$$\sum_{j=1}^{ks}[I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u))] \leq \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{1}{k} \parallel I'(\eta_1^{j-1}(u)) \parallel^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}\right],$$

pela soma telescópica, o lado esquerdo da desigualdade torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{ks}[I(\eta_1^j(u)) &- I(\eta_1^{j-1}(u))] = [I(\eta_1^1(u)) - I(\eta_1^0(u))] + [I(\eta_1^2(u)) - I(\eta_1^1(u))] \\ &+ \cdots +[I(\eta_1^{ks-1}(u)) - I(\eta_1^{ks-2}(u))] + [I(\eta_1^{ks}(u)) - I(\eta_1^{ks-1}(u))] \\ &= I(\eta_1^{ks}(u)) - I(u). \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na nossa última desigualdade, obtemos

$$I(\eta_1^{ks}(u)) - I(u) \leq \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{1}{k} \parallel I'(\eta_1^{j-1}(u)) \parallel^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}\right]. \tag{3.21}$$

Uma vez que $(R+2) \parallel I'(u) \parallel \geq (1+ \parallel u \parallel) \parallel I'(u) \parallel \geq \sqrt{2\varepsilon}$ da hipótese, definindo $\varepsilon_s := \dfrac{\varepsilon}{s}$, segue-se que $\parallel I'(u) \parallel^2 \geq 2\varepsilon_s$, para todo $u \in \mathscr{B}_{R+1}$. De fato,

$$(R+2) \parallel I'(u) \parallel \geq \sqrt{2\varepsilon} \;\Rightarrow\; (R+2)^2 \parallel I'(u) \parallel^2 \geq 2\varepsilon \;\Rightarrow\; \parallel I'(u) \parallel^2 \geq \frac{2\varepsilon}{s},$$

de onde segue o resultado. Assim, de (3.21), resulta

$$I(\eta_t^{ks}(u)) - I(u) \leq \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{2\varepsilon_s}{k} + \frac{\varepsilon_s}{2k}\right] = \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{3\varepsilon_s}{2k}\right] = ks\left[-\frac{3\varepsilon}{2ks}\right] = -\frac{3\varepsilon}{2}. \qquad (3.22)$$

Portanto, sendo $I(u) \leq c + \varepsilon$, (3.22) implica que

$$I(\eta_t^{ks}(u)) \leq I(u) - \frac{3\varepsilon}{2} \leq c + \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{2} = c - \frac{\varepsilon}{2},$$

provando o primeiro caso.

2º caso: Suponha $\eta_1^j(u) \in \mathscr{B}_{R+1} \cap I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ para $1 \leq j \leq m-1$, mas $\eta_1^m(u) \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, para algum $1 \leq m \leq ks$. De (3.20) e como $\| I'(u) \|^2 \geq 2\varepsilon_s$, para todo $u \in \mathscr{B}_{R+1}$, segue-se que

$$\begin{aligned} I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u)) &\leq -\frac{1}{k} \| I'(\eta_1^{j-1}(u) \|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks} \\ &\leq -\frac{2\varepsilon_s}{k} + \frac{\varepsilon_s}{2k} = -\frac{3\varepsilon_s}{2k}. \end{aligned}$$

Daí, $I(\eta_1^j(u)) < I(\eta_1^{j-1}(u)) \text{ para } 1 \leq j \leq m$. Em particular, temos

$$I(\eta_1^m(u)) < \eta_1^{m-1}(u)).$$

Então, como $\eta_1^m(u) \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ e $\eta_1^{m-1}(u) \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, concluímos que

$$I(\eta_1^m(u)) < c - \varepsilon.$$

Assim, usando novamente a soma telescópica, segue que

$$\begin{aligned} I(\eta_1^{ks}(u)) &= I(\eta_1^m(u)) + [I(\eta_1^{m+1}(u)) - (I(\eta_1^m(u))] + \cdots + [I(\eta_1^{ks-1}(u)) - I(\eta_1^{ks-2}(u))] \\ &+ [I(\eta_1^{ks}(u)) - I(\eta_1^{ks-1}(u))], \end{aligned}$$

implicando

$$I(\eta_1^{ks}(u)) \leq c - \varepsilon + \sum_{j=m+1}^{ks}[I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u))]. \qquad (3.23)$$

Agora, fixando j tal que $m+1 \leq j \leq ks$, e usando (3.15) como em (3.20), onde reorganizamos e usamos a definição de M, obtemos

$$I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u)) \leq -\frac{1}{k} \| I'(\eta_1^{j-1}(u)) \|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks} \leq \frac{\varepsilon}{2ks}.$$

Tomando o somatório,tem-se

$$\sum_{j=m+1}^{ks}[I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u))] \leq \sum_{j=m+1}^{ks}\left[\frac{\varepsilon}{2ks}\right] = (ks-m)\left(\frac{\varepsilon}{2ks}\right). \qquad (3.24)$$

Das Desigualdades (3.23) e (3.24) segue-se que

$$\begin{aligned} I(\eta_1^{ks}(u)) &\leq c - \varepsilon + (ks - m)\left(\frac{\varepsilon}{2ks}\right) \\ &= c - \varepsilon + \left(\frac{ks - m}{ks}\right)\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq c - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= c - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.

3º caso: Suponha $\eta_1^j(u) \in \mathscr{B}_{R+1} \cap I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ para $1 \leq j \leq m-1$, mas $\eta_1^m(u) \notin \mathscr{B}_{R+1}$ para algum $1 \leq m \leq ks$. Sendo $u \in \mathscr{B}_{\frac{R}{2}}$, segue-se que

$$\| u \| + \frac{R}{2} + 1 \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + 1 = R + 1 \leq \| \eta_1^m(u) \|,$$

e portanto, reorganizando e usando a desigualdade triangular, além da soma telescópica, temos

$$\begin{aligned} \frac{R+2}{2} &\leq \| \eta_1^m(u) \| - \| u \| \leq \| \eta_1^m(u) - u \| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{m} (\eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u)) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \| (\eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u)) \| . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Relembre que $V(u) \equiv I'(u)$ em $\mathscr{B}_{R+1} = (B_{R+1} \cap E_1) \oplus (B_{R+1} \cap E_2)$. Com isso e pela definição de η_1, segue que

$$\begin{aligned} \| \eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u) \| &= \| \eta_1(\eta_1^{j-1}(u)) - \eta_1^{j-1}(u) \| \\ &= \| \eta_1^{j-1}(u) - \frac{1}{k}V(\eta_1^{j-1}(u)) - \eta_1^{j-1}(u) \| \\ &= \frac{1}{k} \| V(\eta_1^{j-1}(u)) \| \\ &= \frac{1}{k} \| I'(\eta_1^{j-1}(u)) \| \end{aligned} \tag{3.26}$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Assim, substituindo (3.26) em (3.25) e aplicando a desigualdade de Holder para somas finitas, temos

$$\begin{aligned} \frac{R+2}{2} &\leq \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} \| I'(\eta_1^{j-1}(u)) \| = \sum_{j=1}^{m} \| \frac{1}{k} I'(\eta_1^{j-1}(u)) \| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{m} | \frac{1}{k} |^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \| I'(\eta_1^{j-1}(u)) \|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left(\sum_{j=1}^{m} \| I'(\eta_1^{j-1}(u)) \|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{3.27}$$

De (3.20) segue que

$$\frac{1}{k} \parallel I'(\eta_1^{j-1}(u) \parallel^2 \leq -[I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u))] + \frac{\varepsilon}{2ks},$$

resultando em

$$\parallel I'(\eta_1^{j-1}(u) \parallel^2 \leq k \left[I(\eta_1^{j-1}(u)) - I(\eta_1^j(u))\right] + \frac{\varepsilon}{2s} \tag{3.28}$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Dessa forma, usando (3.28) em (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{R+2}{2} &\leq \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(k\big(I(\eta_1^{j-1}(u)) - I(\eta_1^j(u))\big) + \frac{\varepsilon}{2s}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[\left(k\big(I(\eta_1^0(u)) - I(\eta_1^1(u))\big) + \frac{\varepsilon}{2s}\right) + \left(k\big(I(\eta_1^1(u)) - I(\eta_1^2(u))\big) + \frac{\varepsilon}{2s}\right) + \cdots\right. \\
&+ \left.\left(k\big(I(\eta_1^{m-2}(u)) - I(\eta_1^{m-1}(u))\big) + \frac{\varepsilon}{2s}\right) + \left(k\big(I(\eta_1^{m-1}(u)) - I(\eta_1^m(u))\big) + \frac{\varepsilon}{2s}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[k\big(I(u) - I(\eta_1^m(u))\big) + \frac{m\varepsilon}{2s}\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{R+2}{2}\right)^2 &\leq \frac{m}{k^2}\left[k(I(u) - I(\eta_1^m(u)) + \frac{m\varepsilon}{2s}\right] \\
&= \frac{m}{k}\left[I(u) - I(\eta_1^m(u)) + \frac{m\varepsilon}{2ks}\right]
\end{aligned}$$

Lembrando que $s = (R+2)^2$ e substituindo acima, obtemos

$$\frac{s}{4} \leq \frac{m}{k}\left[I(u) - I(\eta_1^m(u)) + \frac{m\varepsilon}{2ks}\right].$$

Além disso, por hipótese $u \in \mathscr{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ e $1 \leq m \leq ks$, logo

$$\frac{s}{4} \leq \frac{m}{k}\left[c + \varepsilon - I(\eta_1^m(u)) + \frac{\varepsilon}{2}\right]. \tag{3.30}$$

Agora, multiplicando ambos os lados de (3.30) por $\dfrac{k}{m}$, encontramos

$$\frac{1}{4} \leq \frac{ks}{4m} \leq c + \frac{3\varepsilon}{2} - I(\eta_1^m(u)).$$

Como $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$, a última desigualdade implica que

$$I(\eta_1^m(u)) \leq c + \frac{3\varepsilon}{2} - \frac{10\varepsilon}{4} = c - \varepsilon.$$

Procedendo como no 2º*caso*, onde usamos a soma telescópica e (3.24), temos

$$\begin{aligned}
I(\eta_1^{ks}(u)) &= I(\eta_1^m(u)) + \sum_{j=m+1}^{ks}[I(\eta_1^j(u)) - I(\eta_1^{j-1}(u))] \\
&\leq c - \varepsilon + \sum_{j=m+1}^{ks}\left[\frac{\varepsilon}{2ks}\right] \\
&= c - \varepsilon + (ks - m)\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2ks}\right) \\
&\leq c - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, o 3ºcaso de $ii)$ está provado.

□

O próximo lema tem grande importância para a prova do resultado principal, pois nos fornecerá informações significativas sobre o nível c. Uma proposição semelhante foi provada por V. Benci e P. H. Rabinowitz em [4], Proposição 1.17, página 248.

Lema 3.2. *Se I satisfaz (I_3), ou seja, existem variedades de Hilbert $S, Q \subset E$, tais que Q é limitada e tem fronteira ∂Q, constantes $\alpha > \omega$ e $v \in E_2$ tais que*

(i) $\quad S \subset v + E_1$ e $I \geq \alpha$ em S,

(ii) $\quad I \leq \omega$ em ∂Q,

(iii) $\quad S$ e ∂Q, são link,

então $c \geq \alpha$, onde $c = \inf\limits_{h \in \Gamma} \sup\limits_{u \in \overline{Q}} I(h_1(u))$.

Demonstração. Primeiramente, relembre que

$$\Lambda := \left\{ \begin{array}{ll} h & \in C([0,1] \times E, E) : h = h^{(1)} \circ \cdots \circ h^{(m)}, \text{ com } h^{(1)}, \ldots, h^{(m)} \in \Gamma, m \in \mathbb{N}, \\ I^{\lambda} & = \{u \in E : I(u) \leq \lambda\}, \;\; h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \beta}, \beta \in \left(0, \dfrac{\alpha - \omega}{2}\right) \end{array} \right\},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. É suficiente mostrar que

$$h_1(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset, \tag{3.31}$$

para todo $h \in \Lambda$. De fato, suponha que $h_1(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset$ vale, segue que deve existir pelo menos um $y \in h_1(\overline{Q}) \cap S$. Assim, temos

$$\sup_{u \in \overline{Q}} I(h_1(u)) \geq I(y) \geq \inf_{w \in S} I(w).$$

Por outro lado, de (i) segue que

$$\inf_{w \in S} I(w) \geq \alpha.$$

Logo,

$$\sup_{u \in \overline{Q}} I(h_1(u)) \geq \alpha, \tag{3.32}$$

e como a Desigualdade (3.32) vale para todo $h \in \Lambda$, da definição de c concluímos que $c \geq \alpha$. Agora, precisamos mostrar a validade de (3.31), que segue de uma afirmação mais forte, de que

$$h_t(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset, \tag{3.33}$$

para todo $h \in \Lambda$ e $t \in [0,1]$. Para mostrar (3.33), basta encontrar $u \in \overline{Q}$ tal que

$$h_t(u) \in S, \tag{3.34}$$

para todo $t \in [0, 1]$. De (i) temos que $S \subset v + E_1$, com $v \in E_2$, que pode ser escrito como $S - v \subset E_1$; logo para cada $t \in [0, 1]$, (3.34) é equivalente a

$$P_1 h_t(u) \in S - v \quad \text{e} \quad P_2 h_t(u) = v. \tag{3.35}$$

Com o propósito de resolver (3.35), vamos transformá-lo em um problema equivalente, para podermos aplicar as hipóteses da geometria de linking. Vamos supor inicialmente que $h = h^{(1)} \in \Lambda$, $(h \in \Lambda \text{ com } m = 1)$. Como de costume $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, relembre que por $(\Gamma_1) - (\Gamma_3)$, temos que $h_t(u) = U_t(u) + K_t(u) \text{ e } P_i U_t(u) = U_t(P_i(u)), \text{ com } i = 1, 2$. Logo

$$\begin{aligned} P_2 h_t(u) &= P_2 U_t(u) + P_2 K_t(u) \\ &= U_t(P_2(u)) + P_2 K_t(u) \\ &= U_t(u_2) + P_2 K_t(u), \end{aligned} \tag{3.36}$$

tornando (3.35) igual a

$$\begin{aligned} &(j) \quad P_1 h_t(u) \in S - v; \\ &(jj) \quad P_2 h_t(u) = U_t(u_2) + P_2 K_t(u) = v. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Agora, suponhamos (3.37) item (jj) substituído por

$$P_2 h_t(u) = P_2 Z_t(u), \tag{3.38}$$

onde $Z_t(u)$ é um operador compacto arbitrário com $Z_0(u) = v$. Note que em (3.37), $Z_t(u) = v$ é o operador compacto constante em (jj), para todo $t \in [0, 1]$. Usando (3.36), temos

$$P_2 Z_t(u) = U_t(u_2) + P_2 K_t(u) \quad \Rightarrow \quad U_t(u_2) = P_2 Z_t(u) - P_2 K_t(u).$$

Assim, (3.38) é equivalente a

$$U_t(u_2) = -P_2(K_t(u) - Z_t(u)),$$

que por sua vez, é equivalente a

$$\begin{aligned} u_2 = U_t^{-1} U_t(u_2) &= U_t^{-1}(-P_2(K_t(u) - Z_t(u))) \\ &\equiv P_2 Y_t(u), \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde Y_t é compacto, pois está definido em função de $K_t \text{ e } Z_t$ que são compactos. Além disso, $Y_0(u) = v$, visto que

$$\begin{aligned} P_2 Y_0(u) &= U_o^{-1}(-P_2(K_0(u) - Z_0(u))) \\ &= -P_2\big((K_0(u) - Z_0(u))\big) \\ &= -P_2(-Z_0(u))), \end{aligned}$$

o que implica

$$Y_0(u) = v.$$

Agora, vamos supor por indução que (3.38) seja equivalente a

$$u_2 = P_2 Y_t(u) \tag{3.40}$$

com Y_t compacto e $Y_0(u) = v$, sempre que $h \in \Lambda$, com $m = n - 1$. Seja $h \in \Gamma$ com $m = n$. Desse modo, $h = h^1 \circ \cdots \circ h^m$, também consideremos $\hat{h} = h^2 \circ \cdots \circ h^m$. Portanto $h = h^1 \circ \hat{h}$, onde por $(\Gamma_1) - (\Gamma_3)$, temos $h^1 = U^1 + K^1$, com K^1 compacto e ainda mais, temos

$$\begin{aligned} v &= P_2 h_t(u) = P_2(h_t^1 \circ \hat{h}_t)(u) \\ &= P_2(U_t^1 + K_t^1)\hat{h}_t(u) \\ &= P_2 U_t^1 \hat{h}_t(u) + P_2 K_t^1 \hat{h}_t(u) \\ &= U_t^1 P_2 \hat{h}_t(u) + P_2 K_t^1 \hat{h}_t(u), \end{aligned}$$

Assim, temos

$$P_2 \hat{h}_t(u) = (U_t^1)^{-1}(-P_2 K_t^1(\hat{h}_t(u)) + v) =: P_2 \hat{Z}_t(u), \tag{3.41}$$

onde $\hat{Z}_t$ é compacto, pois está em função de K_t^1 que é compacto. Como $K_0 = 0$, também temos

$$P_2 \hat{Z}_0(u) = (U_0^1)^{-1}(-P_2 K_0^1(\hat{h}_0(u)) + v) = v.$$

Portanto, pela hipótese de indução existe um compacto Y_t tal que (3.41) é equivalente a resolver (3.40). Agora, definamos

$$\Phi_t(u) = P_1 h_t(u) + u_2 - P_2 Y_t(u) + v.$$

Note que $\Phi \in \Sigma$, que definimos como a classe de aplicações em $C([0,1] \times E, E)$ para a qual $P_2 \Phi_t(u) = u_2 - W_t(u)$, com W_t compacto para $t \in [0,1]$ e $\Phi_0(u) = u$. De fato,

$$\begin{aligned} P_2 \Phi_t(u) &= P_2(P_1 h_t(u) + u_2 - P_2 Y_t(u) + v) \\ &= u_2 - P_2 Y_t(u) + v \\ &= u_2 - (P_2 Y_t(u) - v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= P_1 h_0(u) + u_2 - P_2 Y_0(u) + v \\ &= P_1 u + u_2 - v + v \\ &= u_1 + u_2 = u. \end{aligned}$$

Como $P_1 \Phi_t = P_1 h_t$ e $P_2 h_t = v$ é equivalente a (3.40), devido as observações acima, e

$$P_2 \Phi_t = u_2 - (P_2 Y_t - v) = P_2 Y_t - P_2 Y_t + v = v,$$

chegamos numa condição equivalente

$$P_2 h_t = v.$$

Portanto, $\Phi_t(u) \in S$ se, e somente se, $h_t(u) \in S$, assim para obter (3.33) e completar a prova, é necessário apenas mostrar que

$$\Phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset \tag{3.42}$$

para todo $t \in [0,1]$. Por (iii) temos que S e ∂Q são link, pois $\Phi \in \Sigma$, então (3.42) vale se

$$\Phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset. \tag{3.43}$$

Vamos supor por contradição que existem $u \in \partial Q$ e $t \in [0,1]$ tais que $\Phi_t(u) \in S$. Dessa forma $h_t(u) \in S$, porém $h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}$, uma vez que $h \in \Lambda$. Logo temos $h_t(u) \in S \cap I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}$. Por outro lado, devido a (i), temos

$$I \geq \alpha > \frac{\alpha+\omega}{2} > \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta$$

com $\alpha > \omega$ e $\beta \in (0, \frac{\alpha-\omega}{2})$. Assim, pela definição de I^λ temos que $S \cap I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta} = \emptyset$, mas isso é uma contradição. Portanto (3.43) é satisfeita, e o lema está provado.

□

3.1 Prova do Resultado Principal

Finalmente podemos provar o Teorema de Linking Abstrato, usando os resultadas já demonstrados nas seções anteriores.

Demonstração do Teorema 2.1. Inicialmente, mostraremos que a aplicação identidade $h(u) = u$ está em Λ. Claramente $h(u) = u \in \Gamma$, pois verifica as quatro condições seguintes:

• (Γ_1) $h_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, onde $U_t = u$ é um homeomorfismo de E em E e $K_t = 0$ é a aplicação identicamente nula que é compacta para cada $t \in [0,1]$.

• (Γ_2) De imediato temos $U_0(u) = u$ e $K_0(u) = 0$, portanto satisfazendo a segunda condição.

• (Γ_3) Mostraremos apenas para P_1, analogamente se mostra que $P_2U_t(u) = U_tP_2(u)$. Usando a definição temos

$$P_1U_t(u) = P_1(u_1 + u_2) = u_1 = U_t(u_1) = U_tP_1(u).$$

Portanto, cumprindo a terceira condição.

• (Γ_4) A última condição é imediata, pois claramente a aplicação identidade mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Para completarmos a verificação, precisamos mostrar que $h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}$. Por $(I_3)(ii)$ temos que $I \leq \omega \text{ em } \partial Q$ e ainda mais

$$I \leq \omega < \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta, \text{ com } \beta \in (0, \frac{\alpha-\omega}{2})$$

onde a desigualdade restrita se justifica pelo fato de $\alpha > \omega$. Ademais, se supormos que $\beta = \frac{\alpha-\omega}{2}$ teríamos o menor valor possível igual a ω. Portanto, pela definição de I^λ, temos que $h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}$. E com isso concluindo o desejado.

Como a aplicação identidade $h(u) = u$ está em Λ, então por $(I_2) - (I_3)$ temos que $c < +\infty$, devido a forma como definimos c. Mais que isso, pelo Lema 3.2, segue que

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \overline{Q}} I(h_1(u)) \geq \alpha.$$

Suponha por contradição, que c não é valor crítico de I. Então $I'(u) \neq 0$ para todo $u \in I^{-1}(c)$, e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(1+ \parallel u \parallel) \parallel I'(u) \parallel \geq \sqrt{2\varepsilon}, \tag{3.44}$$

para todo $u \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Caso contrário, deveria existir uma sequência positiva $\varepsilon_n \to 0$ e $u_n \in I^{-1}([c - \varepsilon_n, c + \varepsilon_n])$ tais que

$$(1+ \parallel u_n \parallel) \parallel I'(u_n) \parallel < \sqrt{2\varepsilon_n}.$$

Assim, como $(u_n) \subset I^{-1}([c - b, c + b])$ e $(1+ \parallel u_n \parallel) \parallel I'(u_n) \parallel \to 0$ quando $n \to +\infty$, então por (I_4) segue que (u_n) é limitada. Assim, (u_n) possui uma subsequência fracamente convergente, que ainda denotaremos por (u_n). Ou seja, $u_n \rightharpoonup u$ quando $n \to +\infty$, para algum $u \in E$. Por (I_2) e pelo Lema 2.2, $B'(u_n) \to B'(u)$ ao longo dessa subsequência e por suposição $I'(u_n) \to 0$. Daí segue que

$$Lu_n = I'(u_n) - B'(u_n) \to -B'(u)$$

quando $n \to +\infty$. Por outro lado, Lu_n também converge fracamente para Lu ao longo desta subsequência. Portanto $Lu = -B'(u)$ e $Lu_n \to Lu$ fortemente, o que nos dá $I'(u) = Lu + B'(u) = 0$. Como $I(u_n) \to c$, novamente por (I_2) segue que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\langle Lu_n, u_n \rangle + B(u_n) \to I(u) = c,$$

o que significa que c é valor crítico de I, contradizendo a suposição. Assim, existe um ε como em (3.44). Podemos ainda supor $\varepsilon < \frac{1}{10}$. Pela definição de ínfimo, escolhamos um $h \in \Lambda$ com um correspondente β satisfazendo

$$c \leq \sup_{u \in \overline{Q}} I(h_1(u)) \leq c + \varepsilon \quad \text{e} \quad h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \beta}. \tag{3.45}$$

Neste caso, o fato que $h \in \Lambda$ e que h_t mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados e a definição de Γ, nos permite concluir que $h_1(\overline{Q})$ é limitada. Portanto, existe um $R \in \mathbb{N}$ tal que $h_1(\overline{Q}) \subset \mathscr{B}_{\frac{R}{2}}$. Seja $\varrho = \frac{1}{2}\min(\beta, \varepsilon)$, pelo Lema 3.1, existem $\eta \in \Gamma$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que η_t^{ks} satisfaz $i)$ e $ii)$ desse mesmo lema. Agora, seja $g_t(u) = \eta_t^{ks}(h_t(u))$, devido ao Lema 3.1 (i), temos

$$g_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \frac{\beta}{2}}.$$

De fato, como $h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \beta}$, ou seja, $I(h_t(u)) \leq \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta$ para todo $u \in \partial Q$, usando o item $i)$ do Lema de Deformação, temos

$$\begin{aligned} I\big(\eta_t^{ks}(h_t(u))\big) &\leq I(h_t(u)) + \varrho \\ &\leq \frac{\alpha + \omega}{2} - \beta + \frac{\beta}{2} \\ &\leq \frac{\alpha + \omega}{2} - \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Assim, o resultado segue pela forma como g_t foi definido. Portanto $g \in \Lambda$ e de (2.1) segue que

$$c \leq \sup_{u \in \overline{Q}} I(g_1(u)). \tag{3.46}$$

Para todo $u \in \overline{Q}$, por (3.45), $I(h_1(u)) \leq c + \varepsilon$. Dessa forma, se $h_1(u) \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, por (3.44) é possível aplicar $ii)$ do Lema de Deformação, e deles $I(\eta_1^{ks}(h_1(u))) \leq c - \frac{\varepsilon}{2}$, e portanto podemos concluir que

$$g_1(u) = \eta_1^{ks}(h_1(u)) \in I^{c-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Por outro lado, se $h_1(u) \in I^{c-\varepsilon}$, segue do Lema 3.1 (i) que

$$I(g_1(u)) \;\; = \;\; I(\eta_1^{ks}(h_1(u))) \leq I(h_1(u)) + \varrho \leq c - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = c - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim $g_1(u) \in I^{c-\frac{\varepsilon}{2}}$ devido ao modo como escolhemos ϱ. Consequentemente, segue que

$$\sup_{u \in \overline{Q}} I(g_1(u)) \leq c - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.47}$$

contradizendo (3.46). Isto completa a demonstração.

$\square$

4 Aplicação às Equações de Schrödinger Assintoticamente linear em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção mostraremos uma aplicação do Teorema de Linking Abstrato, desenvolvido anteriormente. Como o Teorema 2.1 vale para sequências de Cerami, consideremos aqui uma aplicação à um problema assintoticamente linear.

Primeiro, consideremos o seguinte problema

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{P}$$

para $n \geq 3$, onde $g(x,s) = h(x)f(s)$, e h satisfaz:

(h_1) $h \in C(\mathbb{R}^n, (0,+\infty))$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x) = 0$;

(h_2) $h \in L^q(\mathbb{R}^n), q = \dfrac{2^*}{2^*-p}$ para algum $p \in (2, 2^*)$.

Além disso, f é assintoticamente linear satisfazendo as seguintes condições:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0$;

(f_2) Existe $a > 0$ tal que $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{F(s)}{s^2} = \dfrac{a}{2}$, onde $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(s)dt$, e $F(s) \geq 0$;

(f_3) Definindo $Q(s) := \dfrac{1}{2}f(s)s - F(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos

$$\lim_{s\to+\infty} Q(s) = +\infty.$$

Ademais, vamos supor que V satisfaz o seguinte:

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) =: V_\infty > 0$;

(V_2) Definindo $A := -\Delta + V(x)$ como um operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup[\sigma(A) \cap (-\infty, 0)] = \sigma^- < 0 < \sigma^+ = \inf[\sigma(A) \cap (0,+\infty)].$$

Observação 4.1. *Devido a (V_1), V é limitada; mais ainda, pelo Teorema 1.11, da Seção 1.3, temos que $\sigma_e(A) = [V_\infty, +\infty) \subset (0,+\infty)$, portanto*

$$\sigma(A) \cap (-\infty, V_\infty) = \sigma_d(A) \cap (-\infty, V_\infty),$$

pois, por definição o espectro discreto é o complementar do espectro essencial. Além disso, a nossa condição (V_2) implica que $0 \notin \sigma(A)$ ou $0 \in \sigma_d(A)$, sendo $0 \in (\sigma^-, \sigma^+)$ um ponto isolado, e como por definição o espectro essencial $[V_\infty, +\infty)$ não possui pontos isolados, concluímos que

$$0 \notin \sigma_e(A) = [V_\infty, +\infty),$$

e isso implica que $V_\infty > 0$ e portanto a suposição de que V_∞ em (V_1) deve ser positivo é redundante. Sabendo disso, é possível introduzir por meio do operador A uma norma *equivalente que denotaremos por $\| \cdot \|$ para a norma usual $\| \cdot \|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$, em $H^1(\mathbb{R}^n)$, assim como em [14, Lemma 1.2]. Assim, $E = H^1(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ será o espaço de Hilbert usado para aplicar o Teorema 2.1. Por último, (V_2) implica que $\emptyset \neq \sigma(A) \cap (-\infty, 0) = \sigma_d(A) \cap (-\infty, 0)$, isto é, o operador A tem autovalores negativos. Além disso, esse conjunto é finito (cf. Teorema 1.12, da seção 1.3).*

Um exemplo satisfazendo $(V_1) - (V_2)$ seria uma função contínua $V(x)$ tal que

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & para \ \mid x \mid < R \\ V_\infty, & para \ \mid x \mid > 2R \end{cases}$$

onde $V_0 > \frac{\lambda_1(1)}{R^2} > 0$ é uma constante e $\lambda_1(1)$ é o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(B_1(0)))$. De fato, se ψ é uma autofunção associada a $\lambda_1(R) = \frac{\lambda_1(1)}{R^2}$, que é o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(B_R(0)))$, temos

$$\begin{aligned} \langle A\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{B_R(0)} A\psi(x) \cdot \psi(x) dx \\ &= \int_{B_R(0)} (-\Delta + V(x))\psi(x) \cdot \psi(x) dx \\ &= \int_{B_R(0)} \mid \nabla\psi(x) \mid^2 + V(x)\psi^2(x) dx \\ &= \lambda_1(R) \int_{B_R(0)} \mid \psi(x) \mid^2 dx - V_0 \int_{B_R(0)} \mid \psi(x) \mid^2 dx \\ &= (\lambda_1(R) - V_0) \parallel \psi \parallel^2_{L^2(B_R(0))} \\ &= \left(\frac{\lambda_1(1)}{R^2} - V_0 \right) \parallel \psi \parallel^2_{L^2(B_R(0))} \\ &< -\varepsilon \parallel \psi \parallel^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

para algum $\varepsilon > 0$, o que implica que a parte inferior do espectro de A é negativa.

Observação 4.2. *Note que as suposições $(h_1) - (h_2)$ nos dizem que $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\parallel h \parallel_\infty = h_\infty > 0$. Ainda mais, por (f_2) temos que $\lim_{s \to +\infty} F(s) = +\infty$, e como $\lim_{s \to +\infty} s^2 = +\infty$, usando a regra de L'Hospital, obtemos*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s},$$

implicando que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = a.$$

Daí e da suposição (f_1) segue que, para todo $s \in \mathbb{R}$, existe $\kappa > 0$ tal que

$$\mid f(s) \mid \leq \kappa \mid s \mid \quad com \ a \leq \kappa.$$

Um exemplo satisfazendo $(f_1) - (f_3)$ mas não com $\dfrac{f(s)}{s}$ crescente, é uma função contínua tal que

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2 - \frac{3}{2}s^5 + 2s^3}{1 + s^6}, & para \ \mid s \mid < 5 \\ \dfrac{s^3}{1 + s^2}, & para \ \mid s \mid > 10. \end{cases}$$

De fato, primeiramente para (f_1)

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{s^2-\frac{3}{2}s^5+2s^3}{1+s^6}\cdot\frac{1}{s} = 0.$$

Para (f_2) *iniciaremos calculando* $F(s)$ *para nossa função exemplo. Como queremos estudar o comportamento da* F *quando* s *é grande, observe que* $F(s) \geq \int_5^s f(t)dt$ *quando* $s > 5$. *Fazendo uma substituição em* $\int \frac{t}{1+t^2}dt$ *por* $u = 1+t^2$ *e* $du = 2tdt$, *e lembrando que* $\int \frac{du}{u} = \ln(u)$, *temos*

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^s f(t)dt = \int_0^s \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^s \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt \\
&= \int_0^s t\ dt - \frac{1}{2}\int_0^s \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= \frac{t^2}{2}\bigg|_0^s - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\bigg|_0^s \\
&= \frac{1}{2}\big(s^2 - \ln(s^2+1)\big).
\end{aligned}$$

Agora, usando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to+\infty}\frac{F(s)}{s^2} &= \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln(s^2+1)}{s^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{s\to+\infty}\frac{2s}{(s^2+1)2s} \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Resta agora mostrar para (f_3),

$$\begin{aligned}
Q(s) &= \frac{1}{2}f(s)s - F(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s^3}{1+s^2}\right)s + \frac{1}{2}(s^2 - \ln(s^2+1)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s^4}{1+s^2} + s^2 - \ln(s^2+1)\right).
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $s \to +\infty$, *temos* $\lim\limits_{s\to+\infty} Q(s) = +\infty$, *satisfazendo a última condição.*

4.1 Abordagem Variacional

Agora, mostraremos o significado de solução fraca para o problema (P) e definiremos nosso funcional energia. Suponhamos inicialmente $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uma solução clássica de (P). Multiplicando a equação em (P) por $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e integrando, obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\Delta uvdx + \int_{\mathbb{R}^n}V(x)uvdx = \int_{\mathbb{R}^n}g(x,u)vdx.$$

A expressão acima vale para toda função teste. Logo tome v no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Como $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ então existe $(v_m) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$v_m \to v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Devido as funções v_m serem regulares, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u v_m dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u v_m dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,u) v_m dx.$$

Aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v_m dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u v_m dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,u) v_m dx. \tag{4.1}$$

Agora, mostraremos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v_m dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx \right| \to 0,$$

quando $m \to +\infty$. De fato, da desigualdade de Hölder, resulta que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v_m dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v_m - \nabla u \nabla v) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u \nabla v_m - \nabla u \nabla v| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u (\nabla v_m - \nabla v)| dx \\
&\leq \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| \nabla v_m - \nabla v \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| v_m - v \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} .
\end{aligned}$$

Também temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u v_m dx - \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u v dx \right| \to 0,$$

com $m \to +\infty$. Novamente por Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u v_m dx - \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u v dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(V(x) u v_m - V(x) u v \big) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |V(x) u v_m dx - V(x) u v| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x) u (v_m - v)| dx \\
&\leq \| V(x) u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| v_m - v \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \| V(x) u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| v_m - v \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} .
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x,u) v_m dx - \int_{\mathbb{R}^n} g(x,u) v dx \right| \to 0,$$

quando $m \to +\infty$. Agora, fazendo $m \to +\infty$ em (4.1), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,u)vdx, \tag{4.2}$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Quando $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaz (4.2), dizemos que é solução fraca do problema (P). Associamos a equação (P) um funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(| \nabla u |^2 + V(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \ \ \forall u \in E. \tag{4.3}$$

Conforme visto na Observação 4.1, o conjunto de autovalores $\sigma_d(A) \cap (-\infty, 0)$ é finito, e assim podemos denotá-los por $\{\lambda_i\}_{i=1}^j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, contando as multiplicidades. As suas autofunções associadas denotaremos por $\varphi_i \in E$, com $i = 1, \dots, j$ e defina o espaço gerado por essas autofunções por $E^- := span\{\varphi_i\}_{i=1}^j$. Também, vamos definir por $E^0 := ker(A)$ o núcleo do operador $A = -\Delta + V(x)$, sobre o qual teremos duas possibilidades, se $0 \notin \sigma(A)$ então por definição deve pertencer ao resolvente $\rho(A)$, nesse caso $E^0 = \{0\}$; caso contrário, $0 \in \sigma_d(A)$ e, conforme comentamos acima é finito. Portanto de qualquer modo E^0 terá dimensão finita.

Assim, $E^- \oplus E^0$ será um subespaço de dimensão finita de E e definindo $E^+ := (E^- \oplus E^0)^\perp$, ele é o subespaço de E em que o operador A é positivo definido. Com isso, $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$ e toda função $u \in E$ pode ser escrita de forma direta como $u = u^+ + u^- + u^0$, com $u^+ \in E^+, u^- \in E^-, u^0 \in E^0$. Além disso, como em [14, Lema 1.2], o operador A induz uma norma equivalente $\| \cdot \|$ à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ e um correspondente produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em E dados por

$$\| u \|^2 := \langle Au^+, u^+ \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \langle Au^-, u^- \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \| u^0 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

e

$$\langle u, v \rangle := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u(x) \nabla v(x) + V(x)u(x)v(x))\, dx = \langle Au, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & \text{se } u, v \in E^+, \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u(x) \nabla v(x) + V(x)u(x)v(x))\, dx = -\langle Au, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & \text{se } u, v \in E^-, \\ \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} & \text{se } u, v \in E^0, \\ 0 & \text{se } u \in E^j, v \in E^k, j \neq k, \end{cases}$$

para $j, k \in \{+, -, 0\}$. Daqui em diante, o espaço de Hilbert usado nessa aplicação é $E = (H^1(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|)$. Note que, quando desenvolvemos o primeiro termo do funcional energia, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|\nabla u|^2 \quad + \quad V(x)u^2\Big)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla(u^+ + u^- + u^0)|^2 + V(x)(u^+ + u^- + u^0)^2\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u^+|^2 + V(x)(u^+)^2\right)dx + \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2\right)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u^0|^2 + V(x)(u^0)^2\right)dx,\end{aligned}$$

onde o terceiro termo é

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u^0|^2 + V(x)(u^0)^2\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta + V(x))u^0 \cdot u^0 dx \quad = \quad \langle Au^0, u^0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

pois $u^0 \in E^0$. Substituindo esse resultado na igualdade anterior e usando as definições acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)dx = \| u^+ \|^2 - \| u^- \|^2 .$$

Com isso, é possível escrever

$$I(u) = \frac{1}{2}(\| u^+ \|^2 - \| u^- \|^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx, \tag{4.4}$$

para todo $u = u^+ + u^- + u^0 \in E$. Agora, note que devido E^+, E^-, E^0 serem ortogonais, e como $\| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ denota a norma e o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que $\langle u^j, u^k\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, j \neq k$ e $j, k \in \{+, -, 0\}$. Isto assegura que u^+, u^-, u^0, também são ortogonais em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Denote por $\mathscr{E}_\lambda$ a família espectral do operador A mencionado no Teorema 1.13 da Seção 1.3, (veja ainda [23]). De acordo com esse teorema, é possível definir

$$E_2 := \mathscr{E}_0 E = E^- \oplus E^0 \text{ e } E_1 := (I - \mathscr{E}_0)E.$$

Além disso, pela definição de σ^+ em (V_2), $\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_\lambda$ para todo $0 < \lambda < \sigma^+$, então temos que $E_1 = (I - \mathscr{E}_\lambda)E$, para todo $0 < \lambda < \sigma^+$. Portanto, novamente pelo Teorema 1.13, para todo $u_1 \in E_1$, segue que

$$\sigma^+\langle u_1, u_1\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \langle Au_1, u_1\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \Rightarrow \quad \sigma^+ \| u_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \| u_1 \|^2 .$$

Portanto,

$$\sigma^+ \leq \inf_{u_1 \in E_1, u_1 \neq 0} \frac{\| u_1 \|^2}{\| u_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}},$$

e definimos

$$0 < \frac{\sigma^+}{h_\infty} \leq \frac{1}{h_\infty} \inf_{u_1 \in E_1, u_1 \neq 0} \frac{\| u_1 \|^2}{\| u_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \leq \inf_{u_1 \in E_1, u_1 \neq 0} \frac{\| u_1 \|^2}{\| h^{\frac{1}{2}} u_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}} =: a_0. \tag{4.5}$$

Donde,

$$a_0 = \inf_{u_1 \in E_1, u_1 \neq 0} \frac{\| u_1 \|^2}{\| h^{\frac{1}{2}} u_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \leq \frac{\| u_1 \|^2}{\| h^{\frac{1}{2}} u_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}} = \frac{\| u_1 \|^2}{\int_{\mathbb{R}^n} h(x) u_1^2(x) dx}$$

$$\Rightarrow \ \| u_1 \|^2 \geq a_0 \int_{\mathbb{R}^n} h(x) u_1^2(x) dx, \ \ \forall \ u_1 \in E_1. \tag{4.6}$$

Agora, podemos enunciar o resultado principal dessa seção.

Teorema 4.1. *Suponha V satisfazendo $(V_1)-(V_2)$, h satisfazendo $(h_1)-(h_2)$ e f satisfazendo $(f_1)-(f_3)$, com $a > a_0$. Então o problema (P) tem uma solução fraca não-trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.*

4.2 Verificando hipóteses

Para provarmos o Teorema 4.1 precisamos verificar que I satisfaz as hipóteses $(I_1)-(I_4)$ do Teorema 2.1 para então aplicá-lo. Note que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ em razão das hipóteses assumidas sobre h e f. Vamos denotar por $I_1 : E_1 \to E_1$ o operador identidade em E_1, e por $P^- : E_2 \to E_2$ o operador projeção de E_2 em E^-, observe que $u = u_1 + u_2 \in E_1 + E_2$ com $u_1 = u^+$ e $u_2 = u^- + u^0 \in E_2$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \| u^+ \|^2 - \| u^- \|^2 &= \| u_1 \|^2 - \| u_2 - u^0 \|^2 \\ &= \langle u_1, u_1 \rangle - \langle u_2 - u^0, u_2 - u_0 \rangle \\ &= \langle u_1, u_1 \rangle - \langle u^-, u_2 - u^0 \rangle \\ &= \langle u_1, u_1 \rangle - \langle u^-, u_2 \rangle + \langle u^-, u^0 \rangle \\ &= \langle I_1(u_1), u_1 \rangle + \langle -P^-(u_2), u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Ainda mais, devido às propriedades do produto interno e pela linearidade de L, temos

$$\langle Lu, u \rangle = \langle L_1 u_1 + L_2 u_2, u_1 + u_2 \rangle = \langle L_1 u_1, u_1 \rangle + \langle L_2 u_2, u_2 \rangle.$$

Assim, se definirmos $L_1 : I_1$ e $L_2 : -P^-$, temos que $L_i : E_i \to E_i,$ para $i = 1, 2$ com as condições desejadas, isto é, um operador limitado, linear e autoadjunto, e portanto $I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u \rangle + B(u)$, com

$$B(u) = -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u(x)) dx, \tag{4.7}$$

e com isso, mostramos a primeira hipótese.

Antes de provarmos a hipótese (I_2), primeiramente observe que por $(f_1)-(f_2)$, dado $\varepsilon > 0$ e $2 < p < 2^*$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$| f(s) | \leq \varepsilon \mid s \mid + C_\varepsilon \mid s \mid^{p-1}$$

e

$$| F(s) | \leq \frac{\varepsilon}{2} \mid s \mid^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \mid s \mid^p . \tag{4.8}$$

De fato, por (f_1), deve existir $0 < r < 1$ tal que, para $\mid s \mid < r$, temos

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \left| \frac{f(s)}{s} \right| < \varepsilon \ \ \Rightarrow \ | f(s) | < \varepsilon \mid s \mid .$$

Por (f_2), para $r \leq | s |$, temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = k \;\; \Rightarrow \;\; \left|\frac{f(s)}{s}\right| < k \;\; \Rightarrow \; | f(s) |< k \mid s \mid .$$

Também veja que ainda para $r \leq | s |$, temos

$$| s |= \frac{1}{| s |^{p-2}} \mid s \mid^{p-1} \leq \frac{1}{r^{p-2}} \mid s \mid^{p-1}$$

Assim,

$$| f(s) | \leq \varepsilon \mid s \mid + k \mid s \mid \leq \varepsilon \mid s \mid + k\frac{1}{r^{p-2}} \mid s \mid^{p-1} .$$

Fazendo $C_\varepsilon = k\frac{1}{r^{p-2}}$, obtemos

$$| f(s) | \leq \varepsilon \mid s \mid + C_\varepsilon \mid s \mid^{p-1} .$$

De (f_3), segue que

$$\begin{aligned} | F(s) | &\leq \int_0^s | f(t) | \, dt \\ &= \int_0^s (\varepsilon \mid t \mid + C_\varepsilon \mid t \mid^{p-1}) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \mid s \mid^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \mid s \mid^p . \end{aligned}$$

Lema 4.1 (Brezis-Lieb, [9]). *Suponha $f_m \to f$ $q.t.p$ e $\| f_m \|_p \leq C < \infty$ para todo m e para algum $1 < p < \infty$. Então $f_m \rightharpoonup f$ fracamente em L^p.*

Demonstração. Pelo Teorema de Alaoglu-Banach, existe alguma subsequência, que vamos denotar por f_{m_k}, que converge fracamente para algum g; mas $g = f$ pois $f_m \to f$ $q.t.p.$, portanto $f_m \rightharpoonup f$.

□

No próximo lema mostraremos que B que foi definido em (4.7), satisfaz as condições da hipótese (I_2) do Teorema de Linking.

Lema 4.2. *Assuma que $(h_1) - (h_2)$ e $(f_1) - (f_2)$ valham para I, então*

$$B(u) = -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u(x)) dx,$$

é fracamente contínua e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados.

Demonstração. Consideremos $u_m \rightharpoonup u$ uma sequência em E, então $u_m(x) \to u(x)$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$. Além disso, como F é uma função contínua isso implica que $F(u_m(x)) \to F(u(x))$ em quase toda parte.

Agora, observe que por (4.8), e lembrando que $(u_m) \subset E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n)$, para $2 \leq s \leq 2^*$, temos

$$| F(u_m) |^{\frac{2^*}{p}} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} | u_m |^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} | u_m |^p \right)^{\frac{2^*}{p}} \leq C \left(\frac{\varepsilon}{2} | u_m |^{2\frac{2^*}{p}} + \frac{C_\varepsilon}{p} | u_m |^{2^*} \right) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

pois $2 < 2\frac{2^*}{p} < 2^*$. Com isso, temos que $(F(u_m(\cdot))) \subset L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$ é limitada, uma vez que (u_m) é limitada em E e então é limitada em $L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$ e em $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. De fato, basta observar as seguintes imersões

$$\| u_m \|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \| u_m \|_E \quad \text{e} \quad \| u_m \|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \| u_n \|_E .$$

Como $F(u_m(x)) \to F(u(x))\ q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^n$ e $\| F(u_m) \|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$, então pelo Lema 4.1,

$$F(u_m) \rightharpoonup F(u) \text{ em } L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, por (h_2), $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, onde q é o expoente conjugado de $\frac{2^*}{p}$. E se considerarmos $(F(u_m))$ nossa sequência em $L^{\frac{2^*}{p}}$, e como $F(u_m) \rightharpoonup F(u)$, pela Proposição 1.3, temos que

$$\varphi(F(u_m)) \to \varphi(F(u)), \forall\, \varphi \in \left(L^{\frac{2^*}{p}}\right)^*.$$

Ainda mais, podemos representar a função acima na forma integral, ou seja, $\varphi(F(u_m)) = \int h \cdot F(u_m)$ com $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Com isso, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u_m(x))dx \to \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx,$$

quando $m \to +\infty$. E com isso, concluímos que B é fracamente contínua.

Agora, precisamos mostrar que B é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ e $B_R \subset E$, existe, $\delta > 0$ tal que

$$| B(u+v) - B(u) - B'(u)v | < \varepsilon \| v \|,$$

para todo $u + v \in B_R$ com $\| v \| < \delta$. Primeiramente, observe que fazendo $\psi(t) := F(u + tv)$, temos $\psi'(t) = f(u + tv)v$. Pelo Teorema do Valor Médio existe alguma função $\theta(x)$, tal que $0 < \theta(x) < 1,\ q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^n$, e escrevendo $z = u + \theta v$, segue que

$$F(u+v) - F(u) = \psi(1) - \psi(0) = \frac{\psi(1) - \psi(0)}{1 - 0} = \psi'(\theta) = f(z)v,$$

$q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^n$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} | B(u+v) - B(u) - B'(u)v | &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x)[F\big(u(x) + v(x)\big) - F(u(x)) - f(u(x))v(x)]dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \mid f(z(x)) - f(u(x)) \mid \mid v(x) \mid dx \\ &\leq h_\infty^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (h(x))^{\frac{1}{2}} \mid f(z(x)) - f(u(x)) \mid \mid v(x) \mid dx. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Além disso, uma vez que $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, como $\dfrac{2^*}{p}$ é o expoente conjugado de q. Fazendo

$$\xi := h^{\frac{1}{2}}(\cdot)|f(z(\cdot)) - f(u(\cdot))|,$$

e aplicando a desigualdade de Hölder para q e $\dfrac{2^*}{p}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\ \xi\ |^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\ |\ f(z(x)) - f(u(x))\ |^2\, dx \\
&\leq \ \| \ h\ \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\ \ \| \ |f(z(x)) - f(u(x))|^2\ \|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \ \| \ h\ \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\ f(z(x)) - f(u(x))\ |^2)^{\frac{2^*}{p}} \right)^{\frac{1}{2\frac{2^*}{p}}} \right)^2 \\
&= \ \| \ h\ \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\ \ \| \ f(z(x)) - f(u(x))\ \|^2_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}\ .
\end{aligned}$$

Devido à Observação 4.2, como $2 < 2\frac{2^*}{p} < 2^*$ então $|\ f(u)\ |^{2\frac{2^*}{p}} \leq \kappa^{2\frac{2^*}{p}}\ |\ u\ |^{2\frac{2^*}{p}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\ \xi\ |^2\, dx < +\infty.$$

Agora, lembrando que $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, de (4.9) segue que

$$\begin{aligned}
|\ B(u+v) - B(u) - B'(u)v\ | &\leq \ h_\infty^{\frac{1}{2}}\ \|\ \xi\ \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\ v\ \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \ h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2\ \|\ \xi\ \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\ v\ \|\ . \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Note que por (4.10) é suficiente mostrar que dados $\varepsilon > 0$ e $B_R \subset E$, existe $\delta > 0$ tal que

$$h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2\ \|\ \xi\ \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon\ \ \forall\ u+v \in B_R \text{ e }\ \|\ v\ \| < \delta.$$

Para provar isso indiretamente, suponha que exista $\varepsilon_0 > 0$ e $B_{R_0} \subset E$ fixo, tal que para todo $\delta > 0$ é possível obter $u_\delta + v_\delta \in B_{R_0}$ com $\|\ v_\delta\ \| < \delta$ e $h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2\ \|\ \xi_\delta\ \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \varepsilon_0$, onde

$$\xi_\delta = h^{\frac{1}{2}}(\cdot)\ |\ f(z_\delta(\cdot)) - f(u_\delta(\cdot))\ | \quad \text{e} \quad z_\delta = u_\delta + \theta v_\delta.$$

Escolhendo $\delta_m = \frac{1}{m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m + v_m \in B_{R_0}$ tal que

$$\|\ v_m\ \| \leq \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2\ \|\ \xi_m\ \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \varepsilon_0.$$

Portanto, $v_m \to 0$ em E e $u_m \rightharpoonup u$ em E, passando a subsequências quando $m \to +\infty$. Além disso, $z_m \rightharpoonup u$ em E e $z_m(x) = u_m(x) \to u(x)$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$, passando a subsequências. Assim,

$$|\ f(z_m(x)) - f(u_m(x))\ |^2 \to 0,$$

$q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$, quando $m \to +\infty$. Ademais, (z_n) e (u_m) são limitadas em E e a imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$ vale, então

$$
\begin{aligned}
\||\, f(z_m) - f(u_m)\,|^2\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2^*}{p}} &= \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\, f(z_m) - f(u_m)\,|^2)^{\frac{2^*}{p}}\right)^{\frac{1}{\frac{2^*}{p}}}\right)^{\frac{2^*}{p}} \\
&= \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\, f(z_m) - f(u_m)\,|^{2\frac{2^*}{p}}\right)^{\frac{1}{2\frac{2^*}{p}}}\right)^{2\frac{2^*}{p}} \\
&= \|\, f(z_m) - f(u_m)\,\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\frac{2^*}{p}} \\
&\leq K_1\left(\|\, f(z_m)\,\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\frac{2^*}{p}} + \|\, f(u_m)\,\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\frac{2^*}{p}}\right) \\
&\leq K_1\kappa^{2\frac{2^*}{p}}\left(\|\, z_m\,\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\frac{2^*}{p}} + \|\, u_m\,\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\frac{2^*}{p}}\right) \\
&\leq K_1(K_2\kappa)^{2\frac{2^*}{p}}\left(\|\, z_m\,\|^{2\frac{2^*}{p}} + \|\, u_m\,\|^{2\frac{2^*}{p}}\right) \\
&\leq 2K_1(K_2\kappa R_0)^{2\frac{2^*}{p}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a sequência $(|\, f(z_m) - f(u_m)\,|^2)$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{p}}$. Aplicando novamente o Lema de Brezis-Lieb, temos $|\, f(z_m) - f(u_m)\,|^2 \rightharpoonup 0 \text{ em } L^{\frac{2^*}{p}}$ quando $m \to +\infty$. Como $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, que é o espaço dual de $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$, por convergência fraca, temos

$$\|\, \xi_m\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,|\, f(z_m(x)) - f(u_m(x))\,|^2\, dx \to 0$$

quando $m \to +\infty$, mas isso contradiz $h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2 \|\, \xi_m\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \varepsilon_0$, concluindo a prova.

□

4.3 Estrutura de Linking

Para provar (I_3), primeiramente vamos escolher $Q = \{re : r \in [0, r_1]\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2})$ e $S = \partial B_\rho \cap E$, onde $0 < \rho < r_1 < r_2$ são constantes, e também $e \in E_1$, tal que $\|\, e\,\| = 1$. Note que se a, que foi definido em (f_2), é tal que $a > a_0$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $a_\varepsilon := a - \varepsilon$, então temos que $a_0 < a_\varepsilon < a$. Além disso, pela definição de a_0 em (4.5), existe algum $e_0 \in E_1$ satisfazendo

$$a_0 \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e_0^2(x) dx \leq \|\, e_0\,\|^2 \leq a_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e_0^2(x) dx.$$

Agora, considerando $e = \dfrac{e_0}{\|\, e_0\,\|} \in E_1$, segue que

$$1 = \|\, e\,\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\, \nabla e(x)\,|^2 + V(x) e^2(x)\right) dx \leq a_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^2(x) dx. \tag{4.11}$$

Assim, vamos escolher nosso e para a estrutura de Q. Além disso, pelo Lema 2.1 S e ∂Q são *link*, onde ∂Q pode ser escrito como $\partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, com $Q_1 = \{0\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2})$,

$Q_2 = \{re : r \in [0, r_1]\} \oplus (E_2 \cap \partial B_{r_2})$ e $Q_3 = \{r_1 e\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2})$. No próximo lema mostraremos que I satisfaz $(I_3)(i) - (ii)$ do Teorema 2.1 para algum $\alpha > 0, \omega = 0$, e $v \in E_2$ arbitrário.

Lema 4.3. *Suponha que* $(V_1) - (V_2), (h_1) - (h_2)$ *e* $(f_1) - (f_2)$ *valham para* I*. Para* Q *e* S*, como acima, e para* $r_1 > 0$ *suficientemente grande, as desigualdades* $I\big|_S \geq \alpha > 0$ *e* $I\big|_{\partial Q} \leq 0$ *valem para algum* $\alpha > 0$*.*

Demonstração. Primeiramente, relembre que definimos $S = \partial B_\rho \cap E_1$, que por sua vez está contido em E_1, logo para todo $u_1 \in S$ temos

$$\begin{aligned} I(u_1) &= \frac{1}{2} \| u_1 \|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u_1(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - h_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\varepsilon}{2} \mid u_1 \mid^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \mid u_1(x) \mid^p \right) dx. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Note que, como vale a imersão $(u_n) \subset E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, para $2 \leq p \leq 2^*$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mid u_1(x) \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \| u_1 \| \Rightarrow -\int_{\mathbb{R}^n} \mid u_1(x) \mid^p \geq -C_p^p \| u_1 \|^p . \tag{4.13}$$

Combinando (4.12) e (4.13), segue que

$$\begin{aligned} I(u_1) &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - h_\infty \left(\frac{\varepsilon}{2} C_2^2 \| u_1 \|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} C_p^p \| u_1 \|^p \right) \\ &= \rho^2 \left(\frac{1}{2}(1 - \varepsilon h_\infty C_2^2) - \frac{C_\varepsilon}{p} h_\infty C_p^p \rho^{p-2} \right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Assim, se ε, ρ são suficientemente pequenos, $1 > \varepsilon h_\infty C_2^2$ e também

$$d_1 := \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_s h_\infty C_2^2) > \frac{C_\varepsilon}{p} h_\infty C_p^p \rho^{p-2} =: d_2,$$

portanto, considerando $\alpha = \rho^2(d_1 - d_2)$ de (4.14) temos

$$I(u_1) \geq \rho^2(d_1 - d_2) = \alpha > 0.$$

Para verificar $I \mid_{\partial Q} \leq 0 < \alpha$, precisamos considerar três casos:

Caso I. $u \in Q_1 \subset E_2$, assim temos

$$I(u) = -\frac{1}{2} \| u \|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u(x)) dx.$$

Mas (h_1) e (h_2) implicam que $h(x)F(u(x)) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e consequentemente $I(u) \leq 0$.

Caso II. $u \in Q_2$, assim $u = u_1 + u_2$, onde $u_1 = re$, com $0 \leq \| u_1 \| = r \leq r_1$ e $\| u_2 \| = r_2 > r_1$, portanto

$$I(u) = \frac{1}{2}(\| u_1 \|^2 - r_2^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u(x)) dx \leq \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2) < 0.$$

Caso III. $u \in Q_3$, assim $u = r_1 e + u_2$, onde $0 \leq \| u_2 \| \leq r_2$. Se $r_1 \leq \| u_2 \| \leq r_2$, então

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}(\| r_1 e \|^2 - \| u_2 \|^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\ &= \frac{1}{2}(r_1^2 - \| u_2 \|^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\ &\leq \frac{1}{2}(r_1^2 - r_1^2) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Se $0 \leq \| u_2 \| < r_1$, coloque $u_2 = r_1 v_2$, onde $v_2 \in B_1 \cap E_2$. Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}(\| r_1 e \|^2 - \| r_1 v_2 \|^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\ &= \frac{1}{2} r_1^2 (1 - \| v_2 \|^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\ &\leq \frac{1}{2} r_1^2 \left(1 - \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x) \frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2} dx \right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Observe que, como $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\dfrac{F(s)}{s^2}$ é limitado, então $\left| 2h(\cdot) \dfrac{F(r_1(e(\cdot)+v_2(\cdot)))}{r_1^2(e(\cdot)+v_2(\cdot))^2} \right| \leq h_\infty \kappa$. Além disso, note que $e, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. E com isso, temos

$$\left| 2h(\cdot) \frac{F(r_1(e(\cdot)+v_2(\cdot)))}{r_1^2} \right| \leq h_\infty \kappa \mid e(\cdot) + v_2(\cdot) \mid^2 \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

para todo $r_1 > 0$. Ainda mais, de (f_2) segue que

$$2h(x) \frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2} \to a h(x)(e(x)+v_2(x))^2$$

$q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$ quando $r_1 \to +\infty$. Pelo Teorema da Convergencia Dominada temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x) \frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2} \to a \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx,$$

quando $r_1 \to +\infty$, para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$ fixado.

Afirmação. O limite

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x) \frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2} dx = a \int_{\mathbb{R}^n} h(x)[e(x)+v_2(x)]^2 dx,$$

é uniforme para $v_2 \in B_1 \cap E_2$.

Para provar a afirmação é necessário mostrar que

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[a - 2 \frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2(e(x)+v_2(x))^2} \right] h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx = 0,$$

uniformemente em $v_2 \in B_1 \cap E_2$. Primeiramente, vamos definir para todo $m \in \mathbb{N}$, um funcional $J_m : B_1 \cap E_2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_m(v_2) := \int_{\mathbb{R}^n} \left[a - 2 \frac{F(m(e(x)+v_2(x)))}{m^2(e(x)+v_2(x))^2} \right] h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx.$$

Esse funcional é contínuo para todo $m \in \mathbb{N}$, pois está em função de F que é contínua. Pela equivalência das normas de H^1 e E, e de (f_2), segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq J_m(v_2) &\leq a \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} h(x)[e^2(x)+v_2^2(x)]dx \\ &\leq a h_\infty \left(\| e \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \| v_2 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq a h_\infty \left(\| e \|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \| v_2 \|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq a h_\infty C_2^2 \left(\| e \|^2 + \| v_2 \|^2 \right) \\ &\leq 2C_2^2 a h_\infty, \end{aligned}$$

para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$. Assim, lembrando que E_2 é de dimensão finita, então $B_1 \cap E_2$ deve ser compacto, e como J_m é contínua em $B_1 \cap E_2$, então deve atingir um valor máximo, que vamos denotar por $u_m \in B_1 \cap E_2$. Agora, considerando essa sequência de máximos (u_m), uma vez que $\| u_m \| \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, então a sequência é limitada. Usando novamente o fato de que E_2 é de dimensão finita tal sequência deve convergir, passando a subsequências, em $B_1 \cap E_2$, ou seja, $u_m \to u$ na norma de E. Ainda mais, para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$, para todo $m \in \mathbb{N}, 0 \leq J_m(v_2) \leq J_m(u_m)$ vale, que é

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[a - 2\frac{F(m(e(x)+v_2(x)))}{m^2(e(x)+v_2(x))^2} \right] h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx. \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[a - 2\frac{(Fm(e(x)+u_m(x)))}{m^2(e(x)+u_m(x))^2} \right] h(x)(e(x)+u_m(x))^2 dx. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Observe que $u_m(x) \to u(x)$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$ e pela hipótese de (f_2), temos

$$\left[a - 2\frac{F(m(e(x)+u_m(x)))}{m^2(e(x)+u_m(x))^2} \right] h(x)(e(x)+u_m(x))^2 \to 0,$$

$q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$ quando $m \to +\infty$. Mais que isso, como $u_m \to u$ em E, então $u_m \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e com isso existe $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $|u_m(x)|^2 \leq \psi(x)$ $q.t.p.$. Assim

$$0 \leq \left[a - 2\frac{F(m(e(\cdot)+u_m(\cdot)))}{m^2(e(\cdot)+u_m(\cdot))^2} \right] h(\cdot)(e(x)+u_m(\cdot))^2 \leq a h_\infty (e(\cdot)+\psi(\cdot))^2 \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Com isso, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, resultando em

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[a - 2\frac{F(m(e(x)+u_m(x)))}{m^2(e(x)+u_m(x))^2} \right] h(x)(e(x)+u_m(x))^2 \to 0.$$

Agora, aplicando em (4.16) o limite com $m \to +\infty$, e pelo Teorema do Confronto, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[a - 2\frac{(m(e(x)+v_2(x)))}{m^2(e(x)+v_2(x))^2} \right] h(x)(e(x)+v_2(x))^2 \to 0,$$

uniformemente para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$, e a alegação está provada.

Da convergência uniforme em $B_1 \cap E_2$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que, para todo $r_1 \geq r_0$

$$a\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\big(e(x)+v_2(x)\big)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2}dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx,$$

para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$. Logo

$$-\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2}dx \leq -(a-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx.$$

Assim, fazendo $a_\varepsilon = (a-\varepsilon)$, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2}dx < -\, a_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx.$$

Adicionando uma unidade em ambos os lados e multiplicando por $\frac{1}{2}r_1^2$, obtemos

$$\frac{1}{2}r_1^2\left(1-\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2}dx\right) < \frac{1}{2}r_1^2\left(1-a_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx\right) \tag{4.17}$$

Agora, observe que e e v_2 são ortogonais, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v_2(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e^2(x)+v^2(x))dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} h(x)e^2(x)dx.$$

Assim, de (4.17)

$$\frac{1}{2}r_1^2\left(1-\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v_2(x)))}{r_1^2}dx\right) < \frac{1}{2}r_1^2\left(1-a_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e^2(x)dx\right)$$

e substituindo em (4.15), obtemos

$$I(u) < \frac{1}{2}r_1^2\left(1-a_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} h(x)e^2(x)dx\right). \tag{4.18}$$

Portanto, de (4.11) e (4.18) segue que $I(u) < 0$, completando o terceito caso.

□

Para mostrar que I satisfaz (I_4) e encerrar a verificação das hipóteses do Teorema de Linking precisamos mostrar a limitação das sequências de Cerami de I.

4.4 Limitação das Sequências de Cerami

Agora, enunciaremos o Princípio de Compacidade de Lions e um lema que é uma de suas consequências.

Lema 4.4. *(P.L. Lions [18] , 1984) Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se uma sequência (u_m) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_m|^q \to 0, \quad m \to \infty,$$

então $u_m \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Veja [27, Lema 1.21, p.16]. Para uma demonstração mais detalhada (cf. [10, Lema 1.10, p. 23].)

□

Lema 4.5. *Se (v_m) é uma sequência limitada em E, então (v_m) satisfaz um dos seguintes casos:*

(i) *Vanishing: para todo $r > 0$,*

$$\limsup_{m \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} | v_m |^2 \, dx = 0.$$

(ii) *Nonvanishing: existem $r, \eta > 0$, e uma sequência $y_m \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\limsup_{m \to \infty} \int_{B_r(y_m)} | v_m |^2 \, dx > \eta.$$

Demonstração. Trabalharemos por exclusão, se o primeiro não for satisfeito, então o segundo deve valer. Inicialmente, vamos supor que exista $r > 0$ tal que

$$\limsup_{m \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B(y,r)} | v_m |^2 \, dx \neq 0.$$

Então, de acordo com as propriedades de $\limsup$, existe $M > 0$ tal que para todo $m \geq 1$ temos

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B(y,r)} | v_m |^2 \, dx \geq M.$$

Isso implica que uma sequência $y_m \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$M - \frac{1}{m} \leq \int_{B(y_m,r)} | v_m |^2 \, dx.$$

Tomando o $\limsup$ e considerando $\eta = \frac{M}{2} > 0$, obtemos

$$\eta = \frac{M}{2} < M \leq \limsup_{m \to \infty} \int_{B(y_m,r)} | v_m |^2 \, dx,$$

concluindo a demonstração.

□

Lema 4.6. *Suponha que $(V_1) - (V_2), (h_1) - (h_2)$ e $(f_1) - (f_3)$ valham para I e seja $(u_m) \subset E$ uma sequência de Cerami de I no nível $c \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então (u_m) é limitada.*

Demonstração. Vamos supor por contradição que $\| u_m \| \to +\infty$ quando $m \to +\infty$, passando a subsequências. Com isso, podemos definir $v_m := \dfrac{u_m}{\| u_m \|}$ de modo que (v_m) é uma sequência limitada em E. Então $v_m \rightharpoonup v$ quando $m \to +\infty$, passando a subsequências. Ainda usando o fato de que (v_m) é limitada então deve satisfazer um dos casos do lema anterior, *vanishing* ou *nonvanishing*. Nossa ideia é mostrar que nenhum dos dois casos pode ocorrer para (v_m), implicando numa contradição e portanto provando que (u_m) é limitada.

Inicialmente, vamos supor que o caso (ii) valha para (v_m), passando a subsequência,também consideremos uma sequência (y_m) dada por este mesmo caso. Como por hipótese (u_m) é uma sequência de Cerami, então dado $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, que definiremos por $\phi_m(x) := \phi(x - y_m)$, temos

$$\| \phi_m \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \| \phi \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Além disso, pela equivalência das normas existem constantes c_1, c_2 tal que

$$\| w \|_E \leq c_1 \| w \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \| w \|_E, \quad \forall w \in E. \tag{4.19}$$

Assim, por (4.19) segue que

$$\begin{aligned}
| I'(u_m)\phi_m | &\leq \| I'(u_m) \|_{E^*} \| \phi_m \|_E \\
&\leq c_1 \| I'(u_m) \|_{E^*} \| \phi \|_{H^1(\mathbb{R}^m)} \\
&\leq c_2 \| I'(u_m) \| \| \phi \|_E \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

com $m \to +\infty$. Sendo $\| u_m \| \to +\infty$, podemos definir

$$\Omega_m := \{x \in \mathbb{R}^n : | u_m(x) | \neq 0\},$$

tal que a medida de Lebesgue é $\mu(\Omega_m) > 0$. Relembre que pela seção dos funcionais diferenciáveis em 1.4, temos

$$\varphi'(u)h = 2\langle u, h \rangle,$$

onde $\varphi(u) = \| u \|^2$. Além disso, também temos

$$\langle \psi'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\phi \, dx,$$

com $\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F(u)\, dx$ e $F(s) = \int_0^s f(t)\, dt$. Assim, fazendo $v_m = v_m^+ + v_m^- + v_m^0$, onde $v_m^j \in E^j$, com $j = +, -, 0$, e usando nosso funcional como em (4.4), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\| u_m \|} I'(u_m)\phi_m &= \frac{1}{\| u_m \|} \left[\frac{1}{2} \Big(2\langle u_m^+, \phi_m \rangle - 2\langle u_m^-, \phi_m \rangle \Big) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(u_m(x))\phi_m(x) dx \right] \\
&= \left\langle \frac{u_m^+}{\| u_m \|}, \phi_m \right\rangle - \left\langle \frac{u_m^-}{\| u_m \|}, \phi_m \right\rangle - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \frac{f(u_m(x))}{\| u_m \|} \phi_m(x) dx \\
&= \langle v_m^+ - v_m^-, \phi_m \rangle - \int_{\Omega_m} h(x) \frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} v_m(x)\phi_m(x) dx
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Desenvolvendo (4.20) e usando a definição de ϕ, encontramos

$$
\begin{aligned}
o_m(1) &= \frac{1}{\| u_m \|} I'(u_m)\phi_m \\
&= \langle v_m^+, \phi_m \rangle - \langle v_m^-, \phi_m \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} v_m(x)\phi_m(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla v_m^+(x) \nabla \phi(x - y_m) + v_m^+(x) V(x) \phi(x - y_m) \Big) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla v_m^-(x) \nabla \phi(x - y_m) + v_m^-(x) V(x) \phi(x - y_m) \Big) dx, \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} v_m(x) \phi(x - y_m) dx. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Definindo $\tilde{v}_m(x) = v_m(x + y_m)$ e $\tilde{u}_m(x) = u_m(x + y_m)$, observe que $(\tilde{v}_m)$ é limitada em E. De fato, como (v_m) é limitada e a translação é invarinte na norma de $H^1(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\| \tilde{v}_m \|_E \leq c_1 \| \tilde{v}_m \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = c_1 \|\| v_m \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \| v_m \|_E = c_2.$$

Portanto, passando a subsequências,

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v} = \tilde{v}^+ + \tilde{v}^- + \tilde{v}^0 \quad &\text{em} \quad E = E^+ + E^- + E^0, \\
\tilde{v}_m \to \tilde{v} \quad &\text{em} \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}^n). \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Fazendo uma mudança de variáveis e usando nossas últimas definições em (4.21), obtemos

$$
\begin{aligned}
o_m(1) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla \tilde{v}_m^+(x) \nabla \phi(x) + \tilde{v}_m^+(x) V(x - y_m) \phi(x) \Big) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla v_m^-(x) \nabla \phi(x) + \tilde{v}_m^-(x) V(x - y_m) \phi(x) \Big) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} h(x - y_m) \frac{f(\tilde{u}_m(x))}{\tilde{u}_m(x)} \tilde{v}_m(x) \phi(x) dx. \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Agora vamos considerar dois casos:

Caso 1. Quando $| y_m | \to +\infty$. Vamos denotar por $K = supp(\phi)$ o suporte de ϕ. Como já visto na Observação 4.2, $| f(s) | \leq \kappa | s |$ para todo $s \in \mathbb{R}$, em decorrência de (4.22) deve existir $\zeta \in L^1(K)$ tal que

$$| \tilde{v}_m(x) | \leq \zeta(x) \;\; q.t.p. \text{ em } K.$$

Com isso, segue que

$$\left| h(\cdot + y_m) \frac{f(\tilde{u}_m(\cdot))}{\tilde{u}_m(\cdot)} \tilde{v}_m(\cdot) \phi(\cdot) \right| \leq h_\infty \kappa \zeta(\cdot) \phi(\cdot) \in L^1(K).$$

Por outro lado, $\tilde{v}_m(x) \to \tilde{v}(x)$ $q.t.p.$ em K, e por (h_1), $h(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, então

$$\left| h(x + y_m) \frac{f(\tilde{u}_m(x))}{\tilde{u}_m(x)} \tilde{v}_m(x) \phi(\cdot) \right| \leq \kappa |\tilde{v}_m(x) \phi(x)| \, |h(x + y_m)| \to 0,$$

$q.t.p.$ em K quando $m \to +\infty$. Com isso, podemos aplicar o Teorema da Convergencia Dominada, e obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x+y_m)\frac{f(\tilde{u}_m(x))}{\tilde{u}_m(x)}\tilde{v}_m(x)\phi(x)dx = \int_K h(x+y_m)\frac{f(\tilde{u}_m(x))}{\tilde{u}_m(x)}\tilde{v}_m(x)\phi(x)dx \to 0, \quad (4.24)$$

quando $m \to +\infty$. Ainda mais, por (V_1) temos que $V(x+y_m) \to V_\infty$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$ quando $m \to +\infty$. Dessa forma, por (4.23) e (4.24) temos

$$\begin{aligned} o_m(1) &= \int_K \Big(\nabla\tilde{v}_m^+(x)\nabla\phi(x) + (V_\infty + o_m(1))\tilde{v}_m^+(x)\phi(x)\Big)dx \\ &+ \int_K \Big(\nabla\tilde{v}_m^-(x)\nabla\phi(x) + (V_\infty + o_m(1))\tilde{v}_m^-(x)\phi(x)\Big)dx. \end{aligned}$$

Tomando $m \to +\infty$, para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, segue que

$$\int_K \Big(\nabla(\tilde{v}^+ + \tilde{v}^-)\nabla\phi(x) + V_\infty\big(\tilde{v}^+(x) + \tilde{v}^-\phi(x)\big)\Big)dx = 0.$$

Dessa forma, lembrando da definição de solução fraca vemos que $w = \tilde{v}^+ + \tilde{v}^-$ satisfaz essa condição para o problema $-\Delta w(x) + V_\infty w(x) = 0$ em $\mathbb{R}^n$. No entanto o operador Laplaciano não possui autofunções no espaço $H^1(\mathbb{R}^n)$, implicando que $w = 0$. Então, devemos ter $\tilde{v} = \tilde{v}^0 \in E^0$. Mas se $E^0 = \{0\}$, então $\tilde{v} = 0$ e temos uma contradição. De fato, por (ii) e (4.22) segue que

$$\int_{B_r(0)} |\tilde{v}(x)|^2dx = \limsup_{m\to+\infty}\int_{B_r(0)} |\tilde{v}_m(x)|^2dx = \limsup_{m\to+\infty}\int_{B_r(y_m)} |\tilde{v}_m(x)|^2dx > \varrho > 0.$$

Agora, caso E^0 não seja trivial, como $\| v_m^0 \| = \| \tilde{v}_m^0 \| \leq 1$ e lembrando que E^0 é de dimensão finita, isso implica que $v_m^0 \to v^0$ em E, passando a subsequências, com $\| v_m^0 \| = \| \tilde{v}_m^0 \| \neq 0$. Portanto

$$\begin{aligned} o_m(1) &= \frac{1}{\| u_m \|}I'(u_m)v^0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla v_m^+(x)\nabla v^0(x) + v_m^+(x)V(x)v^0(x)\Big)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla v_m^-(x)\nabla v^0(x) + v_m^-(x)V(x)v^0(x)\Big)dx \\ &- \int_{\Omega_m} h(x)\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)}v_m(x)v^0(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)}v_m^0(x)v^0(x)dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como $h(x)\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)}v_m^0(x)v^0(x) \to ah(x)(v^0(x))^2$ $q.t.p.$ em $supp(v^0)$ quando $m \to +\infty$, pelos mesmos argumentos feitos anteriormente, aplicando o Teorema da Convergencia Dominada em (4.25), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} ah(x)(v^0(x))^2dx = 0,$$

como $a > 0$ e $h(x) \in (0, +\infty)$ então devemos ter $v^0 = 0$ mas isso é uma contradição. Portanto (ii) não pode ocorrer.

Caso 2. Se (y_m) é limitada. Novamente por (4.19), segue que

$$\| \tilde{u}_m \| \geq \frac{c_1}{c_2} \| \tilde{u}_m \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{c_1}{c_2} \| u_m \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{1}{c_2} \| u_m \|,$$

então como por hipótese $\| u_m \| \to +\infty$ temos $\| \tilde{u}_m \| \to +\infty$ quando $m \to +\infty$. Além disso, como $\tilde{v} \not\equiv 0$ em $B_r(0)$ então existe $\Omega \subset B_r(0)$, tal que a medida de Lebesgue é $\mu(\Omega) > 0$ e

$$0 \neq |\tilde{v}(x)| = \lim_{m\to+\infty} |\tilde{v}_m(x)| = \lim_{m\to+\infty} \frac{|\tilde{u}_m(x)|}{\| \tilde{u}_m \|},$$

$q.t.p.$ em Ω, . Uma vez que $\| \tilde{u}_m \| \to +\infty$, segue que $|\tilde{u}_m(x)| \to +\infty$ $q.t.p$ em Ω. Como $\Omega \subset B_r(0)$ e $h > 0$ em $\overline{B_r(0)}$, obtemos

$$0 < h_0 = \inf_{x\in\overline{B_r(0)}} \{h(x)\},$$

então pelo Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned}
&\liminf_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \left[\frac{1}{2} f(u_m(x))u_m(x) - F(u_m(x))\right] dx \\
&= \liminf_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h(x+y_m) \left[\frac{1}{2} f(\tilde{u}_m(x))\tilde{u}_m(x) - F(\tilde{u}_m(x))\right] dx \\
&\geq h_0 \int_{\Omega} \liminf_{m\to+\infty} \left[\frac{1}{2} f(\tilde{u}_m(x))\tilde{u}_m(x) - F(\tilde{u}_m(x))\right] dx. \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Pois, por (f_3), $Q(s) \to +\infty$ quando $| s | \to +\infty$. Mas isso é uma contradição. De fato, observe primeiramente que $\langle u_m^+ - u_m^-, u_m \rangle = \| u_m^+ \|^2 - \| u_m^- \|^2$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \left[\frac{1}{2} f(u_n(x))u_m(x) \right. &- \left. F(u_m(x))\right] dx \\
&= \frac{1}{2}(\| u_m^+ \|^2 - \| u_m^- \|^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u_m(x))dx \\
&- \frac{1}{2}\langle u_m^+ - u_m^-, u_m \rangle + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(u_m(x))dx \\
&= I(u_m) - \frac{1}{2} I'(u_m)u_m \\
&= c + o_m(1).
\end{aligned}$$

Portanto, (ii) não pode ocorrer no Caso 2. E com isso, non-vanishing não vale para (v_m).

Por outro lado, vamos supor que o caso vanishing valha para (v_m), passando a subsequências. Por hipótese (u_m) é uma sequência de Cerami então por definição devemos ter $I'(u_m)u_m^+ \to 0$ e $I'(u_m)u_m^- \to 0$ quando $m \to +\infty$. Portanto,

$$o_m(1) = \frac{I'(u_m)u_m^+}{\| u_m \|^2} = \frac{1}{\| u_m \|} I'(u_m)v_m^+ = \| v_m^+ \|^2 - \int_{\Omega_m} h(x) \left[\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} v_m(x)v_m^+(x)\right] dx$$

e

$$o_m(1) = \frac{I'(u_m)u_m^-}{\| u_m \|^2} = \frac{1}{\| u_m \|} I'(u_m)v_m^- = -\| v_m^- \|^2 - \int_{\Omega_m} h(x) \left[\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} v_m(x)v_m^-(x)\right] dx.$$

Subtraindo as equações acima, e observando que $\| v_m \|= 1$ e que os v_m^j, com $j \in \{+,-,0\}$, são ortogonais, obtemos

$$\begin{aligned} o_m(1) &= \| v_m^+ \|^2 + \| v_m^- \|^2 - \int_{\Omega_m} h(x) \left[\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} v_m(x) \left(v_m^+(x) - v_m^-(x) \right) \right] dx \\ &= 1 - \| v_m^0 \|^2 - \int_{\Omega_m} h(x) \left[\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} \left(v_m^{2,+}(x) - v_m^{2,-}(x) \right) \right] dx \end{aligned}$$

Então, tomando o limite com $m \to +\infty$, temos

$$\int_{\Omega_m} h(x) \left[\frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} \left(v_m^{2,+}(x) - v_m^{2,-}(x) \right) \right] dx \to 1 - \| v^0 \|^2 . \tag{4.26}$$

Contudo, relembre que $\left| \dfrac{f(s)}{s} \right| \leq \kappa$, para todo $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ e uma vez que $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $q = \dfrac{2^*}{2^* - p}$ e $2 < p < 2^*$, da desigualdade de Hölder para q e $q' = \dfrac{2^*}{p}$ e da desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_m} h(x) \frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} \left(v_m^{2,+}(x) - v_m^{2,-}(x) \right) dx \right| &\leq \kappa \| h \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \| v_m^{2,+} - v_m^{2,-} \|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \kappa \| h \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \left[\| v_m^{2,+} \|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} + \| v_m^{2,-} \|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \right] \\ &= \kappa \| h \|_q \left[\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_m^+|^{2\frac{2^*}{p}} dx \right)^{\frac{1}{2\frac{2^*}{p}}} \right)^2 + \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_m^+|^{2\frac{2^*}{p}} dx \right)^{\frac{1}{2\frac{2^*}{p}}} \right)^2 \right] \\ &= \kappa \| h \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \left[\| v_m^+ \|^2_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} + \| v_m^- \|^2_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \right]. \end{aligned}$$

Mas, como $2 < 2\dfrac{2^*}{p} < 2^*$, então pelo Lema 4.4, para $j \in \{+,-\}$, com $m \to +\infty$, temos

$$\| v_m^j \|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq \| v_m \|_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

implicando que

$$\left| \int_{\Omega_m} h(x) \frac{f(u_m(x))}{u_m(x)} \left(v_m^{2,+}(x) - v_m^{2,-}(x) \right) dx \right| \to 0. \tag{4.27}$$

Portanto, combinando (4.26) e (4.27), obtemos $\| v^0 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| v^0 \|^2 = 1$ que contradiz a condição vanishing. Com isso, (i) não pode ocorrer para (v_m) e isso completa a prova.

□

Para verificar a hipótese (I_4), vamos fixar $b > 0$ e pegar (u_m) de tal forma que $I(u_m) \subset [c-b, c+b]$ e $\|I'(u_m)\|(1 + \| u_m \|) \to 0$ quando $m \to +\infty$. Suponha que (u_m) não seja limitada e pegue $(u_{m_k}) \subset (u_m)$ tal que $\| u_{m_k} \| \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Vendo que $I(u_{m_k}) \subset [c-b, c+b]$ é limitada em $\mathbb{R}$, isso implica que $I(u_{m_k}) \to d$, passando a subsequências, Então, (u_{m_k}) é uma sequência de Cerami no nível d, passando à subsequências, logo pelo Lema 4.6, (u_{m_k}) é limitada, passando a subsequências. Contudo, temos uma contradição, sendo que $\| u_{m_k} \| \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Portanto, (u_m) deve ser limitada.

Agora, estamos prontos para provar o Teorema 4.1.

Demonstração do Teorema 4.1. Como já mostramos que I satisfaz todas as condições $(I_1) - (I_4)$ do Teorema 2.1, então podemos aplicá-lo para I. O Teorema de Linking nos fornece um $c \geq \alpha > \omega = 0$, que é valor crítico de I. Portanto, deve existir $u \in E$ de tal forma que

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx = c > 0,$$

e

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(u)v\ dx = 0.$$

Portanto, $u \neq 0$, uma vez que $I(u) > 0$. Como $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, segue que u deve ser uma solução fraca não trivial para (P) em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Referências

[1] O. B. de Almeida. Teoria do grau e aplicações. Dissertação de mestrado, (UFCG), 2006.

[2] A. Azzollini and A. Pomponio. On the schrödinger equation in $\mathbb{R}^n$ under the effect of a general nonlinear term. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 1361–1378, 2009.

[3] P. Bartolo, V. Benci, and D. Fortunato. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity. *Nonlinear analysis: Theory, methods & applications*, 7(9):981–1012, 1983.

[4] V. Benci and P. H. Rabinowitz. Critical point theorems for indefinite functionals. *Inventiones mathematicae*, 52(3):241–273, 1979.

[5] H. Berestycki and P. L. Lions. Nonlinear scalar field equations, i existence of a ground state. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82:313–345, 1983.

[6] F. A. Berezin and M. A. Shubin. *The Schrödinger Equation*, volume 66. Kluwer Academic Publisher, 1991.

[7] G. Botelho, D. Pellegrino, and E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, 2012.

[8] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, volume 2. Springer, 2011.

[9] H. Brézis and E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88(3):486–490, 1983.

[10] M. B. Cardoso. Equações elípticas assintoticamente lineares com potencial que muda de sinal. Dissertação de mestrado, (UFAM), Manaus, 2020.

[11] A. Castro. *Curso de Teoria da Medida, 2a. edição*. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 2008.

[12] G. Cerami. Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate. *Rend. Instituto Lombardo Sci. Lett.*, 112:332–336, 1978.

[13] D. G. Costa and C. A. Magalhaes. A unified approach to a class of strongly indefinite functionals. *Journal of Differential Equations*, 125(2):521–547, 1996.

[14] D. G Costa and H. Tehrani. Existence and multiplicity results for a class of schrodinger equations with indefinite nonlinearities. *Advances in Differential Equations*, 8(11):1319–1340, 2003.

[15] Y. V. Egorov and V. A. Kondratiev. *On Spectral Theory of Elliptic Operators*, volume 89. Birkhäuser, 1996.

[16] L. C Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2010.

[17] G. Li and C. Wang. The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic problem of linking type without the ambrosetti-rabinowitz condition. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 36(2):461–480, 2011.

[18] P.L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, volume 1, pages 109–145. Elsevier, 1984.

[19] L. A. Maia and M. Soares. An abstract linking theorem applied to indefinite problems via spectral properties. *Advanced Nonlinear Studies*, 19(3):545–567, 2019.

[20] L. de A. Maia, J. C. Oliveira Junior, and R. Ruviaro. A non-periodic and asymptotically linear indefinite variational problem in $\mathbb{R}^n$. *Indiana University Mathematics Journal*, 66:31–54, 2017.

[21] J. C. de Oliveira Junior. *Equações elípticas semilineares e quasilineares com potenciais que mudam de sinal*. Tese de doutorado, (UnB), 2015.

[22] A. Pankov. Periodic nonlinear schrödinger equation with application to photonic crystals. *Milan Journal of Mathematics*, 73:259–287, 2005.

[23] A. Pankov. *Introduction to Spectral Theory of Schrödinger Operators*. Nova Science Publishers, 2007.

[24] M. Spivak. *Calculus on Manifolds: a Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. CRC press, 2018.

[25] C. A. Stuart. *An Introduction to Elliptic Equations on $\mathbb{R}^n$*. Trieste Notes, 1998.

[26] A. Szulkin and T. Weth. Ground state solutions for some indefinite variational problems. *Journal of Functional Analysis*, 257(12):3802–3822, 2009.

[27] M. Willem. *Minimax theorems*, volume 24. Springer Science & Business Media, 1997.