Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma teoria de dualidade para o problema de equilíbrio

Roberta Luzia Soares de Souza

Manaus - AM
2023

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma teoria de dualidade para o problema de equilíbrio

por

Roberta Luzia Soares de Souza

sob a orientação da

Profª. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

Manaus - AM
2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S729t Souza , Roberta Luzia Soares de
Uma teoria de dualidade para o problema de equilíbrio / Roberta Luzia Soares de Souza . 2023
51 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Problema de equilíbrio . 2. Dualidade . 3. Análise convexa . 4. Função conjugada . I. Jacinto, Flávia Morgana de Oliveira. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Uma teoria de dualidade para o problema de equilíbrio

Roberta Luzia Soares de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto – UFAM

(Orientadora)

Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva – UFAM

(Examinador Interno)

Profa. Dra. Sissy da Silva Souza - UFDPar

(Examinadora Externa)

Agradecimentos

Primeiramente, obrigada meu Deus por ter me deixado concluir mais uma etapa da minha vida. Dedico essa conquista a minha família, por estarem incondicionalmente ao meu lado, em especial a minha mãe Neide Soares (essa vitória é por você e para você), aos meus sogros Aldenize Coelho e Evandro Medeiros, minhas irmãs Brenda Soares, Pauline Soares, Carla Maria Coelho, e aos meus sobrinhos João Vinícius e Juam Joseph por todo o apoio e incentivo. Ao meu companheiro Endreo Medeiros por sempre acreditar em mim.

Agradeço aos meus amigos antigos e os que ganhei no decorrer dessa jornada, cito aqui alguns deles, Franciele Santos, Jordana Moraes, Dainara Souza, Felipe André, Daniel Reis, Alex Matiello, Paulo Vieira, Daniel Oliveira obrigada pelo carinho e amizade. A Roseane Souza e a Wanessa Ferreira obrigada por todas as risadas, os estudos e aos momentos inesquecíveis que ficaram em minha memória.

Agradeço ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas pelos ensinamentos e pelo conhecimento compartilhado. Em especial, a minha orientadora professora Dra. Flávia Morgana que sempre foi compreensiva, me ajudou em cada etapa dessa jornada desde da qualificação à conclusão desse trabalho. Ao professor Dr. Moacir Aloisio por ter incetivado e por acreditado no meu pontecial.

Agradeço a Coordenação de Aporfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro que foi primordia para me manter focada e concluir este trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma teoria de dualidade para o problema de equilíbrio (PE) baseada no conceito de funções conjugadas. Desse modo, foram abordados alguns elementos da teoria de análise convexa, principalmente, o conceito de conjugação que fundamenta os resultados apresentados. Além disso, mostramos que a formulação (PE) inclui, por exemplo, como caso particular o problema de equilíbrio clássico estudado por Blum e Oettli e o problema de equilíbrio estudado por Flores-Bazán. Também, mostramos alguns problemas que podem ser escritos sob a formulação (PE), como por exemplo, o problema de otimização convexa, o problema do ponto fixo, a desigualdade variacional estudada por Mosco e a desigualdade quasevariacional generalizada estudada por Morgan e Romaniello. Aplicamos a teoria de dualidade de (PE) para esses problemas e no caso da aplicação do esquema dual de (PE) associado ao problema de otimização convexa obtemos o dual Lagrangiano clássico.

Palavras-chave: Problema de equilíbrio, dualidade, análise convexa, função conjugada.

Abstract

In this paper, we present a theory of duality for the equilibrium problem (PE) based on the concept of conjugated functions. Thus, some elements of convex analysis theory were addressed, mainly the concept of conjugation that underlies the results presented. In addition, we show that the formulation (PE) includes, for example, as a particular case the problem of classical equilibrium studied by Blum and Oettli and the equilibrium problem studied by Flores-Bazán. Also, we show some problems that can be written under the formulation (PE), such as the convex optimization problem, the problem of fixed point, the variational inequality studied by Mosco and the generalized quasi-variational inequality studied by Morgan and Romaniello. We apply the duality theory of (PE) to these problems and in the case of applying the dual scheme of (PE) associated with the convex optimization problem we obtain the classical Lagrangian dual.

Keywords: Equilibrium problem, duality, convex analysis, conjugate function.

Sumário

Lista de Símbolos

A seguir, listamos algumas notacões utilizadas neste trabalho.

$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto de interno do $\mathbb{R}^n$.
δ_A	Função indicadora do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
$dom f$	Domínio efetivo da função f.
$epi(f)$	Epígrafo da função f.
$\partial f(y)$	Subdiferencial da função f em y.
f^*	Função conjugada da função f.
δ_A^*	Função suporte do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
$G : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	Operador ponto-conjunto do $\mathbb{R}^n$ no conjunto das partes do $\mathbb{R}^n$.

Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de equilíbrio:

$$(\text{PE}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio e $f, \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ são bifunções estendidas que satisfazem as seguintes condições:
a) $f(x, x) \leq 0 \; \forall \; x \in D$ (generaliza a condição de equilíbrio clássica);
b) $dom f(x, \cdot) \cap dom \varphi(x, \cdot) \neq \emptyset \; \forall \; x \in D$ (garante valores finitos da função $f(x, \cdot) + \varphi(x, \cdot)$).

Baseando-se nos estudos de problema de equilíbrio, temos que a formulação (PE) é bem definida e se torna interessante, pois na condição (a) temos o contexto usado em problemas de equilíbrio que estão presentes na literatura, por exemplo em [[1], [4],[6]]. Já com a condição (b) evitamos o que denominamos de soluções triviais para o problema (PE). De fato, se $\bar{x} \in D$ é tal que

$$f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) = +\infty \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$$

então $\bar{x}$ resolve (PE) trivialmente. Além disso, a condição b) é uma das hipóteses usadas por Flores-Bazán [4] para os casos particulares quando $\varphi \equiv 0$.

Destacamos que o principal foco nesse trabalho é apresentar uma teoria de dualidade para (PE) baseado no esquema dual proposto no artigo de Jacinto e Scheimberg [6] para um Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG) que consiste em:

$$(\text{PEG}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X. \end{cases}$$

onde $D \subset X$ é um conjunto não vazio, X é espaço vetorial real topológico de Hausdorf,

$f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e $h : X \to (-\infty, +\infty]$ são bifunções estendidas que satisfazem as seguintes condições:

a) $f(x,x) \leq 0 \; \forall \; x \in D$;

b) $domf(x,\cdot) \cap dom\varphi(x,\cdot) \cap domh \neq \emptyset \; \forall \; x \in D$;

c) h é convexa.

Podemos notar que (PE) é seu caso particular de (PEG) quando $X = \mathbb{R}^n$. O esquema dual em [6] utiliza-se de conceitos de função conjugada e preserva algumas características duais clássicas.

No *Capítulo* 1, estudamos alguns elementos da Análise Convexa, abordamos a definição de funções estendidas e, em seguida, apresentamos definições e algumas propriedades da conjugação em Análise Convexa. Esses tópicos são de extrema importância para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho.

No *Capítulo* 2, mostramos que a formulação (PE) inclui, por exemplo, como caso particularo problema de equilíbrio clássico estudado por Blum e Oettli [1] e o problema de equilíbrio estudado por Flores-Bazán [4]. Também, apresentamos alguns exemplos de problemas que podem ser escritos sobre a formulação (PE), como o problema de Otimização Convexa, o problema do Ponto fixo e as Desigualdades Variacional e Quasevariacional Generalizada. Em seguida, introduzimos um esquema dual para (PE), trazendo algumas características duais clássicas e as condições de otimalidade para a existência de soluções primais-duais.

No *Capítulo* 3, apresentamos a aplicação da teoria de dualidade de (PE) para a Desigualdade Variacional e Desigualdade Quasevariacional Generalizada, a seguir, encontramos a função primal-dual associada à formulação (PE) para o problema do Ponto Fixo. Para finalizar, encontramos a função primal-dual associada à formulação (PE) para o problema de Otimização Convexa, que em seu caso, fornece o dual Lagrangiano Clássico.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo desenvolvemos a teoria básica que nos auxilia na produção dos principais resultados apresentados neste trabalho.

1.1 Elementos da Análise Convexa

Nesta seção introduzimos alguns elementos da Teoria da Análise Convexa que servem como ferramenta no desenvolvimento das demonstrações dos resultados obtidos neste trabalho.

Definição 1.1. ([10], Cap. 3, pág.36) **Conjunto Convexo**. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando para quaisquer $x, y \in C$ e $\lambda \in [0,1]$ tem-se que, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Na figura abaixo, ilustramos um conjunto convexo e não convexo.

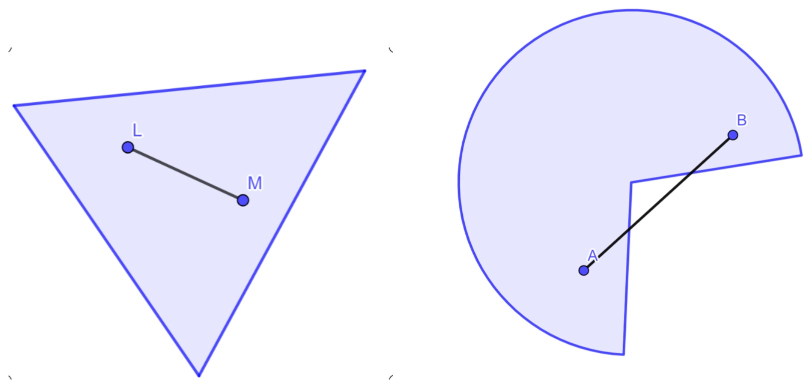


Figura 1.1 Conjunto convexo e não convexo

Exemplo 1.1. Os pontos, os segmentos de reta e os subespaços vetoriais são conjuntos convexos no $\mathbb{R}^n$. Bem como, o próprio $\mathbb{R}^n$ e o conjunto vazio $\emptyset$.

Exemplo 1.2. As bolas abertas e fechadas são conjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$. De fato, considere a bola fechada $B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x-a|| \leq r\}$ com qualquer norma em $\mathbb{R}^n$. Dados $x, y \in B[a,r]$ e $\lambda \in [0,1]$ note que,

$$|| \ [\lambda x + (1-\lambda)y] - a|| = ||\lambda x + (1-\lambda)y - [\lambda a + (1-\lambda)a] \ || \leq \lambda||x-a|| + (1-\lambda)||y-a|| \leq r.$$

Assim $\lambda x + (1-\lambda)y \in B[a,r]$ para todo $x, y \in B[a,r]$ e $\lambda \in [0,1]$. Logo, o conjunto $B[a,r]$ é convexo. De modo análogo, se obtém que $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x-a|| < r\}$ também é convexo.

Abaixo mostramos que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Proposição 1.1. ([5], Cap. 3, pág. 70) Sejam $C_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, conjuntos convexos, onde I é um conjunto qualquer (possivelmente infinito). Então, a interseção $C = \cap_{i \in I} C_i$ também é um conjunto convexo.

Demonstração. Sejam $x, y \in C$. Pela definição da interseção, $x, y \in C_i$ para todo $i \in I$. Como os C_i, $i \in I$, são convexos logo, $\lambda x + (1-\lambda)y \ \in C_i$ para qualquer $\lambda \in [0,1]$ e todo $i \in I$. Assim, pela definição da interseção, $\lambda x + (1-\lambda)y \ \in C$, ou seja, C é convexo. $\square$

A seguir, definimos quando uma função é dita convexa.

Definição 1.2. ([10], Cap. 3, pág. 40) **Função Convexa**. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio convexo. Dizemos que $f : C \to \mathbb{R}$ é uma função convexa em C quando para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0,1]$ tem-se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1.1}$$

A função f é dita estritamente convexa quando vale a desigualdade estrita em (1.1) para quaisquer $x \neq y$ em C.

Exemplo 1.3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é convexa sobre $\mathbb{R}$. De fato, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0,1]$ vale,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = (y + \lambda(x-y))^2 = y^2 + 2y\lambda(x-y) + \lambda^2(x-y)^2 \leq$$
$$y^2 + 2y\lambda(x-y) + \lambda(x-y)^2 = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Abaixo definimos o epígrafo de uma função e, em seguida, trazemos um teorema que evidencia a relação da convexidade de conjuntos e de funções.

Definição 1.3. ([5], Cap. 3, pág. 66) O **epígrafo** da função $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o conjunto,

$$epi(f) := \{(x, r) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Teorema 1.2. *([5], Cap. 3, pág. 67) Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa em C se, e somente se, $epi(f)$ é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Como f é convexa em C temos por definição que dados $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$ temos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{1.2}$$

Agora, sejam $(x, r_1), (y, r_2) \in epi(f)$. Como $f(x) \leq r_1$ e $f(y) \leq r_2$, então em (1.2) fica

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda r_1 + (1 - \lambda)r_2.$$

Observe que, $\lambda(x, r_1) + (1 - \lambda)(y, r_2) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda r_1 + (1 - \lambda)r_2) \in epi(f)$ logo, $epi(f)$ é convexo.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que o $epi(f)$ é convexo. Sejam $x, y \in C$ quaisquer, é evidente que $(x, f(x)), (y, f(y)) \in epi(f)$. Agora, pela convexidade do $epi(f)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$ temos que

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) = \lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(y, f(y)) \in epi(f)$$

Pela definição do $epi(f)$, isto é equivalente a dizer que $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ logo, f é convexa. $\square$

A seguir, apresentamos a caracterização do subgradiente de uma função convexa.

Definição 1.4. ([12], Cap. 5, pág. 73) **O subgradiente de uma função convexa**. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa. Dizemos que $\xi \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente de f no ponto $y \in \mathbb{R}^n$ se

$$f(z) \geq f(y) + \langle z - y, \xi\rangle \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto de todos os subgradientes de uma função f em y chama-se **Subdiferencial de f em y** e denota-se por

$$\partial f(y) := \{\xi \in \mathbb{R}^n; f(z) \geq f(y) + \langle z - y, \xi\rangle \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Abaixo apresentamos um teorema sobre uma das propriedades do sudiferencial de uma função convexa.

Teorema 1.3. *[2] Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, o conjunto $\partial f(y)$ é convexo e compacto para todo $y \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver a demonstração em [2] no Capítulo 1, página 19. □

A seguir, abordamos como as funções convexas são especiais em Otimização.

Teorema 1.4. *[5]* ***Teorema de minimização convexa****. Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa em C. Então, todo minimizador local é global. Se f é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.*

Demonstração. Ver a demonstração em [5] no Capítulo 3, página 68. □

Teorema 1.5. *([5], Cap. 3, pág. 157)* ***Condição de otimalidade para minimização de uma função convexa num conjunto convexo****. Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa em C. Então, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é um minimizador de f em C se, e somente se, $0 \in \partial f(\bar{x})$.*

Demonstração. Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um minimizador de f em C se, e somente se, para todo $x \in C$ temos,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \langle x - \bar{x}, 0 \rangle$$

logo, $0 \in \partial f(\bar{x})$. □

No exemplo abaixo ilustramos a aplicação do Teorema (1.5) .

Exemplo 1.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Encontramos o subdiferencial da f em x.

Observe que $\bar{x} = 0$ é o (único) minimizador (global) e que por definição o subdiferencial de f em x é,

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}; |y| \geq |x| + (y - x)\xi, \ \forall \ y \in \mathbb{R}\}$$

Assim, $\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R}; |y| \geq y\xi, \ \forall \ y \in \mathbb{R}\}$ logo, temos duas situações a ser analisadas, para $y = 0$ temos $0 \geq 0.\xi$ e para $y \neq 0$ temos $y > 0$ ou $y < 0$. Para $y > 0$ temos $y \geq y.\xi$ assim,

$$y(1 - \xi) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - \xi) \geq 0 \text{ então } 1 \geq \xi.$$

e para $y < 0$ temos $-y \geq y.\xi$ assim,

$$-y(1+\xi) \geq 0 \Leftrightarrow (1+\xi) \geq 0 \text{ então } \xi \geq -1.$$

Portanto, o subdiferencial de f em x é:

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ [-1, 1], \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Note que, em particular $0 \in \partial f(\bar{x})$ e $0 \notin \partial f(x)$ para todo $x \neq \bar{x}$.

1.2 Função Estendida

Nesta seção apresentamos a definição de Função Estendida que é relevante para este trabalho. Introduzimos, propriedades da função indicadora de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que é um exemplo importante de função estendida.

Uma função f diz ser estendida quando a mesma pode atingir valores $-\infty$ ou $+\infty$, ou seja, se para algum $y \in \mathbb{R}^n$ pode-se ter $f(y) = -\infty$ ou $f(y) = +\infty$. Denotamos este tipo de função como $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\ , +\infty\}$, o domínio efetivo de uma função estendida é definido em ([12], Cap. 5, pág. 63) por

$$dom f := \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) < +\infty\}.$$

Definição 1.5. ([12], Cap. 5, pág. 63) Uma função estendida $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é **própria** quando o $dom f \neq \emptyset$ e $f(y) > -\infty$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Quando f não é própria diz-se que é **imprópria**.

Agora, abordamos a semicontinuidade inferior de uma função estendida.

Definição 1.6. ([10], Cap. 5, pág. 59) **Semicontínua inferior**. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função, f é dita semicontínua inferior ($s.c.i.$) em $y \in \mathbb{R}^n$ se, para cada $r \in \mathbb{R}$ com $f(y) > r$ existe uma vizinhança $U(y)$ de y tal que $f(z) > r$ para todo $z \in U(y)$. A função f é dita $s.c.i.$ se ela é $s.c.i.$ em cada ponto do $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.1. Segue por definição que uma função contínua é $s.c.i.$

Agora, na proposição abaixo mostramos que o supremo de funções convexas $s.c.i_s$. também é uma função convexa $s.c.i.$

Proposição 1.6. ([12], Cap. 5, pág. 64) Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I$, funções convexas $s.c.i_s$., onde I é um conjunto qualquer (possivelmente infinito). Seja $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x),$$

então f é convexa $s.c.i.$

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer fixo e para cada $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) > r$ vale que $f(x_0) = \sup_{i \in I} f_i(x_0) > r$. Assim, existe $i_0 \in I$ tal que $\forall\ i \geq i_0$ temos que $f_i(x_0) > r$. Em particular, $f_{i_0}(x_0) > r$. Logo, como f_{i_0} é $s.c.i.$ em x_0, exste $U_{i_0}(x_0)$ tal que $\forall\ z \in U_{i_0}(x_0)$ vale que $f_{i_0}(z) > r$. Portanto, da definição da f segue que $\forall\ z \in U_{i_0}(x_0)$ temos que $f(z) = \sup_{i \in I} f_i(z) \geq f_{i_0}(z) > r$. Logo, f é $s.c.i.$ em x_0, como x_0 é arbitrário então f é $s.c.i.$ É importante obervar que se existe um $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) = +\infty \geq f_i(y)\ \forall\ i \in I$, usando de novo a semicontinuidade das f_{is} e o mesmo argumento acima temos que f é $s.c.i.$ em y, logo f é $s.c.i.$

Agora, provamos a convexidade, primeiramente observe que se existe um $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = +\infty$. Assim, sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sup_{i \in I} f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \sup_{i \in I} \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y) \\ &\leq \lambda \sup_{i \in I} f_i(x) + (1-\lambda) \sup_{i \in I} f_i(y) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \end{aligned}$$

então f é convexa.

Agora, para $f(x) < +\infty$ iremos provar pelo fato de que o epígrafo do supremo é a interseção dos epígrafos das funções que definem o supremo, ou seja, $epi(f) = \cap_{i \in I}\ epi(f_i)$. Seja $(x, r) \in epi(f)$ temos que $f(x) \leq r$ e da definição da f vale,

$$r \geq f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \geq f_i(x)\ \forall\ i \in I$$

logo, $r \geq f_i(x)\ \forall\ i \in I$ isso implica que $(x, r) \in epi(f_i)\ \forall\ i \in I$, então $(x, r) \in \cap_{i \in I}\ epi(f_i)$.

Agora, seja $(x, r) \in \cap_{i \in I}\ epi(f_i)$ então $(x, r) \in epi(f_i) \forall\ i \in I$, assim temos que

$f_i(x) \leq r \; \forall \; i \in I$, logo

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \leq r$$

isso implica que $f(x) \leq r$, então $(x, r) \in epi(f)$. Portanto, temos que $epi(f) = \cap_{i \in I} \, epi(f_i)$. Pela convexidade de f_i, os $epi(f_i)$, $i \in I$, são convexos (Teorema (1.2)). Logo, a interseção deles é um conjunto convexo (Proposição (1.1)). Então, $epi(f)$ é convexo e usando de novo o teorema (1.2) concluímos que f é convexa. □

Exemplo 1.5. Quando I é finito observamos que o

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \text{ se torna } f(x) = \max_{i \in I} f_i(x),$$

então o máximo de funções convexas é convexa.

A seguir, apresentamos a definição de função indicadora de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que é um exemplo importante de função estendida.

Definição 1.7. ([12], Cap. 5, pág. 64) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio. A função indicadora $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ de A é definida por

$$\delta_A(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in A \\ +\infty, & \text{se } y \notin A \end{cases}$$

Observação 1.2. Note que a função indicadora é uma função própria, pois A é não vazio e temos $\delta_A(y) > -\infty \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.7. ([12], Cap. 5, pág. 64) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ a função indicadora de A. Então δ_A é convexa se, e somente se, A é convexo.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que δ_A é convexa, mas A não é convexo. Assim, se $x, y \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$ são tais que $\lambda x + (1 - \lambda)y \notin A$. Por definição temos,

$$\delta_A(x) = 0, \;\; \delta_A(y) = 0, \;\; \delta_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = +\infty$$

logo, $\delta_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = +\infty > 0 = \lambda\delta_A(x) + (1 - \lambda)\delta_A(y)$ o que é uma contradição, pois δ_A por hipótese é convexa. Portanto, A é um conjunto convexo.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que A é um conjunto convexo, assim pela definição de convexidade temos que para quaisquer $x, y \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$ tem-se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Assim, temos $\delta_A(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0 = \lambda\delta_A(x) + (1-\lambda)\delta_A(y)$. Observe que se $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash A$ e $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbb{R}^n \backslash A$ temos que para todo $\lambda \in [0,1]$

$$\delta_A(\lambda x + (1-\lambda)y) = +\infty = \lambda\delta_A(x) + (1-\lambda)\delta_A(y)$$

Portanto, δ_A é uma função convexa. □

1.3 Conjugação em Análise Convexa

Nesta seção introduzimos algumas noções de Conjugação de funções em Análise Convexa de importância, teórica e prática, para o desenvolvimento dos principais resultados apresentados neste trabalho.

Definição 1.8. ([12], Cap. 6, pág. 84) **Função Conjugada**. A função conjugada da $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ é a função $f^* : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$f^*(\xi) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle \xi, y \rangle - f(y)\}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

que é equivalente a,

$$f^*(\xi) = -\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y) - \langle \xi, y \rangle\}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 1.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(y) = |y|$, calculamos sua conjugada. Por definição temos,

$$f^*(\xi) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{\xi.y - |y|\} \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

Observe que, se $y \geq 0$ temos $\xi.y - |y| = \xi.y - y = (\xi - 1)y$ então, se $\xi \leq 1$ temos $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{(\xi-1)y\} = 0$ e se $\xi > 1$ temos $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{(\xi-1)y\} = +\infty$. Agora, se $y < 0$ temos $\xi.y - |y| = \xi.y + y = (\xi+1)y$ então, se $\xi \geq -1$ temos $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{(\xi+1)y\} = 0$ e se $\xi < -1$ temos $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{(\xi+1)y\} = +\infty$. Portanto, a conjugada de f é

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\xi| \leq 1 \\ +\infty, & \text{se } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Exemplo 1.7. Vamos obter a função conjugada da função indicadora de um conjunto

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. De fato, sabemos que por definição temos

$$\delta_A^*(\xi) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - \delta_A(y)\}, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, para $y \in A$ temos $\delta_A(y) = 0$ e para $y \notin A$ temos $\delta_A(y) = +\infty$. Logo, segue-se que a conjugada de δ_A é a **Função Suporte** do conjunto A, ou seja,

$$\delta_A^*(\xi) = \sup_{y\in A}\{\langle \xi, y\rangle\}, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.8. ([12], Cap. 6, pág. 85) Dada as funções $f, g : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ e suas conjugadas $f^*, g^* : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, temos

i) Se $f(y) = +\infty$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, então $f^*(\xi) = -\infty$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ii) A conjugada f^* é uma função convexa e *s.c.i.*

iii) Se $f(y) \leq g(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, então $f^*(\xi) \geq g^*(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

iv) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ própria, então

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{f(y)\} = -f^*(0).$$

Demonstração. **i)** Segue por definição.

ii) De fato, para $y \in dom f$ temos que f^* é o supremo da família das funções afins contínuas $\langle \cdot, y\rangle - f(y)$, como funções afins são convexas, então temos que f^* é supremo de funções convexas e pela observação (1.1) temos que as funções contínuas são funções $s.c.i_s$. assim f^* é o supremo de funções convexas e $s.c.i_s$. logo pela proposição (1.6) f^* é convexa e *s.c.i.*

iii) De fato, como $f(y) \leq g(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, então $\langle \xi, y\rangle - f(y) \geq \langle \xi, y\rangle - g(y)$ para todo $y, \xi \in \mathbb{R}^n$. Assim, pegando o supremo em y de ambos os lados temos,

$$f^*(\xi) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - f(y)\} \geq \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - g(y)\} = g^*(\xi),$$

então $f^*(\xi) \geq g^*(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

iv) Com efeito, pela definição da conjugada temos,

$$f^*(\xi) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - f(y)\}\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

então tomando $\xi = 0$ temos,

$$f^*(0) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle 0, y \rangle - f(y)\} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{-f(y)\} = -\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y)\}$$

logo, $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y)\} = -f^*(0)$. $\square$

Outra consequência imediata da definição de conjugada (Definição (1.8)) é que

$$f^*(\xi) \geq \langle \xi, y \rangle - f(y) \; \forall \, y \in \mathbb{R}^n \; \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n$$

O que é equivalente a,

$$f^*(\xi) + f(y) \geq \langle \xi, y \rangle \; \forall \, y \in \mathbb{R}^n \; \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

que é conhecida como **Desigualdade de Fenchel** ([12], Cap. 6, pág. 87). A seguir, trazemos o teorema que estabelece critérios para que ocorra a igualdade em (1.3) chamada de **Igualdade de Fenchel** onde as funções f e f^* são finitas.

Teorema 1.9. *([12], Cap. 6, pág. 87) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa e $y \in \mathbb{R}^n$ um ponto onde $-\infty < f(y) < +\infty$. Então,*

$$\xi \in \partial f(y) \textit{ se, e somente se, } f^*(\xi) = \langle \xi, y \rangle - f(y).$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $\xi \in \partial f(y)$, por definição temos

$$f(z) \geq f(y) + \langle z - y, \xi \rangle \; \forall \, z \in \mathbb{R}^n$$

como $-\infty < f(y) < +\infty$, então reescrevendo a igualdade acima obtemos,

$$\langle y, \xi \rangle - f(y) \geq \langle z, \xi \rangle - f(z) \; \forall \, z \in \mathbb{R}^n$$

assim, tomando o supremo em z obtemos,

$$\langle y, \xi \rangle - f(y) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{\langle z, \xi \rangle - f(z)\} = f^*(\xi)$$

logo, $\langle y, \xi \rangle \geq f^*(\xi) + f(y)$, mas pela Desigualdade de Fenchel temos $f^*(\xi) + f(y) \geq \langle y, \xi \rangle$. Então, $f^*(\xi) + f(y) = \langle y, \xi \rangle$ sempre que $\xi \in \partial f(y)$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $f^*(\xi) + f(y) = \langle y, \xi \rangle$ logo, $f^*(\xi) = \langle y, \xi \rangle - f(y)$. Pela definição de conjugada temos $f^*(\xi) \geq \langle z, \xi \rangle - f(z)$ $\forall$ $z \in \mathbb{R}^n$ o que implica em,

$$\langle y, \xi \rangle - f(y) \geq \langle z, \xi \rangle - f(z) \; \forall \; z \in \mathbb{R}^n$$

o que é equivalente a $f(z) \geq f(y) + \langle z - y, \xi \rangle$ $\forall$ $z \in \mathbb{R}^n$ logo, $\xi \in \partial f(y)$. $\square$

Corolário 1.10. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa própria, então $f^* : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ é uma função convexa própria.

Demonstração. De fato, como f é convexa própria pelo teorema acima o $dom f^* \neq \emptyset$. Além disso, exsite um $y \in dom f$ onde $\langle \xi, y \rangle - f(y) > -\infty$ logo $f^*(\xi) > -\infty$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ então f^* é própria. Agora, a convexidade da f^* é provado no item ii) da proposição (1.8), assim temos que f^* é convexa própria. $\square$

Capítulo 2

Dualidade para um problema de equilíbrio

Neste capítulo mostramos alguns exemplos de problemas que podem ser escritos sob a formulação (PE), dentre eles, o problema de equilíbrio clássico estudado por Blum e Oettli [1] e o problema de equilíbrio estudado por Flores-Bazán [4]. Em seguida, introduzimos o esquema dual para (PE) baseado no esquema dual proposto por Jacinto e Scheimberg [6] que preserva algumas características duais clássicas, também apresentamos as condições de otimalidade para a existência de soluções primais-duais. Vale lembrar que (PE) consiste em:

$$(\text{PE}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio e $f, \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ são bifunções estendidas que satisfazem as seguintes condições:

a) $f(x, x) \leq 0 \; \forall \, x \in D$ (generaliza a condição de equilíbrio clássica);

b) $dom f(x, \cdot) \cap dom \varphi(x, \cdot) \neq \emptyset \; \forall \, x \in D$ (garante valores finitos da função $f(x, \cdot) + \varphi(x, \cdot)$).

2.1 (PE) e Alguns exemplos

Nesta seção mostramos alguns exemplos de problemas que podem ser escritos como problema de equilíbrio sob a formulação (PE) e evidenciamos a equivalência na solução.

Problema de Equilíbrio Clássico

Nos estudos de Blum e Oettli [1] temos a formulação do Problema de equilíbrio clássico que consiste em:

$$\text{(PEC)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que} \\ f_1(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in K \end{cases},$$

onde $K \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio convexo fechado e $f_1 : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfaz $f_1(x, x) = 0 \; \forall \; x \in K$.

Podemos notar que o problema (PEC) é um caso particular de (PE). De fato, considerando D : = K , $\varphi \equiv 0$ e

$$f(x, y) := \begin{cases} f_1(x, y), \text{ se } x, y \in K \\ +\infty, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Assim, temos

$$\text{(PEC)}_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde D $\neq \emptyset$ e as funções f, φ verificam:

a) $f(x, x) = f_1(x, x) = 0 \; \forall \; x \in$ D;

b) Para cada $x \in$ D tem-se que,

$$dom f(x, \cdot) \cap dom \varphi(x, \cdot) = dom_1 f(x, \cdot) \cap \mathbb{R}^n = dom f_1(x, \cdot) = K \neq \emptyset$$

Além disso, os problemas (PEC)_1 e (PEC) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.1. Um ponto $\bar{x}$ resolve (PEC)_1 se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (PEC).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de (PEC)_1, então $\bar{x} \in D$ logo, $\bar{x} \in K$ e $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$. Como $\varphi \equiv 0$ então $f(\bar{x}, y) \geq 0 \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$. Observe que, para $y \in K$ temos $f_1(\bar{x}, y) = f(\bar{x}, y) \geq 0 \; \forall \; y \in K$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de (PEC).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de (PEC), então $\bar{x} \in K$ e temos $f(\bar{x}, y) = f_1(\bar{x}, y) \geq 0 \; \forall \; y \in K$, como a $\varphi \equiv 0$ então $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq 0 = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in K$. Além disso, quando $y \notin K$ temos $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) = +\infty \geq 0 = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de (PEC)_1.

□

Problema de Equilíbrio Flores-Bazán

Consideramos o seguinte problema de equilíbrio estudado por Flores-Bazán [4]:

$$(\mathrm{FB})\begin{cases}\text{Encontrar } \bar{x}\in K \text{ tal que}\\ f_1(\bar{x},y)+\varphi_1(\bar{x},y)\geq \varphi_1(\bar{x},\bar{x}) \text{ para todo } y\in K\end{cases},$$

onde $K\subset\mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio convexo fechado, as funções $f_1: K\times K\to\mathbb{R}$, $\varphi_1: K\times\mathbb{R}^n\to(-\infty,+\infty]$ tais que $f_1(x,x)=0$ e $K\cap dom\varphi_1(x,\cdot)\neq\emptyset$ para todo $y\in\mathbb{R}^n$.

Podemos notar que o problema (FB) é um caso particular de (PE). De fato, considerando $D:=K$,

$$f(x,y):=\begin{cases}f_1(x,y), \text{ se } x,y\in K\\ +\infty, \text{ c.c.}\end{cases}$$

e $\varphi(x,y):=\varphi_1(x,y)+\delta_K(x)$.

Assim, temos

$$(\mathrm{PE})\begin{cases}\text{Encontrar } \bar{x}\in D \text{ tal que}\\ f(\bar{x},y)+\varphi(\bar{x},y)\geq \varphi(\bar{x},\bar{x}) \text{ para todo } y\in\mathbb{R}^n.\end{cases},$$

onde D $\neq\emptyset$ e as funções f,φ verificam:

a) $f(x,x)=f_1(x,x)=0\ \forall\ x\in$ D;

b) Para cada $x\in$ D tem-se que,

$$domf(x,\cdot)\cap dom\varphi(x,\cdot)=K\cap dom\varphi_1(x,\cdot)\neq\emptyset$$

Além disso, os problemas (PE) e (FB) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.2. Um ponto $\bar{x}$ resolve (PE) se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (FB).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ solução de (PE), então $\bar{x}\in D$ e $f(\bar{x},y)+\varphi(\bar{x},y)\geq\varphi(\bar{x},\bar{x})\ \forall\ y\in\mathbb{R}^n$. Note que temos $\bar{x}\in K$ e para $y\in K$ temos $f_1(\bar{x},y)+\varphi_1(\bar{x},y)=f(\bar{x},y)+\varphi(\bar{x},y)\geq\varphi(\bar{x},\bar{x})=\varphi_1(\bar{x},\bar{x})\ \forall\ y\in K$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de (FB).

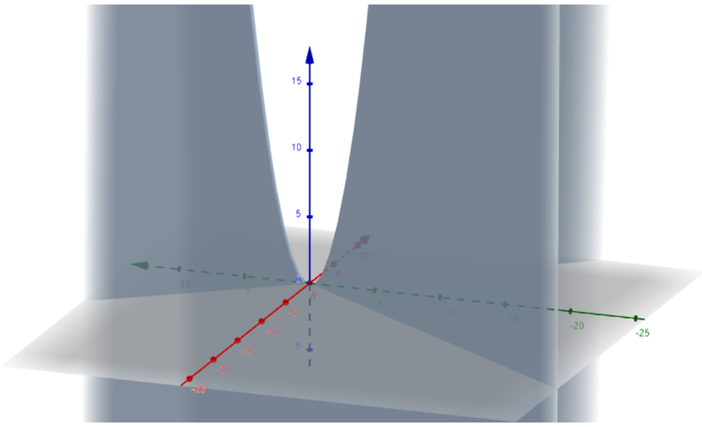
$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ solução de (FB), então $\bar{x}\in K$ e $f_1(\bar{x},y)+\varphi_1(\bar{x},y)\geq\varphi_1(\bar{x},\bar{x})\ \forall\ y\in K$. Note que temos $\bar{x}\in D$ e para todo $y\in K$ $f(\bar{x},y)+\varphi(\bar{x},y)\geq\varphi(\bar{x},\bar{x})$. Agora, seja $y\notin K$ temos pela definição da f e φ que, $f(\bar{x},y)+\varphi(\bar{x},y)=(+\infty)+\varphi_1(\bar{x},y)\geq\varphi_1(\bar{x},\bar{x})=\varphi(\bar{x},\bar{x})$ para todo $y\in\mathbb{R}^n\backslash K$. Portanto, $f(\bar{x},y)+\varphi(\bar{x},y)\geq\varphi(\bar{x},\bar{x})\ \forall\ y\in\mathbb{R}^n$, assim $\bar{x}$ é solução de (PE). $\square$

Problema de Equilíbrio Real

Considere o seguinte problema,

$$(\mathrm{PR}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ f_1(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

onde $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x, y) := -2x^2 + y^2$. Graficamente, f_1 é:



Escrevendo (PR) sob a formulação (PE) basta considerarmos: $D := \mathbb{R}$ e $f, \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definida por $f(x, y) := f_1(x, y)$, $\varphi(x, y) := \delta_{\mathbb{R}}(y)$.

Assim, temos

$$(\mathrm{PR})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

onde D $\neq \emptyset$ e as funções f, φ verificam:

a) $f(x, x) = f_1(x, x) = -2x^2 + x^2 = -x^2 \leq 0 \; \forall \, x \in$ D;

b) Para cada $x \in$ D tem-se que,

$$dom f(x, \cdot) \cap dom \varphi(x, \cdot) = dom f_1(x, \cdot) \cap \mathbb{R} = dom f_1(x, \cdot) = \mathbb{R} \neq \emptyset$$

Além disso, os problemas $(\mathrm{PR})_1$ e (PR) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.3. Um ponto $\bar{x}$ resolve $(\mathrm{PR})_1$ se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (PR).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$ solução de $(\mathrm{PR})_1$, então $\bar{x} \in D$ e $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}$. Note que temos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ temos $f(\bar{x}, y) = f_1(\bar{x}, y)$, $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = \delta_{\mathbb{R}}(\bar{x}) = 0$ e $\varphi(\bar{x}, y) = \delta_{\mathbb{R}}(y) = 0$. Logo, $f_1(\bar{x}, y) = f(\bar{x}, y) \geq 0 \; \forall \; y \in \mathbb{R}$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de (PR).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$ solução de (PR), então $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $f_1(\bar{x}, y) \geq 0 \; \forall \; y \in \mathbb{R}$. Note que temos $\bar{x} \in D$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, $\varphi(\bar{x}, y) = \delta_{\mathbb{R}}(y) = 0$, $f(\bar{x}, y) = f_1(\bar{x}, y)$ e $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq 0 = \varphi(\bar{x}, \bar{x})$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de $(\text{PR})_1$. □

Otimização Convexa

Consideramos o seguinte problema de programação não linear [9] dado por:

$$(\text{P}) \min_{y \in K} \psi(y) \text{ tal que } g_i(y) \leq 0 \; i = 1, ..., m$$

onde as funções $\psi, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são convexas e $K \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio convexo fechado tal que $K \cap \{y \in \mathbb{R}^n : g_i(y) \leq 0, i = 1, ..., m\} \neq \emptyset$.

Subtituindo (P) pelo problema:

$$(\text{P}_1) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{v} = (\bar{x}, \bar{z}) \in E \text{ tal que} \\ \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \text{ para todo } w = (y, u) \in E \end{cases},$$

onde $E := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e

$$\varphi(v, w) := \begin{cases} \psi(y) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(g(y) + u) + \delta_K(y), \text{ se } u \in \mathbb{R}^m_+ \\ +\infty, \text{ se } u \notin \mathbb{R}^m_+ \end{cases}$$

A i-ésima componente da função $g(y) + u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é $g_i(y) + u_i$. Observe que u não é uma variável de folga clássica [11], pois não exigimos $g(y) + u = 0$, mas sim $g(y) + u \leq 0$. Assim, u é uma variável de *quase-folga*.

Note que, o problema (P_1) é um problema (PE) onde $f \equiv 0$. Além disso, os problemas (P) e (P_1) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.4. Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ resolve (P) se, e somente se, existe $\bar{z} \in \mathbb{R}^m$ tal que $(\bar{x}, \bar{z})$ resolve (P_1).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de (P) então $\bar{x} \in K$ e verifica-se

$$\psi(y) \geq \psi(\bar{x}) \; \forall \; y \in K \tag{2.1}$$

e $g(\bar{x}) \leq 0$. Agora, considere $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{z})$ com $\bar{z} = -g(\bar{x})$ temos que $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+$ assim,

$$\varphi(\bar{v}, \bar{v}) = \varphi((\bar{x}, -g(\bar{x})), (\bar{x}, -g(\bar{x}))) = \psi(\bar{x}) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(g(\bar{x}) - g(\bar{x})) + \delta_K(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$$

Então por (2.1) e pela definição da φ temos que para todo $w = (y, u) \in E$,

$$\varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \tag{2.2}$$

Portanto, $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{z})$ com $\bar{z} = -g(\bar{x})$ é uma solução de P_1.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{z})$ uma solução de P_1, logo $\bar{v} \in E$ e verifica-se que

$$\varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \ \forall \ w = (y, u) \in E \tag{2.3}$$

Desde que ψ seja finita e o conjunto K é não vazio, da definição da φ e da desigualdade (2.3), temos que $+\infty > \varphi(\bar{v}, \bar{v})$. Logo,

$$\bar{x} \in K, \ g(\bar{x}) + \bar{z} \in \mathbb{R}^m_-, \ \bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \text{ e } \varphi(\bar{v}, \bar{v}) = \psi(\bar{x})$$

Assim, $g(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m_-$ então $g(\bar{x}) \leq 0$ portanto, para $w = (y, u)$ com

$$y \in K, \ g(y) + u \in \mathbb{R}^m_-, \ u \in \mathbb{R}^m_+$$

temos $\varphi(\bar{v}, w) = \psi(y)$. Assim, pela desigualdade (2.3) temos $\psi(y) \geq \psi(\bar{x}) \ \forall \ y \in K$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de (P). □

Problema do Ponto Fixo

Considere o Problema de Ponto Fixo [1] como

$$(\text{PPF}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que} \\ \bar{x} = T\bar{x} \end{cases},$$

onde $K \subset \mathbb{R}^n$ não vazio convexo fechado e $T : K \to K$ uma aplicação qualquer.

Escrevendo (PPF) sob a formulação (PE) basta considerarmos:

$$\text{D} := \text{K}, \ f(x, y) := \langle x - Tx, y - x \rangle \text{ e } \varphi(x, y) := \delta_K(y)$$

Assim, temos

$$(\text{PPF})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ verificam:

a) $f(x,x) = \langle x - Tx, x - x\rangle = 0 \; \forall \; x \in D$;

b) Para cada $x \in D$ tem-se que

$$dom f(x,\cdot) \cap dom\varphi(x,\cdot) = \mathbb{R}^n \cap K = K \neq \emptyset$$

Os problemas $(\text{PPF})_1$ e (PPF) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.5. Um ponto $\bar{x}$ resolve $(\text{PPF})_1$ se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (PPF).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de $(\text{PPF})_1$, então $\bar{x} \in D$ e $\bar{x} \in K$ e $f(\bar{x},y) + \varphi(\bar{x},y) \geq 0 = \varphi(\bar{x},\bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$. Observe que, para $y \in K$ temos que $f(\bar{x},y) + \varphi(\bar{x},y) = f(\bar{x},y) + 0 \geq 0 = \varphi(\bar{x},\bar{x}) \; \forall \; y \in K$. Logo, $f(\bar{x},y) \geq 0 \; \forall \; y \in K$.

Portanto, $f(\bar{x},y) = \langle \bar{x} - T\bar{x}, y - \bar{x}\rangle \geq 0 \; \forall \; y \in K$, logo tomando $y = T\bar{x}$ temos $\langle \bar{x} - T\bar{x}, T\bar{x} - \bar{x}\rangle = -||\bar{x} - T\bar{x}||^2 \geq 0 \Leftrightarrow ||\bar{x} - T\bar{x}||^2 \leq 0$, então $\bar{x} = T\bar{x}$ logo, $\bar{x}$ é solução de (PPF).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de (PPF) então $\bar{x} \in K$ e $\bar{x} = T\bar{x}$, logo $\bar{x} \in D$ e $f(\bar{x},y) = \langle \bar{x} - T\bar{x}, y - \bar{x}\rangle = 0$ e $\varphi(\bar{x},\bar{x}) = \delta_K(\bar{x}) = 0$. Observe que, pela definição da φ, temos que $\forall \; y \in \mathbb{R}^n$ a $\varphi(\bar{x},y) \geq 0 = \varphi(\bar{x},\bar{x})$. Portanto, temos que $\forall \; y \in \mathbb{R}^n$ a $f(\bar{x},y) + \varphi(\bar{x},y) \geq 0 = \varphi(\bar{x},\bar{x})$, então $\bar{x}$ é solução de $(\text{PPF})_1$. □

Desigualdade Variacional

Para o Problema de Desigualdade Variacional utilizaremos a formulação de Mosco [8] que é dada por:

$$(\text{DV}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in domA \text{ tal que} \\ \langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \end{cases},$$

onde $A : domA \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador localmente convexo, $z : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é uma função própria convexa *s.c.i.* são tais que $domA \cap domz \neq \emptyset$.

Escrevendo (DV) sob a formulação (PE) basta considerarmos $D := domA \cap domz$,

$$f(x,y) := \langle A(x), y - x\rangle + \delta_{domA}(x) \text{ e } \varphi(x,y) := z(y)$$

Assim, temos

$$(\mathrm{DV})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ verificam:

a) $f(x, x) = \langle A(x), x - x\rangle + \delta_{domA}(x) = 0 \; \forall \, x \in D$;

b) Para cada $x \in D$ tem-se que

$$domf(x, \cdot) \cap dom\varphi(x, \cdot) = \mathbb{R}^n \cap domz = domz \neq \emptyset$$

Os problemas $(\mathrm{DV})_1$ e (DV) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.6. Um ponto $\bar{x}$ resolve $(\mathrm{DV})_1$ se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (DV).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de $(\mathrm{DV})_1$, então $\bar{x} \in D$ e $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\bar{x} \in domA \cap domz$ e $f(\bar{x}, y) = \langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle < +\infty$. Assim, observe que, para $y \in domz$ temos que $\varphi(\bar{x}, y) = z(y) < +\infty$, $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = z(\bar{x}) < +\infty$ e

$$\langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + z(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = z(\bar{x}) \; \forall \; y \in domz,$$

então $\langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\bar{x}$ é solução de (DV).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de (DV), então $\bar{x} \in domA$ e $\langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n$. Como $\bar{x} \in domA$, então $f(\bar{x}, y) = \langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + \delta_{domA}(x) < +\infty$. Note que se $\bar{x} \notin domz$ isso implica que para $y \in domz$, $+\infty > \langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) = +\infty$ o que é absurdo, logo $\bar{x} \in domz$. Assim, temos que $\bar{x} \in domA \cap domz$, logo $\bar{x} \in D$. Agora, observe que se $y \notin domz$ temos $\varphi(\bar{x}, y) = +\infty$ e $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = z(\bar{x}) < +\infty$. Logo, $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in \mathbb{R}^n \backslash domz$. Se $y \in domz$ temos $\varphi(\bar{x}, y) = z(y)$ e $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = z(\bar{x}) < +\infty$. Logo, $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \; \forall \; y \in domz$. Portanto, temos que $\bar{x} \in D$ e $\forall \; y \in \mathbb{R}^n$ $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x})$, assim $\bar{x}$ é solução de $(\mathrm{DV})_1$. $\square$

Desigualdade Quasevariacional Generalizada

Para o Problema de Desigualdade Quasevariacional Generalizada utilizamos a formulação de Morgan e Romaniello [7] que é dada por:

$$\text{(DQVG)}\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in G(\bar{x}) \text{ tal que } \bar{\xi} \in A(\bar{x}) \\ \text{satisfazendo } \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}). \end{cases},$$

onde $G, A : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ são operadores ponto-conjunto tal que $G(x)$ é um conjunto convexo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. E é natural assumir que $\{(x,\xi) : x \in G(x), \xi \in A(x)\} \neq \emptyset$, isto é, o conjunto dos pontos fixos da G e o $domA$ sejam não vazios.

Escrevendo (DQVG) sob a formulação (PE) basta considerarmos: $E := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $D := \{v = (x,\xi) \in E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in domG, \xi \in A(x)\}$, $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ definidas por:

$$f(v,w) = f((x,\xi),(y,\rho)) := \langle \xi, y - x \rangle + \delta_D(v) \text{ e } \varphi(v,w) = \varphi((x,\xi),(y,\rho)) := \delta_{G(x)}(y).$$

Assim, temos

$$\text{(DQVG)}_1\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi}) \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{v}, w) + \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \text{ para todo } w = (y,\rho) \in E. \end{cases},$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ verificam:

a) $f(v,v) = \langle \xi, x - x \rangle = 0 \; \forall \; v \in D$;

b) Para cada $v = (x,\xi) \in D$ tem-se que $x \in domG$ e $\xi \in A(x)$, logo

$$domf(v,\cdot) = \{w = (y,\rho) \in E : \langle \xi, y - x \rangle < +\infty\} = E;$$

$$dom\varphi(v,\cdot) = \{w = (y,\rho) \in E : \delta_{G(x)}(y) < +\infty\} = G(x) \times \mathbb{R}^n \neq \emptyset;$$

Assim,

$$domf(v,\cdot) \cap dom\varphi(v,\cdot) = E \cap (G(x) \times \mathbb{R}^n) \neq \emptyset.$$

Os problemas (DQVG)_1 e (DQVG) são equivalentes no seguinte sentido.

Lema 2.7. Um ponto $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi})$ resolve (DQVG)_1 se, e somente se, $\bar{x}$ é uma solução do (DQVG).

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi}) \in E$ solução de (DQVG)_1, então $f(\bar{v}, w) + \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \; \forall \; w \in E$. Como $\bar{v} \in D$ então $\bar{x} \in domG$ e $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$. Logo, existe um $\bar{z} \in G(\bar{x})$ tal que para $\bar{w} = (\bar{z}, \bar{\xi})$ tem-se que $\varphi(\bar{v}, \bar{w}) = \varphi((\bar{x}, \bar{\xi}), (\bar{z}, \bar{\xi})) = \delta_{G(\bar{x})}(\bar{z}) = 0$. Agora, fazendo $w = \bar{w} = (\bar{z}, \bar{\xi})$ obtemos,

$$f(\bar{v}, \bar{w}) = \langle \bar{\xi}, \bar{z} - \bar{x} \rangle + \delta_D(\bar{v}) = \langle \bar{\xi}, \bar{z} - \bar{x} \rangle \text{ e } +\infty > \langle \bar{\xi}, \bar{z} - \bar{x} \rangle + \varphi(\bar{v}, \bar{w}) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \quad (2.4)$$

assim, pela segunda desigualdade em (2.4) e a definição da φ obtemos $+\infty > \varphi(\bar{v}, \bar{v}) = \delta_{G(\bar{x})}(\bar{x}) = 0$ logo, $\bar{x} \in G(\bar{x})$. Assim, considerando $y \in G(\bar{x})$ e $w = (y, \rho)$ obtemos $\langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle + \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v})\ \forall\ y \in G(\bar{x})$ logo, $\langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0\ \forall\ y \in G(\bar{x})$. Portanto, $\bar{x}$ é solução de (DQVG) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de (DQVG) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$, então $\bar{x} \in G(\bar{x})$ e $\langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0\ \forall\ y \in G(\bar{x})$. Fazendo $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi})$ e como $\bar{x} \in domG$ e $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$ então $\bar{v} \in D$. Pela definição das funções temos que $f(\bar{v}, w) = \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle + \delta_D(\bar{v}) = \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle$, $\varphi(\bar{v}, w) = \delta_{G(\bar{x})}(y) = 0$ e $\varphi(\bar{v}, \bar{v}) = \delta_{G(\bar{x})}(\bar{x}) = 0$. Logo, $f(\bar{v}, w) + \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v})\ \forall\ y \in G(\bar{x})$. Agora, seja $y \notin G(\bar{x})$ temos $f(\bar{v}, w) + \varphi(\bar{v}, w) = \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle + (+\infty) \geq 0 = \varphi(\bar{v}, \bar{v})$. Portanto, $f(\bar{v}, w) + \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v})\ \forall\ w = (y, \rho) \in E$, assim $\bar{v}$ é solução de $(\text{DQVG})_1$. □

2.2 O Esquema Dual

Começamos essa seção apresentando resultados básicos relacionados ao conjunto solução de (PE), que denotamos por $\tilde{\text{S}}$. A partir de agora, consideramos a seguinte:

Suposição 2.1. O conjunto $\tilde{\text{S}}$ é não vazio.

2.2.1 Resultados Básicos

Considerando f e φ funções que verificam as condições de (PE), estabelecemos os seguintes resultados básicos sobre o conjunto $\tilde{\text{S}}$.

Lema 2.8. Para todo $\bar{x} \in \tilde{\text{S}}$ é válido que $\bar{x} \in dom\varphi(\bar{x}, \cdot)$.

Demonstração. Seja $\bar{x} \in \tilde{\text{S}}$. Pela condição (b) do (PE) temos que existe um $y \in \mathbb{R}^n$ onde $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) < +\infty$, como $\bar{x}$ é solução do (PE), então

$$+\infty > f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x})$$

então $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) < +\infty$, assim $\bar{x} \in dom\varphi(\bar{x}, \cdot)$. □

Lema 2.9. Se $\bar{x} \in \tilde{\mathrm{S}}$, então verifica que $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$.

Demonstração. Seja $\bar{x} \in \tilde{\mathrm{S}}$, isso é, $\bar{x} \in D$ e $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x})$ $\forall$ $y \in \mathbb{R}^n$, então tomando $y = \bar{x}$ temos,

$$f(\bar{x}, \bar{x}) + \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ logo } f(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0.$$

Mas pela condição (a) do (PE) temos que $f(\bar{x}, \bar{x}) \leq 0$, então $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ □

Agora, consideramos a seguinte função $F_x : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ definida pela soma de f e φ,

$$F_x(y) := F(x, y) = f(x, y) + \varphi(x, y).$$

Consideramos também a função,

$$v : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty] \text{ definida por } v(x) := \varphi(x, x)$$

onde $v(\cdot)$ será chamada de Função Primal de (PE).

Lema 2.10. A condição (b) de (PE) implica que a função $F_x(\cdot)$ é própria para todo $x \in D$ e a Suposição (2.1) implica que a função $v(\cdot)$ é própria para todo $x \in D$.

Demonstração. De fato, sabemos que o $domF_x := \{y \in \mathbb{R}^n : F_x(y) < +\infty\}$ e por definição $F_x(\cdot) = f(x, \cdot) + \varphi(x, \cdot)$, assim pela condição (b) de (PE) temos que existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x, y) + \varphi(x, y) < +\infty$, logo a $F_x(\cdot)$ é uma função própria para todo $x \in D$.

Por outro lado, temos que $domv := \{y \in \mathbb{R}^n : v(y) < +\infty\} \neq \emptyset$, pois da suposição (2.1) temos que $\tilde{\mathrm{S}} \neq \emptyset$. Além disso, pelo Lema (2.8) temos que para todo $y \in \tilde{\mathrm{S}}$ vale que $y \in dom\varphi(y, \cdot)$, logo $v(y) = \varphi(y, y) < +\infty$, então $v(\cdot)$ é uma função própria. □

O resultado a seguir, caracteriza uma solução de (PE) como uma solução de um Problema de Otimização.

Lema 2.11. Sejam f e φ funções que sastisfazem as condições do (PE). O ponto $\bar{x}$ é uma solução de (PE) se, e somente se, sustenta que

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} = F_{\bar{x}}(\bar{x}) = v(\bar{x}) \tag{2.5}$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \tilde{\text{S}}$ então $\bar{x} \in D$ e $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x})\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n$. Então, $F_{\bar{x}}(y) \geq v(\bar{x})\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n$. Assim, obtemos

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} \geq v(\bar{x}).$$

Note que pelos Lemas (2.8) e (2.9) temos,

$$v(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) + \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = F_{\bar{x}}(\bar{x}) \geq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\}.$$

Portanto, $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} = F_{\bar{x}}(\bar{x}) = v(\bar{x})$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, como $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} = F_{\bar{x}}(\bar{x}) = v(\bar{x})$, então

$$F_{\bar{x}}(y) \geq F_{\bar{x}}(\bar{x}) = v(\bar{x})\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

logo, $f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq f(\bar{x}, \bar{x}) + \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{x})\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n$. Então, podemos concluir que $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ e $\bar{x} \in D$ então, $\bar{x} \in \tilde{\text{S}}$, ou seja, $\bar{x}$ é uma solução do problema (PE). $\square$

2.2.2 Função Primal-Dual

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço dual e F_x^* a conjugada da função F_x. Sejam f e φ funções que verificam as condições de (PE). A seguir, introduzimos conceitos duais relacionados a (PE) de acordo com o esquema dual proposto por Jacinto e Scheimberg [6]. Primeiramente, trazemos a função primal-dual estabelecida em [6]. Seja $L : X \times X \to [-\infty, +\infty]$ dada por

$$L(x, \xi) = \begin{cases} -h^*(-\xi) - F_x^*(\xi),\ se\ x \in D_\xi \\ +\infty,\ se\ D_\xi \neq \emptyset\ e\ x \notin D_\xi \\ -\infty,\ se\ D_\xi = \emptyset \end{cases},$$

onde $D_\xi := \{x \in D : F_x^*(\xi) < +\infty\}$ para cada $\xi \in X^*$.

Note que quando temos $X = \mathbb{R}^n$ precisamos calcular a conjugada da h, mas que em nosso caso temos $h \equiv 0$. Logo,

$$h^*(\xi) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle \xi, y \rangle - h(y)\} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle \xi, y \rangle\} = \begin{cases} 0,\ \text{se}\ \xi = 0 \\ +\infty,\ \text{se}\ \xi \neq 0. \end{cases}$$

Desse modo, observamos a seguinte situação para $x \in D_\xi$,

$$-h^*(-\xi) - F_x^*(\xi) = \begin{cases} -F_x^*(\xi), \text{ se } \xi = 0 \\ -\infty, \text{ se } \xi \neq 0 \end{cases},$$

então para (PE) temos a seguinte definição da Função Primal-Dual.

Definição 2.1. A **Função Primal-Dual** $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é dada por:

$$L(x,\xi) = \begin{cases} -F_x^*(\xi), \ se\ \xi = 0\ e\ x \in D_\xi \\ +\infty, \ se\ D_\xi \neq \emptyset\ e\ x \notin D_\xi \\ -\infty, \ se\ \xi \neq 0\ ou\ D_\xi = \emptyset \end{cases}$$

onde $D_\xi := \{x \in D : F_x^*(\xi) < +\infty\}$ para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$.

E consequentemente definimos o problema dual para (PE).

Definição 2.2. O **Problema Dual** de (PE) é:

$$(\text{DPE}) \begin{cases} \sup g(\xi) \\ \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é a **Função Dual** definida por

$$\begin{aligned} g(\xi) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\xi) &= \begin{cases} \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{-F_x^*(\xi)\}, \ se\ D_\xi \neq \emptyset \\ -\infty, \ se\ D_\xi = \emptyset\ ou\ \xi \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{F_x^*(\xi)\}, \ se\ D_\xi \neq \emptyset \\ -\infty, \ se\ D_\xi = \emptyset\ ou\ \xi \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\sup_{x\in D_\xi} F_x^*(\xi), \ se\ D_\xi \neq \emptyset \\ -\infty, \ se\ D_\xi = \emptyset\ ou\ \xi \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A seguir, definimos o que é um ponto factível primal-dual para L.

Definição 2.3. Um ponto $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto factível primal-dual sempre que $x \in D_\xi$.

Os próximos resultados mostram que nosso esquema dual preserva características duais clássicas.

Proposição 2.12. (Dualidade Fraca). Dado $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ponto factível primal-dual. Então,

$$L(x,\xi) \leq F_x(y) \text{ e } L(x,\xi) \leq v(x) \ \forall \ y \in \mathbb{R}^n \tag{2.6}$$

Além disso,

$$g(\xi) \leq F_x(y) \text{ e } g(\xi) \leq v(x) \ \forall \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $x \in D_\xi$, então $x \in D$ e $F_x^*(\xi) < +\infty$. Note que pela Definição (2.1) para $\xi \neq 0$ temos que $L(x,\xi) = -\infty$. Pelo Lema (2.10) a F_x é própria, assim pelo item iv) da Proposição (1.8) temos que para $\xi = 0$,

$$L(x,\xi) = -F_x^*(0) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_x(y)\} \leq F_x(y) \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Então temos $L(x,\xi) \leq F_x(y) \ \forall \ y \in \mathbb{R}^n$. Agora, consideramos $y = x$ e usando a condição (a) de (PE) temos,

$$L(x,\xi) \leq F_x(x) = f(x,x) + \varphi(x,x) \leq \varphi(x,x) = v(x) \Rightarrow L(x,\xi) \leq v(x).$$

Além disso, note que $\forall \ y \in \mathbb{R}^n$ e para quaisquer $x \in D_\xi$ temos,

$$F_x(y) \geq \inf_{x \in D_\xi} \{F_x(y)\} \geq \inf_{x \in D_\xi} \{L(x,\xi)\} \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x,\xi)\} = g(\xi).$$

Logo, $F_x(y) \geq g(\xi)$. Assim, considerando $y = x$ temos $F_x(x) \geq g(\xi)$. E pela condição (a) de (PE) temos $v(x) = \varphi(x,x) \geq f(x,x) + \varphi(x,x) \geq g(\xi) \ \Rightarrow \ v(x) \geq g(\xi)$ □

A seguir, estabelecemos as condições de otimalidade para (PE).

2.2.3 Condições de Otimalidade

Teorema 2.13. ***(Condições necessárias de otimalidade)****. Suponha que f, φ são funções que satisfazem as condições de (PE). Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de (PE) tal que se verifica a seguinte condição:* ***(H)*** *$F_{\bar{x}}(\cdot)$ é uma função convexa. Então existe $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$(\bar{x},\bar{\xi}) \text{ é um ponto factível primal-dual e } L(\bar{x},\bar{\xi}) \geq v(\bar{x}) \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de (PE) tal que verifica a condição **(H)**. Desse modo, pelas condições de (PE), e os Lemas (2.8) e (2.11) e a caracterização de uma solução de um problema convexo (Teorema (1.5)) obtemos que $0 \in \partial F_{\bar{x}}(\bar{x})$. Assim, pela caracterização do subdiferencial em termos da função conjugada (Teorema (1.9)) temos

$$F_{\bar{x}}^*(0) + F_{\bar{x}}(\bar{x}) = \langle 0, \bar{x} \rangle \tag{2.8}$$

Assim, como $\bar{x} \in D$ e vale que $F_{\bar{x}}^*(0) < +\infty$ então $\bar{x} \in D_{\xi=0}$. Logo, pela definição (2.3) temos que $(\bar{x}, 0)$ é um ponto factível primal-dual. Além disso, de (2.8) temos que

$$v(\bar{x}) = F_{\bar{x}}(\bar{x}) = \langle 0, \bar{x} \rangle - F_{\bar{x}}^*(0) = -\delta_{\mathbb{R}^n}^*(0) - F_{\bar{x}}^*(0) = L(\bar{x}, 0)$$

Portanto, existe $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ verificando (2.7) $\square$

Teorema 2.14. ***(Condições suficientes de otimalidade)***. *Assumimos que f, φ são funções que satisfazem as condições de (PE). Se o ponto $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfaz (2.7) e a condição **(H)** vale para $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é solução do (PE).*

Demonstração. Usando que $L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x})$ de (2.7) e $L(\bar{x}, \bar{\xi}) \leq F_{\bar{x}}(y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$ a primeira desigualdade de (2.6) obtemos,

$$F_{\bar{x}}(y) \geq L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x})\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

Tomando o ínfimo em y em (2.9), temos

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} \geq v(\bar{x}) \tag{2.10}$$

Mas pela condição (a) de (PE) temos,

$$v(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \geq f(\bar{x}, \bar{x}) + \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = F_{\bar{x}}(\bar{x})$$

que juntamente com (2.10) implica que $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} \geq v(\bar{x}) \geq F_{\bar{x}}(\bar{x})$. Mas, por outro lado temos $F_{\bar{x}}(\bar{x}) \geq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} \geq v(\bar{x})$. Então, $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{F_{\bar{x}}(y)\} = F_{\bar{x}}(\bar{x}) = v(\bar{x})$. Portanto, pelo Lema (2.11) $\bar{x}$ é solução de (PE). $\square$

Agora, introduzimos uma proposição que fornece uma interessante desigualdade para a função primal-dual quando temos uma solução para (PE).

Proposição 2.15. Sejam f, φ funções que satisfazem as condições de (PE). Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solução de (PE) com a condição **(H)** verificada, então existe um $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$L(\bar{x}, \xi) \leq L(\bar{x}, \bar{\xi}) \; \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_\xi$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução para (PE) como vale **(H)** podemos aplicar o Teorema (2.13). Então existe $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(\bar{x}, \bar{\xi})$ é um ponto factível primal-dual e $L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x})$. Assim, note que pela proposição (2.12) (dualidade fraca) obtemos que para qualquer ξ tal que $\bar{x} \in D_\xi$,

$$L(\bar{x}, \xi) \leq v(\bar{x}) \leq L(\bar{x}, \bar{\xi}).$$

Logo $L(\bar{x}, \xi) \leq L(\bar{x}, \bar{\xi}) \; \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_\xi$. $\square$

Capítulo 3

Aplicações da Teoria Dual de (PE)

Neste capítulo mostramos aplicações do esquema dual de (PE), desenvolvido no capítulo anterior, para as Desigualdades Variacional e Quasevariacional Generalizada. Também, aplicamos para o problema do Ponto Fixo, Problema Real, e quando aplicado ao problema de Otimização Convexa obtemos o dual Langrangiano Clássico.

Desigualdade Variacional

Consideramos o problema de Desigualdade Variacional (DV) [8]:

$$(\mathrm{DV})\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in domA \text{ tal que} \\ \langle A(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

onde $A : domA \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador localmente convexo, $z : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é uma função própria convexa *s.c.i.* são tais que $domA \cap domz \neq \emptyset$. Como apresentado, no capítulo anterior, podemos substituir (DV) pelo seguinte problema (PE):

$$(\mathrm{DV})_1\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

onde, $D := domA \cap domz$,

$$f(x, y) := \langle A(x), y - x\rangle + \delta_{domA}(x) \text{ e } \varphi(x, y) := z(y)$$

Função Primal-dual para $(\mathbf{DV})_1$. Temos que $F_x(y) := f(x,y) + \varphi(x,y)$. Logo

$$F_x(y) = \langle A(x), y - x\rangle + \delta_{domA}(x) + z(y) = \begin{cases} \langle A(x), y - x\rangle + z(y), \text{ se } x \in domA \\ +\infty, \text{ se } x \notin domA \end{cases}$$

Assim, pela definição da conjugada convexa de F_x temos,

$$F_x^*(\xi) = \begin{cases} \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - \langle A(x), y - x\rangle - z(y)\}, \text{ se } x \in domA \\ -\infty, \text{ se } x \notin domA \end{cases}$$

Logo, para $F_x^*(\xi) > -\infty$ vale que $x \in domA$ e

$$\begin{aligned} F_x^*(\xi) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - \langle A(x), y - x\rangle - z(y)\} \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - \langle A(x), y\rangle + \langle A(x), x\rangle - z(y)\} \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi - A(x), y\rangle - z(y)\} + \langle A(x), x\rangle \end{aligned}$$

Agora, considere o conjunto $A^{-1}(\xi) := \{z \in domA : A(z) = \xi\}$. Suponhamos que $A^{-1}(\xi) \neq \emptyset$, como temos $domA \cap domz \neq \emptyset$ e z própria então $A^{-1}(\xi) \cap domz \neq \emptyset$. Observe que $A^{-1}(\xi) \cap domz \subset D_\xi = \{x \in D : F_x^*(\xi) < +\infty\}$. De fato, seja $x \in A^{-1}(\xi) \cap domz$ temos

$$F_x^*(\xi) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi - A(x), y\rangle - z(y)\} + \langle A(x), x\rangle = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{-z(y)\} + \langle \xi, x\rangle$$

como z é convexa própria então $-z$ é côncava própria, assim $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{-z(y)\} < +\infty$. Logo, $x \in D_\xi$. Assim, como $A^{-1}(\xi) \cap domz \neq \emptyset$ e $A^{-1}(\xi) \cap domz \subset D_\xi$ então $D_\xi \neq \emptyset$, logo para $x \in D_\xi$ temos que

$$L(x, \xi) = -F_x^*(\xi)$$

Logo, analisando a L em ξ, temos que pela definição da L, basta analisarmos a F_x^* em $\xi = 0$. Como sabemos que para $x \in A^{-1}(0) \cap domz$ temos

$$F_x^*(0) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{-z(y)\} + \langle 0, x\rangle = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{-z(y)\} < +\infty$$

Portanto, a Função Primal-Dual associada a $(\mathrm{DV})_1$ é:

$$L(x,\xi) = \begin{cases} \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{z(y)\}, \text{ se } \xi = 0 \text{ e } x \in A^{-1}(0) \cap domz \\ -\infty, \text{ se } \xi \neq 0, \; x \in A^{-1}(\xi) \cap domz \end{cases}$$

Desigualdade Quasevariacional Generalizada

Consideramos o problema de Desigualdade Quasevariacional Generalizada (DQVG) [7]:

$$(\mathrm{DQVG}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in G(\bar{x}) \text{ tal que } \bar{\xi} \in A(\bar{x}) \\ \text{satisfazendo } \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}). \end{cases}$$

onde $G, A : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ são operadores ponto-conjunto tal que $G(x)$ é um conjunto convexo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. E é natural assumir que $\{(x,\xi) : x \in G(x), \xi \in A(x)\} \neq \emptyset$, isto é, o conjunto dos pontos fixos da G e o $domA$ sejam não vazios. Como apresentado, no capítulo anterior, podemos substituir (DQVG) pelo seguinte problema (PE):

$$(\mathrm{DQVG})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi}) \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{v}, w) + \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \text{ para todo } w = (y,\rho) \in E. \end{cases}$$

onde $E := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $D := \{v = (x,\xi) \in E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in domG, \xi \in A(x)\}$, e as funções $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ são definidas por:

$$f(v,w) = f((x,\xi),(y,\rho)) := \langle \xi, y - x \rangle + \delta_D(v) \text{ e } \varphi(v,w) = \varphi((x,\xi),(y,\rho)) := \delta_{G(x)}(y)$$

Função Primal-dual para $(\mathbf{DQVG})_1$. Temos que $F_v(w) := f(v,w) + \varphi(v,w)$, então $F_v(w) = \langle \xi, y - x \rangle + \delta_D(v) + \delta_{G(x)}(y)$. Assim, seja $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in E^* = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pela definição da conjugada convexa da F_v temos,

$$F_v^*(\nu) = \sup_{w\in E}\{\langle \nu, w \rangle - \langle \xi, y - x \rangle - \delta_D(v) - \delta_{G(x)}(y)\}.$$

Agora, considere o conjunto dos pontos fixos da G por $fix(G) := \{z \in \mathbb{R}^n : z \in G(z)\}$ e o conjunto $A(fix(G)) := \{z \in \mathbb{R}^n : z \in A(x), x \in G(x)\}$. Suponhamos que ambos conjuntos são não vazio, então temos $fix(G) \times A(fix(G)) \neq \emptyset$. Observe que, temos $fix(G) \times A(fix(G)) \subset D_{\nu=0} = \{v \in D : F_v^*(0) < +\infty\}$. De fato, seja $v = (x,\xi) \in$

$fix(G) \times A(fix(G))$, então $x \in domG$, $\xi \in A(x)$, assim $v \in D$. Note que, temos

$$\begin{aligned} F_v^*(0) &= \sup_{w=(y,\rho)\in E=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\{\langle(0,0),(y,\rho)\rangle - \langle\xi, y-x\rangle - \delta_{G(x)}(y)\} \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{-\langle\xi, y-x\rangle - \delta_{G(x)}(y)\} \\ &= \sup_{y\in G(x)}\{\langle\xi, x-y\rangle\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

como temos $x \in G(x)$ então $F_v^*(0) > -\infty$, ou seja, própria. Como queremos avaliar a $F_v^*(0)$ em valores finitos. Suponhamos que $G(x)$ é limitado, então $G(x)$ é convexo limitado. Logo, temos $\sup_{y\in G(x)}\{\langle\xi, x-y\rangle\} < +\infty$ e $v \in D_{\nu=0}$. Logo, $D_{\nu=0} \neq \emptyset$. Daí, basta analisarmos a F_v^* em $\nu = 0$, ou seja, quando $v \in D_{\nu=0} \neq \emptyset$. Logo, por (3.1) temos,

$$F_v^*(0) = \sup_{y\in G(x)}\{\langle\xi, x-y\rangle\}$$

Portanto, a Função Primal-Dual associada a $(\text{DQVG})_1$ quando $G(x)$ é convexo limitado:

$$L(v,\nu) = L((x,\xi),(\nu_1,\nu_2)) = \begin{cases} \inf_{y\in G(x)}\{\langle\xi, y-x\rangle\}, \text{ se } \nu = (0,0) \\ -\infty, \text{ se } \nu \neq (0,0) \end{cases}$$

Problema do Ponto Fixo

Considerando o Problema do Ponto Fixo [1]:

$$(\text{PPF}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que} \\ \bar{x} = T\bar{x} \end{cases}$$

onde $K \subset \mathbb{R}^n$ não vazio convexo fechado e $T : K \to K$ uma aplicação. De acordo com apresentado, no capítulo anterior, o (PE) associado a (PPF) é:

$$(\text{PPF})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x},y) + \varphi(\bar{x},y) \geq \varphi(\bar{x},\bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

onde $D := K$, $f(x,y) := \langle x - Tx, y - x\rangle$ e $\varphi(x,y) := \delta_K(y)$. A seguir, passamos a encontrar os elementos da teoria dual para esse problema.

Função Primal-dual associada ao Problema do Ponto Fixo.

Temos que,

$$F_x(y) := f(x,y) + \varphi(x,y) = \langle x - Tx, y - x\rangle + \delta_K(y).$$

Pela definição da conjugada convexa de F_x temos,

$$\begin{aligned} F_x^*(\xi) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - \langle x - Tx, y - x\rangle - \delta_K(y)\} \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle \xi, y\rangle - \langle x - Tx, y\rangle + \langle x - Tx, x\rangle - \delta_K(y)\} \\ &= \sup_{y\in K}\{\langle \xi - (x - Tx), y\rangle\} + \langle x - Tx, x\rangle. \end{aligned}$$

Agora, considere o conjunto dos pontos fixos de T por $fix(T) := \{z \in K : z \in Tz\}$. Suponhamos que $fix(T) \neq \emptyset$, observe que $fix(T) \subset D_{\xi=0} = \{x \in D = K : F_x^*(0) < +\infty\}$. De fato, seja $x \in fix(T)$ então $x \in K$ e $x = Tx$. Assim, temos

$$F_x^*(0) = \sup_{y\in K}\{\langle \xi - (x - Tx), y\rangle\} + \langle x - Tx, x\rangle = 0.$$

Logo, $F_x^*(0) < +\infty$ então $x \in D_{\xi=0}$ e temos que $D_{\xi=0} \neq \emptyset$. Assim, basta analisarmos a F_x^* em $\xi = 0$, ou seja, quando $x \in D_{\xi=0} \neq \emptyset$. Logo, temos

$$F_x^*(0) = \sup_{y\in K}\{\langle Tx - x, y\rangle\} + \langle x - Tx, x\rangle.$$

Portanto, a Função Primal-Dual associada a $(\mathrm{PPF})_1$ é:

$$L(x,\xi) = \begin{cases} \inf_{y\in K}\{\langle x - Tx, y - x\rangle\}, \text{ se } \xi = 0 \\ -\infty, \text{ se } \xi \neq 0 \end{cases}$$

Problema de Equilíbrio Real

Considere o seguinte problema,

$$(\mathrm{PR}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ f_1(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

onde $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x, y) := -2x^2 + y^2$. Como apresentado, no capítulo anterior, o (PE) associado a (PR) é:

$$(\mathrm{PR})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

onde $D := \mathbb{R}$ e $f, \varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definida por $f(x, y) := f_1(x, y)$, $\varphi(x, y) := \delta_{\mathbb{R}}(y)$. A seguir, passamos a encontrar os elementos da teoria dual para esse problema.

Funções Primal-dual associada ao problema $(\mathbf{PR})_1$.

Temos que $F_x : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definida por $F_x(y) = f(x,y)+\varphi(x,y) = -2x^2+y^2+\delta_{\mathbb{R}}(y)$. Pela definição da conjugada obtemos que

$$F_x^*(\xi) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\xi.y - (-2x^2 + y^2 + \delta_{\mathbb{R}}(y))\} = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\xi.y - y^2\} + 2x^2,$$

Observe que $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{\xi.y-y^2\} = \frac{\xi^2}{4}$. De fato, seja $g(y) = \xi.y-y^2$ temos $g'(y) = \xi - 2y = 0$ então $y = \frac{\xi}{2}$ é um ponto crítico da g. Além disso, $g''(y) = -2$ temos $g''(\frac{\xi}{2}) = -2 < 0$ então $y = \frac{\xi}{2}$ é o máximo local para g. Desse modo, $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{\xi.y-y^2\} = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\xi.(\frac{\xi}{2})-(\frac{\xi}{2})^2\} = \frac{\xi^2}{4}$. Portanto, obtemos que

$$F_x^*(\xi) = \frac{\xi^2}{4} + 2x^2 < +\infty,$$

Sabemos que para $x \in D_\xi = \{x \in \mathbb{R} : F_x^*(\xi) < +\infty\}$ e pela definição da L se $\xi \neq 0$ temos $L(x,\xi) = -\infty$. Assim, basta analisarmos quando $\xi = 0$ e neste caso temos que

$$F_x^*(0) = 2x^2 < +\infty$$

Assim, a Função Primal-Dual associada a $(\mathrm{PR})_1$ é:

$$L(x,\xi) = \begin{cases} -2x^2, \text{ se } \xi = 0 \\ -\infty, \text{ se } \xi \neq 0 \end{cases}$$

Otimização Convexa

Consideramos o seguinte problema de programação não linear [9] dado por:

$$(\mathrm{P}) \min_{y\in K} \psi(y) \text{ tal que } g_i(y) \leq 0 \; i = 1, ..., m$$

onde as funções $\psi, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são convexas e $K \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio convexo fechado tal que $K \cap \{y \in \mathbb{R}^n : g_i(y) \leq 0, i = 1, ..., m\} \neq \emptyset$. Como apresentado, no capítulo anterior, o (PE) associado a (P) é:

$$(\mathrm{P}_1) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{v} = (\bar{x}, \bar{z}) \in E \text{ tal que} \\ \varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \text{ para todo } w = (y, u) \in E. \end{cases}$$

onde $E := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e

$$\varphi(v, w) := \begin{cases} \psi(y) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(g(y) + u) + \delta_K(y), \text{ se } u \in \mathbb{R}^m_+ \\ +\infty, \text{ se } u \notin \mathbb{R}^m_+ \end{cases}$$

A seguir, passamos a encontrar os elementos da teoria dual para esse problema.

Funções Primal-dual e Dual associadas ao problema $(\mathbf{P}_1)$.

Temos que,

$$F_v(w) := \varphi(v, w) = \begin{cases} \psi(y) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(g(y) + u) + \delta_K(y), \text{ se } u \in \mathbb{R}^m_+ \\ +\infty, \text{ se } u \notin \mathbb{R}^m_+ \end{cases}$$

Observe que F_v não depende de v, então podemos retirar v em F_v e F_v^*. Assim, seja $\nu = (\xi, \eta) \in E^* = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ temos que

$$D_\nu = \{v \in D : F_v^*(\nu) < +\infty\} = \{v \in E : F^*(\nu) < +\infty\}$$

Logo, note que $D_\nu \neq \emptyset$ se, e somente se, $F^*(\nu) < +\infty$. Então, temos que $D_\nu = \emptyset$ ou $D_\nu = E$. Este último caso é que nos interessa, pois se $D_\nu = \emptyset$ temos que $L(v, \nu) = -\infty$ para todo $v \in E$, agora se $D_\nu = E$ vale que para todo $v \in E$,

$$L(v, \nu) = -F^*(\nu)$$

Note que pela definição de conjugada convexa temos,

$$F^*(\nu) = \begin{cases} \sup_{w=(y,u)\in E}\{\langle \nu, w\rangle - \psi(y) - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(g(y) + u) - \delta_K(y)\}, \text{ se } u \in \mathbb{R}^m_+ \\ -\infty, \text{ se } u \notin \mathbb{R}^m_+ \end{cases} \tag{3.2}$$

Pela definição da L, concluímos que basta analisarmos a $F^*(\nu) < +\infty$ em $\nu = (0, \eta)$, pois nos outros casos $L(v, \eta) = -\infty$. Logo, por (3.2) temos

$$F^*(0, \eta) = \sup_{w=(y,u)\in E} \{\langle \eta, u\rangle - \psi(y) - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(g(y) + u) - \delta_K(y)\}$$

tomando $s = g(y) + u$ temos $u = s - g(y)$ assim,

$$\begin{aligned} F^*(0,\eta) &= \sup\nolimits_{(y,s)\in E}\{\langle \eta, s - g(y)\rangle - \psi(y) - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(s) - \delta_K(y)\} \\ &= \sup\nolimits_{(y,s)\in E}\{\langle -\eta, g(y)\rangle + \langle \eta, s\rangle - \psi(y) - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(s) - \delta_K(y)\} \\ &= \sup\nolimits_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle -\eta, g(y)\rangle - \psi(y) - \delta_K(y)\} + \sup\nolimits_{s\in\mathbb{R}^m}\{\langle \eta, s\rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(s)\} \end{aligned}$$

Observe que,

$$\sup_{s\in\mathbb{R}^m}\{\langle \eta, s\rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(s)\} = \begin{cases} 0, \text{ se } \eta \geq 0 \\ +\infty, \text{ se } \eta < 0, \end{cases}$$

então temos

$$F^*(0,\eta) = \begin{cases} \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle -\eta, g(y)\rangle - \psi(y) - \delta_K(y)\}, \text{ se } \eta \geq 0 \\ +\infty, \ \eta < 0 \end{cases}$$

Logo, para $F^*(0,\eta) < +\infty$ obtemos

$$F^*(0,\eta) = \sup_{y\in K}\{\langle -\eta, g(y)\rangle - \psi(y)\} \text{ com } \eta \geq 0.$$

Assim, temos a Função Primal-Dual para $(\mathrm{P})_1$ é:

$$L(v,\nu) = L((x,z),(\xi,\eta)) = \begin{cases} \inf_{y\in K}\{\psi(y) + \langle \eta, g(y)\rangle\}, \text{ se } \nu = (0,\eta), \ \eta \geq 0 \\ -\infty, \ \xi \neq 0 \text{ ou } \eta < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

E a Função Dual associada a (P_1) é dada por:

$$g(\nu) = \inf_{v\in E} L((x,z),(\xi,\eta)) = \begin{cases} \inf_{y\in K}\{\psi(y) + \langle \eta, g(y)\rangle\}, \text{ se } \nu = (0,\eta), \ \eta \geq 0 \\ -\infty, \ \xi \neq 0 \text{ ou } \eta < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Portanto, vale o seguinte resultado.

Proposição 3.1. O problema dual (PE) para o problema de otimização convexa é o problema dual lagrangiano clássico.

Demonstração. De fato, de (3.4) segue que $g(\nu) = -\infty$ se $\nu = (\xi,\eta)$ com $\xi \neq 0$ ou $\eta \notin \mathbb{R}^m_+$. Portanto,

$$\sup_{\nu\in E} g(\nu) = \sup_{(\xi,\eta)\in E} g(\xi,\eta) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m_+} g(0,\eta) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m_+}\{\inf_{y\in K}\{\psi(y) + \langle \eta, g(y)\rangle\}\}$$

Isto é, aplicando o esquema dual de (PE) ao problema de otimização convexa encontramos o problema dual lagrangiano clássico. Além disso, note que a função primal-dual (3.3) é igual a função lagrangiana definida em [5]. $\square$

Observação 3.1. Note que quando temos $\bar{v} \in E$ solução de $(\mathrm{P})_1$ verificando a hipótese **(H)**. Assim, para qualquer ν com $\bar{v} \in D_{\nu=(\xi,\eta)}$, ou seja, ponto factível primal-dual temos que pelos cálculos da função primal-dual para $(\mathrm{P})_1$ obtemos $\xi = 0$, $\eta \in \mathbb{R}^m_+$ e

$$L(\bar{v}, \nu) = L((\bar{x}, \bar{z}), (0, \eta)) = \inf_{y \in K}\{\psi(y) + \langle \eta, g(y) \rangle\} \leq \psi(y) + \langle \eta, g(y) \rangle \ \forall\, y \in K \tag{3.5}$$

Como vale **H**, temos ainda pelo teorema (2.13) que exsite $\bar{\nu} = (0, \bar{\eta}) \in E$ com $\bar{\eta} \geq 0$ tal que $(\bar{v}, \bar{\nu})$ é ponto factível primal-dual e $L(\bar{v}, \bar{\nu}) = v(\bar{v}) = \psi(\bar{x})$. Assim, como $\bar{x} \in K$ e $g(\bar{x}) \leq 0$. Logo, em particular para $y = \bar{x}$ em (3.5) temos,

$$L(\bar{v}, \nu) \leq \psi(\bar{x}) + \langle \eta, g(\bar{x}) \rangle \leq \psi(\bar{x}) = v(\bar{v}) = L(\bar{v}, \bar{\nu})$$

Assim, obtemos a desigualdade $L(\bar{v}, \nu) \leq L(\bar{v}, \bar{\nu}) \ \forall\ \nu = (0, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ : \bar{v} \in D_\nu$ da proposição (2.15). Além disso, temos que para qualquer $v \in E$ tal que $v \in D_{\bar{\nu}}$,

$$L(\bar{v}, \bar{\nu}) = L((\bar{x}, \bar{z}), (0, \bar{\eta})) = \inf_{y \in K}\{\psi(y) + \langle \bar{\eta}, g(y) \rangle\} = L((x, z), (0, \bar{\eta}) = L(v, \bar{\nu})) \ \forall\ v \in D_{\bar{\nu}}$$

Então, temos $L(\bar{v}, \bar{\nu}) \leq L(v, \bar{\nu}) \ \forall\ v \in E$. Assim, para o problema de otimização convexa obtemos a seguinte desigualdade quando $\bar{v} \in D_{\bar{\nu}}$:

$$L(\bar{v}, \nu) \leq L(\bar{v}, \bar{\nu}) \leq L(v, \bar{\nu}) \ \forall\ v \in E \ \forall\ \nu \in E : \bar{v} \in D_\nu \tag{3.6}$$

Para finalizar, analisando a desigualdade (3.6) observamos que é igual a definição de ponto de sela encontrada em [5], [12]. Assim, podemos ressaltar que para uma possível definição de ponto de sela para a função primal-dual (2.1) podemos seguir a ideia da desigualdade (3.6), porém ao fazermos essa investigação não conseguimos garantir de modo geral a desigualdade da direita. Então, fica em aberto para futuros trabalhos a definição de ponto de sela para a função primal-dual (2.1).

Considerações Finais

Neste trabalho, introduzimos uma teoria de dualidade para o problema de equilíbrio (PE) baseada no conceito de função conjugada utilizada em [6]. Obtivemos as condições de otimalidade para solução primal-dual e verificamos que o esquema dual preserva propriedades clássicas, como por exemplo, a dualidade fraca.

Mostramos, ainda, que a formulação (PE) inclui, por exemplo, como caso particular o problema de equilíbrio clássico estudado por Blum e Oettli [1] e o problema de equilíbrio estudado por Flores-Bazán [4]. Também, apresentamos alguns exemplos de problemas que podem ser escritos sobre a formulação (PE), como por exemplo, a Desigualdade Variacional estudada por Mosco [8] e a Desigualdade Quasevariacional Generalizada estudada por Morgan e Romaniello [7]. Trazemos um problema que toma valores reais que evidência a condição a) de (PE) que é a generalização da condição de equilíbrio clássica.

Finalizamos, aplicando o esquema dual de (PE) para o problema do Ponto Fixo, para as Desigualdades Variacional e Quasevariacional Generalizada. No caso da aplicação para o problema de Otimização Convexa obtivemos o dual Lagrangiano Clássico.

A seguir, descrevemos linhas de futuras pesquisas que dão continuidade natural a este trabalho:

1. O estudo e aplicação dos conceitos utilizados nesta dissertação em espaços de Banach reflexivos quaisquer;

2. Estudar sobre quais condições temos a definição de ponto de sela para a função primal-dual.

Referências Bibliográficas

[1] Blum, E., Oettli, W. *From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems*, The Math. Student., v.63, n.1-4, 1994, 123-145.

[2] Brasil, E. S. *Um Teorema de Sobrejetividade para Operadores Monótonos Maximais*, Dissertação de Mestrado em Matemática - Otimização, Universidade Federal do Amazonas, 2016.

[3] Burachik, R. S., Iusem, A. N. *Set-valued mappings and enlargements of monotone operators*, Springer, 2008.

[4] Flores-Bazán, F. *"Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasi-convex case*, SIAM Journal on Optimization, v.11, n.3, 2000, 675-690.

[5] Izmailov, A., Solodov, M. *Otimização-volume 1. Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 4 ed., Rio de Janeiro, Brazil, 2020.

[6] Jacinto, F. M., Scheimberg, S. *Duality for Generalized Equilibrium Problem*, Optimization, v. 57, p. 795-805, 2008.

[7] Morgan, J., Romaniello, M. *Generalized quasi-variational inequalities and duality*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4, Issue 2, 2003, Article 28.

[8] Mosco, U. *Dual variational inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 40, 1972, 202-206.

[9] Peressini, A.L., Sullivan, F.E., J.J. Uhl Jr *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer-Verlag Inc. (1988).

[10] Ribeiro, A. A., Karas, E. W. *Um curso de Otimização*, Curitiba, Brazil, 2012.

[11] Taha, H. A., *Pesquisa operacional: uma visão geral*, 8 ed., São Paaulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

[12] Van Tiel, J., *Convex Analysis: an Introductory Text*, John Wiley, 1984.