

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

LINEARIZAÇÃO DE CAMPOS DE VETORES

FELIPE ANDRÉ SILVA DE SOUZA

Manaus - AM
2022

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

LINEARIZAÇÃO DE CAMPOS DE VETORES

por

FELIPE ANDRÉ SILVA DE SOUZA

sob a orientação da

Prof^o. Dr. Hudson do Nascimento Lima

Manaus - AM
2022

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S729l Souza, Felipe André Silva de
Linearização de campos de vetores / Felipe André Silva de Souza
. 2023
74 f.: 31 cm.

Orientador: Hudson do Nascimento Lima
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Linearização . 2. Sistemas dinâmicos . 3. Campos. 4.
Estabilidade . I. Lima, Hudson do Nascimento. II. Universidade
Federal do Amazonas III. Título

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado forças para a conclusão deste trabalho.

A meu avôhai (avô e pai) Francisco Fernandes da Silva, por ter me acompanhado em vida até a metade do mestrado, e em minha memória e coração para todo sempre.

Ao professor Nilomar Vieira de Oliveira, meu grande amigo, mentor e incentivador na matemática.

Ao professor Hudson do Nascimento Lima, pela orientação, conselhos, paciência e boa vontade para realização deste trabalho.

Aos professores Marcus Marrocos e Thiago Drummond por aceitarem participar da banca avaliadora deste trabalho.

A minha família, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

A Larissa Machado Augusto, por toda a força, palavras de conforto e motivação e todo carinho que me proporciona sempre.

Aos professores da pós-graduação, em especial aos professores Thiago Rodrigo Alves, Elkin Quintero, Moacir Aloísio, Dimas Martinez, Maria Rosilene e Jeremias Leão.

Aos meus colegas da pós-graduação, Daniel Reis, Mikaela Ayres, Hamilton Nascimento, Roseane Souza, Vínicius Cavalcante, Roberta Soares, Wanessa Ferreira, pelos momentos compartilhados, dúvidas tiradas e por todo esse percurso que fizemos juntos desde o início da pandemia.

A FAPEAM, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar alguns resultados fundamentais em Sistemas Dinâmicos, principalmente acerca da linearização de campos de vetores, isto é, encontrar conjugações entre o campo e sua parte linear em vizinhanças de determinados pontos. Para iniciar, apresentamos o Teorema da Variedade Estável para campos. Para finalizar, apresentamos o Teorema de Linearização de Poincaré para campos e uma versão do critério de comutatividade de Guillemin-Sternberg para famílias de campos de vetores com ponto crítico nulo em comum. Contamos ainda com um apêndice, apresentando de forma breve os Teoremas de Hartman-Grobman, que mostram de forma definitiva que campos de vetores e difeomorfismos são conjugados às suas derivadas na vizinhança de uma singularidade hiperbólica.

Palavras-chave: Linearização, Campos, Sistemas dinâmicos.

Abstract

This work aims to study some fundamental results in Dynamical Systems, mainly about the linearization of vector fields, that is, to find conjugations between the field and its linear part in the neighborhood of certain points. To start, we present the Stable Manifold Theorem for fields. Finally, we present the Poincaré Linearization Theorem for fields and a version of the Guillemin-Sternberg commutativity criterion for families of vector fields with a common null critical point. We also have a appendix, briefly presenting the Hartman-Grobman Theorems, which show definitively that vector fields and diffeomorphisms are conjugated to their derivatives in the vicinity of a hyperbolic singularity.

Keywords: Linearization, Fields, Dynamical System.

Lista de Símbolos

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $M_n(\mathbb{K})$ denota o espaço das matrizes sobre o corpo $\mathbb{K}$;
- E , F e E' denotam espaços de Banach;
- I denota a aplicação identidade;
- K , C , C_1 , C_2 , $\dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$ ou do espaço de Banach E ;

Sumário

Introdução	10
1 Cálculo em espaços de Banach	14
1.1 Normas e espaços de Banach	14
1.2 Aplicações diferenciáveis	20
1.3 Exponencial de Operadores	30
1.4 Alguns resultados de EDO's lineares	34
2 Campos de Vetores	39
2.1 A Forma Canônica de Jordan	39
2.2 Fluxos lineares e matrizes hiperbólicas	42
2.3 Fluxos de campos e singularidades hiperbólicas	47
2.4 O Teorema da Variedade Estável	51
3 Linearização de Famílias de Campos	57
3.1 O Teorema Formal de Poincaré e o Critério de Gullemin-Sternberg	57
A Os Teoremas de Hartman-Grobman	66
A.1 Os Teoremas de Hartman-Grobman	66
Referencias Bibliograficas	73

Introdução

A teoria de linearização ocupa um importante espaço dentro da ciência em geral, por ser ela a facilitadora da melhor compreensão de diversos fenômenos físicos e matemáticos. O ponto de partida dos estudos de linearização se dá em encontrar um elo, ou uma equivalência entre um sistema qualquer e sua parte linear próxima de algum ponto fixo. Dizemos que um sistema é linearizável se na vizinhança de um ponto fixo, ele é equivalente a sua diferencial.

Muitos trabalhos passaram a ser desenvolvidos nessa linha, e contribuíram muito para o avanço das pesquisas em sistemas dinâmicos e na geometria diferencial. Dentre os matemáticos que mais se destacam em descobertas sobre linearização, estão Henri Poincaré, que talvez seja o pai da teoria com seu Teorema de Linearização, em [21]. Destaque também para Philip Hartman e David M. Grobman que provaram (ver [19,20]) um dos resultados mais fundamentais da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, acerca de linearização de campos e fluxos, hoje conhecido como Teorema de Hartman-Grobman, que afirma que todo campo não linear possui um comportamento análogo a sua parte linear próximo a um ponto fixo hiperbólico (ou singularidade hiperbólica, no caso de campos). Mencionemos também Shlomo Sternberg, com seu teorema de linearização para campos suaves, que foi objeto de estudos e refinamentos por parte de inúmeros matemáticos posteriores a ele. Dentre os matemáticos que foram fundamentais no refinamento do trabalho de Sternberg, K.T Chen foi o que contribuiu de maneira mais definitiva (ver [15]).

Acerca da estabilidade de sistemas dinâmicos, podemos dizer que o Teorema da Variedade Estável é um pilar fundamental para linearização de campos sobre variedades, que aqui, nos limitaremos ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Apesar do forte apelo geométrico deste resultado, podemos resumi-lo afirmando que ele mostra que próximo a uma singularidade

hiperbólica x_0 , o sistema não-linear, para um campo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por

$$x' = f(x) \quad (1)$$

possui as variedades estável e instável, tangentes em x_0 , aos espaços estáveis e instáveis, E^s e E^u do sistema linear

$$x' = Ax \quad (2)$$

onde $A = Df_{x_0}$. Além disso, as variedades estáveis e instáveis possuem a mesma dimensão de E^s e E^u , respectivamente, e se ϕ_t é o fluxo da equação (1), então as variedades estável S e instável U são positivamente e negativamente invariantes sob o fluxo, e satisfazem os limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0; \quad \forall c \in S$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0; \quad \forall c \in U.$$

Vamos aqui, brevemente falar do trabalho de Sternberg, que em [16], provou o seguinte teorema que carrega seu nome

Teorema 0.1 (Teorema da Linearização de Sternberg). *Seja f um campo de vetores de classe C^∞ numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$. Seja $A = Df(0)$ e suponha que*

E1. Cada autovalor λ_i da matriz A satisfaz $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$,

E2. $\lambda_j \neq \sum m_i \lambda_i$, para qualquer inteiro não-negativo m_i tal que $\sum m_i > 1$.

Então existe um difeomorfismo local R em 0 de classe C^∞ tal que $R_ f = DR \circ f \circ R^{-1}$ coincide com a parte linear Ax de f numa vizinhança de 0.*

O teorema afirma basicamente, que um campo de vetores não-linear pode ser linearizado através de uma mudança de coordenadas suave. Este teorema teve diversas outras versões e foi provado por muitos matemáticos em trabalhos bastante populares como Nelson [9] e Sell [10].

Seria natural então procurar uma forma de generalizar o Teorema 0.1 e buscar linearizar mais campos de uma vez em um dado sistema. É aí que entra o trabalho de Elliot-Livingstone [12].

Tomemos um sistema bilinear em $\mathbb{R}^n$ com k entradas constantes dado por

$$y' = \sum_{i=1}^k a_i(t) A_i y \quad (3)$$

e um difeomorfismo real-analítico R definido numa vizinhança da origem tal que $R(0) = 0$ tal que fazendo $y = R(x)$ na equação acima, temos

$$x' = \sum_{i=1}^k a_i(t) f_i(x), \quad (4)$$

onde

$$R_*(x) f_i(x) = A_i R(x). \quad (5)$$

Tomando $f_i(0) = 0$, podemos achar a jacobiana $Df_i(0)$ a partir de 5, o que nos dá $Df_i(0) = R_*^{-1} A_i R_*(0)$, onde chamamos R_* de vetor transformação do campo f_i . Podemos considerar $R_*(0) = I$ e $Df_i(0) = A_i$.

Nosso objetivo aqui será explicar se existe tal difeomorfismo R , numa vizinhança da origem, tal que o sistema (3) se torna equivalente a (4), e que torna válida a equação (5). Reparemos que estamos a falar de uma família de campos f_i , que se anulam em 0, e que geram uma álgebra de Lie que pode ser "transformada" numa álgebra de Lie gerada por suas partes lineares A_i . De forma mais clara, queremos explicar quando podemos linearizar todos os campos f_i em alguma vizinhança de um ponto crítico.

Em 1928, no seu trabalho *Oeuvres*, Henri Poincaré mostrou que dado um campo de vetor real-analítico f , as seguintes condições são suficientes para linearizá-lo:

P1. A matriz jacobiana $Df(0) = A$ é diagonal, com seus autovalores $\{\lambda\}_{i=1}^n$;

P2. Os autovalores λ_i de A não satisfazem a relação de ressonância dada por

$$\lambda_p = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \quad (6)$$

Para inteiros não-negativos k_i tal que

$$\sum_{i=1}^n k_i > 1; \quad (7)$$

P3. A envoltória convexa do conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ não contém 0.

A condição [P2], conhecida como condição de não-ressonância é famosa por estar presente na maioria dos teoremas de linearização conhecidos, como nos já mencionados Sternberg e posteriormente, Chen. Este último, inclusive, conseguiu remover a condição [P1] no seu trabalho *Equivalence and decomposition of vector fields about elementary critical point*, de 1963, e neste texto, ela também não será necessária. A condição [P3] também foi removida por Chen e Sternberg em versões para campos suaves do Teorema de Poincaré. Chamaremos um campo de vetores analíticos que satisfaz [P2] e [P3] de Campos de vetores de Poincaré.

Em 1968, Guillemin e Sternberg provaram que quando o sistema (3) possui uma quantidade suficiente de campos que geram uma álgebra de Lie de dimensão finita, a condição de ser semisimples é suficiente para linearizá-los.

Nosso trabalho, esta dividido em 3 capítulos:

No *Capítulo 1*, apresentamos algumas preliminares e resultados básicos de cálculo diferencial em espaços de Banach. Ainda que nosso interesse aqui sejam os espaços de dimensão finita (em especial o $\mathbb{R}^n$), precisamos dessa generalização para trabalhar com o espaço solução de EDO's. Nossa abordagem segue próxima a de [1, 2, 4, 13].

O *Capítulo 2* é dedicado às noções e resultados básicos acerca de campos vetoriais sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e em especial, o Teorema da Variedade Estável que nos dará uma certa introdução aos resultados de linearização. As principais referências para estes resultados foram [3, 6, 8, 14, 17].

No *Capítulo 3*, estudamos os resultados principais deste trabalho. Começamos com uma prova do Teorema da Linearização de Poincaré e finalizamos com uma extensão do Teorema de Guillemin-Sternberg sobre o critério da comutatividade, seguindo [12].

Ainda apresentamos um breve *apêndice* com uma prova dos já bem difundidos na literatura matemática, Teoremas de Hartman-Grobman para difeomorfismos e para campos, baseada no livro de Palis e Melo [3]

Capítulo 1

Cálculo em espaços de Banach

A fim de deixar o texto o mais auto-contido, apresentamos neste capítulo alguns resultados preliminares da teoria de espaços de Banach que serão utilizados nas demonstrações do teoremas de linearização do no Capítulo 4. Seguiremos principalmente o exposto em Cartan [2] e Chicone [10].

1.1 Normas e espaços de Banach

Consideremos o corpo $\mathbb{K}$ como o corpo dos escalares reais ou complexos, ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nesse texto, consideramos as noções mais elementares acerca de espaços vetoriais, tais como bases, transformações lineares, multilineares e seus respectivos resultados, já válidas e bem entendidas. Destacamos também que se um espaço vetorial E é definido sobre $\mathbb{C}$, podemos defini-lo também sobre $\mathbb{R}$, portanto, dado um produto escalar λx com $x \in E$, podemos considerar simplesmente $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1. Uma **norma** é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ onde são válidas as seguintes propriedades:

- i) $\|x\| \geq 0$;
- ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

Definição 1.2. Um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ equipado com uma norma é chamado de **espaço vetorial normado**, ou simplesmente espaço normado $(E, \|\cdot\|)$.

A menos que a função norma precise ser explicitada, denotaremos um espaço normado simplesmente como E .

Definição 1.3. Uma **métrica** num conjunto E é uma função $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par de elementos $x, y \in E$ ao número real $d(x, y)$, que é chamado de distância de x a y , e satisfazem as seguintes propriedades para todo $x, y, z \in E$:

- 1) $d(x, x) = 0$;
- 2) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$;
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdade triangular)

Da última definição acima, tiramos que um espaço normado é um espaço métrico (conjunto munido de uma métrica) com a métrica induzida pela norma da seguinte maneira, para quaisquer $x, y \in E$

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Definição 1.4. Tomemos $a \in E$ e $r > 0$. Chamamos de **bola fechada** de centro a e raio r , ou simplesmente bola fechada, o conjunto $B[a, r]$ onde

$$d(x, a) \leq r, \text{ ou seja, } \|x - a\| \leq r.$$

Definição 1.5. Um subconjunto $U \in E$ é chamado **aberto** se para todo $a \in U$, podemos obter uma bola $B(a, r)$ inteiramente contida em U . Já um conjunto $V \in E$ é fechado se seu complementar é aberto.

Definição 1.6. Uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ de pontos de E é dita **convergente** em E se existe um $a \in E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

Em outras palavras, dizemos que essa sequência converge para a se $\|x_n - a\| \rightarrow 0$.

Nesse texto já consideramos válidas as principais propriedades de limites de sequências, tais como

i) se $\lim_n x_n = a$ e $\lim_n y_n = b \Rightarrow \lim_n (x_n + y_n) = a + b$.

ii) Se $\lim_n x_n = a$ e $\lim_n \lambda_n = \mu \Rightarrow \lim_n (\lambda_n x_n) = \mu a$.

Definição 1.7. Uma sequência $(x_n)_n$, é chamada **sequência de Cauchy** se $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|x_m - x_n\| = 0$. Ou seja, temos $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tal que

$$(m \geq N \text{ e } n \geq N) \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \epsilon.$$

Sabemos que qualquer sequência convergente é de Cauchy. Se a recíproca é válida, ou seja, se toda sequência de Cauchy é convergente, num espaço normado E , dizemos que E é um espaço métrico completo. Essa última observação abre espaço pra principal definição dessa seção, que será o ambiente de estudos das nossas futuras definições e resultados.

Definição 1.8. Um espaço normado completo, com a métrica definida pela norma, é chamado de **espaço de Banach**. Se o espaço é definido sobre corpo $\mathbb{R}$, o chamamos de espaço de Banach real, se é definido sobre $\mathbb{C}$, o chamamos de **espaço de Banach complexo**.

Daremos a seguir algumas definições adicionais que serão usadas adiante no texto.

Definição 1.9 (Aplicação lipschitziana). Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita **lipschitziana** se existe uma constante $K \geq 0$, chamada de constante de Lipschitz, tal que $d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y), \forall x, y \in M$.

Definição 1.10 (Contração). Seja o espaço métrico (M, d) . Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é chamada de **contração** se existe $0 \leq K < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$.

Sejam E e F dois espaços normados, mostraremos um resultado básico que lista os critérios para que uma aplicação linear $f : E \rightarrow F$ seja contínua, onde E e F são espaços equipados com a topologia induzida por suas normas.

Teorema 1.1. Para uma aplicação linear $f : E \rightarrow F$, as condições abaixo são equivalentes:

i) f é contínua em cada ponto de E ;

ii) f é contínua na origem $0 \in E$;

iii) $\|f\|$ é limitada na bola unitária $B(0, 1) = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$.

Demonstração. Sendo E um espaço vetorial, $0 \in E$, e como f é contínua em cada ponto de E , é claro que $i) \Rightarrow ii)$.

Agora, supondo que f é contínua em 0 , isso implica que, dada uma vizinhança de $0 \in E$, existe alguma bola unitária B_1 , centrada na origem de F tal que $f^{-1}(B_1)$ seja igual a essa vizinhança de 0 . Mais precisamente, existe uma bola $B(0, r) = \{x \in E; \|x\| \leq r\}$, para algum $r > 0$ conveniente, tal que $f^{-1}(B_1) = B(0, r)$. Logo, tomando tal $r > 0$, temos

$$\|x\| \leq r \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1;$$

Então, fazendo $y = xr$, temos

$$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq \frac{1}{r}$$

Pois, $\|y\| \leq r \Rightarrow \|x\| \leq 1$ e $\|f(y)\| = r\|f(x)\| \leq 1$. Isso prova que $ii) \Rightarrow iii)$.

Para provar que $iii) \Rightarrow i)$, usamos a hipótese de f ser limitada na bola unitária centrada na origem, ou seja, $\exists M > 0; \|f(x)\| \leq M; \forall x \in E$. Logo, para qualquer x , devemos ter

$$\|f(x)\| \leq M\|x\|.$$

Devemos mostrar, sob as condições acima que f é contínua em cada ponto $a \in E$. Para isso, notemos que pela linearidade de f , devemos ter $f(x) - f(a) = f(x - a)$, agora tomemos um $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{M}$ tal que $\|x - a\| \leq \epsilon_0$, então

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

o que prova a continuidade de f . □

Teorema 1.2. *Seja E um espaço de Banach, e $u \in \mathcal{L}(E, E)$, onde $\mathcal{L}(E, E)$ é o espaço de todas as aplicações lineares de E em E . Se u é tal que*

$$\|u\| \leq 1,$$

então $1 - u$ tem uma inversa em $\mathcal{L}(E, E)$.

Demonstração. Sabemos que a série

$$\sum_{n \geq 0} u^n = 1 + u + \cdots + u^n + \cdots$$

é convergente pois $\|u^n\| \leq \|u\|^n$, e sabemos de estudos elementares que a série converge se tomarmos $\|u\| \leq 1$, logo $\sum_{n \geq 0} \|u\|^n$ converge. Tomando agora $\sum_{n \geq 0} u^n = v$, temos

$$uv = vu = \sum_{n \geq 1} u^n$$

e

$$v(1 - u) = (1 - u)v = 1,$$

O que mostra que $1 - u$ é a inversa de v . É importante frisar que esse teorema é válido pra qualquer espaço de Banach, e mais geral ainda, em qualquer álgebra de Banach. $\square$

Teorema 1.3. *Se X é um espaço normado arbitrário e E é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(X, E)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Usaremos nesta prova, a norma do sup, definida, para $A \in (X, Y)$, por

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Tomemos a sequência de Cauchy A_n em (X, Y) . Definimos a função $A : X \rightarrow E$, onde, para cada $x \in X$, $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$. Essa definição é coerente, visto que A_n é limitada. Temos que $A_n x$ é uma sequência de Cauchy em Y , pois é limitada e E é espaço de Banach. Tomando $x \in X$ com $x \neq 0$ e $\epsilon > 0$. De fato, escolhendo N tal que para $n, m \geq N$, $\|A_n - A_m\| < \frac{\epsilon}{|x|}$ (tal escolha é possível por A_n ser sequência de Cauchy). Então para $n, m \geq N$,

$$|(A_n - A_m)x| \leq \|A_n - A_m\| |x| < \frac{\epsilon}{|x|} |x| = \epsilon.$$

Para provarmos o teorema, devemos mostrar que:

- (1) A é linear
- (2) A é limitada

(3) $A_n \rightarrow A$, isto é, $\|A_n - A\| \rightarrow 0$.

Para provar (1), observemos que

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1 + x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n x_1 + A_n x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2.$$

A prova de que $A(ax) = aAx$ para algum escalar a , é similar.

Para provar (2), usamos o fato de A_n ser de Cauchy, portanto é limitada, o que implica que existe um número $C > 0$ tal que $\|A_n\| \leq C$, para qualquer n . Portanto, para qualquer n e qualquer $x \in X$, temos $|A_n x| \leq C|x|$. Disto, temos pra qualquer $x \in X$ fixo,

$$|Ax| = \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n x| \leq C|x|.$$

Portanto, A é limitada.

Para provar (3), tomemos $\epsilon > 0$. Como A_n é de Cauchy, há um número N tal que para $n, m > N$, $\|A_n - A_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando $n \geq N$, afirmamos que $\|A_n - A\| \leq \epsilon$, o que prova o resultado. Melhor detalhado, tomemos $x \in X$ com $|x| = 1$. Devemos mostrar que $|(A_n - A)x| \leq \epsilon$. Escolhendo $m \geq N$ tal que $|A_m x - A_n x| < \frac{\epsilon}{2}$, então

$$\begin{aligned} |(A_n - A)x| &= |A_n x - Ax| \leq |A_n x - A_m x| + |A_m x - Ax| = |(A_n - A_m)x| + |A_m x - Ax| \\ &\leq \|A_n - A_m\| |x| + |A_m x - Ax| \\ &= \|A_n - A_m\| + |A_m x - Ax| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Definição 1.11. *Seja U um aberto do espaço de Banach E , V um aberto do espaço de Banach F e $T : U \times V \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Dizemos que T é uma **contração uniforme** se existe um número λ com $0 < \lambda < 1$, tal que para todo $x \in U$ e para todos $y, y' \in V$, temos*

$$\|T(x, y) - T(x, y')\| \leq \lambda |y - y'|.$$

1.2 Aplicações diferenciáveis

Aqui, consideramos sempre E e F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. As principais referências para esta seção foram [2,14].

Definição 1.12. *Seja U um aberto contido em E . Uma aplicação $f : U \rightarrow F$ é **diferenciável** em $a \in U$ se existe uma aplicação linear contínua $Df(a) : E \rightarrow F$, chamada de derivada de f em a , tal que:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\| = 0.$$

Pela definição acima, temos que f é diferenciável em U se for diferenciável em todos os pontos de U , onde

$$\begin{aligned} Df & : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x & \mapsto Df(x). \end{aligned}$$

é chamada **diferencial de f em U** .

Neste texto apenas enunciaremos e tomamos como válidas as principais propriedades de diferenciais em espaços de Banach. Seguem os enunciados.

Teorema 1.4. *Sejam E, F, H, E_i e F_i , para $i = 1, 2, \dots$ espaços de Banach. Valem as propriedades:*

- (a) *se $f : E \rightarrow F$ é diferenciável em a , então f é contínua em a .*
- (b) *Se $f : E \rightarrow F$ e $g : F \rightarrow H$ diferenciáveis, então $h = g \circ f$ é diferenciável e sua derivada é dada pela regra da cadeia*

$$Dh(x) = Dg(f(x))Df(x).$$

- (c) *Sejam as funções $f_1 : E \rightarrow Y_1, \dots, f_n : E \rightarrow Y_n$ e $f : E \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ dada por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, então f é contínua se, e somente se, $f_1, f_2, \dots, f_n$ são contínuas.*

- (d) *Se $T : E \rightarrow F$ é uma transformação linear contínua, então $DT(x) = T, \forall x \in E$.*

Definição 1.13 (Derivadas Parciais). *Sejam os espaços de Banach F , $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ e $U \subseteq E$, um aberto. Tomemos $f : U \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Para cada $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$, consideramos a aplicação injetiva $\lambda_i : E_i \rightarrow E$ definida por*

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

*A aplicação composta $f \circ \lambda_i$ está definida no aberto $(\lambda_i)^{-1}(U) \in E_i$ tal que ela contém $a_i \in E_i$. A diferencial $f \circ \lambda$ é chamada de i -ésima **derivada parcial** de f no ponto a .*

Para escrever as derivadas parciais de f no ponto a , aplicada num ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ usaremos as notações $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ com $i = 1, 2, \dots, n$ ou $D_i f$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Enunciaremos agora alguns resultados fundamentais na teoria de aplicações diferenciáveis em espaços de Banach.

Teorema 1.5 (Primeira desigualdade do valor médio). *Seja F um espaço de Banach e $f : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se $\|f'(t)\| \leq M$, $\forall t \in (a, b)$, então $\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a)$.*

Teorema 1.6 (Segunda desigualdade do valor médio). *Sejam E, F espaços de Banach, U aberto de E e a aplicação $f : U \rightarrow F$. Se o segmento de reta fechado $[a, a + h] \in U$ é tal que f seja diferenciável em todo o aberto $(a, a + h)$, então*

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq |h| \cdot \sup_{0 < t < 1} \|Df\|.$$

Do último teorema acima, obtemos

Corolário 1.7. *Seja $U \in F$ aberto e convexo. Se $f : U \rightarrow F$ é diferenciável com $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então f é lipschitziana, com $\|f(y) - f(x)\| \leq M\|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in U$.*

Demonstração. Pela convexidade, f é contínua em U e dado $x, y \in U$, temos $[x, y] \in U$. A propriedade de lipschitz segue imediatamente da desigualdade do valor médio. $\square$

Teorema 1.8 (Teorema da Função Implícita). *Sejam, E, F e E' espaços de Banach, $U \subset E$ e $V \subset F$ abertos e $(x_0, y_0) \in U \times V \rightarrow E'$ de classe C^k , $k \geq 1$ com $f(x_0, y_0) = 0$ e $D_1 f(x_0, y_0)$ inversível com inversa limitada. Então existe uma vizinhança aberta $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ de (x_0, y_0) e $\gamma : V_0 \rightarrow U_0$ de classe C^k tais que $f(\gamma(y), y) = 0, \forall y \in V_0$. Mais precisamente, temos que $f(x, y) = 0$, com $(x, y) \in U_0 \times V_0$ se, e somente se $x = \gamma(y)$.*

Teorema 1.9 (Teorema fundamental do cálculo). *Sejam E e F espaços de Banach, um aberto $U \subset E$ e o segmento de reta $[x, y]$ com extremidades $x, y \in U$. Tomemos uma função de classe C^1 , $f : U \rightarrow F$ e supomos, para $x, y \in U$, $[x, y] \subset U$. Então*

$$f(x + y) = f(x) + \int_0^1 Df(x + ty)y \, dt.$$

Demonstração. Definimos $\phi : [0, 1] \rightarrow F$ por $\phi(t) = f(x + ty)$, então pela regra da cadeia, temos $\phi'(t) = y.Df(x + ty)$.

Agora definimos $\psi : [0, 1] \rightarrow F$, por

$$\psi(t) = f(x) + \int_0^t f(x + sy)ds.$$

Para $0 < t < 1$, temos $\psi'(t) = y.Df(x + ty)$. Pelo corolário acima e pela continuidade de Df , temos que $\psi - \phi$ é constante pela continuidade de ϕ e ψ sobre $[0, 1]$, então $\psi - \phi$ é constante sobre $[0, 1]$. Como $\phi = \psi = 0$, então $\phi(1) = \psi(1)$. $\square$

Continuamos agora com alguns resultados menos elementares que serão ferramentas utilizadas em importantes provas futuras.

Teorema 1.10. *Suponha E um espaço de Banach, $H : [a, b] \rightarrow E$, e $H'(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Então H é constante.*

Demonstração. Tomemos $\epsilon > 0$ e $I_\epsilon = \{t \in [a, b]; |H(t) - H(a)| \leq \epsilon(t - a)\}$. Precisamos mostrar que $I_\epsilon = [a, b]$. Uma vez provada essa igualdade, tomemos $t \in (a, b]$. Então para todo $\epsilon > 0$, $t \in I_\epsilon$. Segue então que $|H(t) - H(a)| = 0$, o que implica em $H(t) = H(a)$.

Para provar que $I_\epsilon = [a, b]$ precisamos seguir os seguintes passos:

1. Se H é diferenciável, logo é contínua. Tomemos $J_\epsilon = [a, b] - I_\epsilon$. Por H ser contínua, J_ϵ é aberto em $[a, b]$
2. Assumindo que J_ϵ não é vazio e encontrando uma contradição.

O item 1. é simples de ser mostrado. Para o item 2., assumimos que J_ϵ é vazio e $c = \inf J_\epsilon$. Como J_ϵ é aberto, não podemos ter $c = b$ o que nos leva a assumir $c < b$. Notemos que se $c = a$, então $c \in I_\epsilon$. Se $c > a$, não teremos $c \in J_\epsilon$, pois J_ϵ é aberto em $[a, b]$, então $c \in I_\epsilon$. Concluimos assim que $c \in J_\epsilon$.

Como $H'(c) = 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que se $c < t < c + \delta$, então $|H(t) - H(c)| < \epsilon(t - c)$. Para tal t ,

$$|H(t) - H(a)| \leq |H(t) - H(c)| + |H(c) - H(a)| < \epsilon(t - c) + \epsilon(c - a) = \epsilon(t - a).$$

Portanto se $c \leq t \leq c + \delta$, então $c \in I_\epsilon$. Isso contraria o fato de termos assumido $c = \inf J_\epsilon$. $\square$

Uma importante consequência do teorema 1.2 é dada a seguir:

Teorema 1.11. *Sejam E e F espaços de Banach. Chamamos $Isom(E, F)$ o subconjunto de $\mathcal{L}(E, F)$ de todos os isomorfismos de $E \rightarrow F$, então:*

- a) $Isom(E; F)$ é um conjunto aberto em $\mathcal{L}(E, F)$;*
- b) a aplicação $u \mapsto u^{-1}$ de $Isom(E; F)$ a $\mathcal{L}(F, E)$ é contínua.*

Demonstração. Primeiramente, precisamos considerar que $Isom(E, F)$ pode ser vazio, no caso, se os espaços E e F não forem isomorfos, o que torna a validade do teorema essencialmente trivial. Agora consideremos $Isom(E, F)$ não vazio e tomemos $u_0 \in Isom(E, F)$. Para provar a propriedade a) precisamos mostrar que qualquer $u \in \mathcal{L}(E, F)$ suficientemente próximo de u_0 ainda é um isomorfismo. Para que $u : E \rightarrow F$ seja, de fato, um isomorfismo, é necessário e suficiente que

$$(u_0)^{-1}u : E \rightarrow E$$

seja um isomorfismo. Para que $(u_0)^{-1}u$ seja um isomorfismo, ele precisa estar em $\mathcal{L}(E, E)$ e possuir uma inversa. Tomemos

$$(u_0)^{-1}u = 1 - v$$

Basta termos que $\|v\| < 1$ de acordo com o teorema anterior. Nós temos $v = 1 - u_0^{-1}u = (u_0)^{-1}(u_0 - u)$, então

$$\|v\| \leq \|u_0^{-1}\| \|u - u_0\|. \quad (1.1)$$

O que nos dá

$$\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}. \quad (1.2)$$

Fica claro que $\|v\| < 1$ e que u é um isomorfismo, provando assim a primeira propriedade do teorema, dado um u suficientemente próximo a u_0 . Agora resta provar o item b). Seja

$$u^{-1} = (u_0(1 - v))^{-1} = (1 - v)^{-1}(u_0)^{-1},$$

Logo

$$u^{-1} - (u_0^{-1}) = [(1 - v)^{-1} - 1](u_0)^{-1}, \quad (1.3)$$

Mas, temos que

$$(1 - v)^{-1} = \sum_{n \geq 0} v^n, \text{ portanto } (1 - v)^{-1} - 1 = \sum_{n \geq 1} v^n,$$

$$\|(1 - v)^{-1} - 1\| \leq \|u_0^{-1}\| \leq \sum_{n \geq 1} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}$$

Logo, a equação (1.3) implica

$$\|u^{-1} - (u_0)^{-1}\| \leq \|u_0^{-1}\| \frac{\|v\|}{1 - \|v\|} \quad (1.4)$$

Enquanto u se aproxima de u_0 , $\|v\|$ se aproxima de 0, por conta da equação (1.2). Consequentemente, u^{-1} se aproxima de $(u_0)^{-1}$ por conta da desigualdade acima, provando então que u^{-1} é uma função contínua de u se u permanece em $Isom(E, F)$. O teorema está provado. $\square$

Agora, já admitindo que toda contração tem um ponto fixo, temos o seguinte resultado fundamental:

Teorema 1.12 (Contração Uniforme com Parâmetros). *Seja $T : U \times V \rightarrow V$ uma contração uniforme. Tome $g(x)$ como o único ponto fixo da aplicação $T(x, \cdot)$ de V em V . Então:*

1) g é contínua;

2) Se T é de classe C^1 , então g é de classe C^1 e $Dg(x) = (I - D_2T(x, g(x)))^{-1} D_1T(x, g(x))$.

Demonstração. Precisamos provar que:

1) g é contínua.

2) Se T é de C^1 , então g é localmente lipshchitziana.

3) Se T é C^1 , então g é diferenciável, e $Dg(x)$ é dada pela fórmula no enunciado.

O passo 3 implica que g é C^1 .

Para provar que g é contínua, obersemos que

$$\begin{aligned} |g(x') - g(x)| &= |T(x', g(x')) - T(x, g(x))| \\ &\leq |T(x', g(x')) - T(x', g(x))| + |T(x', g(x)) - T(x, g(x))| \\ &\leq \lambda |g(x') - g(x)| + |T(x, g(x)) - T(x, g(x))|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|g(x) - g(x)| \leq (1 - \lambda)^{-1} |T(x, g(x)) - T(x, g(x))|. \quad (1.5)$$

Agora fixemos $x \in U$. Pela continuidade de T , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x| < \delta \Rightarrow |T(x', g(x)) - T(x, g(x))| < (1 - \lambda)\epsilon$. Pela desigualdade acima e por (1.5), se $|x' - x| < \delta$, então $|g(x') - g(x)| < \epsilon$. Consequentemente g é contínua em x , que é um ponto arbitrário, portanto, provamos a continuidade de g .

Para provar o passo 2, consideramos que se T é de classe C^1 , então g é localmente lipschitziana. Faremos da seguinte forma: Assumimos que T é C^1 . Tomemos $x_0 \in U$ e escolhemos $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tal que $|x - x_0| < \epsilon$ e $|y - g(x_0)| < \epsilon$ então $(x, y) \in U \times V$ e $\|D_1T(x, y)\| \leq C$. Agora, tomemos δ tal que $0 < \delta < \epsilon$, tal que se $|x - x_0| < \delta$ então $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$, o que é possível pela continuidade de g . Agora tomemos $|x - x_0| < \delta$ e $|x' - x_0| < \delta$. Usando a equação (1.5), temos

$$|g(x') - g(x)| \leq (1 - \lambda)^{-1} |T(x', g(x)) - T(x, g(x))| \leq (1 - \lambda)^{-1} C |x' - x|.$$

Portanto, numa vizinhança δ de x_0 , g é lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $(1 - \lambda)^{-1}C$. Como x_0 é arbitrário, g é localmente lipschitziana.

Para o terceiro passo, precisamos verificar se T é de classe C^1 , então g é de classe C^1 e $Dg(x) = (I - D_2T(x, g(x)))^{-1}D_1T(x, g(x))$. Para isso, tomemos $A(x) = (I - D_2T(x, g(x)))^{-1}D_1T(x, g(x))$, isto é, $A(x)$ é a única solução da equação $A = D_1T(x, g(x)) +$

$D_2T(x, g(x))A$. Devemos mostrar que $Dg(x) = A(x)$.

$$\begin{aligned}
 g(x+h) - g(x) - A(x)h &= T(x+h, g(x+h)) - T(x, g(x)) \\
 &\quad - (D_1T(x, g(x)) + D_2T(x, g(x))A(x))h \\
 &= T(x+h, g(x+h)) - T(x+h, g(x)) - D_2T(x, g(x))A(x)h \\
 &\quad + T(x+h, g(x)) - T(x, g(x)) - D_1T(x, g(x))h \\
 &= \left(\int_0^1 D_2T(x+h, g(x) + s(g(x+h) - g(x)))ds \right) (g(x+h) - g(x)) \\
 &\quad - D_2T(x, g(x))A(x)h + \left(\int_0^1 D_1T(x+sh, g(x))ds \right) h - D_1T(x, g(x))h \\
 &= D_2T(x, g(x))(g(x+h) - g(x) - A(x)h) \\
 &\quad + \left(\int_0^1 D_2T(x+h, g(x) + s(g(x+h) - g(x)))ds \right) (g(x+h) - g(x)) \\
 &\quad + \left(\int_0^1 D_1T(x+sh, g(x)) - D_1T(x, g(x))ds \right) h
 \end{aligned}$$

Agora estimamos $|g(x+h) - g(x) - A(x)h|$ como fizemos em $|g(x') - g(x)|$ no passo 1 dessa prova, e estimamos as duas integrais. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
 |g(x+h) - g(x) - A(x)h| &\leq (1-\lambda)^{-1} \left(\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} \|D_2T(x+h, g(x) + s(g(x+h) - g(x))) - D_2T(x, g(x))\| \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} \|D_1T(x+sh, g(x)) - D_1T(x, g(x))\| \right) \right) |h|.
 \end{aligned}$$

Como g é localmente lipschitziana, temos $|g(x+h) - g(x)| \leq C|h|$. Para algum $|h|$ suficientemente pequeno, os dois supremos acima podem ser tomados tão pequenos quanto quisermos, digamos menos que um ϵ arbitrário,

$$|g(x+h) - g(x) - A(x)h| \leq (1-\lambda)^{-1}(\epsilon C + \epsilon)|h|.$$

Consequentemente, teremos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x) - A(x)h}{|h|} = 0$$

logo, $Dg(x) = A(x)$. □

Teorema 1.13 (Teorema da Perturbação da Identidade). *Seja E um espaço de Banach,*

$I : E \rightarrow E$ a aplicação identidade em E e $\phi : E \rightarrow E$ uma contração em E . Então $I + \phi$ é um homeomorfismo sobre E .

Demonstração. Sejam $x, y \in E$ e $h = I + \phi$. Seja $0 < \lambda < 1$ a constante de Lipschitz de ϕ . Temos que

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\| &= \|x + \phi(x) - y - \phi(y)\| \geq \|x - y\| + \|\phi(x) - \phi(y)\| \\ &\geq \|x - y\| - \lambda\|x - y\| \\ &= (1 - \lambda)\|x - y\| \end{aligned}$$

provando a injetividade de h e, se existir, a continuidade de sua inversa. Nos resta provar a sobrejetividade de h . Tomemos $z \in E$. Definimos a função $f_z : E \rightarrow E$, definida por $f_z(x) = z - \phi(x)$.

$$\|f_z(x) - f_z(y)\| \geq \|z - \phi(x) - z + \phi(y)\| = \|\phi(y) - \phi(x)\| \geq \lambda\|x - y\|$$

Com $\lambda < 1$. Como f_z é uma contração, existe um único ponto fixo q para f_z , onde $z - \phi(q) = q \Rightarrow (I + \phi)q = z$, o que nos dá a sobrejetividade de h . A continuidade de h é imediata, visto que ϕ é uma contração (portanto, contínua) somada a identidade. $\square$

Lema 1.14 (Lema da perturbação de isomorfismos). *Seja E um espaço de Banach e L um isomorfismo tal que $\|L\| \leq a < 1$ e G um isomorfismo com $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Então:*

$$1. (I + L) \text{ é um isomorfismo com } \|(I + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1-a)}$$

$$2. (I + G) \text{ é um isomorfismo com } \|(I + G)^{-1}\| \leq \frac{a}{(1-a)}$$

Demonstração. Seja $y \in E$ fixo. Definimos $u : E \rightarrow E$ por:

$$u(x) = y - L(x)$$

Dessa forma, temos

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| = \|L(x_1) - L(x_2)\| \leq a\|x_1 - x_2\|$$

O que mostra que u é uma contração. Pelo fato de E ser um espaço de Banach, o teorema do ponto fixo em contrações é válido, portanto, u tem um único ponto fixo, logo, existe um $z \in E$ tal que $y - L(z) = z$, logo, $y = (I + L)z$, o que nos dá a sobrejetividade de $I + L$.

Além disso, se $(I + L)x_1 = (I + L)x_2$, $x_1 + L(x_1) = x_2 + L(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = L(x_2 - x_1)$, logo $x_1 = x_2$. Caso contrário, teríamos $\|L\| \geq 1$, o que é absurdo. Portanto, $I + L$ é de fato, um isomorfismo.

Seja $y \in E$ com $\|y\| = 1$, e seja $x \in E$ tal que $x = (I - L)^{-1}(y)$. Como $x + L(x) = y$, temos que $x = y - L(x)$. Aplicando a desigualdade triangular e sabendo que $\|L\| = a < 1$, temos que

$$\|x\| \leq 1 + a\|x\|$$

De onde podemos concluir que $\|x\|(1 - a) \leq 1 \Rightarrow \|x\| \leq \frac{1}{(1-a)}$, o que conclui a prova do item 1. Para o item 2., é suficiente vermos que $(I + G) = G(I + G^{-1})$. Como $\|G^{-1}\| \leq a < 1$, temos, pelo item anterior, que $I + G^{-1}$ é inversível. Por hipótese, G é um isomorfismo, portanto, $I + G$ também o é. Logo, $(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1}G^{-1}$, de onde vem

$$\|(I + G)^{-1}\| \leq \|(I + G^{-1})^{-1}\| \cdot \|G^{-1}\| \leq \frac{a}{1 - a}$$

O que conclui a demonstração. □

Uma consequência do lema acima será enunciado abaixo. A prova pode ser encontrada em Castro [6].

Corolário 1.15 (da perturbação de isomorfismo). *Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um isomorfismo linear. Seja $\phi : E \rightarrow F$ uma função de Lipschitz tal que a constante $Lip(\phi) < (\|T^{-1}\|)^{-1}$. Então $T + \phi : E \rightarrow F$ é um homeomorfismo.*

Lema 1.16. *Seja E um espaço de Banach, $X : U \subset E \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$ definida no aberto U contendo a origem tal que $X(0) = 0$ e seja $A = DX(0)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U da origem tal que $X|_U$ é da forma $A + \psi$, onde ψ é uma aplicação contínua, limitada e lipschitziana em E com constante de Lipschitz limitada por ϵ .*

Demonstração. Definimos uma função $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 0, \text{ se } t \geq 1 \\ \beta(t) &= 1, \text{ se } t \leq \frac{1}{2} \\ |\beta'(t)| &\leq K, \forall t \in \mathbb{R}, K > 2 \end{aligned}$$

Tal função β é conhecida como *bump function*.

Existe uma aplicação ϕ tal que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi(0) = 0$ e $D\phi(0) = 0$, pois temos na hipótese que $Df(0) = A$. Consideremos agora uma bola aberta $B(0, r)$, tal que $D\phi(x) < \frac{\epsilon}{2K}$, $\forall x \in B(0, r)$. Uma vez que ϕ é uma função diferenciável, ao menos de classe C^1 , pois f e A são e também $D\phi(0) = 0$. Definimos então

$$\psi(x) = \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x)$$

Daí $\psi(x) = 0$ se $\|x\| \geq r$, implicando assim que ψ é limitada em E , uma vez que $\|\psi\| \leq \|\phi\|$, e usando a desigualdade do valor médio, temos que para $\phi|_{B(0, r)}$, a constante de Lipschitz é menor que $\frac{\epsilon}{2K}$, portanto temos

$$|\psi(x)| \leq |\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| \leq \frac{\epsilon}{2K} \|x - 0\| \leq \frac{\epsilon}{2K} r, \quad \forall x \in B(0, r).$$

Como $\psi(x) = \phi(x)$ se $\|x\| \leq \frac{r}{2}$, temos que $A + \psi$ é uma extensão de $f|_{B(0, \frac{r}{2})}$. Temos também que ψ é lipschitziana. Com efeito, sejam $x_1, x_2 \in B(0, r)$.

$$\begin{aligned} |\psi(x_1) - \psi(x_2)| &= \left| \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\phi(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\phi(x_2) \right| \\ &= \left| \left(\beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) \right) \phi(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) (\phi(x_2) - \phi(x_1)) \right| \\ &\leq \left| \left(\beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) \right) \phi(x_1) \right| + \left| \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) (\phi(x_2) - \phi(x_1)) \right| \\ &\leq K \left| \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \right| \frac{\epsilon}{2K} \|x_1\| + \frac{\epsilon}{2K} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{r} \frac{\epsilon}{2} r + \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| \\ &= \epsilon \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

O caso em que $x_1 \in B(0, r)$ e $x_2 \notin B(0, r)$, usaremos um raciocínio bem parecido.

$$\begin{aligned} |\psi(x_1) - \psi(x_2)| &= \left| \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\phi(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\phi(x_2) \right| \\ &\leq \left| \left(\beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \right) \phi(x_1) \right| + \left| \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) (\phi(x_2) - \phi(x_1)) \right| \\ &\leq K \left| \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \right| \frac{\epsilon}{2K} \|x_1\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{r} \frac{\epsilon}{2} r \\ &\leq \epsilon \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Agora basta analisarmos o caso $x_1 \notin B(0, r)$ e $x_2 \notin B(0, r)$

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| = 0 \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

□

1.3 Exponencial de Operadores

Nesta seção, apresentamos alguns resultados preliminares da teoria das exponenciais, que serão aplicadas ao estudo das equações diferenciais lineares em espaços de dimensão finita, que serão o pilar para o bom entendimento das demonstrações apresentadas no decorrer deste texto. Seguimos próximo ao exposto em Claus & Ivo [1] e Sotomayor [4].

Seja E um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}(E, E)$, o espaço dos automorfismos $T : E \rightarrow E$, onde o elemento neutro da soma de operadores é o operador *nulo* $T := 0$ e o elemento neutro da composição de operadores é a chamado *operador identidade*, que denotaremos como $T := I$. Um operador $B \in \mathcal{L}(E, E)$ é chamado *inverso* de $T \in \mathcal{L}(E, E)$ se $BT = TB = I$. Aqui, escreveremos $B = T^{-1}$.

O espaço $\mathcal{L}(E, E)$ é um espaço de Banach se equipado com a ***norma do operador***, assim definida para algum $T \in \mathcal{L}(E, E)$,

$$\|T\| = \sup_{|x| \leq 1} |Tx| = \sup_{|x|=1} |Tx|$$

onde $|\cdot|$ é uma norma de E . A norma do operador é conveniente, pois aliada ao produto dos operadores, vale a importante propriedade

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\|, .$$

para $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$, de onde podemos deduzir indutivamente para $m \geq 0$ que

$$\|T^m\| \leq \|T\|^m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Passemos agora as primeiras definições formais.

Definição 1.14. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Definimos $e^T = \exp T$ como*

$$e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n; \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

Notemos que a séria acima converge em $\mathcal{L}(E, E)$ com a norma do operador, pois

$$\|e^T\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} T^n \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{n!} = e^{\|T\|}.$$

Definição 1.15. *Dados dois operadores, $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$, dizemos que eles são **conjugados** (semelhantes) se existe um operador invertível $Q \in \mathcal{L}(E, E)$ tal que $TQ = QS$, o que implica em*

$$T = QSQ^{-1}.$$

Dizemos que Q conjugua T e S .

Com essas definições, abrimos caminho para nosso primeiro resultado desta seção.

Teorema 1.17. *Sejam $T, S, Q \in \mathcal{L}(E, E)$. Se T e S são conjugadas por Q , então, Q conjugua e^T e e^S .*

Demonstração. O teorema basicamente diz que

$$TQ = QS \Rightarrow e^T Q = Qe^S$$

Portando, temos que $T^2Q = TTQ = TQS = SQQ = S^2Q$. Aplicando esse passo indutivamente para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$T^n Q = QS^n$$

logo,

$$\begin{aligned} e^T Q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^x \frac{1}{n!} T^n \right) Q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^x \frac{1}{n!} T^n Q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^x \frac{1}{n!} QS^n \\ &= Q \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^x \frac{1}{n!} S^n \right) \\ &= Qe^S \end{aligned}$$

O que prova o teorema. □

Antes de apresentarmos algumas propriedades da definição de exponencial de operadores, enunciamos o seguinte lema de análise na reta, cuja demonstração pode ser vista em Rudin [22]

Lema 1.18. *Suponha*

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A_n$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B_n$
- d) $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A_n B_n$$

Ou seja, o produto de duas séries convergentes ainda é convergente.

Agora as propriedades

Teorema 1.19. *Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$ temos*

- 1. *Se T e S comutam, então*

$$e^{T+S} = e^T e^S$$

- 2. *A matriz e^T é invertível, onde*

$$e^0 = I \quad e(e^T)^{-1} = e^{-T}.$$

- 3. *A função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ dada por $\phi(t) = e^{tT}$, com $t \in \mathbb{R}$, é diferenciável, com*

$$\phi'(t) = T e^{tT}.$$

- 4. *Se $C = \lambda I$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, então e^C também é diagonal.*

- 5. *Se λ é autovalor de T , então e^λ é autovalor de e^T .*

Demonstração. 1. Como T e S comutam, temos que

$$\frac{(T+S)^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{T^i S^{n-i}}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} \frac{S^{n-i}}{(n-i)!}$$

Teremos

$$e^{T+S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T+S)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} \frac{S^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} = e^T e^S.$$

2. Segue diretamente de 1., pois, fazendo $S = -T$, temos

$$e^{T-T} = e^0 = I$$

portanto,

$$(e^T)^{-1} = e^{-T}$$

3. observemos que

$$\begin{aligned} \phi'(t) = \frac{d}{dt}e^{tT} &= \frac{d}{dt}\left(I + tT + \frac{t^2T^2}{2!} + \frac{t^3T^3}{3!} \dots\right) \\ &= 0 + T + \frac{2tT^2}{2!} + \frac{3t^2T^3}{3!} + \dots \\ &= T + \frac{tT^2}{1!} + \frac{t^2T^3}{2!} + \frac{t^3T^4}{4!} + \dots \\ &= T\left(I + \frac{tT}{1!} + \frac{t^2T^2}{2!} + \frac{t^3T^3}{3!} + \dots\right) \\ &= Te^{tT}. \end{aligned}$$

Vale notar que T e e^{tT} comutam, portanto $Te^{tT} = e^{tT}T$.

4. Imediata da definição de exponencial aplicada a um operador definido como C do item 4. arbitrário.
5. Seja $T \in \mathcal{L}(E, E)$, e $v \in E$.

Por definição, existe um vetor não-nulo de E e um escalar λ tal que

$$Tv = \lambda v$$

Chamamos v e λ de autovetor e autovalor, respectivamente, do operador T .

Podemos definir para λ , a sua exponencial como

$$e^\lambda = 1 + e + \frac{e^2}{2!} + \frac{e^3}{3!} + \dots$$

Agora dado $v \in E$, temos

$$\begin{aligned}
 e^T v &= (1 + A + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \dots)v \\
 &= (v + Tv + \frac{T^2 v}{2!} + \frac{T^3 v}{3!} + \dots) \\
 &= (v + \lambda v + \frac{\lambda^2 v}{2!} + \frac{\lambda^3 v}{3!} + \dots) \\
 &= (I + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots)v \\
 &= e^\lambda v.
 \end{aligned}$$

□

1.4 Alguns resultados de EDO's lineares

Nesta seção, consideremos $E = \mathbb{K}^n$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e $M_n(\mathbb{K})$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n . Seja uma EDO linear autônoma escrita na forma

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1.7}$$

onde $x(t)$ é um vetor-coluna de $\mathbb{K}^n$ dependente de $t \in \mathbb{K}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$ com coeficientes constantes.

Ou simplesmente

$$x' = Ax \tag{1.8}$$

Dizemos que um caminho $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ é uma solução de (1.8) se φ é diferenciável em toda reta e, $\forall t \in \mathbb{R}$, temos

$$\varphi'(t) = A\varphi(t)$$

Neste texto, consideramos já válido o teorema da existência e unicidade de soluções, aqui enunciado como:

Teorema 1.20. *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Para cada $x_0 \in \mathbb{K}^n$, existe uma única solução da equação $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$.*

Definição 1.16. *Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é **diagonalizável** se é conjugada (semelhante) a uma matriz diagonal.*

É importante salientar que a conjugação ($\sim$) é uma relação de equivalência em $M_n(\mathbb{K})$, ou seja, para $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$, valem:

a) $A \sim A$.

b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

c) $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Note que dado um conjunto de soluções, podemos obter uma base $\mathbf{B}$ de todas as soluções de $x' = Ax$ para A diagonalizável. Mais explicitamente, temos

Teorema 1.21. *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz diagonalizável e $Q, D \in M_n(\mathbb{K})$, com Q invertível e $Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Escrevendo $Qe_i = v_i$, para $1 \leq i \leq n$ o caminho $w_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ dado por*

$$w_i(t) = e^{\lambda_i t} Qe_i = e^{\lambda_i t} v_i, \text{ com } t \in \mathbb{R},$$

é solução de $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = v_i$. Além disso, podemos escrever qualquer solução φ de $x' = Ax$ como combinação linear de (w_i) , com $1 \leq i \leq n$, ou seja:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n l_i s_i(t) = \sum_{i=1}^n l_i e^{\lambda_i t} v_i$$

é a única solução da equação de $x' = Ax$ com $x(0) = \sum l_i v_i = Q(l_1, \dots, l_n)$.

Seja uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $v \neq 0 \in \mathbb{K}^n$, seu autovetor associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. Sabemos que cada coluna da matriz Q é formada por um autovetor de v de A . Mais precisamente, se $Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, pelo resultado anterior, cada vetor coluna $Qe_i = v_i$, da matriz Q , onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{K}^n$, cria uma solução pertencente a base de soluções da equação $x' = Ax$. Agora, observando que $De_i = \lambda_i e_i$, temos

$$Av_i = AQe_i = QDe_i = Q\lambda_i e_i = \lambda_i Qe_i = \lambda_i v_i$$

Isso significa que cada vetor coluna de Q , a matriz que conjuga A com uma matriz diagonal D , é um autovetor de A . Isso leva a um importante resultado que diz que quaisquer autovetores da matriz operador A geram soluções da equação $x' = Ax$, mais geral ainda, essas soluções independem do fato de A ser ou não diagonalizável. Assim temos:

Proposição 1.22. *Seja $v \in \mathbb{K}^n$ um autovetor de $A \in M_n(\mathbb{K})$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. Então*

$$x(t) = e^{\lambda t}v, \text{ com } t \in \mathbb{K}$$

define uma solução da equação $x' = Ax$, com $x(0) = v$.

Demonstração. Derivando a aplicação $x(t) = e^{\lambda t}v$, obtemos

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av = Ax(t).$$

□

Também temos o seguinte resultado

Proposição 1.23. *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $v_0 \in \mathbb{K}^n$, os caminhos $t \mapsto e^{tA}$ em $M_n(\mathbb{K})$ e $t \mapsto e^{tA}v_0$ em $\mathbb{R}^n$ são deriváveis e*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \in M_n(\mathbb{K}), \frac{d}{dt}e^{tA}v_0 = Ae^{tA}v_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Dados $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $t \in \mathbb{R}$, temos $\|tA\| = |t|\|A\|$, e, como estamos usando a norma do operador, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| &= \frac{1}{|t|} \|e^{tA} - I - tA\| \leq \frac{1}{|t|} \|tA\|^2 e^{\|tA\|} \\ &= |t| \|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \\ &\leq |t| \|A\|^2 e^{\|A\|} \end{aligned}$$

para $|t| \leq 1$. Fazendo $X(t) = e^{tA}$, implica em $X(0) = I$. Dos resultados da desigualdade acima, podemos ver que na verdade se trata da definição de derivada, portanto, $X'(0) = A$. Agora, afirmamos que

$$X(t+u) = X(t).X(u) \in M_n(\mathbb{K}), \tag{1.9}$$

$\forall t, u, \in \mathbb{R}$.

Temos então por definição que $X(t)$ é derivável em $\mathbb{K}$, onde

$$X'(t) = X'(0).X(t) = A.X(t), \forall t \in \mathbb{K}$$

Ainda, dado $v_0 \in \mathbb{K}$, essas matrizes todas podem ser aplicadas em v_0 para confirmar que o caminho $x(t) = X(t).v_0$ é derivável em $\mathbb{K}$, com $x'(t) = Ax(t), \forall t \in \mathbb{K}$. $\square$

Mais geral ainda, é o resultado que deixa explícita a solução de qualquer equação diferencial linear homogênea. Aqui será enunciado como um teorema, mas ele é uma consequência direta da proposição acima, podendo mesmo ser visto como um corolário.

Teorema 1.24. *Dado $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $v_0 \in \mathbb{K}^n$, temos que*

$$x(t) = e^{tA}v_0, t \in \mathbb{K}$$

define a única solução de $x' = Ax$, com condição inicial $x(0) = v_0$.

E para equações diferenciais não-homogêneas, temos

Teorema 1.25. *Seja $x' = Ax + b(t)$ com $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. A única solução da equação acima com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é dada por*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A}b(u)du. \quad (1.10)$$

Demonstração. Multiplicamos a equação $x' = Ax + b(t)$ por e^{-tA} , obtemos

$$\begin{aligned} e^{-tA}x' &= e^{-tA}Ax + e^{-tA}b(t) = e^{-tA}b(t) + Ae^{-tA}x \\ \Rightarrow e^{-tA}b(t) &= e^{-tA}x' - Ae^{-tA}x \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}x(t)) = e^{-tA}x'(t) - Ae^{-tA}x(t)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}x(t)) = e^{-tA}b(t).$$

Agora, fixando um $t_0 \in \mathbb{R}$ e integrando a equação acima de t_0 a t , temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{du}(e^{-uA}x(u))du &= \int_{t_0}^t e^{-uA}xb(u)du \\ \Rightarrow (e^{-tA}x(t) - e^{-t_0A}x(t_0)) &= \int_{t_0}^t e^{-uA}b(u)du \\ \Rightarrow e^{-tA}x(t) &= e^{-t_0A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-uA}b(u)du \end{aligned}$$

Agora multiplicando ambos os lados da última igualdade acima por e^{tA} , obtemos

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A}b(u)du.$$

Como queríamos demonstrar.

□

Capítulo 2

Campos de Vetores

Este capítulo serve para o introduzir os objetos centrais de nosso trabalho, os campos vetoriais e algumas de suas propriedades. Para coroar esta leitura, apresentamos uma versão para campos do Teorema de Variedade Estável, segundo o exposto nas notas de Schecter [17]. O Teorema da Variedade Estável é bem conhecido pela sua versão para difeomorfismos em variedades, e sua prova é um tanto extensa. A versão aqui apresentada se aproveita de fatos já bem estabelecidos acerca desse resultado (Ver [3] e [18]), e é menos conhecida que sua versão mais famosa e possui uma demonstração um tanto menos complicada. Para os resultados básicos e preliminares acerca de campos vetoriais, seguiremos principalmente o exposto em Palis & Melo [3].

No Capítulo 1 definimos a noção de exponencial de operadores lineares em espaços de Banach, o que nos permite calcular soluções gerais para EDO's lineares. Com essa valiosa ferramenta, explicaremos neste capítulo, seguindo [1, 3, 13], como a Forma Canônica de Jordan nos ajuda a calcular a exponencial de qualquer matriz quadrada, e como isso nos permite entender melhor o comportamento de matrizes cujos autovalores tem sempre a parte real não nula, as chamadas matrizes hiperbólicas, objetos fundamentais nos resultados de linearização vistas neste trabalho. Daqui adiante, nos limitaremos a trabalhar no espaço $E = \mathbb{R}^n$.

2.1 A Forma Canônica de Jordan

Seja $E = \mathbb{R}^n$ que aqui já assumiremos ser um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n , e seja $M_n(\mathbb{R})$, o espaço das matrizes quadradas sobre $\mathbb{R}$.

A Forma Canônica de Jordan nos diz que para cada operador em T em $\mathbb{R}^n$ existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ na qual podemos representar qualquer operador de modo a deixá-lo o mais simples possível. Tal representação se dá na forma de uma matriz diagonal em blocos de Jordan, onde cada bloco é uma matriz associada a cada um de seus autovalores aliados as informações que podemos obter sobre suas multiplicidades. Seguiremos aqui o exposto em Doering & Lopes [1], Palis & Melo [3] e Lima [14]

Definição 2.1. *Uma matriz $N \in M_n(\mathbb{R})$ é chamada **nilpotente** se existe $k \in \mathbb{Z}$, chamado índice de nilpotência tal que $N^k = 0$ e $N^{k-1} \neq 0$.*

Um exemplo de matriz nilpotente que será importante neste texto é a matriz N definida como

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{r \times r}.$$

É interessante notar que se N é uma matriz nilpotente com índice r de nilpotência, então

$$e^{tN} = I + tN + \dots + \frac{N^{r-1}t^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Definição 2.2. *Um **bloco de Jordan real** é a matriz $J_\lambda = \lambda I + N$, onde λ é um autovalor de $J(\lambda)$ e N é a matriz nilpotente definida acima.*

Definição 2.3. *Um **bloco de Jordan complexo**, é a matriz*

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} l(a, b) & I & & & \circ \\ & l(a, b) & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l(a, b) & I \\ \circ & & & & l(a, b) \end{pmatrix}$$

onde

$$l(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} e I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a + ib$ é um autovalor complexo não real de A .

Com essas considerações, podemos enunciar agora um teorema de extrema importância na teoria das matrizes e das equações diferenciais lineares considerando o corpo $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1. (*Forma Canônica de Jordan Real*). Dada uma matriz real A , com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e autovalores complexos não reais $a_1 + ib_1, \dots, a_s + ib_s$, existe uma matriz real P , invertível tal que $P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_r}, J(a_1, b_1), \dots, J(a_s, b_s))$ onde cada J_i e $J(a, b)$ são um bloco de Jordan, para um autovalor real ou complexo da forma $a + ib$, respectivamente.

A matriz J é chamada forma de Jordan, que é única a menos da ordem dos blocos J_i , e, no caso real, do sinal da parte imaginária b das raízes complexas de A . Dizemos que duas matrizes são similares se possuem a mesma forma canônica real.

Aplicando o que foi dito acima, calculemos a exponencial e^{tJ} dos blocos de Jordan de uma matriz J na forma canônica de Jordan e t real.

No caso para blocos reais, temos que para cada J_{λ_i} , obtemos

$$e^{t(IJ_{\lambda_i}+N)} = e^{t\lambda_i} e^{tN} = e^{t\lambda_i} [I + tN + N^2 \frac{t^2}{2} + \dots]$$

O que nos dá

$$e^{t(IJ_{\lambda_i}+N)} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \dots & t & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Para o caso de autovalores complexos, observemos que podemos escrever cada bloco $L(a, b)$ como

$$l(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

O que nos leva, para $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tL(a,b)} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos tb & \sin tb \\ -\sin tb & \cos tb \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Agora basta observar que um bloco de Jordan complexo é a soma de uma matriz com blocos $L(a, b)$ de ordem 2 na diagonal e uma super matriz nilpotente N com blocos matriz identidade de ordem 2 nos elementos a esquerda da diagonal principal, o que nos leva a

$$e^{tJ(a,b)} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos tb & \sin tb \\ -\sin tb & \cos tb \end{pmatrix} e^{tN}. \quad (2.2)$$

Essas observações acima são importantes pois nos mostram que cada elemento da exponencial de uma matriz na forma canônica de Jordan é limitado por um polinômio $p(t)$ com grau de no máximo $N - 1$.

2.2 Fluxos lineares e matrizes hiperbólicas

Com a valiosa ferramenta da forma canônica de Jordan em mãos e o conhecimento de do Teorema 1.24, vemos que calcular soluções de $x' = Ax$, basta saber calcular a exponencial e^{tA} que é equivalente a exponencial e^{tJ} de uma matriz J linearmente conjugada a A .

Lema 2.2. *Se $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ e Q é inversível, então*

$$e^{t(QPQ^{-1})} = Qe^{tP}Q^{-1}.$$

Demonstração. Basta notarmos que

$$t(QPQ^{-1}) = Q(tP)Q^{-1} \Rightarrow e^{Q(tP)Q^{-1}} = e^{t(QPQ^{-1})}$$

Isso é uma consequência direta do Teorema 1.17. □

O lema acima deixa claro que, se J é a forma canônica de Jordan de A , ou seja, existe Q inversível tal que $A = QJQ^{-1}$, então, se $y(t) = e^{tJ}y_0$ é solução de $y' = Jy$, com $y(0) = y_0$, temos que $x(t) = e^{tA}x_0$ é solução de $x' = Ax$ com $x(0) = x_0$.

De fato, usaremos o seguinte lema

Lema 2.3. *Se $A = QJQ^{-1}$, então as afirmações são equivalentes:*

1. $y(t)$ é solução de $y' = Jy$
2. $Qy(t)$ é solução de $x' = Ax$

Demonstração. Usando o fato de Q independer de t , então derivando $x(t) = Qy(t)$, vamos obter

$$x'(t) = Qy'(t) = QB y(t) = A Q y(t) = A x(t).$$

Vale a recíproca, que é demonstrada de forma análoga, por Q ser inversível. $\square$

Então fica claro que

$$x(t) = Q e^{tJ} y_0 = Q e^{tJ} Q^{-1} Q y_0 = e^{Q(tJ)Q^{-1}} Q y_0 = e^{tA} x_0.$$

Definição 2.4. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é chamada **fluxo** se:

i) $\varphi(0, x) = x$

ii) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, $t, s \in \mathbb{R}$.

De forma ainda mais precisa ao nosso objetivo, dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ e fixando um escalar t , obtemos uma matriz e^{tA} que define uma transformação linear $x \mapsto e^{tA}x$ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é diferenciável e inversível, portanto, um difeomorfismo. Tal difeomorfismo é único para a matriz A e uma família formada por eles é chamada de **fluxo do campo linear** A , ou simplesmente fluxo da equação diferencial $x' = Ax$. Com mais rigor, temos

Definição 2.5. O **fluxo linear** de A é a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(t, x) = \varphi_t(t, x) = e^{tA}x.$$

A origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma **singularidade** da matriz A , ou seja, $A0 = 0$. Particularmente, temos que o fluxo de A é sempre constante na singularidade, ou seja, $e^{tA}0 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Definição 2.6. Dizemos que dois fluxos (φ_t) e (ψ_t) em $\mathbb{R}^n$ são **linearmente conjugados** se existe algum isomorfismo linear $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$g \varphi_t = \psi_t g, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

.

Lema 2.4. Seja $\epsilon > 0$. Então para todo $k > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\epsilon t} t^k = 0$. Particularmente, para um polinômio $p(t)$ arbitrário, $e^{-\epsilon t} p(t)$ é limitado para $t \geq 0$.

Demonstração. A prova segue da regra de L'Hospital sendo aplicada várias vezes em $\frac{s^{-k}}{e^{\frac{\epsilon}{s}}}$, que é obtida fazendo $t = \frac{1}{s}$ em $e^{-\epsilon t} t^k$. $\square$

Disto podemos concluir que se a matriz A tem autovalores reais negativos ou complexos com parte real negativa, qualquer solução da equação $x' = Ax$ tende a $0 \in \mathbb{R}^n$, com $t \rightarrow +\infty$, o que nos leva a importante definição que segue.

Definição 2.7. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é chamada **hiperbólica** se a parte real de seus autovalores são todas não-nulas.

Feitas estas considerações, prosseguimos com nossas próximas definições.

Definição 2.8. Dizemos que a singularidade na origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} x = 0.$$

Definição 2.9. Dizemos que o sistema $x' = Ax$ é um **atrator hiperbólico** se todos os seus autovalores de A (reais ou complexos) tem parte real negativa (ou são negativos no caso real).

Se A é uma matriz hiperbólica e seus autovalores possuem parte real positiva (ou simplesmente positivos no caso real), dizemos que $x' = Ax$ é um **repulsor hiperbólico**.

Lema 2.5. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e α dados. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que $-\alpha$ então existe $K \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$$

para cada $t \geq 0$.

Demonstração. Observemos que independente da norma escolhida em $M_n(\mathbb{R})$, o lema é válido. De fato, se vale o lema para uma norma $\|\cdot\|_1$ de $M_n(\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_2$ é uma outra norma de $M_n(\mathbb{R})$, temos então, pela equivalência de normas em $M_n(\mathbb{R})$ que podemos obter $a > 0$ tal que $\|B\|_2 \leq \|B\|_1$ para qualquer $B \in M_n(\mathbb{R})$, de modo que

$$\|e^{tA}\|_2 \leq a \|e^{tA}\|_1 \leq a K e^{-\alpha t} \leq K_2 e^{-\alpha t},$$

para cada $t \geq 0$, com $K_2 = 1 + aK$, o que mostra que a mudança de norma, em $M_n(\mathbb{R})$ afeta somente a constante K . Do mesmo modo, podemos observar que o lema independe da matriz na classe de semelhança de A , portanto, $B = Q^{-1}AQ$ para algum $Q \in M_n(\mathbb{R})$ invertível, de modo que

$$\|e^{tB}\| \leq \|Q^{-1}e^{tA}Q\| \leq \|Q^{-1}\| \|e^{tA}\| \|Q\| \leq K_1 e^{-\alpha t},$$

com $t \geq 0$, sendo

$$K_1 = \|Q^{-1}\| \|Q\| K \geq K,$$

já que $1 = \|I\| = \|Q^{-1}Q\| \leq \|Q^{-1}\| \|Q\|$, ou seja, mudando a matriz A por outra da mesma classe de conjugação, também só afetará a constante K .

Com essas observações, fica claro que para provar esse lema, só basta provar o caso em que a matriz $A = J \in M_n(\mathbb{R})$ esteja na forma canônica de Jordan e com uma norma que seja mais conveniente, que no caso, é a norma

$$\|C\|_\infty = \|(c_{ij})\|_\infty = \max\{|c_{ij}|; 1 \leq i, j \leq K\}, \quad C \in M_n(\mathbb{R}).$$

de $M_n(\mathbb{R})$. Sabemos que $e^{tJ} = C(t) = (c_{ij}(t))$, com cada $c_{ij}(t)$ da forma (2.1) ou (2.2), para qualquer $t \geq 0$, temos

$$|c_{ij}(t)| \leq \frac{t^s}{s!} e^{at}$$

para algum autovalor complexo $\lambda = a + ib$ de A e algum $0 \leq s \leq n - 1$.

Seja agora $\tau < -\alpha$ tal que $\operatorname{Re}(\lambda) < \tau$, para todo autovalor λ de A . Se $0 \leq t \leq 1$, segue que

$$|c_{ij}(t)| \leq e^{\tau t} \leq e^{-\alpha t}$$

e, se $t \geq 1$, segue que

$$|c_{ij}(t)| \leq \frac{t^s}{s!} e^{\tau s} \leq t^s e^{\tau t} \leq \frac{t^{k-1}}{e^{(-\alpha-\tau)t}} e^{-\alpha t} \leq \frac{k!}{(-\alpha-\tau)^k} e^{-\alpha t},$$

Esta última desigualdade vem do fato de que $\alpha^k t^{k-1} \leq k! e^{\alpha t}$ vale para todo $k \geq 1$, $t \geq 1$ e $\alpha > 0$

Agora basta tomarmos $K = \max\{1, \frac{k!}{(-\alpha-\tau)^k}\}$ e obtemos a confirmação do lema.

□

Definição 2.10. Dizemos que o fluxo e^{tA} é **contrativo** se existem constantes $K > 0$ e α tais que

$$|e^{tA}x| \leq Ke^{-\alpha t}|x|,$$

para quaisquer $t \geq 0$

Uma consequência direta do teorema acima é o seguinte resultado

Teorema 2.6. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ um campo linear qualquer. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *A origem é um poço para A.*
2. *A é um atrator.*
3. *o fluxo de A é contrativo.*

Demonstração. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é um atrator, podemos escolher uma constante $\alpha > 0$ tal que a parte real de cada autovalor geral de A seja menor que $-\alpha$. Do lema provado anteriormente, existe $K \geq 0$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t},$$

para cada $t \geq 0$ onde $\|\cdot\|$ indica a norma do operador de matrizes, portanto,

$$|e^{tA}x| \leq \|e^{tA}\||x| \leq Ke^{-\alpha t}|x|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, logo, o fluxo de A é contrativo, portanto $(2) \Rightarrow (3)$. Se o fluxo de A é contrativo, então temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{tA}x| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} Ke^{-\alpha t}|x| = C|x| \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = 0$$

de modo que a origem é um poço, assim vale a implicação $(3) \Rightarrow (1)$. Para $(1) \Rightarrow (2)$ usamos o fato de que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0.$$

Como já definido, se a parte real de todos os autovalores gerais de A tem parte real negativa, o que faz de $x' = Ax$ um **atrator hiperbólico**. Com isso, provamos o teorema. □

2.3 Fluxos de campos e singularidades hiperbólicas

Estamos interessados agora em estudar as principais propriedades das soluções $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $I \subset \mathbb{R}$, das equações diferenciais $x' = f(x)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, definidas sobre campos de vetores não-lineares no espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.11. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de **campo de vetores** no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se for contínua em todos os pontos de U .*

Em EDO's sobre campos de vetores, vale o teorema da existência e unicidade, assim enunciada:

Teorema 2.7. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$ arbitrários, existe uma solução única do PVI $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$ que depende de (t_0, x_0) .*

Também podemos garantir a unicidade local para todo intervalo comum de definição de soluções.

Proposição 2.8. *Se I_1 e I_2 são dois intervalos abertos tal que $t_0 \in I_1 \cap I_2$ e se $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ são duas soluções do PVI $x' = f(x)$, $x_1(t_0) = x_0 = x_2(t_0)$, então $x_1(t) = x_2(t)$, para cada $t \in I_1 \cap I_2$.*

Definição 2.12. *Dizemos que I é um intervalo máximo da solução de $x' = f(x)$ se dada qualquer solução $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $x(0) = x_0$ então $J \subseteq I$. A solução definida no intervalo máximo é chamada de solução máxima. Escrevemos $I(x_0)$ como o intervalo máximo por x_0*

Definição 2.13. *Chamamos de fluxo do campo de vetores $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação*

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$, definida como

$$\phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t)$$

com $x : I(x) \rightarrow E$ sendo trajetória de f por x . Ainda, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)),$$

para todo $(t, x) \in \Omega$.

Proposição 2.9. Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo de um campo $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , então

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in U$ tais que $s, t + s \in I(x)$.

Definição 2.14. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $x_0 \in U$ é uma singularidade, ou ponto singular do campo de vetores f , ou da equação diferencial $x' = f(x)$, se $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Uma singularidade também pode ser chamada de **ponto de equilíbrio** do campo f , já que $x(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.15. Um ponto de equilíbrio $x_0 \in U$ é chamado de **ponto fixo do fluxo** do campo f se, dado o fluxo ϕ de f , teremos $\phi(t, x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.16. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dados dois campos de vetores $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, com seus respectivos fluxos, ϕ_1 e ϕ_2 . Dizemos que f_1 e f_2 são **diferencialmente conjugados** se existe um difeomorfismo $g : U_1 \rightarrow U_2$, chamado de conjugação diferenciável, tal que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\phi_1 \circ g = g \circ \phi_2.$$

Definição 2.17. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dados dois campos de vetores $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, com seus respectivos fluxos, ϕ_1 e ϕ_2 . Dizemos que f_1 e f_2 são **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$, chamado de conjugação topológica, tal que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\phi_1 \circ h = h \circ \phi_2.$$

Definição 2.18. Dizemos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é um **campo linear hiperbólico**, se todos os seus autovalores tem parte real não nula.

Definição 2.19. O número de de autovalores de um campo linear A que tem parte real negativa, é chamado de **índice de estabilidade** do sistema linear $x' = Ax$.

Proposição 2.10. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é um campo linear hiperbólico, então existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, onde E^s e E^u são subespaços invariantes por A e pelo fluxo de A tais que os autovalores $A|E^s$ tem parte real negativa e os autovalores de $A|E^u$ tem parte real positiva.

Demonstração. Tomemos $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ onde a matriz A esteja na forma canônica de Jordan, portanto, pode ser organizada convenientemente, de modo que os blocos sejam na forma

$$A = \text{diag}(J_1, \dots, J_{s'}, Ja_1, \dots, Ja_{s''}, Jb_{s'}, \dots, Jb_{s''}, Jc_{s'}, \dots, Jc_{s''})$$

$$\text{onde } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \circ \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ \circ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ com } \lambda_i < 0,$$

$$Ja_j = \begin{pmatrix} L_j(\alpha, \beta) & & I & & \\ & L_j(\alpha, \beta) & & I & \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & L_j(\alpha, \beta) & I \\ & & & & L_j(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \text{ onde } I \text{ é a matriz identidade}$$

$$\text{e cada matriz } L_j(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha_j < 0$$

$$Jb_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \text{ com } \lambda_k > 0,$$

$$J_{C_l} = \begin{pmatrix} L_l(\alpha, \beta) & I & & & \\ & L_l(\alpha, \beta) & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & L_j(\alpha, \beta) & I \\ & & & & L_l(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \text{ onde } I \text{ é a identidade}$$

e cada matriz $L_l(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, com $\alpha_j > 0$.

Seja E^s o subespaço gerado por $e_1, \dots, e_s$, que são os vetores correspondentes aos subespaços invariantes associados a $J_1, \dots, J_{s'}, Ja_1, \dots, Ja_{s''}$ e E^u o subespaço gerado por $e_{s+1}, \dots, e_n$. Afirmamos que E^s e E^u são invariantes por A , e $A|E^s$ na base $\{e_1, \dots, e_s\}$ é

$$\text{diag}(J_1, \dots, J_{s'}, Ja_1, \dots, Ja_{s'})$$

E a matriz $A|E^u$ na base $\{e_{s+1}, \dots, e_n\}$ é

$$\text{diag}(Jb_1, \dots, Jb_{u'}, Jc_1, \dots, Jc_{u''}).$$

Concluindo a demonstração. □

Chamaremos E^s e E^u de subespaço estável e instável, respectivamente.

Definição 2.20. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ um isomorfismo linear (bijeção com inversa contínua). Dizemos que A é um **isomorfismo hiperbólico** se A não tem autovalores com norma igual a 1.*

Definição 2.21. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vampo de classe C^k . Dizemos que $p \in E$ é uma **singularidade hiperbólica** se $Df(p)$ é um isomorfismo hiperbólico.*

Ou mais preciso ainda:

Definição 2.22 (Singularidade hiperbólica). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^k . Um ponto singular $p \in U$ é chamado de **singularidade hiperbólica** se a parte linear $Df(p)$ do campo f for hiperbólica, ou seja, se os autovalores de $Df(p)$ tem parte real não nula.*

2.4 O Teorema da Variedade Estável

Iniciaremos esta seção com algumas definições e resultados essenciais para a prova de um resultado fundamental na teoria das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos, o teorema da variedade estável. As definições e demonstrações aqui apresentadas seguem de perto as notas de Schecter [17].

Definição 2.23. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial. Chamamos de variedade **estável** e **instável** em um ponto fixo $p \in U$, os conjuntos, respectivamente:*

$$W^s(p) = W^s(p, F) = \{x \in U; \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = p\}$$

e

$$W^u(p) = W^u(p, F) = \{x \in U; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = p\}$$

Definição 2.24. *Sejam E^s e E^u os subespaços estável e instável da linearização $Df(p)$. Consideramos as **projeções lineares** $p_s : \mathbb{R}^n \rightarrow E^s$ e $p_u : \mathbb{R}^n \rightarrow E^u$ tal que para $x \in \mathbb{R}^n$, tenhamos*

$$x = p_s x + p_u x$$

Teorema 2.11 (Teorema da Variedade Estável). *Considere $x' = f(x)$ tal que $Df(p)$ é hiperbólica e f é de classe C^1 com $f(p) = 0$. Existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que $W^s(p) \cap V$ é uma variedade de classe C^1 contida em U e é tangente a E^s em p .*

O Teorema estabelece que numa vizinhança de uma singularidade hiperbólica p , existe uma função k cujo o gráfico é a variedade estável neste ponto, tangente a E^s .

Inicialmente, consideramos, sem perda de generalidade, que $p = 0$ e tomemos $A = Df(p)$ e $g(x) = f(x) - Df(x)$ e escrevamos $f(x) = Ax + g(x)$, donde $A = Df(p)$, $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$. Denotaremos $\mathbb{R}_+$ o intervalo $[0, \infty)$. Para provar este teorema, precisamos de alguns lemas.

Lema 2.12. *Consideremos a equação diferencial linear não-homogênea*

$$x' = Ax + h(t) \tag{2.3}$$

com $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua limitada. Tomando $v \in E^s$, Existe uma única função $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

(i) x é solução da equação acima.

(ii) x é limitada

(iii) $p_s(x(0)) = v$ e por fim

$$x(t) = e^{tA}v + \int_0^t e^{(t-s)A}p_s h(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}p_u h(s)ds. \quad (2.4)$$

Demonstração. Tomando $\tau \in \mathbb{R}$, do Teorema 1.27, podemos escrever qualquer solução de 2.3 da seguinte maneira

$$x(t) = e^{t-\tau}x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A}h(s)ds. \quad (2.5)$$

Tomando $\tau = 0$ na equação acima e aplicando p_s em ambos os lados, obtemos

$$p_s x(t) = e^{tA}p_s x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}p_s h(s)ds.$$

A fim de satisfazer a propriedade (iii), temos

$$p_s x(t) = e^{tA}v + \int_0^t e^{(t-s)A}p_s h(s)ds. \quad (2.6)$$

Agora, aplicando p_u em cada lado de (2.5), obtemos

$$p_u x(t) = e^{(t-\tau)A}p_u x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A}p_u h(s)ds. \quad (2.7)$$

Agora imaginemos t fixo e $\tau \rightarrow \infty$. Se x é limitada, então, no primeiro termo da soma acima, $t - \tau \rightarrow -\infty$ e $p_u x(\tau)$ permanece limitada. Em consequência, o primeiro termo da soma tende a 0, de forma que obtemos

$$p_u x(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}p_u h(s)ds. \quad (2.8)$$

Somando (2.6) e (2.8) obtemos (2.4), o que mostra a unicidade. Para mostrar a existência, é suficiente que (2.5) satisfaça as três propriedades listadas, o que é simples de ser feito. $\square$

Continuando a prova do teorema, definimos $T : C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ por

$$Th(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (p_s h(s)) ds + \int_\infty^t e^{(t-s)A} (p_u h(s)) ds.$$

Observemos que Th é simplesmente a soma dos dois últimos termos de (2.4). Não é necessariamente evidente que Th seja limitada, para isso, precisamos de mais uma ferramenta.

Lema 2.13. *A função T , definida acima é uma aplicação linear limitada com $\|T\| \leq \frac{2K}{\alpha}$*

Demonstração. A linearidade de T é clara. Para mostrar que T é limitada, por simplicidade, assumimos, para alguma constante $C > 0$ tal que $\|p_s\| = \|p_u\| \leq C$ por simplicidade, e pelo lema 2.5, temos

$$\begin{aligned} |Th(t)| &\leq \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} C |h| ds + \int_t^\infty K e^{-\alpha(s-t)} C |h| ds \\ &= CK |h| \left(\left[e^{-\alpha t} \cdot \frac{e^{\alpha s}}{\alpha} \right]_0^t + e^{\alpha t} \cdot \left[\frac{e^{-\alpha s}}{-\alpha} \right]_t^\infty \right) \\ &= CK |h| \left(e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) + e^{\alpha t} \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \\ &\leq \frac{2CK}{\alpha} |h|. \end{aligned}$$

Obtemos que $|Th| \leq \frac{2CK}{\alpha} |h|$. Fazendo $C = 1$, temos portanto, $\|T\| \leq \frac{2K}{\alpha}$, o que mostra que além de linear, a função T é limitada. $\square$

Demonstração. (Teorema da Variedade Estável) Tomemos $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de $x' = Ax + g(x)$, onde A é um isomorfismo hiperbólico e g é uma função de classe C^1 , tal que $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$. Temos, claro que $x' = Ax + g(x(t))$ e, como $x(t)$ é limitada, $g(x(t))$ também é. Como $p_s x(0) = v$, o Lema (3.9) nos dá

$$x(t) = e^{tA} v + \int_0^t e^{(t-s)A} (p_s g(x(s))) ds + \int_\infty^t e^{(t-s)A} (p_u g(x(s))) ds. \quad (2.9)$$

Vamos expressar a equação (2.9) de maneira mais simples (compacta). Definimos $N : C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ por $Nx(t) = g(x(t))$. Como g é C^1 , N também é. Definimos agora $F : E^s \times C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, por

$$F(v, x)(t) = e^{tA} v + T \circ N(x)(t).$$

Daí, a equação (2.9) pode ser escrita como

$$x = F(v, x) \quad (2.10)$$

Falando de forma clara, para um $v \in E^s$ dado, a solução de $x' = Ax + g(x)$, que é limitada em $\mathbb{R}_+$ e tem $p_s(0) = v$ é um ponto fixo da aplicação $F(v, \cdot) : C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Daí, usaremos o Teorema da Contração Uniforme com Paramêtros (Teorema 1.12).

O operador T é linear e N é C^1 , o que nos dá que $T \circ N$ é C^1 . F é C^1 , pois a aplicação $v \rightarrow e^{tA}v$ de $E^s \times C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ é limitada e linear.

Escolhemos $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente para que

$$\sup_{|x| \leq \epsilon} \|Dg(x)\| \leq \frac{\alpha}{4K}. \quad (2.11)$$

Na expressão acima, x é apenas um ponto de $\mathbb{R}^n$. Isso nos é permitido pois $Dg(0) = 0$ e $Dg(x)$ depende continuamente de x pois g é de classe C^1 .

Tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2K}$. Se $K \geq 1$, teremos $0 < \delta < \epsilon$. Seja

$$B = \{v \in E^s; |v| < \delta\}, \quad W = \{x \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n); |x| \leq \epsilon\}.$$

Afirmamos que para cada $v \in B$ e $x \in W$, temos:

- (1) $F(v, \cdot)$, de W em W é contínua.
- (2) $F(v, \cdot)$ é uma contração de W com constante de contração igual a $\frac{1}{2}$.

Para provar (1), tomemos $x \in B$ e $x \in W$, então

$$|e^{tA}v| \leq Ke^{-\alpha t}|v| \leq K|v|.$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $|x| \leq \epsilon$, então

$$|g(x)| = |g(x) - 0| = |g(x) - g(0)| \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|Dg(sx)\||x| \leq \frac{\alpha}{4K}\epsilon.$$

Consequentemente, se $x \in W$, então

$$|N(x)| \leq \frac{\alpha}{4K}\epsilon.$$

Concluimos que se $v \in B$ e $x \in W$,

$$\begin{aligned} |F(v, x)| &\leq |e^{tA}v| + |TN(x)| \leq K|v| + \|T\||N(x)| \\ &\leq K \frac{\epsilon}{2K} + \frac{2K}{\alpha} \frac{\alpha}{4K} \epsilon \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Provando (1).

Para mostrar (2), tomemos $v \in B$ e $x, y \in W$. Então

$$\begin{aligned} |g(x(t)) - g(y(t))| &\leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|Dg(x(t) + s(y(t) - x(t)))\| \cdot |x(t) - y(t)| \\ &\leq \frac{\alpha}{4K} |x - y|. \end{aligned}$$

Consequentemente $|N(x) - N(y)| \leq \frac{\alpha}{4K} |x - y|$, então

$$\begin{aligned} |F(v, x) - F(v, y)| &= |TN(x) - TN(y)| = |T(N(x) - N(y))| \\ &\leq \|T\| |N(x) - N(y)| \\ &\leq \frac{2K}{\alpha} \frac{\alpha}{4K} |x - y| \\ &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

o que prova (2).

Para cada $v \in B$, tomemos $\psi(v) \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ como o ponto fixo de $F(v, \cdot)$ em W . O Teorema da Contração com Parâmetros nos garante que

$$\psi : B \rightarrow W \subset C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

é de classe C^1 .

Aplicando a "projeção estável", temos que $p_s \psi(v)(0) = v$. Nos interessa saber quem é $p_u \psi(v)(0)$. Definimos $k : E^s \rightarrow E^u$ como

$$k(v) = p_u \psi(v)(0) = p_u \circ EV_0 \circ \psi(v),$$

onde $EV_0 : C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação linear que leva $h(t)$ para $h(0)$. EV_0 aqui

significa evoluta em $t = 0$.

Agora, temos que um ponto fixo de $F(0, \cdot)$ é $x \equiv 0$. Como $x \equiv 0$ em W , devemos ter $\psi(0) = 0$. Notemos que o primeiro 0 desse parágrafo pertence a E^s . Logo

$$k(0) = p_u \circ EV_0 \circ \psi(0) = 0.$$

Agora vem

$$Dk(0) = p_u \circ EV_0 \circ D\psi(0) = 0.$$

Para calcular $D\psi(0)$, notemos que $\psi(v) = F(v, \psi(v))$, então

$$D\psi(v) = D_1F(v, \psi(v)) + D_2F(v, \psi(v))D\psi(v).$$

Tomando $V = 0$ e aplicando em cada lado da equação acima um vetor $h \in E^s$, obtemos

$$D\psi(0)h = D_1F(0, 0)h + D_2F(0, 0)D\psi(0)h = e^{tA}h + T \circ DN(0)h = e^{tA}h.$$

Note que $DN(0) = 0$, uma consequência direta do fato de $Dg(0) = 0$. Portanto

$$Dk(0)h = p_u \circ EV_0 \circ D\psi(0)h = p_u \circ EV_0(e^{tA}h) = p_u h = 0,$$

pois $h \in E^s$ e portanto $Dk(0) = 0$. Provamos então o Teorema da Variedade Estável. $\square$

Capítulo 3

Linearização de Famílias de Campos

Neste capítulo, vamos introduzir os principais resultados deste trabalho. Apresentamos alguns resultados de linearização de famílias de campos de vetores que geram uma álgebra de Lie. Para estes resultados, seguiremos o exposto em [12]. Aqui já supomos existência de difeomorfismos que mudam coordenadas de campos não-lineares para campos lineares numa determinada vizinhança.

3.1 O Teorema Formal de Poincaré e o Critério de Gullemin-Sternberg

Estamos agora interessandos em um resultado devido a Livingstone & Elliot [12], que mostra condições para linearizar de uma única vez, uma família de campos de vetores, que geram uma álgebra de Lie de dimensão finita. Para isso, apresentemos algumas definições e resultados para enuncia-lo e demonstrá-lo.

Definição 3.1. *Sejam U e V abertos de um espaço de Banach E .*

1. *Se $R : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo de U , definimos o **pullback de campos** $g = R_*f$ sobre V , como o campo $g : V \rightarrow E$, tal que $g(y) = DR(R^{-1}(y))f(R^{-1}(y))$.*
2. *Suponhamos que $f : U \rightarrow E$ e $g : V \rightarrow E$ sejam dois campos vetoriais. Dizemos que o sistema $x' = f(x)$ e $y' = g(y)$ são diferencialmente equivalentes, ou simplesmente, equivalentes, se existe um difeomorfismo $R : U \rightarrow V$, tal que $g = R_*f$.*

Definição 3.2. *Uma **álgebra de Lie** consiste em um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um*

produto, chamado de colchete ou comutador de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Bilinearidade, ou seja, é linear em cada entrada.
2. Anti-simetria, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$
3. A identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

Definição 3.3. Para cada inteiro $k \geq 1$, definimos $\mathbb{W}^k = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f = (f_1, \dots, f_n) \text{ e } f_i = (x_1, \dots, x_n) \text{ é um polinômio homogêneo de grau } k\}$ como o conjunto de polinômios homogêneos sobre $\mathbb{R}^n$ de grau k com as incógnitas $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Reparemos que, em particular, uma matriz A de ordem n pertence ao espaço $\mathbb{W}^1 = M_n(\mathbb{R})^n$. Afirmamos que o conjunto $\mathbb{W}^k$ possui uma estrutura de espaço vetorial e portanto, podemos obter uma base para $\mathbb{W}^k$ da seguinte maneira: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base (digamos, a canônica) de $\mathbb{R}^n$. Tomando $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ tal que $|\alpha| = k_1 + \dots + k_n = k$, $1 \leq p \leq n$ e um vetor real $x = (x_1, \dots, x_n)$ definimos

$$e_p^\alpha(x) := x^\alpha e_p \text{ onde } x^\alpha = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Assim, obtemos o conjunto

$$\mathcal{B}_{\mathbb{W}}^k = \{e_p^\alpha(x); |\alpha| = k, 1 \leq p \leq n\}$$

que é uma base de $\mathbb{W}^k$.

Observemos que existem $\binom{n+k-1}{k}$ escolhas possíveis para α . Daí, resulta que $\dim(\mathbb{W}^k) = n \binom{n+k-1}{k}$.

Definição 3.4. Definimos o **Colchete de Livingston-Elliott** como o produto $[\cdot, \cdot]_{EL} : \mathbb{W}^j \times \mathbb{W}^k \rightarrow \mathbb{W}^{k+j-1}$ tal que, dado $a(x) \in \mathbb{W}^j$ e $b(x) \in \mathbb{W}^k$, temos $[a(x), b(x)]_{EL} = Db(x).a(x) - Da(x).b(x)$.

Considerando $a \in \mathbb{W}^k$ como um campo $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o colchete acima definido é uma restrição do colchete de Lie para campos de $\mathbb{R}^n$.

Notemos também que se $a(x) \in \mathbb{W}^k$, $Da(x)$ é uma matriz com entradas sendo polinômios de grau $k - 1$.

Definição 3.5. *Seja $A \in \mathbb{W}^1$. Chamamos de **representação adjunta**, a transformação linear $ad_A : \mathbb{W}^k \rightarrow \mathbb{W}^k$ onde $ad_A(b)(x) = [Ax, b(x)]$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $b(x) \in \mathbb{W}^k$.*

Afirmamos que a definição de ad_A a torna uma operação que satisfaz as condições para considerá-la um colchete de Lie.

Proposição 3.1. *Se D é uma matriz diagonal complexa de ordem n com $\text{spec}(D) = \{\lambda_i \in \mathbb{C}; i = 1, \dots, n\}$, então a matriz ad_D é diagonalizável com autovalores $n \{\lambda_p^\alpha; |\alpha| = k; 1 \leq p \leq n\}$ onde $\lambda_p^\alpha = (\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i) - \lambda_p$, para $\alpha = (k_1, \dots, k_n)$.*

Demonstração. Seja $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Vamos explicitar a matriz da transformação ad_D . Escolhendo qualquer vetor $e_p^\alpha \in \mathcal{B}_{\mathbb{W}}^k$, temos que $ad_D(e_p^\alpha)(x) = [Dx, e_p^\alpha(x)]$, logo

$$[Dx, e_p^\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} & k_2 x_1^{k_1} x_2^{k_2-1} \dots x_n^{k_n} & \dots & k_n x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_p x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\left(\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \right) - \lambda_p \right] e_p^\alpha(x).$$

O que nos dá que ad_D possui quantidade suficiente de autovalores para ser diagonalizável, o que prova a proposição. $\square$

Proposição 3.2. *Se $A = D + N$ é a decomposição de Jordan da matriz complexa A de ordem n , então $ad_A = ad_D + ad_N$ é a decomposição de Jordan de ad_A em $\mathbb{W}^k$.*

Demonstração. Observemos que N e D comutam, ou seja, $[N, D] = ND - DN = 0$. Pela identidade de Jacobi para $[\cdot, \cdot]_{EL}$, vale que $ad_{[N, D]} = [ad_N, ad_D]$. Com efeito, observemos

que dado $P(x) \in \mathbb{W}^k$,

$$\begin{aligned}
 ad_{[N,D]}P(x) &= [[N, D], P(x)] = [N, [D, P(x)]] - [D, [N, P(x)]] \\
 &= ad_N[D, P(x)] - ad_D[N, P(x)] \\
 &= ad_N ad_D(P(x)) - ad_D ad_N(P(x)) \\
 &= [ad_N, ad_D]P(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, tomando $P(x) \in \mathbb{W}^k$ obtemos

$$ad_{[N,D]}(P)(x) = [[N, D], P(x)] = [0, P(x)] = 0$$

Portanto ad_N e ad_D comutam.

Acima já provamos que ad_D é diagonalizável e explicitamos seus autovalores. Nos resta provar que se N é nilpotente de grau l , então ad_N é nilpotente de grau d para algum $d \geq l$.

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_d \in M_n(\mathbb{R})$ que comutam e dado $I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$, tal que $A_I := \prod_{i \in I} A_i$. Afirmamos que

$$(ad_{A_1} \circ \dots \circ ad_{A_d})(P(x)) \tag{3.1}$$

com $P(x) \in \mathbb{W}^k$, é soma finita de termos na forma

$$A_{J_0} D^t P(x)(A_{J_1} x, \dots, A_{J_t} x),$$

onde $J_0, J_1, \dots, J_t$ são dois a dois disjuntos e $J_0 \cup \dots \cup J_t = \{1, 2, \dots, d\}$.

Isso pode ser verificado usando indução sobre d . Dado $P(x) \in \mathbb{W}^k$ sabendo que $N^l = 0$, consideramos

$$A_1 = A_2 = \dots = A_d = N. \tag{3.2}$$

Verificando os dois casos iniciais, para $d = 1$, temos

$$ad_{A_1}(P(x)) = DP_x(A_1 x) - A_1 P(x).$$

Para $d = 2$, temos

$$\begin{aligned}
 ad_{A_1} \circ ad_{A_2}(P(x)) &= ad_{A_1}([A_2(x), P(x)]_{EL}) \\
 &= ad_{A_1}(DP(x)(A_2x - A_2(P(x))) \\
 &= [A_1(x), DP(x)(A_2x - A_2(P(x)))]_{EL} \\
 &= D^2P(x)(A_1x, A_2x) + DP(x)(A_2A_1x) - A_1(DP(x)(A_2)) - A_2(P(x)),
 \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
 ad_N \circ ad_N(P(x)) &= D^2P(x)(Nx, Nx) + DP(x)(N^2x) \\
 &\quad - N(DP(x)Nx) - N^2(P(x))
 \end{aligned}$$

Para algum $d \in \mathbb{N}$, $(ad_N)^d(P(x))$ é soma de termos na forma

$$N^{J_0} \left(D^t P(x)(N^{J_1}x, N^{J_2}x, \dots, N^{J_t}x) \right) \quad (3.3)$$

Por hipótese, $(ad_N)^{d+1}(P(x)) = ad_N((ad_N)^d(P(x)))$ é a soma dos termos na forma

$$ad_N(N^{J_0} D^t P(x)(N^{J_1}x, \dots, N^{J_t}x))$$

É a soma dos termos da forma

$$A_{J_0} D^t (ad_{A_{d+1}}(P(x))) = [Nx, N^{J_0} D^t P(x)(N^{J_1}x, \dots, N^{J_t}x)]$$

que é a soma de termos da forma

$$N^{i_0} = D^s P(x)(N^{i_1}x, \dots, N^{i_s}x),$$

onde $i_0 + i_1 + \dots + i_s + s = d + 1$.

Agora, para ver que $ad_N|_{\mathbb{W}^k}$ é nilpotente, tomemos $d > k + l(k+1)$. Se $J_0 + \dots + J_t + t =$

d , então, ou $J_i > l$ ou $t > k$. Caso contrário, teríamos

$$\begin{aligned} J_0 + \cdots + J_u + t &\leq \underbrace{l + \cdots + l + k}_{(1+t) \text{ vezes}} \\ &= (t+1)l + k \leq (k+1)l + k < d, \end{aligned}$$

uma contradição. Daí, $N^{J_i} = 0$ ou $D^t P(x) \equiv 0$. Em todo caso, todos os termos $(ad_N)^k(P(x))$ são nulos. $\square$

De imediato, temos

Proposição 3.3. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ com os autovalores $\{\lambda_i; i = 1, 2, \dots, n\}$. Então os autovalores de ad_A em $\mathbb{W}^k$ são os mesmos definidos na proposição 3.1.*

Demonstração. Basta observar que para $A = D + N$, pelo fato de N ser nilpotente, seus autovalores são todos nulos, portanto, podemos concluir que os autovalores de A são os mesmos de D . Agora sabendo que é válida a decomposição $ad_A = ad_D + ad_N$, e sabendo que ad_N é nilpotente, temos, analogamente que seus autovalores são todos nulos e portando os autovalores de ad_A são os mesmos de ad_D que foram explicitados na proposição 3.1. $\square$

Tendo em posse os autovalores de ad_A , estamos a um passo de poder provar o primeiro grande resultado dessa seção. Assumimos ainda que todos os campos de vetores aqui vistos são analíticos e reais em $\mathbb{R}^n$ e tem 0 como ponto crítico. Então, pela hipótese do campo f ser real analítico, podemos escrevê-lo em termos de sua série de Taylor, ou seja, para $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$f(x) = Ax + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots + f^{(k)}(x) + \cdots \quad (3.4)$$

Onde

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha} x^\alpha$$

tal que $\alpha = (k_1, \dots, k_n)$, $x^\alpha := x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ e $f^k \in \mathbb{W}^k$.

Teorema 3.4. *(Teorema de Linearização Formal de Poincaré) Seja $p(x) = Ax + p^2(x) + \dots$ um campo de vetores real-analítico que satisfazem a relação de não-ressonância. Então existe uma série de potências formal para uma aplicação que lineariza $p(x)$ próxima de 0.*

Demonstração. Estamos em busca de um difeomorfismo analítico $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaça a condição de linearização $DR(x)P(x) = R_*p(x)(R(x))$, onde $R_*P = A$ e que satisfaça $DR(0) = I$ e $R(0) = 0$. Supondo que tal difeomorfismo seja real-analítico, podemos expandi-lo em termos de série de potências convergente, portanto, seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, para $x_0 \in U$ e coeficientes a_i reais, temos

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^i = Ix + R^2 + R^3 + \dots$$

Onde cada $a_i(x - x_0)^i = R^i \in \mathbb{W}^i$. Com isso, temos que a condição de linearização acima requer que

$$(Ix + DR^2 + DR^3 + \dots)(Ax + p^2(x) + p^3(x) \dots) = A(Ax + R^2(x) + R^3(x) + \dots)$$

Agora vamos agrupar todos os termos de grau $k \geq 1$ indutivamente.

Para $k = 1$ temos

$$Ix(Ax) = A(Ix) \Rightarrow Ix - A(Ix) = 0$$

Para $k = 2$, temos

$$Ix(p^2(x)) + DR^2(A(x)) = A(DR^2(x)) \Rightarrow Ix(p^2(x)) - A(DR^2(x)) + DR^2(A(x)) = 0$$

O que nos leva que para $k \geq 2$, temos

$$DR^k(Ax) - AR^k(x) + DR^{k-1}p^2(x) + \dots + p^k = 0 \quad (3.5)$$

Onde cada monômio tem grau k .

Agora observemos que por hipótese, os autovalores de A satisfazem a condição de não-ressonância, o que nos dá que ad_A não possui autovalores nulos, portanto, é inversível em $\mathbb{W}^k$, portanto, a equação 3.5 nos dá que

$$\begin{aligned} AR^k(x) - DR^k(Ax) &= p^k + DR^{k-1}p^2(x) + \dots + DR^2p^{k-1} \\ \Rightarrow -[Ax, R^k(x)] &= p^k + DR^{k-1}p^2(x) + \dots + DR^2p^{k-1} \\ \Rightarrow -ad_AR^k(x) &= p^k + DR^{k-1}p^2(x) + \dots + DR^2p^{k-1} \end{aligned}$$

O que finalmente resulta em

$$R^k(x) = -ad_A^{-1}(p^k + DR^{k-1}p^2(x) + \cdots + DR^2p^{k-1}); \quad k \geq 2 \text{ e } R^1(x) = I.$$

O que nos dá condições de gerar uma série de potências que expande R em termos de analicidade e que satisfaz o problema de linearização. $\square$

Agora tomemos $L = \{A_1, \dots, A_k\}$ uma álgebra de Lie formada pelas matrizes reais A_i com $i = 1, \dots, k$ e $\mathcal{L} = \{f_1, \dots, f_k\}$ outra álgebra de Lie, agora formada pelos campos de vetores reais $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $i = 1, \dots, k$.

Teorema 3.5 (Critério de comutação de Guillemin-Sternberg estendido). *Uma álgebra de Lie composta por campos de vetores analíticos em $\mathbb{R}^n$, todos com 0 como ponto de equilíbrio em comum e termos lineares que não se anulam, pode ser linearizada se, e só se, ela comuta com um campo de vetores de Poincaré.*

Demonstração. Relembremos que um campo de vetores de Poincaré é um campo $p(x) = Ax + p^2(x) + p^3(x) + \dots$ que satisfaz

P2. Os autovalores λ_i de A não satisfazem a relação de ressonância dada por

$$\lambda_p = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \quad (3.6)$$

Para inteiros não-negativos k_i tal que

$$\sum_{i=1}^n k_i > 1; \quad (3.7)$$

P3. A envoltória convexa do conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ não contém 0.

Agora, vamos supor que $\mathcal{L} = \{f_1, \dots, f_k\}$ comuta com um campo de Poincaré $p(x)$, ou seja, $ad_p(f)(x) = 0$, para qualquer $f \in \mathcal{L}$. Do teorema anterior, vimos que existe um difeomorfismo no qual podemos escrever $p(x) = Ax$, logo $[Ax, df(x) + f^2(x) + f^3(x) + \cdots] = 0$, onde $df(x)$ é a parte linear do campo f , o que implica que Ax comuta com qualquer termo da expansão de $f(x)$, portanto pela linearidade de ad_A temos $ad_A(f^k) = 0$ para todo inteiro k . Como A é um campo de vetores de Poincaré, ele satisfaz a condição de

3. Linearização de Famílias de Campos

não-ressonância, temos então que $f^k = 0$ para $k > 1$, o que nos dá $ad_A Ax = [Ax, Ax] = 0$ portanto $\mathcal{L}$ é linear, já que f é um campo arbitrário.

Agora se $R(x) = y$ lineariza $\mathcal{L}$, temos que $p(x) = DR^{-1}(x)AxR(x)$ comuta com $f \in \mathcal{L}$. Com efeito

$$\begin{aligned} ad_p f(x) &= df(x)p(x) - Ax f(x) = df(x) \underbrace{dR_x^{-1} Ax R(x)}_{p(x)} - Ax \underbrace{dR_x^{-1} df(x) R(x)}_{f(x)} \\ &\Rightarrow Ax dR_x^{-1} Ax R(x) - Ax dR_x^{-1} Ax R(x) = 0. \end{aligned}$$

Resta observar a identidade de Jacobi. Dados $f, g \in \mathcal{L}$, queremos que $ad_p[f(x), g(x)] = [ad_p f(x), g] + [f(x), ad_p g(x)]$, logo

$$\begin{aligned} ad_p[f(x), g(x)] &= [p(x), [f(x), g(x)]] = \\ &[p(x), dg(f(x))] - [p(x), df(g(x))] = 0 \end{aligned}$$

Se $x = 0$, portanto temos a comutatividade entre um campo de Poincaré $p(x)$ e a álgebra de Lie de campos $\mathcal{L}$. □

Apêndice A

Os Teoremas de Hartman-Grobman

Neste apêndice, apresentamos dois resultados clássicos e fundamentais da teoria da linearização devidos a P. Hartman e D. Grobman [19,20]. Iniciaremos com uma demonstração do Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos, seguindo a trajetória de Castro [7] e Palis & Melo [3], o que nos levará a provar também o mesmo teorema para campos de vetores.

A.1 Os Teoremas de Hartman-Grobman

Definição A.1. *Seja X um difeomorfismo de classe C^k , $X : U \subset E \rightarrow E$. Dizemos que $p \in U$ é um **ponto fixo hiperbólico** se o $DX(p)$ é um isomorfismo linear hiperbólico.*

Eis o enunciado do primeiro resultado importante deste capítulo:

Teorema A.1 (Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos). *Sejam, $X : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^k e $p \in U$ um ponto fixo hiperbólico de X . Seja $A = DX(p) : E \rightarrow F$. Então existem vizinhanças V_p de p em $\mathbb{R}^n$, U_0 de 0 também em $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $h : U_0 \rightarrow V_p$ tais que:*

$$h \circ A = X \circ h.$$

Antes de iniciar a demonstração, adicionaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser vista em Castro [7], na página 198.

Lema A.2. *Seja $A : E \rightarrow E$ um automorfismo hiperbólico do espaço de Banach E , então $\epsilon > 0$ tal que ϕ_1 e ϕ_2 são ambas funções contínuas e limitadas, $\phi_1, \phi_2 : E \rightarrow E$ com constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ , então $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$ são conjugados.*

A ideia do lema acima é basicamente encontrar um homeomorfismo único $h : E \rightarrow E$ que conjugue $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$, ou seja

$$h \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ h.$$

Lema A.3 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas não-negativas e contínuas que para $\alpha \geq 0$ satisfazem $u(t) \leq \int_a^t u(s)v(s)ds, \forall t \in [a, b]$. Então*

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}. \quad (\text{A.1})$$

Demonstração. (Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos)

Primeiramente, vamos supor, sem perda de generalidade, um difeomorfismo f definido numa vizinhança V para outra W de zero no espaço de Banach $E = T_p M$, onde M é uma variedade qualquer e $T_p M$ é o espaço tangente a $p \in M$, com $f(0) = 0$. Tomemos $\epsilon_0 > 0$ tal que $A + \phi$ é conjugado a A no espaço E , para todo A limitado por uma constante de Lipschitz menor que ϵ_0 . Podemos tomar uma vizinhança $B(0, r) \subset V \cap W$ tal que $(A + \phi)|_{B(0, \frac{r}{2})} = f|_{B(0, \frac{r}{2})}$ tal que $(A + \phi)|(B(0, r)^c) = A$, onde ϕ é limitada com constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ_0 . Como consequência da conjugação de $(A + \phi)$ por A em E , temos que existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow E$ que dista finitamente de I tal que $h \circ A = (A + \phi) \circ h$.

Precisamos provar agora que h^{-1} é ponto fixo único de A , o que implica que $h(0) = 0$. Para isso, notemos que como A é isomorfismo hiperbólico, seu único ponto fixo é 0. Isso implica que $(A + \phi)$ possui um único ponto fixo. Se p é ponto fixo de $(A + \phi)$ temos

$$\begin{aligned} h \circ A(h^{-1}(p)) &= (A + \phi) \circ h(h^{-1}(p)) \Rightarrow \\ h \circ A \circ h^{-1}(p) &= (A + \phi)(p) = p \Rightarrow A \circ h^{-1}(p) = h^{-1}(p) \end{aligned}$$

Provando o que queríamos. Agora, restringindo h a uma vizinhança $U := U(0) \subset B(0, \frac{r}{2})$ tal que $U' := h(U(0)) \subset V$. Portanto, para todo $x \in U \cap A^{-1}(U)$, vale

$$h \circ A(x) = f \circ h(x)$$

Provando então o teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos. □

Antes de finalmente enunciar e provar um dos resultados mais pertinentes desse trabalho, precisamos de alguns resultados adicionais que serão utilizados na prova. Assim segue:

Lema A.4. *Seja $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$, com $f(0) = 0$. Seja $L = Df(0) = (Df)_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe um campo $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:*

1. *O campo w tem constante de Lipschitz limitada por K , portanto, o fluxo induzido por w está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;*
2. *$w = L$ fora de uma bola aberta $B(0, r)$;*
3. *Existe um aberto $U \subset V$ tal que $0 \in U$ e $w = f$ em U ;*
4. *Fazendo $w_t = L_t + \phi_t$, existe $M > 0$ tal que $|\phi_t| \leq M$ para todo $t \in [-2, 2]$ e ϕ_1 tem constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ .*

Demonstração. Fazendo $L = Df_0$, temos $f = L + \psi$ onde $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k tal que $\psi(0) = 0$ e $D\psi_0 = 0$. Agora, seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $\beta(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\beta(t) = 1$, se $t \leq \frac{r}{2}$ e $\beta(t) = 0$ se $t \geq r$. Agora, seja $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\rho(x) = \beta(|x|)\psi(x)$ se $x \in V$ e $\rho(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^n - V$. Agora, tomemos um $\delta > 0$ tal que podemos escolher um $r > 0$ de tal forma que ρ seja de classe C^k e seja lipschitziana, o que nos leva a $\rho = \psi$ em $B(0, \frac{r}{2})$ e $\rho = 0$ fora de $B(0, r)$. Tomemos um campo de vetores $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $w = L + \psi$, teremos que $w = f$ em $B(0, \frac{r}{2})$, $w = L$ fora de $B(0, r)$ e w satisfaz a primeira propriedade.

Agora, usando a desigualdade de Gronwall, temos que

$$|w_t(x) - w_t(y)| \leq e^{K|t|} |x - y| \leq e^{2K} |x - y|.$$

Agora, tomando $\phi_t = w_t - L_t$, temos

$$\phi_t(x) - \phi_t(y) = \int_0^t [\psi(w_s(x)) - \psi(w_s(y))] ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |\phi_t(x) - \phi_t(y)| &\leq \delta \cdot e^{2K} \cdot |x - y| \cdot 2 + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \right| \\ &\leq \delta \cdot e^{2K} \cdot |x - y| \cdot 2 + \int_0^t \|L\| |\phi_s(x) - \phi_s(y)| ds. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, temos

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq \delta.e^{2K}.|x - y|.2.e^{\|L\| \int_0^t ds} \leq \delta.e^{2K}.|x - y|.2.e^{2\|L\|}.$$

Pelo lema 1.16, podemos fazer com que ψ tenha constante de Lipschitz menor ou igual a $\frac{\epsilon}{(e^{2K}.2.e^{2\|L\|})}$, sendo ela $> \delta$. Isto implica que $Lip(\phi_1) \leq \epsilon$. Agora, temos que $|\phi_t|$, $t \in [-2, 2]$ é limitada. De fato, se $x \in B(0, r)$

$$|\phi_t(x)| = |\phi_t(x) - \phi_t(0)| \leq \epsilon.r.$$

Agora, se $x \notin B(0, r)$, então

$$\begin{aligned} |\phi_t(x)| = |\phi_t(x) - \phi_t(0)| &= \left| \int_0^t [\psi(w_s(x)) - \psi(w_s(0))]ds + \int_0^t L(\psi_s(x) - \psi_s(0))ds \right| \\ &\leq \int_0^t \epsilon.r ds + \left| \int_0^t L(\psi_s(x) - \psi_s(0))ds \right| \\ &\leq 2\epsilon r + \|L\|. \int_0^t |\phi_s(x) - \phi_s(o)|ds, \end{aligned}$$

Então, novamente, pela desigualdade de Gronwall, existe uma constante $M > 0$ tal que $|\phi_t(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t \in [-2, 2]$. $\square$

Lema A.5. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores, e φ_t seu fluxo. Então p é uma singularidade hiperbólica de $f \Leftrightarrow p$ é ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo φ_1 , de tempo 1 de f .*

Demonstração. Para provarmos a ida, supomos que p seja um ponto fixo hiperbólico do campo f para $t = 1$, temos que, pela versão de difeomorfismos do teorema de Hartman-Grobman, que todo ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo é isolado. O ponto p não pode pertencer uma órbita periódica de período 1. Se isso ocorresse, todos os pontos da órbita seriam pontos fixos para φ_1 , o que contraria o fato de p ser isolado. Portanto, como $\varphi(n, p) = p \forall n \in \mathbb{N}$ e $\varphi(., p)$ não é periódica regular, logo p é uma singularidade isolada do campo φ_1 .

Agora, vamos mostrar que p é uma singularidade hiperbólica. Primeiramente temos que, através da dependência diferenciável em relação as condições iniciais, temos que $\partial_x \varphi$

é solução de $Z' = Df(p).Z$; $Z_0 = I$. Portanto, $\partial_x \varphi(t, p) = e^{tD\varphi_1(p)}$, de onde temos

$$Df_p = \partial_x \varphi(1, p) = e^{D\varphi_1(p)}$$

Então, o o espectro de $\varphi_1(p)$ é dado por $e^{\text{spec}(D\varphi_1(p))}$, o que implica em $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda \in \text{spec}(D\varphi_1(p))$.

Para a volta, se p é singularidade hiperbólica do campo f , então p é ponto fixo de φ_1 . □

Enfim, estamos em condições de provar o teorema de Hartman-Grobman para campos.

Teorema A.6 (Teorema de Hartman-Grobman para campos de vetores). *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 0$ e p uma singularidade hiperbólica de f . Escrevendo $L = Df_p$, então f é topologicamente conjugado a L , em vizinhanças de p e zero, respectivamente.*

Demonstração. Seja $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k . Nos é garantido que $w = f$ em U , numa vizinhança do ponto zero, portanto, a identidade conjuga localmente w e f no aberto U . Sabemos que a conjugação é uma relação de equivalência, portanto, vale a transitividade. Resta provar que os fluxos w_t e L_t são conjugados para todo t real. Como $(Dw)_0 = L$, temos que $(Dw_1)_0$ do difeomorfismo w_1 aplicado a origem é $L_1 = e^L$. De fato, escrevendo $\varphi(t, x) = w_t(x)$, temos $(Dw_t)(x) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}$ como solução de $Z' = Dw(\varphi(t, x)).Z$, com condição inicial $Z(0) = I$.

Sendo $x = 0$ uma singularidade, temos $\varphi(t, 0) \equiv 0$, portanto, a última equação do parágrafo acima fica

$$Z' = Dw(0).Z = L.Z, \text{ para } Z(0) = I.$$

O que implica que $(Dw_t)(0) = e^{tL} \Rightarrow (Dw_1)(0) = e^L = L_1$. Logo, o difeomorfismo $w_1 = L_1 + \phi_1$ possui a origem como ponto fixo hiperbólico, e ϕ_1 como resto de sua derivada L_1 na origem. Sabemos que existe um único homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que dista finitamente da identidade, satisfazendo $h \circ w_1 = L_1 \circ h$. Precisamos mostrar que tal homeomorfismo h conjuga os fluxos de w e L para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $h \circ w_t(x) = L_t \circ h(x)$, o que nos levará, indutivamente, ao fato de w ser conjugado a L por h .

Definimos $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x) := \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ w_t(x) dt.$$

Claramente, H é contínua, e sabemos, pelo lema 4.7, que H dista finitamente da identidade. Agora vamos mostrar que para todo $s \in \mathbb{R}$ vale que

$$H \circ w_s = L_s \circ H.$$

Para fazer essa verificação, temos que mostrar que H é um homeomorfismo, e que a expressão conjugação acima vale pra qualquer s no intervalo fechado $[0, 1]$, pois dado $q \in \mathbb{R}^+$, podemos escrever $q = n + s$ com $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, 1]$. Temos então,

$$H \circ w_q = H \circ w_1 \circ w_1 \circ \cdots \circ w_1 \circ w_s$$

onde cada w_1 é iterado um total de n vezes. Daí,

$$L_1 \circ H \circ w_1 \circ w_1 \circ \cdots \circ w_1 \circ w_s = L_{n+s} \circ H = L_q \circ H.$$

Se $q < 0$ e H possuir inversa, então

$$H \circ w_q = (w_{-q} \circ H^{-1})^{-1} = (H^{-1} \circ L_{-q})^{-1} = L_q \circ H$$

Finalmente, obtendo a comprovação da igualdade.

Seja $s \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} L_{-s} \circ H \circ w_s &= L_{-s} \circ \left(\int_0^1 L_{-t} \circ h \circ w_t dt \right) \circ w_s \\ &= \int_0^1 L_{-s} \circ L_{-t} \circ h \circ w_t \circ w_s dt \\ &= \int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ w_{t+s} dt. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade é decorrente da linearidade de L_{-s} , com s fixo, e que se a composição com w_s estivesse a direita, não poderíamos o por "dentro" da integral. Na última igualdade, usamos a propriedade dos grupos de fluxos de w e L .

Tomando $u = t + s - 1$, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ w_{t+s} dt &= \int_{-1+s}^1 L_{-(u+1)}^s L_{-(u+1)} \circ h \circ w_{u+1} du \\ &= \int_{-1+s}^0 L_{-(u+1)} \circ h \circ w_{u+1} du + \int_0^s L_{-(u+1)} \circ h \circ w_{u+1} du. \end{aligned}$$

Fazendo $v = u + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} L_{-s} \circ H \circ w_s &= \int_s^1 L_{-v} \circ h \circ w_v dv + \int_0^s L_{-u} \circ (L_{-1} \circ h \circ w_1) \circ w_u du \\ &= \int_0^1 L_u \circ h \circ w_u du = H. \end{aligned}$$

Temos, portanto, a continuidade de H e o fato de que ela semiconjuga w_1 e L_1 . H dista finitamente da identidade: dado $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} L_{-t} \circ h \circ w_t &= L_{-t} \circ (I + g) \circ (L_t + \phi_t) = I + L_{-t} \circ \phi_t + L_{-t} \circ g \circ L_t + L_{-t} \circ g \circ \phi_t \\ &\Rightarrow H(x) := \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ w_t(x) dt \\ &= \int_0^1 I + \tilde{g} dt = I + \int_0^1 \tilde{g}_t dt, \end{aligned}$$

Com

$$\left| \int_0^1 \tilde{g}_t(x) dt \right| \leq \int_0^1 \tilde{M} dt = \tilde{M}.$$

Da unicidade provada no lema A.2. temos que $H = h$, que é um homeomorfismo, portanto, h conjuga os fluxos de w e L para qualquer tempo s . $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] CLAU IVO DOERING & ARTUR O. LOPES, *Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [2] HENRI CARTAN, *Differential Calculus*, HERMANN, London, 1971.
- [3] JACOB PALIS JR. & WELINGTON DE MELO, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, 2. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
- [4] JORGE SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1 ed. IMPA-CNPQ, 1979.
- [5] DAVID G. SCHAEFFER & JOHN W. CAIN, *Ordinary Differential Equations: Basics and Beyond*, SPRINGER, Cambridge, 2010.
- [6] M. VIANA & JOSÉ ESPINAR, *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*, IMPA, Rio de Janeiro. ed. 1, 2019.
- [7] MARIANA BATISTELLE, *Estabilidade topológica e fluxos singulares*, UFV, Viçosa-MG, 2019.
- [8] AUGUSTO DE CASTRO JÚNIOR, *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 2008.
- [9] EDWARD NELSON, *Topics in Dynamics I: Flows*, Amer J. Math, New Jersey, 1969.
- [10] GEORGE R. SELL, *Smooth Linearization Near a Fixed Point*, Princeton University Press, Amer J. Math, 1985.
- [11] SHLOMO STERNBERG, *Local contractions and a theorem of Poincaré*, Amer J. Math, 1957.

- [12] ELLEN S. LIVINGSTONE & DAVID L. ELLIOT, *Linearization of Families of Vector Fields*, Journal of Differential Equations 55, St. Louis, Missouri, 1984.
- [13] CARMEN CHICONE, *Ordinary Differential Equations with Applications*, SPRINGER, University of Missouri, Columbia, 2000.
- [14] ELON LAGES LIMA, *Algébra Linear*, IMPA, 7.ed, Rio de Janeiro, 2006.
- [15] K.T CHEN, *Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point*, American Journal of Mathematics, Ed. 85, pág 377-390, 1963.
- [16] S. STERNBERG, *The structure of Local Homeomorphisms, III*, American Journal of Mathematics, Ed. 81, pág. 578-604, 1959.
- [17] STEPHEN SCHECTER, *Notes of Ordinary Differential Equations*, NC State University, MA 732-001, North Carolina, 2013. [Link Here](#)
- [18] M. HIRSCH & C.PUGH, *Stable Manifolds for hyperbolic sets*, Bulletin of the American Mathematical Society, Ed. 75, 1969.
- [19] D.GROBMAN, *Homeomorphisms of systems of differential equations*, Doklady Akademii Nauk SSSR, Ed. 128, pág 880-881, 1959.
- [20] P.HARTMAN, *On local homeomorphisms of Euclidean spaces*, Bol. Soc. Math. Mexicana. Ed. 5, 220–241, 1960.
- [21] HENRI POINCARÉ, *Oeuvres*, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [22] WALTER RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Inc. Ed. 3. Wisconsin, 1976.